Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZ
XXXIII
G
20
NAPOLI

XXXIII
G
20

BIBLIOTECA NAZ
Vittorio Emanuele III
XXXIII
G
20
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

EVCLIDES
ADAVCTVS,
ET METHODICVS.
D. GVARINO GVARINO.

Digitized by Google

EVCLIDES ADAVCTVS
ET METHODICVS
MATHEMATICAQ; VNIVERSALIS
CAROLO EMANVELI II.
SABAVDIAE DVCI PEDEMONTIVM PRINCIPI
REGI CYPRI, &c.

DICATA,

Quæ ne dum propoſitionum dependentiam, ſed & rerum ordinem obſeruat. Et complectitur ea omnia, quæ de quantitate tum diſcreta, tum continua abſtracta ſpeculari queunt. Reſectis ſuperfluis demonſtrationibus, & requiſitis omnibus profuſè coadunatis.

Singuli quoque Tractatus nouis propoſitionibus adaucti ſunt, & aliqui etiam ex integro adornati. Omneſque tùm figuris, tùm verbis clarè, dillucidèque propoſiti.

AVCTORE

D. GVARINO GVARINO

MVTINENSI C.R. THEATINO,

Philoſofo, Theologo & eiuſdem R. C. Mathematico.



AVGVSTÆ TAVRINORVM, M DC.LXXI.

Typis Bartholomæi Zapatæ Bibliopolæ S. R. C.

Superiorum permiſſu.

NAPOLI

Digitized by Google

REGALIS CELSITVDO.

FOLIA hæc, quæ Vniuerſalis Mathematicæ limpidiſsimas demonſtrationes candidis ſinubus concepere, inſolubili obligatione deuincta, & mole officiorum coacta, ſub auguſtiſsimo nomine R. C. V. in ſcenam literariam prodire gliſcunt. Illi enim glorioſiſsimo ſuæ magnitudinis iubare obſcura huius voluminis incunabula irradiare iuuabit, quòd ab ea facultate deriuet, quæ nobilis inter alias Magnorum Principum limina familiari terit inceſſu, & modo ad pedes R. C. V. ſe obſequioſa prouoluit in tributum profuſa illius maieſtatis, quæ omnigenæ virtutis, & ingenuæ, ne dum in ſolidiſsimum columen, & liberaliſsimum Mæcenatem ſe ſe magnanimo offert ſubſidio: ſed inſuper Thaumaturga Mathematicorum miraculorum inſigni, verèque Regali architectura coruſcat: Talem etenim illam plaudenti conclamant aſpectu Venariæ amænis inſtructæ viridarijs, ſubſtructionibuſque ſuperbis turrita regius voluptatum, deliciarumque thronus, auguſtiſsima Palatia, Ædes ſumptuoſiſsimæ, aditus triumphales magnarum vrbium, aliaque permulta ſua admirabili protoplaſtice excogitata, & ad artem vltimam ſolis nutibus, aſpectuque directa.

Excipiat itaque R. V. C. pacato vultu, ſerenaque clementia illam; quam toties in concipiendis ſublimibus idais vaſto ingenij ſui ſinu fouit matheſim, & in ea adornanda exanthlatos laboris mei conatus; qui ſimul opportunitatem mihi aperiunt, & me, & totius voluntatis mea dicatiſsimas vires in hoſtiam obſequij, deuotique cultus conſecrandi. Dum ad terram demiſſo vultu profundiſsimum in flexum deciduus regales veſtros poplites humillimus adoro.

V. R. C.

Humillimus, Obſequentiſs.^mus & Oblig.^mus Seruus

D. Guarinus Guarinus C. R.

BENEVOLO LECTORI

CVM inter illos, qui in elementa Euclidis deſudarunt, nullum intuear, vnico conſarcinate volumine, quæ ad quantitatem ſub genere inueſtigandam faciunt, ſecutus ſęculi genium, quod centuriat, vt plurimùm, & florilegia condit, putaui nequaquam me frugem perdere; ſi huic muneri vniuerſaliùs inſeruirem, & Mathematica rerum exordia ex omni parte rotunda, & contornata exiberem. Siquidem ex meo labore didici, cuius pretij, cuius vtilitatis id operis emergat; quod ea omnia, quæ Mathematicas luces, & euidentias in vnicum lucis fontem, adeoq; ſolem ne dum tumultuaria collectione aglomeret: ſed etiam ordinato agmine diſponat, in ſerieſq; ſuas naturali conſecutione diſtinguat præcipué illis, qui nullo Mercurio tramitis indice, aut duce audent ſe huic ſtudio conſignare, & admodùm dificilem prouinciam in ſuam ſarcinam traducere. Pone enim me tibi offerre pulcherrimam, eamq; vtiliſſimam demonſtrationem, quæ tamen, aut Pergæi, aut Archimedis, aut Pappi rariſſimos libros ad ſui euidentiam expoſcat, quos, aut nunquam perluſtraueris, aut ne quidem conſequi te poſſe fidas: quam hauries lucem, aut quam ſcientiam adipiſceris? aut potiùs quibus tenebris, qua caligine non confuderis? Ideoq; cum tota Mathematica ſit alligata in vnumq; corpus naturali lege deuincta: quod diuidi non patiatur ſine totius detrimento, ſi quis totum non colligat, nihil colligit, & frugiperda nixu monſtrum nulla euidentia animatum in malè deſtinatos trahit amplexus.

Scio quidem Herigonium Pariſijs, & Schotum in Belgio curſus Mathematicos eruditiſſimos cudiſſe: ſed hic oſtenſiones ſæpius ſolis operibus occupatus ex induſtria præterit, ille multis libris diuerſoq; tempore editis, vt rarus ſit ille, qui in ſuum commodum congerere poſſit, inſtitutum proſequutus eſt. Quamobrem cum nullus in Italia huic locubrationi ſe dederit, & exteri, aut nullatenùs obtineri; aut non ſine magno pretio negotioq; à ſuo cęlo in noſtras regiones peregrinari cogantur; non ingratum reipublicę literarię fore ſuſpicatus ſum; ſi illud laboris, quod meis priuatis profectibus deſudaram, publici iuris facerem: Maximè quia in illud, quod omnes huius rei ſcriptores poſthabuerunt, pręcipuè animum fixi; vt propoſitiones ne dum in ſeriem, quoad earum, vt aſſolet, deriuationem, ſed etiam quoad doctrinæ dignitatem, rerumq; naturalem ſedem digererem: & à ſuperfluis, & quæ nulllus vtilitatis erant expiarem; nullas aduenas rogarem aſſertiones in veritatis vadimonium; doctrinam in ſe ſe redeuntem, ſibiq; ipſi famulam ab omni alieno iure abſoluerem, vt qui legit nihil aliud ad perfectum captum deſideret, quæ omnia non ſine eluctamento obtinui. Odopęium me præſtiti; nulliſq; parcens verbis, aut figuris, amfractus, alioquin ſenticoſos, petricoſoſq; ab omni offendiculo immunes in vias veluti conſulares aperui: Et ne aliquis ſubroſtratius mihi obmurmuret, in faſtidiumq; verſus torcularibus incaſſùm defatigatis miſereatur; non omnia ex penu rurido antiquitatis prolata; lapidem, & nos protulimus, & antiquos Matheſis limites aliquantùm ſubmouimus. Herculeos enim terminos præterlabenti ingenio nouæ doctrinarum regiones, illęq; feraces, & vtiles detectę. Multę oſtenſiones, aut quod nullę extabant, aut quòd proniores exoptarentur inſtructę; quidam tractatus denuò magna ex parte adornati; aliqui ex integro conditi, paucis non additum. Quæ omnia aſteriſmis prenotaui, aut ſaltem plurima (in paucis enim ex incuria pretermiſſum) Scilicet ne videar alienis pennis

amici-

amiciri malè ominata cornix, & de cęterò, vt noſtra cautiùs excipiantur, tanquam nulla auctoritatę ſuffulta, & ſi aliquid erratum fuerit, aut in meliùs fęliciori ingenio reſtituatur, aut ſaltem ab humanitate lectorum meę imbecillitati condonetur. Noui hominum non vnam eſſe indolem; cuicunq; neceſſe eſt ſuos ante ſe cernere antiſtomos, ſuos audire antiſthtoſos. Vateſq; mihi ſum eos, qui omne encęniſmum ſtomacantur vindices annoſitatis quęſituros in ſcirpo nodum, vt quid culpent, nanciſcantur. Sed faciant per me; licet. Talibus infortunijs aſſueui. Meus, etenim liber, quem inſcripſi *Placita Philoſofica*, & Pariſijs cuſioni dedi anno 1665. iam pridem in hoc detrimentum, & quidem à limine inceſpitauit. Anno enim 1667. Ioannes Bonifacius Bagatta, quondam meus auditor Curſum Philoſoficum edidit, qui ne dum philoſofantium more multa in quęſtionem protrait: ſed videtur maiori nixu me perſequi. Omnia veterat. Auctores plurimi ſaltem aliqui anonymi iam ſententias omnes meas propoſuère, dicant, vel ſaltem accinant, vel etiam pænitùs non alludant, verum ſemper eſt idem iam protuliſſe. In meas aliquas rationes inuehitur non tamen in omnes feróceſcit: ſed nec quidem earum meminit, vt ſcilicet credatur funditùs omnia proſtrauiſſe. Sententias non ſemel meas amplectitur; Sed quaſi in occulto eas diuerſis verbis perſonatas proponens, quaſi piaculum foret, me aperto vultu ſequi, & aliquando in verba Magiſtri iuraſſe. Sed quod diſſimulare nequeo, me vocar in memetipſum, & cogit contra fas in me, & iniuſtè quidem, pugnare. Et ne videar in ventos fari; hoc ſiuę aliud exemplum in ſpectaculum producam. Ipſe enim Sec. 2. de præd. p. 77. n. 14. in reſp. vbi tantùm aliqua mea argumenta oſtendentia Modum pręaicamenti dignitate non potiri ſubuertere nititur, dicit. *Deinde ſecundùm communem ſententiam, quam, & ipſe Guarinus ſuſtinet actio, & paſſio ſunt diuerſa prædicamenta, & tamen*. & cæt. Intuère an actionem, & paſſionem in diuerſa pręaicamenta ſecerni, cum communi fatear, & lege meam diſput. 12. Exp. 2. lit. B. pag. 105. probat. 2. vbi ex eo quod *aliqua ex prædicamentis non diſtinguantur inuicem, vt actio, & paſſio* arguo. *Diuiſionem entis in decem prædicamenta potiùs per modum exempli ab Ariſtotele fuiſſe traditam; quam quod exiſtimauerit eam eſſe bonam, & adæquatam*. Et ibidem conc. 2. aſſero. *Quæ verè, & certè prædicamenta appellantur ſunt ſubſtantia, & accidens*. Si itaq. duo tantùm prædicamenta ſtatuo ſubſtantiam, & accidens, qui ſuſtineo actionem, & paſſionem prædicamenta quoq; multiplicare? Vidiſti ne: vt ſua confirmet, quàm me verſatilem efficiat? Sed & patere aliud huius rei ſpecimen adhuc proponi. Concluſionem ſtatuit diſ. 2. ſec. 2. in 1 L. phiſic. pag. 54. conc. 2. n. 11. *Formam materialem ſubſtantialem non eſſe entitatem diſtinctam à materia (ſed eſſe actualem terminum ſubſtantialem intrinſecùm eiuſdem materiæ, à quo materia taliter modificata, & affecta, & terminata conſtituitur in determinata phiſica ſpecie.) Fitq; potens ad conſeruanda ea omnia, quæ ad totalem conſeruationem compoſiti ſpectant*. Deinde ſubinfert. *eam etiam aliquo pacto defendit Guarinus aſſerendo eam eſſe puram potentiam*. Sed heus ſequere; ne quęſo mancha proferas effata, quid pono diſ. 3. phiſicæ conc. 1. pag. 119? Non ne hic affirmo; formam de ſe non habere vllam entitatem: ſed eſſe puram potentiam? quod deinde declaro pag. 200. l. D, conc. 2. *Dicimus*, inquiens, *formam eſſe puram potentiam; quia agens naturale per ſuas operationes nihil aliud facit; niſi imprimere quandam potentiam in materia per quam efficitur ſibi principium ſuorum accidentium conſeruatiuum, & reparatiuum, & etiam omnium aliarum operationum*. Tolle ergo à tua Theſi verba quæ parentheſi clauduntur, veluti ea, quæ ex eo quod forma dicatur. naturali lege ſequantur, & ipſiſſimam defendam opinionem; non aliquo pacto imitabor: Sed quid deinde in mea argumenta buccinas? ad

quid immeritò me cogis? vt tibi videaris efficaciſſimum in me vibraſſe argumentum in quis. *Si agens naturale non haberet virtutem producendi ex nihilo*. Hoc enim ad confirmandam propoſitionem aſſumpſi. *neque formas accidentales poſſet producere, quod tamen nec ipſe Guarinus aſſerere poteſt*. Sed cur accidentia ab agente non produci affirmare nequeo? Non ne diſp. 14. logicæ exp. 5. pag. 117. accidens ab alijs accidentibus edi per modificationem diuerſam probaui? Non ne eadem diſp. exp. 4. & diſp. 6. phiſicæ exp. 10. conc. 1. pag. 124. affirmaui accidentia de ſubiecto in ſubiectum peregrinari, & per communicationem produci. Non ne diſp. 5. de gener. & corrupt. exp. 4. conc. 2. effectum formalem ab efficiente diſtinxi, & poſſe accidens in ſubiecto commorari abſque eo, quod vllum ſui inditium præberet in mouendo ſubiecto. Igitur, & ſi aliqua cauſa denudata accidente videatur. V G. aqua feruida frigore; frigus tamen latens in ſe, vel in minimo gradu tuetur quoad entitatem, quamuis non prodeat in frigefactionem; quod remota cauſa efficatiori calorem extraneum de ſe euaneſcentem vt dico diſp. eadem exp. 2. in reſp. ad arg. 2. facilè deſijcit, & in priſtina ſe reſtituit. Semper itaq; exeret accidens, ex aliquo gradu ſui; cum nunquam à materia elliminetur. Vbi eſt ergo ex meis principijs formarum accidentalium ex nihilo prolatio ſiue in compoſiti proprios ſinus, ſiue in alienos?

Hæc autem non dixerim; quod virum in crimen vocem, quaſi ex inſtituto, & arte ſubdola hæc mihi inuſſerit; neq; enim candidos eius mores ea ſuſpicione fædare fas, & honeſtum permittit: Sed quod aut tædio victus, vel agendorum machina preſſus, non potuerit totum volumen perluſtrare. vel quod ſcriptorum meorum, quos extemporaneos, & ſubleſtos eccepit aliqua fortè poſitione deluſus iudicauit eamet typis mandaſſe. Quid quid cauſę id fuerit non potuit in adeo religioſo viro; quod in me actum eſt, non niſi ab honeſtatis amore, ſtudioq; veritatis excludi.

Debui tamen meis non deeſſe; beneuoloq; lectori dementum, improuidamq; allucinationem aperire, ne quis putaret mea tela mihi inimica, & in mea præcipitia ædificaſſe. Contineat ergo fidem ſuam quis quis æquus iudex in illum Curſum Philoſoficum inciderit; donec, & noſtra euoluat, & quod mihi tribuitur, meum eſſe dignoſcat: auritus vtrinq; ſit, nec reum damnet, donec in ius compellat, & denunciatos lapſus ipſa re intueatur.

Interim hunc Librum eccipe, in quo non multæ opiniones: omnia ſolidiſſimis demonſtrationibus illuſtrata, ex quò facilè dignoſces an in Placitis Philoſophicis adeo inconſtanti voce vibriſlare potuerim, & alternatione tam continuata ludere, interim dum rerum menſuras, & Symbolizationes ſtupendas eccipis Diuinam artem admirari non intermittas: qui omnia trutina examinauit, lanceq; ſuæ omnipotentiæ, vt ſemper admirabilis dignoſceretur appendit.

Digitized by Google

LIBRVM hunc, cui titulus Euclides adauctus, & methodicus à doctiſſimo Patre D. Guarino Guarino conſcriptum vidi iuſſu Reuerendiſſimi P. Magiſtri Thomæ Camotti Generalis Inquiſitoris Taurinen. in eoq; nihil, quod orthodoxæ religioni, vel bonis moribus aduerſetur, deprehendi: quinimo pręclarum hoc opus omnibus matheſeos ſtudioſis vtiliſſimum, & publica luce digniſſimum cenſeo. Datum in Collegio Societatis Ieſu die 31. Martij 1671.

Franciſcus de Malines Societatis Ieſu
in Collegio Taurinenſi ſtudiorum Præfectus.

EGO infraſcriptus Sacræ Theologiæ Lector de mandato Reuerendiſſimi Patris F. Thomæ Camotti Inquiſitoris Taurini diligenter perlegi opus, cui titulus eſt, Euclides adauctus, & methodicus ab Adm. Reuerendo Patre D. Guarino Guarinio Ordinis Clericorum Regularium conſcriptum, & elaboratum, & nihil in eo animaduerti Sanctæ fidei, aut bonis moribus aduerſum; Imo omnia in eo contenta perutilia fore Reipublicæ literariæ, & Mathematicarum artium profeſſoribus. In quorum fidem, &c. Datum in Conuentu S. Dominici de Taurino die 20. Martij. 1671.

F. Petrus Martyr Rubeus Ord. Præd.

Imprimatur.
F. THOMAS CAMOTTVS Ord. Prędicatorum Inquiſitor Taurini.

EVclidem Methodicum Adm. Reu. P. Guarini Guarini ſedulò euolui. Euclides ipſe eſt ſi ſpo-dexioo poritatem, acumen, neruos eſtimauero; nec ipſe tamen, ſi doctrinæ ordinem, copiam, iucunditatem. Tam multa, noua, pulcherrima acceſſere, vt ſibi admodùm blandiri queat Euclides Iconem ſuum, hactenus rudem, ac ſalebroſum, iam tandem accuratiſſimâ viri, verè viri induſtriâ abſolutiſſimè, reformatum. Promus condus ipſe eſt Mathematicę vniuerſæ, totaq; exhauritur Geometria: de numeris numeroſiſſimè, deq; dimenſionibus ſupra humani menſuram ingenij. Nec modò latet in eo quicquam Patrijs legibus oneroſum: Quin totum tantum opus eſt: vnde maximum ſint habituræ, & literaria, & Politica Reſpublica incrementum. Ergò ne quæſo publica fraudetur luce purgatiſſimis luminibus volumen micans. Ita ſentio. Taurini 4. Aprilis. 1671.

Bartholomæus Torinus vidi de mandato Illuſtriſs.
& Excellentiſs. D. Magni Cancellarij.

Permittitur imprimi.
BVSCHETTVS.

IVſſu A. R. P. D. Petri Pauli Nobilioni Præp. Generalis noſtræ Religionis Euclidem Adauctum, & Methodicum à R. P. D. Guarino Guarino compoſitum diligenter perſpeximus, & cum nihil in eo deprehenderimus, quod catholicę Religioni, aut bonis moribus aduerſetur: imò potiùs tanta diligentia, ac ingenio elaboratum vt nihil ad perfectionem ſumpti argumenti deſiderari videatur. Ideo vt typis excuſſus in publicam lucem prodeat non ſolum digniſſimum putamus, verùm, & neceſſarium, tam pro Mathematicarum artium profeſſorum vtilitate, quàm vt ab iiſdem collatus cum eiuſdem auctoris Philoſophia iam impreſſa ipſius ingenij fæcunditas acumen, & profunditas agnoſcatur. Datum Taurini in domo S. Laurentij die 3. Aprilis 1671.

D. Amedeus Romagnanus C. R.

D. Carolus Saluaticus C. R.

D. Gaetanus Garimbertus Præpoſitus Generalis Clericorum Regularium.

HOc opus, cui inſcriptio Euclides adauctus à D. Guarino Guarino noſtræ Religionis Theologo Sacerdote compoſitum, & iuxta præfixam aſſertionem patrum, quibus id commiſimus approbatum, vt typis mandetur, quoad nos ſpectat, facultatem concedimus. Datum Romæ die 30. Iunij 1671.

D. Gaetanus Garimbertus Præpoſitus Generalis Cl. Reg.

Locus † Sigilli.

D. Antonius Maria Rimanus Secret.

INDEX

Tractatuum & Expenſionum totius operis

Vt id, in quo erratum ſit ſingulis tractatibus, expenſionibuſque pateret, faciliorque euaderet correctio; hic errores aliquos, quos in relegendo potui aduertere, emendaui: alios, qui fortè me præterierunt, tuæ humanitati, & beneuolentiæ relinquo.

TRACTATVS I.

De quantitate continua.

1 EXpenſio. In quo conſiſtat conceptus quantitatis in genere, & in quot ſpecies ſecernatur.
2 An aliquod argumentum Mathematicum oſtendat quantitatem ex punctis conſtare.
3 An aliquod argumentum Mathematicum oſtendat quantitatem ex punctis non conſtare.
4 Puncta infinita in quantitate an admitti debeant.
5 In quantitate partes infinitæ capacitatis virtualis ſeu mentalis capaces ſunt.
6 An partes quantitatis Phyſicam diuiſionem in infinitum ſubire poſſint.
7 Quid ſit punctum Phyſicum & reale.
8 Quæ ſint Mathematica indiuiſibilia.
9 An datis indiuiſibilibus, illis poſſint eſſe obiectum Mathematicæ.

TRACTATVS II.

De quantitate diſcreta.

1 EXpenſio. Quid ſit vnitas numerica.
2 An vnitas, numeruſque diſtinguantur realiter à re in qua ſunt.
3 An ratio indiuiduationis conſiſtat in differentia aliqua, per quam plurificetur.
4 An vnitas numerum conſtituat.
5 An vnitas, numeruſque preſcindant perfectè à naturis numeratis.
6 An poſſit dari numerus infinitus.
7 An numerus eſſentiam conſequatur.

TRACTATVS III.

De Mathematica & eius affectionibus.

1 EXpenſio. De obiecto Mathematicæ, eiuſque abſtractione.
2 De Mathematica.
3 De titulis Mathematicis.
4 De Mathematica inſtructione.
5 De illis, qui ſtudiis Mathematicis operam nauant.
6 De Principijs vbi def. 8. l. 48. ab'dele & l. 27. vdos lege duos.

TRACTATVS IV.

In primum librum elementorum.

1 EXpenſio de triangulis conſtituendis.
2 De lineis ſecandis.
3 De linearum ſe tangentium ſitu.
4 De proprietatibus triangulorum
5 De comparatione triangulorum ad inuicē.
6 De ſitu linearum, nec ſe ſecantium, nec ſe tangentium.
7 De parallelogrammis & trapeziis.
8 De triangulorum cum parallelogrammis trapeziiſque parallelis conſtantibus comparatione.

TRACTATVS V.

In ſecundum librū Euclidis, de æquipotentia linearum

1 EXpenſio. De Principiis huic libro inſeruientibus
2 De potentiis linearum diuerſimodè ſectarum ad æquanda ſuorum ſegmentorum rectangula.
3 De potentia laterum triangulorum.
4 De reperiendis æquepotentibus lineis.

TRACTATVS VI.

In librum 3. Euclidis de circulis.

1 EXpenſio. De Principijs.
2 De punctis centri & contactuum.
3 De ſegmentis circulorum.
4 De lineis intra circulum ductis.
5 De lineis circulum tangentibus exteriùs
6 De angulis in circulis exiſtentibus.
7 De Peripherijs.
8 De rectis circulo inſcriptis, & circumſcriptis quoad potentiam ipſarum.

TRACTATVS VII.

In lib. 4. elementorum de inſcriptione & circumſcriptione figurarum in circulo.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De mutua circuli & quadrati inſcriptione & circumſcriptione.
3 De mutua circuli & quadrati inſcriptione & circumſcriptione.
4 De pentagoni & circuli mutue inſcriptione & circumſcriptione.
5 De exagoni, & quindecagoni in circulo inſcriptione.

TRACTATVS VIII.

De Arithmetica ſimplici integrorum numerorum.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De integrorum numeratione.
3 De integrorum collectione.

Digitized by Google

I N D E X

4 De ſubductione integrorom.

5 De numerorũ integrorum multiplicatione

6 De integrorom numerorum diuiſioue.

7 De probationibus.

TRACTATVS IX.

Pars 1. in 5. Euc. lib. de proportionum notione.

1 EXpenſio. Quid ſit ratio.

2 In quantitate quænam ſint proportionis notiones?

3 Quænam quantitates proportionem conſequantur (pr.c.15.multiplicatum *lege* improportionatum.

4 De diuiſione rationum.

5 De rationum compoſitione.

6 Quæ quantitates proportionem conſequantur & quam obtineant?

7 De modis arguendi in proportionibus.

Pars 2. De proportionib. in genere.

1 EXpenſio. De ſimilitudine multiplicium quantitatum

2 De proportione ad vnicam quantitatem relata.

3 De plurium quantitatum, ad plures diſſimili comparatione.

4 De modis arguendi in ſimilitudine proportionum.

TRACTATVS X.

In 6. lib. Euc. De proportione quantitatis continua.

1 EXpenſio. De principiis huic tractatui inſeruientibus.

2 De proportione laterum triangulorum.

3 De reciprocatione laterum in figuris.

4 De lineis proportionaliter ſecandis.

5 De æquipotentia linearum.

6 De proportione duplicata & compoſita figurarum reſpectu laterum homologorum.

7 De ſimilium figurarum notione & effectione.

8 De ſimilium figurarum additione & ſubductione.

9 De laterum figurarum proportionali potentia.

10 De proportionibus circuli & partium eius.

TRACTATVS XI.

In 7. lib. Euc. Pars 1. De proportionibus numerorum in genere.

1 EXpenſio. De principijs.

2 De partibus numerorum alterum menſurantium (pr.10.l.11.ducnarios lege ternarios.

De proportione numerorum (vbicunque reperies viciſſem lege viciſſim. in ipsa p. 17. multiplicantes lege multiplicati.

4 De minimis, primiſque numeris.

Pars 2. De ſpeciali numerorum proportione.

1 EXpenſio De principijs.

2 De minimorum numerorum proportionibus.

3 De proportionibus numerorum non primorum.

4 De numeris planis, & ſolidis.

5 De quadratis & cubis(in ipſa pr.1.3.& rurſus 1.9. duplicatam lege triplicatam (p.23.1.9.vbi 9.1.6.

TRACTATVS XII.

1 EXpenſio. De principijs.

2 De commenſurabilibus quantitatibus.

3 De comparatione linearum rationalium & irrationalium.

4 De inuentione linearum rationalium.

5 De Binomijs lineis.

6 De lineis Apotomis.

7 De irrationalibus medijs (p. 26.1.22. quadrata lege quadrangula.

8 De irrationalibus, quæ naſcuntur à medijs.

9 De lineis in partes commenſurabiles & incommenſurabiles & omnino irrationales ſecandis.

10 De irrationalibus ſimpliciter.

11 De irrationalibus, quæ ex irrationalium ſimplicitem additione, vel ſubductione reſultant.

12 De comenſurabilibus ad lineas irrationales.

TRACTATVS XIII.

De numeris proportionalibus Pars 1.

1 EXpenſio, De minutiarum proportionibus.

2 De fractionum valore.

3 De fractorum numerorum additione.

4 De minutiarum ſubductione.

5 De fractorum multiplicatione.

6 De minutijs diuidendis.

7 De minutijs minutiarum.

Pars 2. De numeris proportionalibus inueniendis.

1 EXpenſio De Inueniendo datis tribus quarto proportionali (pr.3.exemplum erratū.

2 De probatione regulæ aureæ.

3 De regula trium inuerſa (in exordio l. 26. vbi ſecundæ lege primæ.

4 De regula aurea compoſita.

5 De numeris æquè potentibus.

6 De radice quadrata perquirenda & media proportionali vtrinque perſcrutando datis duobus (pr.22.l.51.vbi 1600. lege 2200.

7 De radice cubica, duobuſque numeris medijs proportionalibus.

TRACTATVS XIV.

De proportionibus numericis continuis.

1 EXpenſio. De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.

2 De ſummandis Geometricis proportionalibus continuis.

3 De proportione Geometrica propaganda.

4 De proportionalibus in Geometrica proportione interſerendis.

Pars 2. De proportione Arithmetica continua.

1 EXpenſio. De proprietatibus Arithmeticæ proportionis continuæ.

2 De proportionalibus Arithmeticæ proportionis in vnam ſummam colligendis.

3 De proportione Arithmetica propaganda.

4 De proportione Arithmetica interſerēda.

Pars 3. De proportione Harmonica continua.

1 EXpenſio De proportione Harmonica inuenienda, & aliquibus eius proprietatib.
2 De proportione Harmonica continuanda.
3 De proportione Harmonica interſerenda.
4 De comparatione proportionum.
5 De maxima & minori Harmonia.

TRACTATVS XV.

De linearum, ſegmentorumque proportionibus.

EXpenſio De linearum proportionali inuentione in proportione Geometrica.
2 De proportionali linearum additione.
3 De linearum diuiſione.
4 De proportione linearum Arithmetica.
5 De proportione linearum muſica.

TRACTATVS XVI.

De linearum progreſſione Geometrica. Pars 1.

1 EXpenſio 1. De principijs.
2 De progreſſionum terminis inuicem cōparatis, & differentijs.
3 De ſerie linearum proportionalium inuicem comparatarum (pr. 3. l. 8. quadrata lege rectangula.
4 De progreſſionis termino.

Pars 2. De linearum progreſſione Harmonica.

1 EXpenſio. De progreſſionis Harmonicæ continuatione.
2 De comparatione vnius ſeriei harmonicæ ad aliam.
3 De interpoſitione Harmonicorum terminorum.
4 De terminis inuicem comparatis, & differentijs.
5 De progreſſionis Harmonicæ extremo (Prop. 13. l. 1. Nam *lege* non.

TRACTATVS XVII.

De proportionalitatibus Rationum.

1 EXpenſio. De principijs def. 3. l. 11. ab lege A. B.
2 De proportionibus, ad denominatores collatis, & ad terminos.
3 De proportionum compoſitione.
4 De proportionum ſimilitudine commotatis terminis.
5 De proportionum dialectica.
6 De proportionum algorithmo.
7 De proportionum ſimplicium continuatione.

TRACTATVS XVIII.

1 EXpenſio. De circuli deſcriptione atque menſura (Pr. 3. l. 55. vbi 28049. lege 230400 & l. 56. vbi 14223690. & l. 142831490
2 De circuli ſegmentis in figuram flexam accomodandis.
3 De linea ſpirali.
4 De linea quadratrice (pr. 19. l. 18. radij dele.
5 De linea Ellipſis (Pr. 25. l. 14. qua adde O.
6 De linea Conchili.
7 De lineę Ciclicæ deſcriptione.

TRACTATVS XIX.

De Angulis.

1 EXpenſio. De baſi triangulorum, atque lateribus in vnicum verticem conſpirantibus (Pr. 1. l. 25. apud A adde & 1. albo.
2 De triangulis quoad angulos ſecundùm rationem datam conſtituendis.
3 De angulis quoad latera ſecundùm rationem datam conſtituendis.
4 De angulis in figuris rectilineis.

TRACTATVS XX.

De lineis circulo circumpoſitis.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De lineis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt (pr. 1. corol. l. 1. totus adde quadratus, & pr. 3. coroll. l. 1. Z. fria adde quadrea. pr. 4. l. 54. & 58. albus lege niger.
3 De proportione laterum figurarum circulo inſcriptarum cum diametro.
4 De circulo inſcriptis, quæ figurā non conſtituunt.
5 De ſinubus, chordiſque inueniendis ſine extractione radicis quadratæ.
6 De reperiendis ſinubus aliquibus ſine diuiſione.
7 De tangentibus, & ſecantibus.

TRACTATVS XXI.

De logarithmis.

1 EXpenſio. Cur arithmetici proportionales geometricis vniantur.
2 De ſerie facili geometricorum reperienda, cui Arithmetica deſeruiat.
3 De arithmeticis proportionalibus reperte Geometricorū ſeriei copulandis (pr. 16. Cor. 1. 5 l. 47. l. 58. vbi 10009. lege 100090.
4 De logarithmis in tabulas ſinuum tranſferendis (pr. 17. l. 20. vbi 34150 : 4. adde 49.
5 De tabulis ordinandis, & logarithmis tangentium addendis.
7 De logarithmis numerorum abſolutorum.

TRACTATVS XXII.

De interſectionibus planorum.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De linearum cum planis habitudine.
3 De planorum interſectionibus, cuius pr. 18. poteſt intelligi de quocunque angulo.

TRACTATVS XXIII.

De ſphæra contactibus, & ſectionibus in genere. Pars 1.

1 EXpenſio de principijs.
2 De ſphæræ ſito.
3 De poli, axe, diametris, centroque ſphæræ.
4 De circulis maximis & minoribus.
5 De circulis minoribus parallelis.

Pars 2. De interſectionibus maximorum circulorum ad inuicem.

1 EXpenſio 1. De principijs.
2 De angulis triangulorum ſphæricorum.

3 De

Digitized by Google

3 De cruribus ipſorum, & eorum ſubtenſis.
4 De angulorum crurumque mutua dependentia & relatione generica.
5 De angulorum & laterum ſpecfies dependentis.
6 De ſpecie laterum & angulorum cognoſcenda. (In ipſa pr. 26. duo lege ſi duo & l. 3. dele ſi Coroll. 1. l. 6. tertius lege vnus & 10. ſimul lege ſeorsim.
7 De caſu normalis in triangulis ſphæricis.

Pars 3. De maximorum circulorum & minorum in ſphæra contactibus & interſectionibus.

1 EXpenſio. De contactibus minorum circulorum.
2 De circulorum maximorum & minorum interſectionibus proportionalibus & æqualibus.
3 De circulorum maximorum & minorum interſectionibus inæqualibus & diſſimilibus (pr. 29. l. 15. Z I V Z P V & Z Q V. lege X A S X B S & X C S & pr. 32. l. 14. & per lege ſed qui per.
4 De partibus quæ ab interſectionibus maximorum circulorum fiunt nullà proportionem dicentibus nec inuicem nec cum diametris ipſorum circulorum (in ipſa pr. 34. vtrique lege alicui & pr. 27. l. 33. maius lege minus & in pr. ipſa l. 1. plana lege plani.

TRACTATVS XXIV.

De ſectionibus conicis.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De Diametro.
3 De Parametro.
4 De Tangentibus.
5 De interceptis diametri portionibus inter contingentem & alia puncta in ipſo impreſſa.
6 De Vmbelicis.
7 De rectis inclinatis à contactibus ad vmbelicos.
8 De Diametris ſecundis.
9 De ſectionum æqualitate.
10 De parallelis ad diametrum ſectionis.
11 De Aſympcoto Hyperbolarum (p. 43. l. 77. alterno V A L lege externo P A R.
12 De lineis in ſectionibus vtcumque ductis applicatas ſeu parallelas ſecantibus.
13 De ſimilitudine figurarum (pr. 54. l. 20. ſemiparametrum adde 3 4. vt ſemidiameter C A ad ſemiparametrum.
14 De deſcriptione vniuerſali ſectionum.
15 De circumſcriptione figurarum conicarum.
16 De parabolis ſpecialiter deſeribandis (pr. 63. l. 36. intra lege iuata.
17 De Hyperbolarum particulari deſcriptione (pr. 64 l 5. proportionalis adde, & fiat vt R ad illam mediam, ſic A D ad, & lin. 8. portio lege proportio.
18 De deſcriptione particulari ellipſium (pr. 68 & conuertendo lege permutando.
19 Sectiones omnes deſcribere ope parallelogrammi.
20 De tranſſumtione figurarum conicarum à circulo.
21 De mutua figurarum tranſſumptione.

TRACTATVS XXV.

De ſectionibus corporum conicorum per planas ſuperficies.

1 EXpenſio. De ſectione coni cuiuſcumque per planas ſuperficies.
2 De confectionibus in lineam deſinentis.
3 De ſectione ſphæroidis per planas ſuperficies.
4 De ſectionibus conoidis paraboliei.
5 De ſectionibus conoidis Hyperbolici.
6 De ſectionibus Cylindrorum per planas ſuperficies.

TRACTATVS XXVI.

De Proiectionibus Pars 1. De Orthographia.

1 EXpenſio Quid & quotuplex ſit proiectio.
2 De Orthographia partium ſuperficiei.
3 De proiectione ſuperficierum in genere.
4 De ſuperficiebus rectilineis proiiciendis.
5 De proiectione ſuperficierum circularium
6 De ſpeciali proiectura circuli in ordine ad ſpheram deſcribendam.

De Stereographia Pars 2.

1 EXpoſitio De proiectura lineę.
2 De proiectura circuli (pr. 12. l. 25. partem adde ſemicirculi.
3 De proiectura ſuperficiei cuiuslibet independenter à ſphæra (pr. 16. l. 18. ſtereographo plano H R Q lege originario plano S T V Q.

TRACTATVS XXVII.

Trigonometria Pars 1. De triangulis planis ſoluendis.

1 EXpenſio. De triangulorum planorum rectorum ſollutione per ſinus, vel tangentes.
2 De triangulorum rectangulorum ſollutione adhibitis logarithmis (in ipſa pr. 18. in cruris lege crure & coroll. l. 3. crurum lege angulorum.

Pars 2. De triangulis ſphæricis ſoluendis.

1 EXpenſio. De rectangulis ſphęricis ſoluendis per ſinus (pr 4. l. 27. dele arcoſque P D erit complementum arcus cruriſque B A.
2 De tangentibus ad idem præſtandum (pr. 16. l. 17. I V. ad I O tangentem lege I B tangens ad I O ſinum, & in ipſa pr. 19. l. 1. complementi dele.
3 De ſecantibus ad idem pręſtandum.
4 Regulæ breuiſſimæ, & facillimæ pro rectangulis adhibendæ pręcipuè in logarithmis (pr 47. (in penul crus lege angulus.
5 De ſubſtitutione figurarum, & laterum (pr. 49. l. 42. &, lege A T.
6 De triangulis obliquangulis ſoluendis reducendo ad rectangula.
7 De obliquangulorum ſollutione per duas tantùm operationes.

TRACTATVS XXVIII.

De progreſſione ſuperficierum.

1 EXpenſio. De ſerie proportionis geometricę ſuperficierum (in exor l. in 6. Ambroſius lege Gregorius, & vbicunque repereris.
2 De planorum progreſſione muſica.
3 De progreſſione ſpatiorum arithmetices.

TRACTATVS XXIX.

Geodeſia rectilineorum planorum.

1 EXpenſio. De planarum figurarum transformatione in æquales ſuperficies.
2 De caſu normalis in rectilineis figuris, & eius quantitate.
3 De areis triangulorum, aliarumque figurarum menſurandis.
4 De augmento & partitione trianguli.
5 De quocunque rectilineo augendo vel partiendo in plana rectilinea ſimilia.
6 De rectilineo partiendo etiam in partes non ſimiles per parallelas vni lateri.
7 De figuris planis rectilineis in partes diſſimiles ſecandis à dato puncto in ipſis.
8 De rectilineis per lineas vtcunque ductas partiendis.
9 De planis à puncto extrinſeco partiendis.
10 De planitiebus muſicis.
11 De planitiebus Iſoperimetris.
12 De proprietatibus figurarum Iſoperimetrarum (pr. 55. figura debet eſſe prop. 50. & p. 57. l. 12. Exagoni lege pentagoni.

TRACTATVS XXX.

De transformatione Curuilineorum.

1 EXpenſio. De quadratione circuli (pr. 5. l. 8. æqualis adde duplo & l. vlt. circuli adde dupla.
2 De quadratione circuli geometrica.
3 De ellipſium tum inuicem, tum in alias figuras tranſmutatione.
4 De areis parabolarum quadrandis (pr. 33. l. 41. adde in fine I N.
5 De partitione Hyperbolæ.
6 De ſpiralibus ſpatijs (pr. 54. l. 7. minus lege maius pr. 55. l. 5. vt lege pluſquam & l. 5. corol. rectangula circumſcripta lege ſectores circumſcripti pr. 56. l. 36. vbi eſt 12. lege circulum.

TRACTATVS XXXI.

De transformatione ſuperficierum corpora circundantium.

1 EXpenſio. De transformatione ſuperficierum corporum planis contentorum (def. 1. lege 2. terminantia l. terminantibus.
2 De ſuperficie Cylindrica prop. 4. & 5. intelligenda eſt non dum de cylindris pro baſi circulum habentibus; ſed etiam de cylindris, quæ pro baſi habent ellipſim vel quamcunque aliam figuram curuam; ſeu etiam ſemicirculum vt conſtat ex demonſtratione; qui apellantur poſtea à nobis cylindracei (pr. 8. l. 26. cuius adde dimidia.
3 De quadratione ſuperficiei vngulæ cylindricæ.
4 De ſuperficiebus conuexis, quæ conum ambiunt.
5 De ſuperficie ſpheroidis Ellyptici.
6 De ſuperficie cuiuſcunque corporis ad axem ſuum recti prop. vniuerſalior proponitur Tr. 35. prop. 2.
7 De ſuperficie ſpærę menſuranda (pr. 40. l. 41. bus dele.

TRACTATVS XXXII.

De ſuperficiebus corporum in planum redigendis.

1 EXpenſio. De ſuperficiebus cylindricis variè ſectis plano conſignandis.
2 De ſuperficiebus conorum diuerſimodè ſectorum in planum extendendis.
3 De ſuperficie ſphæricæ multimodè ſecta in planum extendenda.
4 De ſuperficie conoidis hyperbolici parabolici & ſphæroidis elliptici annulique ſolidi in planaa ſuperficies extendenda.

TRACTATVS XXXIII.

De inſcriptione & circumſcriptione ſolidorum.

1 EXpoſitio. De principijs.
2 De ſolido angulo.
3 De deſcriptione Tetrædri in ſphęra & proportione laterum eius ad diametrum.
4 De deſcriptione octaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.
5 De cubi in ſphæra inſcriptione & eius lateris ad diametrum ratione.
6 De deſcriptione Dodecaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum ratione.
7 Icoſaedrũ ſphæra inſcribere, ſimulque omnium corporum regularium proportiones exponere & numerum eorum demonſtrare (pr. 12. l. 42. rectum lege ſolidum.
8 De corpore multarum facierum in ſphæra inſcribendo
9 De deſcriptione, & circumſcriptione Cylindrorum, vel quorumcunque aliorum corporum, donec relinquant quantitatem omni data minorem.

TRACTATVS XXXIV.

De ſolidis Pars 1. De ſolidis planis ſuperficiebus contentis.

1 EXpenſio. De parallepipedis.
2 De Priſmatibus.
3 De Pyramidibus.

Pars. 2. De ſolidis curuis ſuperficiebus contentis.

1 EXpenſio. De Cylindris & conis (pr. 6. l. vlt. A B N l. C. dele.
2 De ſoliditate Annulorum, & Rhomborum ſolidorum.

✠✠✠ 3 De

3 De quorumcunque corporum ſolidítate quorom ſectiones baſi parallelæ ſint ſimiles & æquales.

4 De conis Ellipticis, atque conis in lineam terminantibus.

5 De conoidibus Hyperbolicis (pr. 30. l. 169. vbi 5. ad 12. lege 12. ad 5. & pr. 31. l. 13. quadrata lege quadrangula.

6 De conoidis Parabolici proportionibus (pr. 34 l. 75. & lege O & l. 134. & N O dele & lege in fine B N. & N O. minus.

7 De ſpheroidibus & fruſtis eorum (pr. 40. l. 105. & l. 108. conorum lege Cylindrorum.

8 De ſphæra,

9 De ſphæræ, ſphæroidiſque quadriformis, & vngulæ Cylindricæ ſoliditate, cono flexis conſtante, de meta, & conoide parabolico & hyperbolico quadriformi.

10 De corporibus ſpiralibus.

TRACTATVS XXXV.

De corporum comparatione.

1 EXpenſio. De ſimilitudine corporum.

2 De trãsformatione æquali corporum (pr. 39. l. 60. 17. ad 42. lege 7. ad 9. & vbicunque reperis 119. lege 49. & vbi 244. lege 63. & vbi 504. lege 108.

3 De corporum proportionali diuiſione.

4 De corporum proportionali transformatione.

5 De corporum calculatione.

TRACT. I.

TRACTATVS I.
PRÆLIMINARIS.
De eſſentia Quantitatis continuæ.

ANTEQVAM agamus cùm Euclide de proportionibus Mathematicis quantitatis, neceſſarium videtur, eſſentiam quantitatis ipſius, proprietateſque Metaphyſicas cognouiſſe. Definitiones enim primas vix independenter ab eſſentiâ quantitatis poteſt haurire cognitio: Quarum notitiâ obſcuriùs perceptâ, cætera omnia, quæ ab ipſis dependent in apertum prodire nequaquam poſſunt. Verum quidem eſt; quòd nec ipſa quantitatis eſſentia probè dignoſcitur; niſi dependenter à multis propoſitionibus, quæ deinde ſunt oſtendendæ: Vnde nos tanquam Philoſophos gerentes, quibus anticipate non inſuetum, & præſuponere non indecens, earum probationibus, aut principijs ad oportuna loca ſeruatis, quæ ad quantitatis notionem faciunt Theoremata hîc vſurpabimus, tanquam nota, & oſtenſa, vt ſolùm, quantùm neceſſitas repoſcit, percipi poſſit ipſius quanti conſtitutio.

EXPENSIO I.

In quo conſiſtat conceptus quantitatis in genere, & in quot ſpecies ſecernatur.

HAnc queſtionem diffuſiùs agitaui in noſtris placitis philoſophicis diſ. 15. pag. 119. ex qua diſputatione liceat aliqua, quæ magis ad Mathematicam faciunt, hic delibare; vt deinde euidentiùs ipſa quantitatis eſſentia ſeſe in apertum prodat.

PRÆASSVMPTVM.

COmmunis hominum conceptus in id conſpirat; vt quantitatis nomine notet, tum continuam quandam rerum ſucceſſionem, aut multitudinem, tum vnius rei extenſam molem. Et quamuis Virtutum, potentiarum, accidentiumque intenſionem, & vim operatiuam quantitatis menſuris ſubigant: an tamen verè ſub quantitatis definitione veniant, incertum, & apud Philoſophos controuerſum. Motus quoque & temporis incerta, & anceps quantitatiua denominatio, & licet menſurentur, non propterea certum eſt, quantitatis ſub genere contineri. Quamobrem, vt omnino pateat, quænam inter quantitates enumeranda ſint, priùs Quantitatis, quæ apud nullos eſt controuerſa, vt eſt ſucceſſiua, continua, & diſcreta, conceptus, & definitio eſt inquirenda.

CONCLVS. I. PROPOS. I.

Eſſentia quantitatis *in genere eo conſiſtit; vt ſit capacitas quædam entitatis ad partes habendas*, vel actu, vel potentiâ, vel ſaltem per intellectus deſignationem.

1 PRobatur. Quia hæc definitio omnibus quantis etiam ſpiritualibus aptatur. Nam, & quantitas molis, & intenſionis, & ſucceſſionis, & numeri, & temporis, & loci, & extenſionis, & omne aliud genus quantitatis ſine partibus concipi nequit, ſiue illæ actu ſint, ſiue potentiâ, ſiue deſignatione concipiantur. Sic in numero adſunt partes actu, in quantitate molis fieri queunt, in Cœlo, ſi eſſet incorruptibile, ſaltem concipi.

2 Probatur. Quia hæc capacitas ad obtinendas partes, omnium aliarum proprietatum; quæ de quacumque quantitate dicantur, fons eſt, & origo. Prima eſt apud Vaſq. T. 3. in 3. par. diſ. 90. c. 3. n. 15.; Quòd det aliquam diſtinctionem materiæ: Nam ſi partes ſint reales, dat diſtinctionem realem, ſi factibiles, vel conceptibiles dat diſtinctionem, aut virtualem, aut per intellectum. Secunda, quod menſuret, aut menſuretur: Nam ſi capacitate ad partes conſequendas potitur; ergo erit inter partes, quæ excedat, quæ exæquet, aut ab alia quantitate deficiat. Tertia eſt numerari; nam partes, vel actu factæ, vel deſignatæ plures ſunt: Quamobrem numerationi obnoxiæ erunt. Quarta eſt proportio.

Digitized by Google

Eteoim, vbi ſunt partes datur maios, minuſque, & vbi datur maius, aut mious, dator maior quoque, vel minor cootloentia, vei totios, vei aliquarom partiom eius, & ideo maior, aut minor proportio, quæ in hac continentia conſiſtit: Quiota eſt via quædam occopatiua loci. Quoniam, quod partes habet extenſas, ſecundùm eam extenſiooem loco correſpondere poteſt. Sexta. Quòd obtineat partes in ſemetipſa ordinatas, & ſe inuicem excludentes; Nam vbi diuiſio eſt, vel conceptibilis, vei actualis, vel poſſibilis; ibi neceſſe eſt, voam partem exeludere aliam; alioquin ſi hæc aliam ſuâ ipſá entitate inuolueret, non poſſet, nec qoidem intellectus concipere cum ſuodamento partes; quia rei conceptos formalis earom exeluderet multiplicitatem.

Dicet ſortè aliquis ex Metaphyſicis. Ratio, perquam eſſeotia alicuius rei ſecernitur, debet eſſe omoibus alijs prædicatis eſſentialibos prior; ſed extenſio eſt prior capacitate partium; ergo extenſio erit ratio conſtitutiua quantitatis.

Sed reſpond. Id optimè ſe habere. cùm plures proprietates adſunt eadem voiuerſalitate pollentes, quæ rem aliquam conſtituant. Tuoc eoim inter multas rationes eodem modo diſtinctioas, eùm eadem, & æquâ ſpetie ſe diffundant, illa debet ſeligi, quæ radix aliarum ſit, & alijs prior, & præeminens babeatur. At in contrarium res eſt. Si quidem exteoſio licet in quantitate moils ſit ratio prior, & per quam illa partibus froatur, vt aduerſarijs morem geramus, non tamen adeo latè patet; cùm nec quantitas diſcreta, nec virtutis, nec temporis extenſione pateſcat. Verùm, nec equidem concedo. Extenſiooem in quantitate cõtiuus eſſe partium habitudine priorem, cùm imò entitas partium exiſtẽs ſit illa, quæ extenſionem cauſat; cùm vna extra aliam eſt: Quoniam ſi penetrentur extenſio non maoet, & tamen eſſentis qoantitatis adhuc eſt, & corpora dioinâ virtute penetrata quantitatis eſſentia non expoliantur.

2 Dices. Dioidere aliam quantitatem; eſſentia quantitatis nõ eſt; ergo neque dioidi. Verùm, nec diuidere, nec diuidi eſſe quantitatia conſtituit: Neque enim in bae ſententia ſomus. Sed id aſſerimus; ex eo quantitatem conſtitoi: quòd ſit entitas talis, cuius vna pars nõ ſit omnis pars, & toti adæqoetur. Si detur itaque aliquod ens, cuius bæc entitas deſignata non ſit alia ſimpliciter, & ſine reduplicatiooe intellectiuâ; hoc erit eos quantum, & hoc eſt conſeqoi capacitatem partium ſaltem deſſignabilem.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Species quantitatis ſex ſunt. Quantitas Molis, Numeri, Temporis, Motus, Virtutis, Ponderis.

PRob. Nam qoantum, aut eſt ſubſtantiale, aut accidentale. Si ſubſtantiale eſt, aut conſideratur, vt extenſum loco, vel vt habens plures partes io eodem loco. Si conſideratur, vt loco ſubſtaotia extenſa, iam quantitas molis eſt, quæ trinam dimenſionem conſequitur altitudinis, longitudinis, latitudinis. Si verò eius partes vna intra aliam latent, & eundem locum occupent; tunc eſt quantitas ponderis. At ſi quantum eſt accideotale; tuoc, aut conſideratur accidens in ſubiecto extenſum, & tunc eum ſe accomodet ſobiecto eandem conſtituit cum eo molis quantitatem: licet propriè exteuſioois vocetur. Si verò io eadem parte ſubiecti ſe colligat; tunc eſt quantitas virtutis, ſeo inteoſionis. Quòd ſi ſubſtantia, ſeu accideos intelligantur moueri, tonc quantitas motus eoaſcitur, & ſi perſeueret in motu, quantitas durationis, ſeu temporis emergit. Tandem ſi ſubſtantia, aut accidens motus, & duratio intelligaotur diuiſa, & io plores partes ſeiuncta, diſcreta qoantitas eſt, & vocatur, quaotitas numeri.

COROLLARIVM.

HInc euenit, quòd, cùm quantitas molis, & numeri ſint, tum ſubſtantiæ, tum accideotium, in ſubſtaotia extenſorum, quòd etiam ab illa dependeat quantitas, & ponderis, & motus, & temporis, & virtutis. Et hinc quod de illis primo diſcurreodum ſit, vtpotè, quòd voiuerſale præbeat fundamentum ad alias quantitates poitiùs conſideraodas.

Cooſtat autem hoc de quantitate ponderis: nam à magnitudioe rei pondus depeodet; cùm pro ſui quantitate leue pondus in ſpecie poſſit æquare maius, ratione ſuperadditæ molis. Et ita quantitas motus, & temporis à multitudine, magnitudineque partium pertranſeuntium depẽdet: Sic quantitas virtutis à mole, ſeo magnitudine agentis, ſeu à numero mouentiom, ſeu à magnitodine figuraque terum motarum exerit. Quapropter in hoc libro ageodum de *Quantitate Diſcreta, & Continua*; vtpote in qoo res mathematicæ voluerſalitèr tractantur; ideoque de illis tanquam vnioerſaliſſimis quantis agendum, quorum cognitio omnem aliarom quantitatom cognitionem ſubalternat, & ab illâ euidentia principia mercantur. Subeſt & inſuper alia ratio. Nempe omnia alia genera quantitatum ſub ratione quantitatis diſcretæ, ſeu continuæ conſiderari, vt patebit (ſi Deo dante) ad illarum attingendos tractatus deueniamus.

EXPENSIO II.

An aliquod argumentum mathematicum euidenter oſtendat quantitatem, ex punctis non conſtare.

QVamuis hæc quæſtio requireret legentem mathematicâ imbotum: Cùm tamen ſit qooque philoſophica, & Philoſophi, licet Matheſi non exornati illam percurrant, & veotilent præſupponendo ea, quæ à Mathematica dependent, vel lumine naturæ cogoita, vel ab eâ demooſtrata: hinc eſt, quòd hic eam collocandam duxerimus, tanquam ad cætera, quæ deinde conſiderantur perneceſſariam.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Nullum mathematicum argumentum, ex punctis indiuiſibilibus quantitatem molis *conſtare, oſtendit.*

HÆc conclusio eſt negatiuè oſtendenda; nempe argumentorum eam impugnantiom euidenti ſolutione. Primò itaque aliqui credunt, ex punctis conſtare quantitatem ex illa

propoſ.

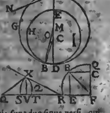
propoſ. Eucl. l. 3. p. 13. in qua probat circulũ aliũ circulũ non tangere in pluribus punctis, quam vno, & hoc adducit Bagata in 6. lib. ſec. 3. d. 4. de quantitate, tanquam vnicum, & ineuitabile argumentum ad puncta indiuiſibilia in quantitate oſtendẽda, & citat fallaciter Euc. lib. 1. propoſ. 16.

Sed Reſpond. 1. Euclidem probare circulum non tangere planum, vel (quod ſpecialiter ipſe probat) circulum intrinſecùs in pluribus punctis, quam vno ſenſibiliter diſſitis; non autem immediatis. 2. Oſtendere, non tangere in pluribus punctis, quam vno; ſed diuiſibili; ſiquidem non oſtendit illud punctum contactus, aut eſſe diuiſibile, aut indiuiſibile.

Verùm dices, Licet id ipſe non oſtendat ex eius tamen demonſtratione colligitur: Nam ſi tangunt ſe in duobus punctis; tangant ſe in B & D; ita vt hæc duo puncta ſint in vtriuſque peripheria, tum maioris, tum minoris circuli. Certum eſt quod in omni triangulo duo latera ſimul ſunt tertio maiora ex propoſ. 20. lib. 1. Element. At ſi B punctum in circumferentia vtriuſque circuli eſt; trianguli M B C duo latera B C, & C M eſſent tertio æqualia; quod eſt abſurdum, & contra citatam propoſ. 20. id autem patet; nam B M, vtpote radius maioris circuli æquatur lineæ M D; cui etiam æquantur duo crura M C, & C B: Quoniam M C eſt eius pars, reliquæ verò parti C D crus B C eſt æquale, vtpote radius minoris à centro C ad eius peripheriam pertingens.

* Hæc eſt demonſtratio euidens illa quidem, ſi agamus de duobus punctis diſtantibus: non tamen immediatis. Nam primò, vel agimus de lineis, quæ ſint indiuiſibiles, vel quæ ſint diuiſibiles. Si ſint indiuiſibiles. Certum eſt, quòd maior eſt latitudo B D, quam O C: Si ergo B D ſint duo puncta immediatè ſe tangentia, multò magis ſe tangent duo puncta C, & O; vel ergo etiam ipſa erunt duo puncta immediata, & ſic maius ſpatium non erit B D, quam O C; vel erunt minùs immediata, & ſe penetrabunt puncta O, & C: quapropter B M C non erit triangulum; quia nulla diſtantia intericietur inter C, & O puncta inuicem penetrata. Si verò lineæ ſint diuiſibiles; iam latitudo vnius occupabit aliam, in O, & C, licet in B, & D differant ſpatio: Vnde rurſus B M C non erit triangulum.

* 2 Certum eſt. Lineolam O C eſſe maiorem illa portione, qua excreſcunt latera B C, & M C ſupra tertium crus B M. Quoniam, vt potes videre in triangulo Q R X linea S V, & V T, qua excreſcunt latera Q X, & R X ſuper baſim Q R; vt vna eſt minor perpendiculari V X; quia ſunt duo ſinus verſi, qui nunquam in triangulis obtuſangulis, quorum reliqui anguli ſint minores G. 45. ſinus recti medietatẽ æquare poſſunt. Quia, vt Th. 2. exp. 2. de ſin. Quadratũ ſinus recti eſt quadruplũ rectãguli ex ſemiradio, & ſinu verſo: Sed in 3. fig. ſemiradius ſuperat dimidiũ ſinus recti G. 45. E B. Quòd eius quadratũ ſit quadrato ſui dimidij quadruplũ ex p. 6. l. 2. ſemiradij verò duplũ; cùm ex p. 11. l. 2.



ſit ſubduplũ quadrato radij R F, cui ſemiradij eſt ſubquadruplũ ex 6. l. 2. Ergo ſinus verſus B R minor erit dimidio ſinus recti E R. Alioquin cum ſemiradio maiori faceret quadratum maius, quam ſubquadruplum quadrato ſinus recti, cui quadratum ſui dimidij ſubquadruplum eſt; Cum ergo ſinus verſi angulorum minorum, quam Gr. 45. vt ſunt anguli Q. R nõ æquent ſemiradium erunt minores; qua V X. Quod licet ex defectu principiorum modò ſit obſcurum, & incompertum; præſuponendum tamẽ eſt, vt certiſſimum, & euidens apud eos, qui Matheſi inſtructi ſunt.

Quamobrem O C in Fig. I. maior erit ea portione, quâ excreſcunt latera B C, & C M ſuper baſim; cum anguli ad M, & B ſint acutiſſimi; eo quod angulus apud C ſemicirculo (excepto vnico puncto inter B D) menſuretur. Ponamus itaque illam perpendicularem C O lineam eſſe vnius puncti: Ergo latera, nec quidem vnico puncto ſuper baſim excreſcent: Quare baſi eo in caſu, nec puncto quidem indiuiſibili erunt maiora. Sed minor eſt O C, quam D B: Ergo non excreſcentibus lateribus, nec quidem vnico puncto indiuiſibili ſuper baſim, & ideo æqualibus ipſi baſi; erunt tamen latera apud verticem C diſtantia, à baſi in C, & diſtabunt ſaltem puncto, & tantò magis diſtabunt in B, & D; quare D, & B erunt duo puncta, & B M C triangulum, & latera B C, & C M baſi B M maiora non erunt.

* 3 Sint duo circuli E D, & D L, eorùmque centra non magis, quàm puncto diſtent in C, & M; illique ſint perfecti, vt ab aduerſarijs conceduntur. Ambitus itaque eorum in E, & L non diſtabunt magis, quàm duobus punctis; In G H vnico puncto: Ergo in reliquo ſpatio vſque ad D minus, quàm puncto diſtarent; ſic que punctum in multas, multaſque partes diuideretur.

4 Aut contactus eſt phyſicus, & realis; aut non. Si phyſicus: certum eſt, quòd quilibet circulus in duo poteſt ſecari per imaginationem ſaltem; ita vt nihil integritati ſemicirculi deficiat. Diuidatur itaque, & diuiſio in punctum contactus cadat, vel punctum illud abſumet, & tunc aliquid, ſemicirculi partibus, vel vtriſque, vel alteri deficiet: vel non; & ſic in duo ſecabit illud punctum.

Reſpondere verò (vt reſpondet quidam) circulum in duas æquales partes nequaquam poſſe ſecari, aut quòd non poſſit diuidi mente; niſi aliquod ex eo deperditum imaginemur, eſt contra mathematicos pugnare, qui id euidenter probant, & euidens probatio fortiùs euincit de diuiſione mente concepta, quàm de diuiſione applicata materiæ.

Obijces 2. ex Pelletario apud Clauium. Omnis quantitas ſi augeatur in infinitũ poteſt quãcumque datam ſuperare, ſed angulus contactus circuli cum plano, licet auctus in infinitum, nunquam poteſt angulum rectilineum K L N, etſi minimum ſuperare; Ergo angulus acutus contactus K L C quantitas non eſt, & ſic multò minùs ipſe contactus quantitas erit.

Huic argum. Fuſè reſpondet Clauius. Nos illi reſpondemus, quatenus vtitur probare punctũ contactus indiuiſibile eſſe. Rep. itaque. Quòd, vel angulus contactus ſumitur, vt inclinatio duarum linearum, prout Eucl. defin. 8. lib. 1. vel pro ſpatio inter lineas inclinatas cõtento. Si primo modo accipiatur verum eſt, quòd angulus contactus non eſt quantitas: ſed nec angulus re-

 ctus,

ctus. Verùm potiùs quidam modus quantitatis; vnde in genere quantitatis non eſt facienda comparatio, ſed inclinationis. Cum autem lineæ rectæ à curua differant genere, hinc eſt, quod inclinatio curuæ ad rectam inclinatione rectæ ſemper euadat maior, & curua magis inclinet ad planum, quàm recta. Licet deinde factâ comparatione inter lineas inclinatas eiuſdem generis, puta peripheriarum poſſit dari minor, minorque in infinitum, prout ſe circuli augebunt. Si verò Angulus accipiatur prout dicit ſpatium comprehenſum inter lineas, tunc quidem quantitas eſt; ſed cuius ignota menſura ſit. Nam angulus quidem rectus arcu circulari menſuratur inter crura comprehenſi: ſed, quæ nam ſit menſura anguli curuilinei, incompertum eſt; quare omni acuto rectilineo minor quidem eſt in principio ſui, ex demonſtratione Euclidis. Sed cùm non ſeruet ſemper eandem inclinationem, & cũ accedens ad quadrantem verſus c maior fiat, an abſolutè dicendus ſit minor; res in dubio eſt, & quo ſenſu minor dicendus ſit, magis anceps.

* Et hæc quidem de angulo. Verùm vltima conſequentia nullo pacto colligitur; nempe quòd contactus ipſe non ſit quantitas quia angulus contingentiæ omni acuto rectilineo maior ſit; imò è contra potiùs videtur deduci: Quia cùm curua omni rectâ inclinante alteri rectæ magis inclinet, magis etiam ſe illi adaptat: Vnde contactus ipſe lineæ rectæ cum curuâ maior erit, cùm maior ſit inclinatio, quàm rectæ cum rectâ. Datis enim duabus lineis materialibus, & aliquali latitudine pollentibus, contactus earum maior eſt, ſi inclinatio maior ſit; & ideo etiam curua, & recta ſenſibilis ſe inuicem tangent magis, quàm quælibet recta tangat rectam omnimodâ inclinatione datâ; ſed puncta licet indiuiſibilia in contingendo, partes habent etiam iuxta aduerſarios (ſiquidem tangitur vnicum punctum à pluribus punctis) Quare punctum contactus poterit eſſe ſecundum plures partes, & pauciores, & contactus poterit eſſe maior, aut minor. Quamobrem, cùm non ſit indiuiſibilis nullus, licet punctorum indiuiſibilium, contactus, ex eo non poterit deduci quantitatis ipſius indiuiſibilitas. Quandoquidem dato etiam; quòd punctum plani à circulo tangeretur; nihilominus ſecundum plura puncta peripheriæ illud punctum plani poſſet contingere.

EXPENSIO III.

An aliquod argumentum mathematicũ oſtẽdat quantitatem ex punctis non conſtare.

VIdimus puncta indiuiſibilia in quantitate nullâ efficaci ratione mathematicâ conſtare: Modò videndum eſt; an ſit aliqua ratio mathematica, quæ illa explodat.

CONCLVS. I. PROPOS. IV.

Argumenta plurima mathematica oſtendunt puncta indiuiſibilia in quantitate non reperiri.

ARgumentum eſt vſitatum, quòd non poſſet ſecari linea noticm punctorum in duas partes æquales, quia ſcilicet punctum medium in duo eſſet ſecandum.

2 Quòd datis duobus punctis concentricis tot reperirentur puncta in maiori, quot in minori; cùm ductis à centro lineis ad omnia puncta circonferentiæ circuli maioris, illa neceſſariò tranſirent per tot alia puncta circuli minoris: Quare in vtroque par numerus punctorum lateret.

3 Quod Diagonalis in quadrato eſſet tot punctorum quot latus; cùm ductis à punctis omnibus laterum parallelis, per omnia diagonalis puncta tranſirent.

Quibus argumentis geminam opponunt aduerſarij reſponſionem. Prima eſt negando lineam illam in duo ſecari, vel duci lineas per omnia puncta, vel laterum, vel circulorum. Sed hoc gratis negatur, cum inter conceſſiones de puncto ad punctum lineam poſſe duci, vt omnino concedibile expoſcat Euclides, & ſine, quo Mathematica non conſtaret. Et quoad ſectionem lineæ bifariam, demonſtratio Eucl. propoſ. 10. conuincit ſaltem de ſectione mentali, & Methaphyſicâ, vt euidens eſt, nec valet cuiuſdam reſp. omnino futilis, quod lineam demonſtrauerit Euclides omnino in duo partibilem, ex ſuppoſitione Ariſtotelicæ ſententiæ. Quaſi quòd demonſtrationes mathematicæ ſolam probabilitatem conſequerentur, & præcipuè illa ex ſuppoſitione probabili procederet; quæ toti Mathematicæ euidentia fundamenta præbet.

Secunda eſt Galilei dialog. p. 21.; qui exiſtimat puncta indiuiſibilia in quantitate eſſe infinita; & ideo non poſſe punctum in duo ſecari, vel de puncto ad punctum, per alia puncta certa, & determinata, linea duci: Cùm nec duo, nec decem, nec aliquis numerus determinatus punctorum in quantitate reperiatur; ſed indeterminatus. At huic ſua erit reſponſio; cùm oſtendemus non poſſe infinita puncta, ſeu indeterminata in quantitate reperiri.

* 2 Sic probo ſpecialiùs poſitam ſententiam. Sit Cylindrus A B C D excauatus concauitate ſpherica A O B Sitque in illo deſcriptus conus O C D. Dico; quòd ſi punctum illud extremum O indiuiſibile eſt, Quod etiam tota circumferentia A B indiuiſibilis eſt.

Et ſi illa circumferentia diuiſibilis eſt; quòd etiam punctum O extremum, quodcũque illud ſit, diuiſibile eſt. Id verò conſtabit, quia circumferentia A B punctata, & punctum O probabuntur æqualia ex Luca Vallerio lib. 2. propoſ. 12. de cent. grauit. Quadratum Q I ob angulum rectum E ex 47. elemen. Et nobis p. 11. lib. 2. eſt æquale duobus quadratis ex linea O E; & ex linea I E Lineæ verò O I, eſt æqualis linea E P, & O E linea E H: Quare quadratum, ex linea P E eſt æquale duobus quadratis ex I E, & E H lineis, & quadruulum eius quadruplo. Quadratum verò ex P Q eſt quadruplum quadrato ex P E, & I V quadruplum quadrati I E: Et H L quadruplum quadrati H E, & ita etiam erunt circuli quadratis inſcripti.

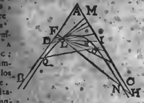


Quare circulus, cuius diameter P Q eſt æqualis duobus circulis I V, & H L; Ablato itaque à circulo P Q, circulo I V, reſiduus annulus, cuius latitudo P I, & V Q, erit æqualis circulo H L. Et ſi lineam P Q eleues vſque ad vltimum punctum O, ſemper valebit

idem

idem argumentum. Quare punctum o erit æquale circulo A B : Sed circulus A B diuiſibilis eſt; Ergo etiam punctum o, quodcumque minimum accipiatur. Hæc autem demonſtratio deſeruiat pro iis; qui iam Mathematica ſunt inſtructi, ſicut & ſequentes.

* 3 Sic oſtenditur ex propoſ. 2. Expenſ. 4. Conic. Agentes de Aſymptoto demonſtrabimus, Quòd hyperbole ſemper ad aſymptotos accedat, & numquam illos tangit, vel ſecat, & ſi ponatur quælibet minima quantitas inter ipſos, & hyperbolem, diſtantia tandem etiam illâ minimi quantitate datâ minor euadet. Sint Aſymptoti B A & A C, ſectio hyperbola Q E N, Oſtenſum eſt, hanc ſemper, quouſque prolongantur latera Q L & N, B, accedere propiùs ad Aſymptotos A B & A C; ſed numquam illos tangere. Detur itaque punctum aliquod. Cum omni data quantitate tandem ſpatium interceptum inter Aſymptotos A C & hyperbolam Q E N, menſurim ſit minus; euadet minus dato puncto; cùm tamen aduerſarij nolint minus puncto in quantitate poſſe dari.



* Et idem erit argumentũ ex inſcriptione Hyperbolarum deductũ: Nam oſtendit Vincen. Viuianus inſignis Geometra de maxim. & minim. lib. 1. pag. 45. Hyperbolas per diuerſos vertices ſimul deſcriptas, verùm, quarum eadem ſit regula, ſemper inuicem accedere; nunquam tangere. Quare idem quoque argumentum adornari poterit.

* 4 Prob. Quoniam omnia rectangula, vt duximus de ſuperficie conicâ agentes inter Aſymptotos, & Hyperbolem facta, inter ſe ſunt æqualia; Sic rectangulum factum ex lineis L F & M L, eſt æquale parallelogrammis interceptis, & quibuſcumque alijs quorum vnum latus L M ſit vni Aſymtoto parallelũ, alterum F L ad idem punctum Hyperbolæ incipiens ſit alteri Aſymptoto parallelum, & in primum aſymptotorum A C deſinat. Sic ergo punctum quantitas aliqua propoſita, ad quam hyperbola ſemper accedendo ad alteram aſymptotos, iam peruenerit. Quare rectanguli huius pũcti interpoſiti inter hyperbolam, & aſymptotos latitudo erit linea, vtpote ab eo puncto deducta, quo diſtat hiperbola ab aſymptoto; quod eſt abſurdum, & linea æquabitur parallelogrammis omnibus alijs interpoſitis V.g. parallelogrammo F L M A, quod item abſurdum eſt, cùm linea ſolùm longitudine ſit diuiſibilis, & parallelogrammum etiam latitudine.

Contra verò hoc argumentũ ea reſponſio valeret, quòd puncta ſunt infinita, & ideo, quòd nec in cono vltimum punctum aſſignari poteſt, nec in hyperbolâ ea diſtantia, quæ punctum æquare queat. Quamobrem vt euidentiam hæc argumenta ſortiantur, hæc quæſtio eſt reſoluenda.

EXPENSIO IV.

Puncta infinita in quantitate, an admitti debeant.

POſſet hæc quæſtio agitari de punctis, quæ actu ſint in quantitate diſtincta ſecundum ſuum eſſe, atque numerabilibus. Poſſet etiam intelligi de punctis, quæ in quantitate actu non diſtinguantur; ſed mentaliter, vel per diuiſionem ſucceſſiuam ſeparabilia. Si hoc ſecundo modo intelligatur, coincidit cùm opinione Ariſtotelicâ, quod partes ſint in infinitum multiplicabiles abſque eo, quòd earum vltima poſſit attingi. Nam, neque hoc pacto punctum vltimum, nec quidem intellectu aſſequi poſſemus; cùm infinitum exhauribile non ſit, & ſi vltimum aſſignaretur, iam infinitum eſſet exhauſtum. De punctis itaque actu diſtinctis, & actu numerabilibus ſermo eſt: de quibus ſic aſſero.

CONCLVS. I. PROPOS. V.

Puncta infinita in quantitate actu diſtincta nequeunt admitti.

1 PRob. Quoniam numerus infinitus dari nequit, ergo neque in quantitate puncta infinita. Nam numerus numeratus, ſubiectumque numeri eſt multitudo ipſa. Quare ſi multitudo infinita punctorum daretur, etiam infinitus numerus daretur. Infinitus autem numerus dari nequit; quia innumerabilia eſſet. Quare infinitus numericus per excluſionem eſſentiæ numeri conſtitueretur.

2 Vel puncta illa ſimul addita conſtituunt maius, vel non, ſi non; ergo quantitatem non extendunt, vel maius conſtituunt, & ſic cùm eorum multitudo ſit infinita, & eorum quodlibet maius quid addat, magnitudinem infinitam conſtituent. Sunt enim infinita ſimul addita, quorum quodlibet extenſionis aliquid facit: Ergo iſtud quid extenſionis multiplicatur in infinitum; Ergo extenſio erit infinita.

* 3 Omne infinitum æquale eſt; alioquin vbi conciperetur alterum maius, ibi minus eſſet exhauſtum, & finitum. Ergo, cùm in qualibet quantitate puncta ſint infinita, quælibet quantitas aſſignata maior A, minor B puncta infinita in ſe concludet, & ideo æqualia multitudine. Sed indiuiſibilia magnitudine ſunt etiã omnia æqualia; quia indiuiſibilia ſunt: Ergo exibebunt extenſionem æqualem. Propterea quantitas maior A extenſione æquali pateret, ac quantitas minor B; quod eſſe nequit. & omnes quantitates eſſent æquales, quod item abſurdum eſt.

Dices ex Galilæo Dialog. pag. 23. Quòd neque ſint infinita, nec finita; ſed tot, vt cuilibet aſſignato numero reſpondeant.

Nam, vel hæc aſſignatio poteſt fieri finitâ in infinitum, & ſic idem eſt, ac admittere puncta finita in infinitum in quantitate; quod ipſe non vult, vel finita tantùm, & ſic iam, nec puncta in quantitate ſunt infinita, vtpote correſpondentia finitis numeris. Deinde quæro de omnibus punctis. An omnia finito alicui numero correſpondeant; & hoc negat. Igitur alicui infinito; ſed hoc non datur; Ergo alicui incerto, & in determi-

Digitized by Google

determinato. Quare collectio punctorum incerta eſt, & indeterminata; & ideo actu non erit diſtincta: Siquidem omne, quod eſt actu, determinatum etiam eſt, & certum; vnitateque gaudet, & ſingularitate; quâ poſſit vnitatibus numericis correſpondere.

4 De omni, quod aſſignatur quantitatis, illud licet minimum, quæritur an correſpondeat cuicumque numero aſſignato, ſiue non: ſi correſpondet, cùm omnis quantitas maior aliquatenus illâ, eandem prorſus correſpondentiam conſequatur, erit æqualis minori. Et ſi dicas correſpondere quidem in multitudine punctorum non autem in extenſione.

Contra eſt. Nam omne punctum, cùm non ſit cùm alio penetratum, & per aduerſarios omnia ſint eiuſdem rationis, & ſubſtantiæ omnia æquo modo ſubſtantiam extendunt. Ergo cùm, & quantitatis magnæ puncta, & quantitatis paruæ omni aſſignato numero correſpondeant; æqualiter extenſionem præſtabunt.

5 Cùm omni numero indeterminato correſpondeant, iam, & ipſa puncta erunt multitudine indeterminata: Sed multitudo eorum extenſionem dat: Ergo eſt etiam indeterminata extenſio; quod eſt abſurdum.

6 Deus videt omnia illa puncta, imò & ſecernere, & ſeparare poteſt. Separet itaque, vel re, vel cognitione. Tunc, aut illa pũcta ſunt infinita vel finita. Si infinita, nulli numero correſpondent; cùm numerus infinitus dari nequeat. Si finita, ergo non omni aſſignato numero; ſed alicui finito correſpondere debent.

EXPENSIO V.

In quantitate partes infinitæ capacitatis virtualis, ſeu mentalis capaces ſunt.

LIcet excluſerimus puncta infinita in quantitate, & indeterminata, quæ actu ſint; non tamen quandam infinitam capacitatem partium excluſimus, quam hac, & ſequenti expenſione in animo eſt declarare.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

In quantitate partes in infinitum concipi, poſſunt, dummodo quantitas concipiatur.

PRobatur. Nam eſſentia quantitatis in partium capacitate conſiſtit: Ergo ſi quantitas concipiatur, capacitas partium concipienda eſt.

* 1 Mathematicè. Docet Euclides lib. 10. elemen. propoſ. 12. reperire lineas longitudine alteri lineæ incommenſurabiles, quarum natura talis eſt; vt facta qualibet in eis diuiſione, quamuis minimâ, & quacunque adhibitâ partium multiplicatione, nulla tamen pars poſſit deſeruire pro communi menſurâ illarum; ſed ſemper inuicem pars vnius, parti alterius comparata inæqualis inueniatur. V.g. hæc diuidatur in 10, vel 100, vel 200, partes; illa in 7, aut 25, aut 138, aut quoquo modo in partes aliquotas: numquam tamen vna, alteri commenſurabitur; ſemperque partes diſſidebunt, quouſque erunt partes. Hinc autem deducitur; quòd erunt in infinitum diuiſibiles. Alioquin, ſi tandem ad minimas deuentum eſſet; iam, cùm omnia minima ſint æqualia, partes factæ æquarentur, contra euidentiam demonſtrationis.

* 2 Docet Euclides propoſ. 49. lib. 10. elem. à mediâ, quæ eſt irrationalis linea, infinitas irrationales facere; quæ nulli antecedentium irrationalium parti ſint in aliqua ſui parte æquales; ideſt omnibus irrationales; Ergo eadem quantitas poterit habere partes infinitas ſaltem conceptas intellectu; cùm nequeat inueniri pars adeo minima, quæ alteram exæquet. Alioquin tandem aliqua reperiretur eadem cum aliqua ex antecedentibus, vel tota, vel in aliqua ſui parte; Si enim punctis conſtaret, in numeris ea puncta numerantibus proportiones illarum exprimi poſſent; & ita ſicut omnis numerus alicui numero eſt proportionatus; ſic reperiretur irrationalis alicui irrationali conſentiens, cuius proportio in numeris exprimi poſſet. Quare irrationalis non eſſet: Eſſentia eſt irrationalium incommenſurabilitas; quæ nullis numeris effari poſſit.

* 3 Probatur. Ductis parallelis AH, & BC, & perpendicularibus BA, & CL, &c. Ducantur ab A puncto rectæ AD, & AE, & AF, & AG, &c. in infinitum. Dico quod CL diuiditur in partes minores, & minores in infinitum: & tamen numquam finiri poteſt.

Nam primo in K bifariam; deinde per E in tres partes: deinde per AF in quatuor, in quinque per AG, in ſex per AOX, ita vt OL ſit ſexta pars totius CL: & ſemper lineæ inferiùs, & inferiùs diuident in partem minorem, iterumque minorem, & nũquam ad punctum L

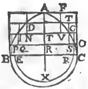


peruenient, quia AX, aut quælibet alia longiùs in infinitum ducta, ſemper magis diſtabit in O, quam in A à linea AH; cùm faciat angulum AOL. Alioquin ſi conueniret in O, non eſſet recta; vt præſuponitur. Sic lineæ CK, & MD, & IE, ſemper breuiores erunt in infinitum: Quia MD minor erit KC, & IE minor, quàm MD, & VF, quàm EI, vt oſtendemus dante Deo in tractatu perſpec. & quilibet ex ſe poteſt concipere. Quapropter illæ lineæ poterunt diminui in infinitum; & ſemper ſupererit, quid auferatur.

Probatur 4. Trac. de annulis ſolidis demonſtramus. Annulos ſolidos, per quorum ſoliditatem conoidis parabolici ſuperficies tranſit, eſſe inter ſe æquales; & eorum ſuperficies horizontales inuicem quoque æquales. Sic craſſitudo PB in annulum BXR ſolidum circa conoidem BAC flexa, & per cuius ſoliditatem per B, & P conoidis ſuperficies tranſit; iſte inquam annulus eſt æqualis annulo PI graſſitiei maioris; ſed minoris ambitus, & etiam annulo SD, & tandem DF Cylindro. Hi verò annulis & ſuperficies eorum orizontales; dum diſtantur gyro, reſtringuntur ſoliditate, ſuperficieque in infinitum. Vel ergo ſemper reperitur ſoliditas, & ſoliditas: ſuperficies, & ſuperficies, quæ minor ſit in infinitum, & in infinitum, vel non: Si non; ergo deueniemus ad vltimum indiuiſibile in ſuperficie annulari; quæ erit circumferentia, & in annulo ſolido ad vltimum indiuiſibile ſoliditatis, quod erit ſuperficies vltima, in quam deſijt ſoliditas, quæ ſoliditati Cylindricæ DF æqualis

erit;

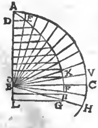
erit; quod eſt abſurdum, cùm ſuperficiei ad corpus, & lineæ ad ſuperficiem nulla ſit proportio; quia ſunt in diuerſo genere, & primo quãtitatis. Deinde tunc parabola A P B de P angulo ad alterum angulum à more diagonalis non tranſiret; cum nulla eſſet graſſities; ſed paralielæ P F congrueret; quod contra naturam parabolę eſt: cum numquam parallela diametro linea parabolica eſſe poſſit. Quod ſi graſſities P B numquam ad vltimum ſui eſſe perueniet. Ergo ſoliditas eſt diuiſibilis in infinitum. Eademque ratione ſi ſuperficies A E numquam ad vltimum ſui eſſe peruenit. Ergo diuiditur in infinitum.



* 5 Docet Archimedes, & nos de ſolidis, & de ſphæra, & ſphæræ ſuperficie. Corpus ſegmentis conorum ſphæræ inſcriptum eſſe ſua ſoliditate minus, quam quadruplum ſuperficiei circuli maximi ſphæra inſcripti. Et ſemper creſcentibus, & multiplicatis lateribus quocumque numero quadruplo, accedere quidem ſemper magis ad æqualitatem, tum ſoliditate quadrupli coni inſcripti, tum ſuperficie quadrupli circuli maximi: ſed nũquam ad eam peruenire creſſente ſemper figurâ conica in ſoliditate, & ſuperficie; ſed ſemper minoribus, minoribuſque incrementis in infinitum. Ergo quantitas illa, quâ deficit figura conicis ſegmentis conſtans ſphæræ inſcripta, tum ſuperficie accedendo ad quadruplum maximi circuli, tum ſoliditate ad quadruplum coni inſcripti, recipiet infinita augmenta in infinitum abſque eo, quod æquet ipſum quadruplum: quare quantitas illa per quam fit acceſſus ad quadruplũ circuli, vel coni erit diuiſibilis in infinitum; cùm additione minoris, & minoris, quanti, numquam ad quadruplum deuenire poſſit.

6 Probatur. Nam licet angulus contactus ſit minor omni acuto angulo. Iſte tamen angulus poteſt diuidi in finitas quidem partes; ſed in infinitum. Poſſunt enim fieri circuli centris à linea, quam tangit, perpetuò remotioribus: Sic poterit fieri circulus ſemidiametro digiti vnius, ſemidigiti, & ſic in infinitum. Sed illi circoli ſemper faciunt angulum contactus in infinitum minorem. Ergo angulus ille in infinitum diuidi poteſt.

* Probatur vltimò ex linea quadratrice G A. Equidem; etiã ſi vltima para quadrantis C V diuidatur, & ſubdiuidatur in infinitum; ſicut, & vltima pars proportionalis ſemidiametri O B; & à partibus ſubdiuiſis circumferentiæ, ad centrum rectæ, vt B V ducantur. Sicut & à partibus eiuſdem rationis ſemidiametri, perpendiculares, vt O X; in



mutuis occurſibus, & interſectionibus X puncta quadratricis ſemper, ſemperque approximantia magis ipſius baſi exibebunt; ſed numquam ad ipſam baſim A F peruenientia. Quare Quadratrix per ea puncta continuata, numquam conſequetur ſuam baſim, aut ad eam coniungetur, vt oſtendemus coroll. 2. ex pen. 3. trac. de lineis flexis in fine. Vnde partes, quæ inter baſim, & datam partem vltimã quadratricis reperiuntur, vt F X, erunt in infinitum diuiſibiles. Multa ſunt in idem conſpirantia argumenta philoſophica, ſed, quæ, vt extera conſultò relinquimus, cum ſatis ſuperque hæc conuincere videantur.

EXPENSIO VI.

An partes quantitatis phiſicam diuiſionem in infinitum ſubire poſſint.

HÆc quæſtio philoſophicè ſoluenda eſt, cùm hoc, non ab ipſa quantitate dependeat; ſed à rerum natura: Licet enim res donec concipiantur quantę ſemper vlteriùs diuiſibiles concipi debeant. Nihilominus poteſt eſſe; quod res determinatam quantitatem ad ſui exiſtentiam repoſcant, ſic ipsâ earum naturâ poſcente: & ideo quòd licet vlteriùs, vt quantæ diuiſibiles ſint, ſi tamen diuidantur, pereant, cùm iam eâ quantitate non potiantur, quæ ad ipſarum conſtitutionem requiritur.

CONCLVS. I. PROPOS. VII.

Probabile eſt in diuiſione quanti tandem eſſe neceſſariò quieſcendum.

1 PRobatur. Qualitatis per gradus augmentabilis primus gradus à Deo, vel produci poteſt; vel non. Si poteſt: Ergo ille eſt indiuiſibilis: Neque enim ſub minori quantitate intenſionis, qualitas illa producibilis eſt ex ſuppoſito, alioquin aſſignatus ille gradus primos non eſſet. Si verò dicas. Nequaquam id poſſe facere Deum. Illa igitur qualitas primum gradum non habet, à quo produci incipiat, & quomodo habebit ſecundum, & tertium?

2 Efficiat Deus primam partem rei, quam poteſt facere. Sed non repugnat, quod faciat Deus id, quod poteſt. Et ideo non repugnabit conſequenter, quod primam partem rei producat. Quare neque repugnabit, quod vltimam relinquat.

3 Multa ſunt, quæ videntur per ſolam diuiſionem proprias formas deperdere, & alias conſequi. Ergo etiam erunt aliqua, quæ diuiſa ſe ſubducent, & in nihilum abibunt. Nam difficulter poteſt oſtendi in aduſtione ligni, quòd forma noua cinerum ab igne introducatur. Cùm ignis formam cinerum, vaporum, carbonum, ſpumarum, ſcoriarum, & tam diuerſarum rerum, in quæ lignum, & alia ſimilia in ſe adurendo conuertuntur, non contineat. Quod ſi noua forma non eſt ab igne; à quo erit? niſi à ſolâ ſegregatione, quam præſtat ignis, tanquam à cauſa deſtruente connexionem ſub quâ in eſſe perfectiori, & ſub forma altioris ordinis detinebantur. Quâ deſtructâ ſubiectum ad aliud, ad quod erat in potentia, faceſſit. Si ergo res per ſolam diuiſio-

uiſionē poſſunt mutari; ergo etiā in nihilū redigi.

4 Viuentis determinatos limites paruitatis, & magnitudinis recognoſcunt ita, vt datâ vniuſcuiuſque ſpecie, ſub minore quantitate produci nequeant. Ita ergo non improbabiliter poterit de quacumque re inanimatâ concludi, licet tamen repugnantiam; cur ſub minori quantitate eſſe nequeant, euidenter non cognoſcamus.

5 Deus videt omnes partes factibiles in quanto, & quæ ſimul, & quæ ſucceſſiuè fieri queunt. Ergo præter illas diuiſiones, quas videt, Deus nullas alias agnoſcit. Ergo partes ſunt ad vltimum ſui eſſe redactæ: Alioquin, ſi adhuc eſſet capacitas partium, non eſſent omnes partes acceptæ; quas videret Deus.

6 Deus quoque agnoſcit extremo ſignato A, quæ pars immediata ſuccedat; Quæ erit indiuiſibilis; Siquidem, ſi multas partes concluderet, iam non eſſet pars immediata.

Obijcies ſi in quanto partes in infinitum concipi poſſunt. Ergo etiam fieri.

Reſpondetur diuerſam eſſe rationem. Nam concipi quidem poſſunt; quia ſupponitur id quod partes eſſentialiter recipit: At ſi per ablationem ſubiecti tollatur, & quantitas; tunc ſicut quantitas non eſt, ſic nec diuiſibilitas ampliùs concipi poteſt. Nos autem dicimus, quòd ſubſtantia determinatos limites paruitatis obtineat, ita quòd, cùm ad illud vltimum deuentum fuerit, pereat, & deficiat. Vnde neque per diuinam potentiam poſſit in minutiores partes diſcindi; niſi pereat: Eo quòd eſſentialiter ita poſcat eſſe, nec ſub minori paruitate coarctari poſſit.

Dices nulla eſt ratio aſſignabilis; cur dato quolibet minimo quanto, minus etiam dari non poſſit; Ergo quantum eſt diuiſibile in infinitum.

Reſpondetur eandem rationem eſſe de multis alijs in natura exiſtentibus, in quibus, licet nullam poſſimus reddere rationem; cur non potuerint aliter eſſe; adhuc tamen ita neceſſariò ſunt. Scimus enim repugnare mundum non exiſtere in aliqua capedine; & ſcimus item in ſpatijs imaginarijs infinitas capedines reperiri. Sed non poſſumus cognoſcere. Quare Deus potiùs elegerit hanc capedinem, quàm illam. Sic non eſt maior ratio, quod motus diurnus tendat in Occidentem potiùs, quàm in Orientem; & tamen illa tendentia, ſiue in hanc, ſiue in aliam partem neceſſaria eſt. Itaque ſic philoſophandum de quanto: Quamuis enim non repugnet vlteriùs diuidi; non tamen inde aſſerendum; quòd poſſit ſemper diuidi. Licet enim repugnantia ex parte quantitatis non eſſet: poſſet tamen à ſubſtantia, ſeu qualibet rerum corporearum ſpecie, repugnantia ſuboriri.

Dices inter ens, & nihil eſt infinita diſtantia; Ergo, antequam deueniatur ad nihil, infinita diminutio fieri poterit.

Reſpon. Semper factâ qualibet diuiſione, eſſe eandem diſtantiam rei à nihilo. Vnde, cùm per diuiſionem non procedamus ad nihil, diſtantia infinita non erit in cauſa; cur infinitus proceſſus in diuidendo fieri queat. Quare concludimus generaliter non eſſe partes in infinitum factibiles in re quanta; nec quidem in ipſa quantitate; niſi ex ſuppoſitione, quòd maneat quantitas: Sed quia diuidendo in infinitum perit omne ſubiectum corporeum; perit etiam quantitas ipſa. Vnde infinitæ diuiſibilitatis, ſeu in infinitum tendentis capax non eſt.

7 Probatur etiam concluſio. Agens naturale V. g. Ignis attingit omnes partes ſubiecti diſgregando, cùm in omnibus ſit calor. Vel ergo omnes partes factibiles diſgregat, & iam partes in infinitum diſtinguibiles non habemus; ſed quæ, omnes tandem diſgregari, & ſeiungi poſſint. Quod ſi aliquas. Tunc non eſt maior ratio de vna, quam de alis; cùm calor ſit in quacumque parte ſubiecti, æqualiter intenſus; & ſic ſubiectum ſecundùm omnes ſuas partes adustum, non eſſet dilatatum, cùm aliquæ tranſirent immunes ab efficacia caloris.

EXPENSIO VII.

Quid ſit punctum phiſicum, & reale.

CONCLVS. I. PROPOS. VIII.

Punctum phiſicum partes habet non poſſibiles, vel factibiles, ſed deſſignabiles tantùm; deſſignabiles quidem eſſentiâ ſuâ ſic poſcente; non factibiles autem per accidens.

EX dictis hæc concluſio, quæ puncti phiſici eſſentiam explicat eruta eſt. Si quidem, cùm probauerimus puncta per ſe indiuiſibilia nō reperiri in quantitate; reſtat, dùm etiam excludimus progreſſum in infinitum; quòd tandem ad aliquod punctum per accidens ſaltem indiuiſibile deueniendum ſit; quod quidem partes conſequatur, quæ tamen diuidi nequeant; non quia illa entitas ratione quantitatis capax non ſit maioris, & vlterioris diuiſionis: Sed quia non eſt capax ratione ſubſtantiæ, & ſpeciei; quæ ſub minori quantitate conſeruari nequit.

Dices. Si ergo partes in puncto conceptibiles ſunt; ergo etiam; cùm ſubſit quantitas ipſa huius deſſignabilitatis capax; in illa, vt correſpondeat noſtris conceptibus in infinitum progredientibus, partes minores, & minores in infinitum inuenientur.

Reſpondetur. Non conſequi partes deſſignabiles: niſi ex ſuppoſitione, quòd ſit quantitas. Et facta hac ſuppoſitione poſſe intellectum in infinitum procedere in ſubdiuidendo: quia ſcilicet rationem formalem intuetur; ob quam vlteriorem diuiſionem concipere poteſt. Verùm abſolutè nequaquam; neque enim in illo puncto talis ſubeſt quantitas, quæ illarum diuiſionum ſit capax. Quoniam illa quantitas eſt quantitas ſubiecti; quod reſpuit vlteriorem diuiſionem, & ſi fiat perit ſubiectum. Reperitur itaque in puncto ratio formalis vlterioris diuiſionis; non verò entitas illi correſpondens. Sicut in homine reperitur ratio formalis vniuerſalis; non ipſum vniuerſale, ſcilicet vnum quoddam in multis; Et cùm concipimus animalitatem, concipimus vnum quoddam in multis commune Homini, & Leoni: nec inde, ſi quando dicatur de Homine, eſt etiam Leonis; verùm ſit ipſius Hominis, & propter ſuam ipſam animalitatem dicitur Homo, animal. Si ergo in puncto quantitas concipiatur, vt quantitas partes obtinet; at ſi conſideretur, vt coarctata puncto; & in ſubſtantia tali, partes habere nequit. Sic pietas in Deo, vt pietas, eſt diſtincta à iuſtitia: cum tamen in ipſo Deo ſit vnum quid, & idem attributum.

Dices

Digitized by Google

Dices ſecundò idem punctum habet partes Orientales, Occidentales, &c. cùm vndique à ſimilibus punctis tangi poſſit, & cum eis vniri: ergo plures in illo partes reperiri poſſunt.

Reſpondetur. Quantum aliquod poſſe plura ſibi æqualia coniungere, quam plura ſe minora reſpectu ſuę ſoliditatis: Ita vt minor ſit proportio rerum æqualis ſoliditatis ſe alteri quanto A coniungentium ad quanti A ſoliditatem; quàm minoris ad ipſam ſoliditatem. Sic Cubus ſex ſibi cubos æquales coniungere poteſt ob ſex æquales ſuperficies, quibus circundatur.

Ita vt proportio cuborum æqualium, ſe alteri ſibi æquali coniungentium ſit vt 6. ad 1. At ſi cubi minores accipiantur, V.g. quorum 27. æquēt cubum A; tunc quælibet ſuperficies ſibi coniunget 9. cubos minores eo quòd comprehendat 9. quadratas ſuperficies æquales baſibus eorum, & ideo erunt cubi ambientes, & tangentes cubum maiorem 54.; & hinc cum cubus maior ſit poſitus 27. cuborum cubis tangentibus æqualium erunt, vt 54. ad 27. nempe vt 2. ad 1. Et ſi cubi tangentes dimminuantur reſpectu cubi A, & 64. minores integrent illud maius in ſua ſoliditate; tunc quælibet ſuperficies cum ſit 16. quadratolorum æqualium baſibus cuborum paruorum tangentium, erunt tangentes cubi 96. nempe vt 96. ad 64. nempe vt 2. ad 3. & ſic conſequenter. Vbi vides æqualia habere maiorem capacitatem ad ſibi coniungendum æqualia: quàm minora. Superficies ergo externa quanti, quę tangit aliud æquale, ſe exhibet à pluribus tangendam æqualibus, quàm inæqualibus: Quare etiam punctum licet in ſe non habeat partes ſolidas, quæ omnibus punctis æqualibus tangentibus correſpondeant: Poterit tamen conſequi ſuperficies tactiles plures: quàm quòd ipſum ſit in ſua ſoliditate, in quibus tangatur. Cùm ſic hæc omnis quantitatis proprietas; Cùmque punctum à ratione, & eſſentia quantitatis non excludamus hinc eſt. Quòd & eius terminationes, vt poſcit eſſe quantitatis, ei concedamus.

Dices hoc punctum tangeret aliud ſecundùm ſuperficiem exteriorem, & non ſecundùm interiorem; Ergo partes complecteretur exteriores, & interiores. Reſpondetur negando conſequentiam. Nam ſuperficies quanti, non eſt pars quanti; ſed eius terminus exterior, ſi præcisè ſumatur, & extrinſecè tantùm, vt infra oſtendemus. Tactus verò extrinſecus eſt; quare ab illo tactu, qui non eſt ſecundùm ſoliditatem, ad partes ſolidas non eſt arguendum. Nam tunc argumentum valeret, ſi partes ſolidæ ex ſuperficiebus, prout tanguntur, & quatenùs tanguntur, conſtarent: prout verò ſunt tales, nulla profunditate gaudēt, & ideò nec ſoliditatem adipiſcuntur. Cum tactus non ſit, nec in minima quidem parte penetratio. Quare ſuperficies tactæ partes ſolidas integrare, & conſtituere nequeunt, vtpote indiuiſibiles. Vt verò hæc indiuiſibilitas ſuperficierum intelligenda ſit infra dicemus.

Dices 4. Si ſint duo circuli concentrici, qui ſuper duas lineas ſimul ſe voluant peruenientes ad eundem terminum, æqualem lineam percurrent: Ergo duo puncta à circulo minori in motu ſimul occupantur; ergo punctum circuli partes habet, quod pluribus punctis in linea, quam percurrit, correſpondeat.

Reſpondetur moueri circulum minorem velociùs, quàm maior circulus. Velocitas autem motus eſt cauſa, quòd ſimul occupet duas partes velocior, & minor circulus; dum maior vnum phyſicum indiuiſibile pertranſit tardiori motu. Nam illa correſpondentia motus ad duas partes non eſt ſimul; ſed ſucceſſiua. Quare alicui ſuperficiei etiam indiuiſibili plures æquales partes correſpōdere poſſunt ſucceſſiuè; imò ſimul, quod contactus indiuiſibilium ſit diuiſibilis. Velociùs itaq; moueri eſt acquirere plures partes; dū aliud tardius acquirit partem aliquam indiuiſibilem, & ſicuti datur indiuiſibile phyſicum; ſic datur mouens tardiſſimum, quò tardius dari nequit: quia ſcilicet virtus motiua ſub minori intenſionis gradu nequeat produci, quæ eſt ad vnum indiuiſibile phyſicum quantitatis.

EXPENSIO VIII.

Quid ſint Mathematica indiuiſibilia.

TRia ſunt Mathematica indiuiſibilia. *Punctum*, cuius pars nulla. *Linea*, quæ partes habet ſecundùm longitudinem tantùm. *Superficies*, quæ partes obtinet ſecundùm longitudinem, & latitudinem, non ſecundùm profunditatem, de quibus acturi ſumus.

PRÆASSVMPTVM.

OBſeruandum eſt autem. Quòd etiam priuatio corporis eaſdem commenſurationes; & figuras, quas corpus obtinet, conſequi poteſt relatiuè ad corpus, & abuſiuè. Sic capedo corporis cubi cuba eſt, & cubi palmaris, cuba eſt, & palmaris. Sicut etiam priuatio lucis, nempe vmbra, longa, lata eſt, & vt lux mouetur, vt lux, figuram habet, quam à corpore illuminato conſequitur.

CONCL. I. PROPOS. IX.

Superficies, linea, punctum ſunt quid reale indiuiſibile, iuxta illud eſſe ſecundùm quod accipiuntur: non abſolutè.

PRobatur. Nam priuationes quantitatis eſſe nequeunt, & accipi, vt vltimum non eſſe quantitatis. Nam non datur priuatio priuationis: At verò linea, cùm ſit terminus ſuperficiei, eſſet priuatio ſuperficiei; ſed ipſa ſuperficies eſſet quoque priuatio, cùm eſſet vltimus terminus corporis; Ergo eſſet priuatio priuationis, quod eſſe nequit.

2 Corpora ſe tangunt in ſuperficie; Sed non ſe tangunt in nihilo, ſeu priuatione; quia contactus nihili, nullus eſt: Ergo ſuperficies eſt aliquid rei. Sed illud rei non habet profunditatem aliquam, cùm corpora ſe tangentia non ſe penetrent: Ergo eſt aliquid rei indiuiſibile.

3 Superficies, & lineæ figuram conſtituunt, vel planam, vel corporis ſolidi. Ergo non ſunt nihil; ſed aliquid rei. At figura partium interiorum non eſt. Ergo exteriorum. Verùm id, quod eſt purè exteriùs nulla profunditate graſſeſcit, ſi ſit corpus; nulla latitudine dilatatur; ſi ſit ſuperficies. Ergo ſuperficies, lineaque indiuiſibilis eſt. Et idem dicas de puncto; cùm lineæ extremum ſit. Neque valet recurrere ad intellectū

quia contactus, figuraque ſunt quid à parte rei.
Dices. Si ſuperficies, linea, punctum ſunt quantitates, & ſunt indiuiſibiles. Ergo quantum ex indiuiſibilibus componitur.

Reſpondetur id non ſequi. Nam non ſunt indiuiſibiles abſolutè; ſed indiuiſibiles, vt vltimæ & contingentes aliud ſecundùm ſui vltimum eſſe: Si autem eſt vltimum eſſe quanti, non poteſt conſequi ſecundùm illud, in quo eſt vltimum, & ſecundùm illud, in quo tangitur, partes. Nam, ſi ſuperficies v. g. partes enumeraret, illa non eſſet vltimum molis; nec propriè tangeretur; ſed penetraretur: cum illud, quod tangeretur, non eſſet exterius; ſed quid internum. Cùm igitur ſint indiuiſibiles, vt vltimæ ſunt, & quatenus tactæ; illa tamen quantitas, vt tacta; & vltima non ſubſiſtit, nec eſſe poteſt ſine partibus intrinſecis, ob quas vltima dicitur: ſi enim partes internæ non eſſent, hæc non eſſet vltima, nec exterior. Quare licet, vt vltima, partes non amplectatur profundas, & vt tacta; quia tamen ſe ſolâ non eſt, nec eſſe poteſt; hinc emergit, quòd non ſit abſolutè indiuiſibilis; Sed diuiſibilitatem, vt compoſita ex alijs nanciſcatur.

CONCL. II. PROPOS. X.

Pars vltima indiuiſibilis, nec eſt, nec eſſe, aut concipi poteſt ſine alijs compartibus.

PRobatur. Quod eſſe nequeat ſine ſuis compartibus: tum ex dictis. Quia illa ſe ſolâ, aut eſſet quantitas molis, aut diuerſæ ſpeciei, non molis; quia trinam dimenſionem non conſequeretur, non alterius ſpeciei: Quia aliam entitatem; quam quantitatis molis non obtineret, cùm ſit terminus corporis ſolidi.

Quod verò nequeat concipi ſine ſuis compartibus perfecto conceptu, probatur. Quia ſuperficies, linea, punctum ſunt vltimum eſſe rei: Quod autem vltimum refertur ad primum. Quare eſt quid relatiuum: Relatiua autem ſunt ſimul cognitione, nec vnum ſine altero perfectè concipi poteſt. Quare, nec ſuperficies poterit concipi ſine alijs compartibus.

2 Si punctum poſſet concipi ſine alijs partibus v. g. ſine linea deberet concipi prout deffinit Euclides. *Cuius pars nulla*: ſed id, quod nullam habet partem, quantitatis nihil eſt, ergo deberet concipi, vt priuatio quantitatis, & vt nihil, & idem dicas de lineâ, & ſuperficie ſecundùm eam rationem, ſecundùm quam indiuiſibiles ſunt.

Dices. Tactus non præſcindit: & tamen tangit ſolam ſuperficiem; Ergo ſuperficies, ſi ſe ſolâ tangi poteſt: etiam ſe ſolâ, & eſſe, & concipi poteſt.

Reſpondetur. Tactum eſſe modum quendam; Modus autem non eſt aliquid ſuperadditum rei, cuius eſt modus. Quare, cum ſit idem, ac ipſa ſuperficies modificata, ſicut ipſe l. realiter rebus superueniat, nec eſſe, nec concipi ſine illis valet, quæ modificat. Sic nec ipſius rei modificatæ ab alijs, quibus eſſentialiter annectitur, conceptus diſtinguere poteſt; ſi de perfectis cōceptibus ſermo ſit, ſicut nec modus actionis, quòd ſit facta hoc, vel alio modo vim habet ſeiungendi, nec realiter, nec per intellectum ipſam actionem à motu, & paſſione licet modos actionis paſſionem nullo modo afficiat. Sic ſitus non efficit, figuram ſine re figurata poſſe ſubſiſtere, licet figuram ipſam afficiat, & eam mutet.

3 Probatur vtraque pars. Quantitas molis non datur; nec concipi poteſt ſine ſuperficie, ſicut nec ſuperficies ſine linea, nec linea ſine puncto. Alioquin eſſet quid infinitum. Ergo neque ſuperficies, linea, punctum ſine quantitate molis, cùm quantitas molis non ſit aliquid latiùs patens, quàm ipſius terminationes.

COROLLARIVM.

CVm ergo ſuperficies, linea punctum non ſit, nec eſſe poſſit ſine corpore: hinc eſt, quod non ſint; niſi vt tales, indiuiſibiles; non autem abſolutè, & conceptu adæquato concepta, & quòd, nec conceptus ſuperficiei, nec lineæ, nec puncti perfectus, & adæquatus hauriri queat; & ideo, quòd in ſuperficie, lineâ puncto ſemper partes cōcipiendæ ſint, ſi ſit adæquatus cōceptus. Quare à Mathematicis definitur, nec ſuperficies, nec linea, nec punctum, ſecundùm ſuum adæquatum conceptum. Verùm ſecundùm id; quod præciſè dicunt, & explicitè. Sicut definitur à Theologia pietas Dei, licet idem ſit cum iuſtitia, non quidem, vt idem eſt cum ipſa, & prout in ſuo conceptu eam implicat; ſed explicitè prout ab illa conceptu inadæquato præciſa concipitur.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Superficies, linea, & punctum ſecundùm ſuum eſſe inadæquatum à Mathematicis accipiuntur.

PAtet. Quia definiunt ea eſſe quædam indiuiſibilia, aut omnino, aut ſecundùm quid. Sed etiam definiunt illa, vt quantitates. Ergo conſiderant inadæquatè. Cum quantitas adæquatè concepta nullis indiuiſibilibus integretur.

CONCL. IV. PROPOS. XII.

Superficies, linea, punctum, accipiuntur quoque, vt negationes vlterioris extenſionis.

PRobat. Quia ſuperficies non ſemel accipitur in aliquo corpore ſolido pro eo, quod mediat inter vnam partem, & aliam non realiter factam; ſed tantùm conceptam. At id, quod inter vnam, & aliam immediatam interijcitur, nihil eſt, & ſolùm negatio vlterioris extenſionis, prout taliter limitatur, aut limitata fuit ab intellectu: Ergo ſuperficies etiam pro negatione extenſionis vlterioris accipitur. Idem de linea, & puncto intelligi debet. Nam linea diſtinguens ſuperficiem in multas partes, eſt inceptio huius partis, & deſitio alterius in eâdem ſuperficie cōcepta. Dices. Non poteſt concipi negatio negationis. Reſpondetur concipi ſuperficies, non vt negatio; ſed vt, quid poſitiuum inadæquatè conceptum, in quo, & cuius poteſt negatio concipi.

EXPENSIO IX.

An datis indiuiſibilibus, illa poſſint eſſe obiectum Mathematicæ.

BOnauentura Caualierius per Indiuiſibilia, libro ad id conſcripto, non ſine ingenio, & ſubtilitate Mathematicam ſe promouare profitetur; Et ex contemplatione punctorum indiuiſibilium in quanta exiſtentium æqualitates, & proportiones Mathematicorum corporum inuenire.

Vnde rectè hic quærimus: an indiuiſibilia, ex ſuppoſitione, quòd darentur, poſſint deſeruire pro obiecto, quod ſpeculationis Mathematicæ capax exiſtat.

CONCL. I. PROPOS. XIII.

Indiuiſibilia ſimpliciter non ſunt obiectum Mathematicæ.

EST contra prædictum, Verùm communis inter Neotericos Betinum par.2. Epilog. Planim. Bollialdi de lineis ſpiralibus propoſ. 42. Not. 2. Vincentij Mutij de Maximis, & Minimis lib. 1. propoſ. 17. Primus quidem directè impugnat; Alij verò amiciſſimi ſui laudant ingenium; cautè tamen vſurpandam doctrinam cenſent. Et tandem Goldinus de centro grauitatis hanc doctrinam diuerſimodè carpit.

1 *Probatur.* Licet enim indiuiſibilia in quantitate laterent; non tamen conſtat: An ſint finita, vel infinita. Ergo non poſſunt præſtare fundamentum euidens demonſtrationi.

2 Suppoſitis punctis finitis. Dantur lineæ irrationales, ſuperficieſque, & corpora. Si verò punctis finitis hæc conſtant, irrationales nullo modo eſſe queunt, cùm puncta finita aliquo numero exprimi poſſint: Partes verò linearum incommenſurabilium nullo numero effari poſſunt, vt ſuo loco dicemus.

Dices indiuiſibilia quidem proportione rationali potiri, ſeorſim, & diſtributiuè ſumpta; non autem collectiuè.

Sed fruſtra. Nam collectio finitorum nihil aliud eſt, quam ipſa diſtributiuè ſumptorum multitudo. Vndè ſi diſtributiuè dicunt omnia proportionem, & numeris indicari poſſunt. Ergo etiam omnium collectio numero aliquo exprimibilis eſt.

Deinde licet finita: non tamen omnia accipi poſſunt: ſed aliqua; à quibus paritas ad alia acceptibilia deducatur. Sed illa aliqua rationalia ſunt. Ergo et iam rationalis erit aliorum proportio.

3 Suppoſitis item punctis finitis. Deſtruit hęc opinio lineas; ſuperficieſque potentiâ tantum commenſurabiles. V.g. Latus quadrati incommenſurabile eſt diagonali; licet eorum quadrata commenſurabilia ſint, nempe vt 1. ad 2.: Sed omnes lineæ æquales lateri, ex quibus conſtat quadratum ex latere effectum ſunt incommenſurabiles diagonali, & omnibus illi æqualibus, ex quibus conſtat quadratum diagonalis. Ergo totum quadratum lateris incommenſurabile eſſet quadrato diagonalis. Cùm lineæ omnes, ex quibus vtrumque quadratum conficitur, ſint inuicem incommenſurabiles.

4 Datis punctis infinitis. Ea ex Euclide proportionem dicunt; quæ multiplicata poſſunt ſe inuicem ſuperare. Sed infinitum multiplicari nequit; neque aliud ſuperare. Ergo datis punctis Infinitis, quantitates, vt ex ipſis conſtantes, conſideratæ nullam inuicem dicent proportionem. Quod autem Infinitum multiplicari nequeat, patet. Quia daretur infinitum triplum, quadruplum, centuplum: Ergo daretur Infinitum alio maius: Si autem vnum infinitum concedatur maius alio; iam ratio infiniti ceſſat in minori; Cùm ibi finiatur, vbi incipit aliud augeſcere.

5 Probatur. Quoniam de finito ad infinitum arguere non licet, cùm infiniti, & finiti nulla ſit proportio. Sed in argumentis omnia quantitatiua accipi nequeunt, quia infinita ſunt: Ergo aliqua V.g. 10. aut 20. lineas ex quarum æqualitate; vel proportione ad alias, arguitur totam planitiem alteri, vel æqualem eſſe, vel proportionalem. Ergo argumentum procedit ab aliquibus lineis ad omnes. Sed aliquæ finitæ ſunt, omnes Infinitæ. Itaque argumentum arguit à finito ad infinitum; ſiquidem ſuperficies totę infinitis lineis conſtant.

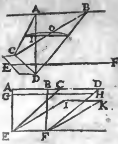
Dices omnia aliarum, etiã ſi ſint infinitę ſimilis ratio demonſtratur, & ideo aliarum quamuis infinitarum idem argumentum vrget.

Reſpondetur nullam rationem æqualitatis, vel inæqualitatis in indiuiſibilibus reperiri; quę author admittit; cùm punctum ſit, cuius pars nulla: Vnde tota inæqualitas rejicitur in numerum punctorum; quibus lineæ conſtant; qui numerus cum ſit infinitus omnem quoque proportionem obliterat. Deinde cum neſciamus an in quantitate ſit maius, aut minus Infinitum alio, vel æquale. Si omne infinitum eſt æquale, deſtruit omnem proportionem maioris, aut minoris inæqualitatis. Si admittuntur infinita inæqualia non poſſumus ſcire; an ſint plura, vel pauciora; quàm oportet; & ſic proportio, quæ ſecundùm alteram rationem militat, à numero incerto indiuiſibilium deſtruatur.

6 Probatur vniuerſaliter. Nam ex hoc ſequeretur; quod minus eſſet æquale maiori. Dicunt enim aduerſarij: Rectangulum A B A F, in ſchemate inferiori, eſſe æquale rectangulo E C D F, vt verè eſt, & oſtendit Euclides lib. 1. propoſ. 36. Sed non ex demonſtratione Euclidis. Verùm, quia inter lineas A D, E F non poſſit intercipi; niſi æqualis multitudo linearum parallelarum, qualis vna ex ipſis eſt G H. Quòd ſi ita eſt. Ergo E C eſſet æqualis lineæ E A, nam lineæ omnes, quæ duci poſſunt inter parallelas E F, & A D occupãt omnia puncta linearum B A, & E C; Ergo E A, & E C æquali multitudine punctorum conſtabunt. Quare E C erit æqualis lineæ E A maior minori, quòd eſſe nequit: At ſi maior multitudo punctorum eſt in E C: Ergo non tota E C lineis productis occupata eſt; cùm tamen totam ſuperficiem A D E F integrent, & extendant.

Deinde, ſi maior multitudo punctorum eſt in E C; quàm E A: Plures ergo lineæ duci poterunt; cùm ex omnibus punctis lateris E C parallelæ duci queant: Ergo maius planum erit E C D F; quã E A B F contra Euclidis demonſtrationem.

* 7 Probat. Nam ſint duo plana in figura altiori parallela A B, E F, & ſectio C D exiſtat ad angulos rectos ad E F; ſintque triangula C A D, & C D B æquicrura; Erunt ergo inter parallelas E F, & A B.



Illę ergo ſuperficies, quæ inter hæc plana A B, & E F. interponuntur, & ſecant triangulum C A D, tot erunt, quot illa, quæ ſecant triãgulum C D B: Ergo erit ęqualis ſuperficies C A D, ſuperficiei C D B, cùm tot lineas ſectionibus planarum impreſſas recipiant ambæ, vel eamdem multitudinem planorum ſecantium continuorum, vt eſt I O terminent. Sed verè ſunt inæquales: maiorque eſt C D B, quam C A D, ergo ſuperficies earumdem linearum capax maior eſſe poterit; quã alia: Quod ſint inæquales, patebit ex dicendis Propoſ. I. lib. 6. Elc, quòd eadem baſis exiſtat, & inæqualis eorum altitudo.

Dices. Lineas conſiderandas ſecundùm eundem ſitum, nimirùm parallelum. Sed huic obiectioni vtraque adductarum proximè probationum ſatisfacit: Nam in primâ accipiuntur ſecundùm eundem ſitum, vel ductum parallelum, & tamen plura puncta reperiuntur in latere E C; quàm E A: cùm tamen planities ſint ęquales. Quòd ſi ſecundùm eundem ſitum lineæ G H non ſunt plura puncta in E C, quàm E A; Ergo neque in ſecundo ſchemate altiori plura puncta erunt in C B, quàm C A, & ideo C A D, & C B D erunt æquales ſuperficies. Quod verum non eſt ex cit. Eucl. I. propoſ. lib. 6.

Deinde ſequeretur, quod lineæ C B eſſent æquales lineę C A, ſaltem ſecundùm illum ſitum acceptæ, cùm eadem multitudo punctorum in C A reperiatur, quæ in C B, quòd tamen falſum euidenter eſt.

8 Probatur. Quia dantur figuræ Iſoperimetræ, quæ ſcilicet ſub eodem ambitu, linearum, & laterum ſuperficies continent inæquales. Quę tamen non eſſent: Cum eadem multitudo punctorum in lateribus æquales in multitudine duci lineas ſuperficiem ſecantes expoſceret, cumque multitudo linearum, tùm huius, tùm alterius ſuperficiei eſſet æqualis; ſuperficies quoque eſſent æquales contra præſuppoſitum.

Dices. Ex æqualitate omnium linearum, quæ duci poſſunt in circulo à centro ad circumferentiam, arguitur æquidiſtantia circumferentiæ à centro. Sic ex omnibus angulis rectis, quos facit linea erecta, & inſiſtens cum omnibus lineis, quæ ſunt in plano, arguitur, quòd illa linea ſit perpendicularis lib. II. propoſ. 3. Eucl.

Reſpondetur. Hic neque æqualitatem, neque proportionem argui: ſed ſolùm ſitum. Vnde eſt diſpar ratio. Deinde à multitudine linearum æquali, non arguit vllam æqualitatem: Sed ab ipſis lineis æqualibus, ſint, quot quot ſunt, æquidiſtantiam definit. Ita vt argumentum in numero linearum non fundetur: ſed vel in ſitu, vel in æqualitate earum: Vnde patet, quòd ab infinitate, multitudineque earum omninò præſcindit. Tandem non arguit à lineis, vt indiuiſibilibus ad planitiem, ſed à lineis ſumptis prout ſunt diuiſibiles, & ſecundùm longitudinem: Vnde non tranſit de genere ad aliud genus quantitatis. Hinc autem eruitur.

9 Argumentum. In Mathematicis non eſt bona illatio, cùm fit tranſitus de genere ad aliud genus quantitatis, V. g. à linea ad ſuperficiem, cum inter prima genera non ſit proportio: Sed Cauallerius argumentatur ab indiuiſibilibus ad planities, & à planis ad corpora. Ergo eius argumenta verâ, & euidenti illatione non concludunt.

TRA.

Digitized by Google

TRACTATVS II.
PRÆLIMINARIS.

De eſſentia quantitatis diſcretæ.

CVM multa, quæ de quantitatis numericæ eſſentia dicturi ſumus, & etiam ex parte ea, quæ diximus, dependeant à quantitatis diſcretæ cognitione. Hinc eſt, quòd antequàm ipſas Mathematicas propoſitiones attingamus, aliquam de quantitatis diſcretæ eſſentia haurire cognitionem ſit omninò opportunum; nam planiori, liberiorique pede, tùm diſcretæ, tùm continuæ quantitatis relationes, & reſpectus percipiendi facultas erit.

EXPENSIO I.

Quid ſit vnitas numerica.

VNitas, quantò magis ſimplex eſt, tantò laborioſiùs penetratur, vt, velut indiuiſa, ab intellectu non poſſe ſecerni, & in ſua prædicatu ſeiungi, videatur. Vnde apud Methaphiſicos mirum eſt, quot quantæque opiniones de *vnius* eſſentia ventilentur. Sed ea, quæ certiora ſunt, & euidentiora ex noſtris Placitis philoſoficis hic deducemus.

CONCL. I. PROPOS. I.

Vnitas numeralis eſt eadem, ac indiuidualis tùm re, tùm ratione.

1 PRob. ex Ariſt. 3. Methaph. tex. 14. *Numero enim vnum dicere, aut ſingulare nihil differt; ita enim ſingulare dicimus, quod numero vnum eſt.*

2 Ratione prima pars oſtenditur. Si vnitas indiuiduationis non eſſet eadem cum vnitate numeri: multitudo quæ opponitur vnitati numeri; non opponeretur indiuiduationi, ſed eſſet quid diſparatum; vt humiditas, quia non eſt contraria frigori, eſt quid diſparatum reſpectu caloris. Vnde cum calore morari poteſt; Sed quælibet multitudo deſtruit, tùm vnitatem numericam, tùm indiuidualem; eſtq; contraria, tùm vni, tùm alteri: Ergo idē eſt vnitas indiuidualis, & numeri.

3 Eatenùs entia ſunt multiplicata, quia numerabilia, & è contra. Multiplicata verò ſunt, quia diuiſa ſunt in ſe, & diuiſa à quacumque alio; Sed eſſe diuiſum in ſe, & diuiſum à quocumque alio eſt vnitas indiuidualis: Ergo hæc ipſa eſt etiam numeralis.

4 Si tollatur per intellectum omnis vnitas numeralis, relinquendo in ſubiecto vnitatem indiuiduationis: Ita vel erunt numerabilia, vel non. Si poterunt numerari; Ergo contra hypoteſim vnitas numeralis adhuc in ſubiecto latet, cùm quantum numerabile efficiat: Si verò non ſunt numerabilia; Ergo contra præſuppoſitum vnum eſſent; Siquidem illud vnum eſt; quod numerali pluritati non correſpondet.

5 Entia numerata conſtituunt numerum. Quia reperit intellectus multitudinem, atque multiplicationem: Sed nulla aliā entia à parte rei multiplicationem adipiſcuntur; niſi indiuidualem: Ergo vnitas indiuidualis, etiam numeralis fatēda.

Prob. 2. pars. Tunc aliquid cum fundamento diſtinguit potentia intellectiua: quando reperit, vel capacitatem in re, vel æquiualentiam ad plura actu diſtincta: ſed hæ duæ vnitates numerica, & indiuidualis diuerſitatem inter ſe non habent, nec pluribus ſeparatis æquiualent. Ergo intellectus illas diſtinguere nequit. Quod diuerſitatem inuicem non ſeruent; quia indiuidua etiam, vt indiuidua, numerabilia ſunt; Et quia numerabilitas, & indiuiduatio vnitatem non variant, nec vnum numerale alio pactu ſe gerit, ac indiuiduale. Quòd verò in ordine ad aliud non diſtinguātur, id facit. Quoniam vnitas numeralis, & indiuidualis non æquiualent diuerſis, cum vnitas numeralis illis omnibus æquiualeat, cui æquiualet indiuidualis. Cui enim iſtę vnitates æquiualere poſſunt? niſi alicui vnitati? Pluribus enim vnitatem habentibus ſubiectum habens vnitatem numericam ſimul, & indiuidualem correſpondere nequit. Illa enim vnitatem duplicem habentis vnumquodque, & vnitatem numeralem, & vnitatem indiuidualem poſſideret. Quare tùm vnum, tùm aliud vtriſque vnitatibus numerali, & indiuiduali correſponderet.

Dices 1. Subſtantię ſpirituales ſunt numerabiles, licet non ſint indiuiduę. 2. Multitudo ipſa eſt quoque numerabilis: Nam exercitus, congregationes, acerui numero ſubeſſe poſſunt. 3. Gradus Methaphiſici etiam in eodem ſubiecto, & modi numerabiles ſunt, & tamen indiuidua nō ſunt: Ergo vnitas indiuidualis numerica non eſt.

Reſpondetur hęc omnia eſſe numerabilia, quo pacto ſunt diuiſa, & vna. Nam quoad ſubſtantias ſpirituales diuiſę verè ſunt ab inuicem, & rationem indiuiduam veram habent ſecundùm Theologos numeroſiores. Quoad verò ea, quę ſunt vnum per accidens: iam ſicut ſunt vnum per accidens, ita numerantur per accidens, & fictè vnum dicuntur, tùm numericè, tùm indiuiduè. Tandem de gradibus methaphiſicis non alio pactu ſentiendum, qui, cùm ſint quid pluribus commune veram vnitatem nō participant:

&

Google

& ſic nec veram numerabilitatem. Sed eam, quã mens noſtra præſcindendo illis tradit. Quare ſicut verè ſunt vnum in intellectu prædicata eſſentialia, vt vnũ cogitata verè numerabilia ſunt; & vt in mente, numerabilitatem conſequuntur propriam, vt propria vnitate gaudent; nempe intellectuali ad imitationem numerabilitatis à parte rei. Sed tolle, quod appoſuit humana mens vnitatis, aut diuiſionis, & numerabilia non erũt. Modi verò multiplicantur ad ſubeundam numerabilitatem per ſuam fictionem noſtri intellectus, qui aſſumit idem ſubiectum multoties, & vt ſubiectum diuerſorum modorum plurificat. Non enim poteſt concipi modus ſine re cuius eſt modus; & ideo, cùm concipit duos modos implicitè, cõcipit gemina vice ſubiectum, in quo ſunt, & ſic idem ſubiectum multiplicat tanquam ſibi notum ex gemina varietate. Verùm modus abſolutè numerabilis non eſt. Cùm verò plures modi, vt modi ſunt, non ſint, nec plures entitates, nec quid plurificatum, imò ab eodem ſubiecto, in quo inexiſtunt, nec re, nec ratione diſtinguantur, & modus, nec quidem poſſit concipi ſine re, cuius eſt modus. Ergo tantù minùs numerari.

Dices contra 2. partem. Poteſt intellectus concipere vnitatem indiuidualem in ordine ad aliud indiuiduum. Numericam in ordine ad ſe, qui numerare poteſt: Ergo poteſt per diuerſos reſpectus iſtas duas vnitates diſtinguere.

Reſpond. Poſſe quidem intellectum conſiderare diuerſos reſpectus: ſed hoc non eſt multiplicare conceptus ipſius rei. Ac relationes diuerſas in ipſa re conſiderare. Quòd maximè aſſeras de prædicamentalibus, vt ſunt iſtæ. Nam etiam per aliquos, nec quidem tranſcendentales relationes ſuum multiplicant conceptum. Cùm per multos actio, paſſio, & motus, nec quidem ratione diſtinguantur, & tamen ſunt reſpectus tranſcendentales operationis ad agens, & paſsũ. Sic animal, licet, vt genus, dicat ordinem ad intellectum, & vt animal, ad naturas, in quibus eſt; non tamen genus, & animal duo conceptus ſunt in ipſo animali, ſed illud ipſum animal genericum eſt, & prout ſubſtat noſtris conceptibus.

CONCL. II. PROPOS. II.

Vnitas numeralis eſt indiuiſio in ſe, & diuiſio à quocunque alio.

PRob. ex præfata concl. Quoniam vnitas numeralis eſt idem re, ac ratione, quod vnitas indiuidualis. Sed vnum indiuiduale definitur; Quòd ſit in ſe vnum, at diuiſum à quocumque alio. Igitur tale erit quoque vnum numericum: Vnde eius vnitas erit indiuiſio in ſe, & diuiſio à quocumque alio:

CONCL. III. PROPOS. III.

Quantitas continua eſt fundamentum vnitatis poſſibilis numeralis in quocumque ſubiecto.

PRobat. Nam omne continuum diuidi poteſt: quæ verò diuiſa ſunt indiuidua ſunt. Vnde & numerabilia.

COROLLARIVM.

HInc eruitur. Intellectum in re quanta ſufficiens fundamentum nanciſci numerandi partes. Quia adeſt earum poſſibilitas, ob quam ſaltem potentiâ numerabiles ſunt, ſicut & ſunt potentiâ multiplicabiles. Vnde bene Ariſt. 2. Methaphiſ. tex. 2. inquit. *Cognoſcitur quantum, vt quantum, aut vno, aut numero; omnis autem numerus vno: Quare omne quantum, prout quantum, vna cognoſcitur; Et quo primo hoc cognoſcitur ipſum vnum, propter, quod vnum, prout vnum, principium eſt numeri, prout numerus eſt.*

CONCLVS. IV. PROPOS. IV.

Quantitas intenſionis quoque eſt fundamentum vnitatis numeralis poſſibilis.

PRob. ex noſtris placitis Philoſophicis. Quoniam accidens ſeparatum à ſubiecto, vel ſaltem diuinâ omnipotentiâ, indiuiduum conſtituere poteſt. Quare ſi tres, & tres gradus accipiantur caloris, & ſine ſubiecto continerentur, efficient duo indiuidua. Ergo etiam qualitas; cùm conſequatur indiuidua poſſibilia, erit fundamentũ multiplicationis, & vnitatis numeralis.

CONCLVS. V. PROPOS. V.

Quantitas ſucceſſiua, prout dicit res pertranſeuntes, eſt numerabilis, aut actu, aut potentiâ.

PRob. Quia omne, quòd mouetur ſucceſſiuè; aut extenſum, aut intenſum, aut diſcretum eſt, ſed hæc propriè numerabilia ſunt. Ergo etiam quantitas ſucceſſiua, quæ conſiſtit in motu iſtarum quantitatum, numerabilis eſt, quoad partes vi motus pertranſeuntes, in quibus ratio temporis conſiſtit.

COROLLARIVM.

ET hinc emergit. Quòd tempus quoque numerabile ſit; Quia ſcilicet numerantur partes æquali duratione pertranſeuntes, aut ſaltem proportionali.

EXPENSIO II.

An vnitas, numeruſque diſtinguantur realiter à re, in qua ſunt.

CVM dicimus vnum, aut numerabile operæ pretium eſt ſcire; an intelligamus de ſubiecto, aut in ſubiecto ſit aliquid aliud, quòd numerabile, & vnum appellatur.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

Vnitas, quæ eſt principium quantitatis diſcretæ, non diſtinguitur realiter à re vnitatem habente.

ESt concluſio noſt. Paſq. diſput. 45. par. 2. ſec. 3.

Probat. Nam ſi vnitas eſſet accidens aliquod, ſuam vnitatem indiuidualem poſſideret. Hæc vnitas itaque; aut eſt vna aliâ quadam ſuperadditâ vnitate, aut eſt vna ex ſe, ſi ex ſe vnitate fruitur: Ergo etiam ſubiectum vnum eſſe poterit abſque hac ſuperadditâ vnitate. Si verò requiritur alia vnitas, quæ ſit accidens ſuperadditũ;

iam

iam ad hanc vnitatem alia requireretur, & ſic in infinitum, quod repugnat.

2 Per hoc conſtituitur aliquid indiuiduum numero; *Quod ſit vnum in ſe, & diuiſum à quocumque alio*, ſed per aliquid extra ſe non poteſt quidquam eſſe indiuiſum in ſe, & diuiſum à quocumq; alio, ergo nec vnitatem numericam conſequi poteſt: Minor propoſ. exponitur. Nam per hoc, quòd ſubſtantia ſit alba, non eſt alba in ſe propriè: quia de ſe etiam nigredinis capax eſt. Vnde de ſe, neque alba eſt, neque non alba. Ita, ſi aliquid eſſet vnum in ſe per aliquid ſuperadditum, deberet eſſe indifferens ad diuiſionem, & indiuiſionem; nempe, neque eſſe diuiſum, neque non diuiſum; quod eſt impoſſibile.

3 Si indiuiduatio eſt forma ſuperadiuncta; poterit deſtrui à Deo. Deſtruatur. Itaque illa natura iam indiuiduatione expoliata; vel erit à quocumque alio diuiſa, vel non? Si non erit diuiſa: Ergo erit idem cum aliqua alia natura ſingulari, & ſic eſſet ſingularis, ex alterius, cum qua vnum eſt, ſingularitate. Quod ſi, nec quidem ipſa ſingularis eſt, cum alia idem ſequeretur, & ſic de alijs, donec ad naturam ſingularem aliquam deueniremus, & vltimam, quæ vtique datur, & tunc illa eſſet vna, cùm ſit vltima; quod eſt abſurdum cum dentur multæ naturæ ſingulares. Vel eſſet diuiſa à quocumque alio illa natura ſingularitate priuata à Deo. Et iam ſingularis eſſet.

Deinde 4. A parte rei vnum in multis non admittitur: ergo quælibet natura in ſe eſt diuiſa in plura ſuppoſita. Alioquin ſi in ſe eſſet indiuiſa, & per multas ſuperadditas vnitates diuiſa, eſſet vniuerſale à parte rei.

5 Natura non eſt poſſibilis ſine indiuiduis: Ergo inter eius prædicata eſſentialia inuoluitur indiuiduatio, & vnitas.

6 Agens terminat ad ſingulare: Ergo natura de ſe eſt ſingularis. Quòd ad eam terminet agens.

7 Tandem; Si hęc vnitas eſt ſuperaddita ſeparetur intellectu. Et quęro de entitate illa ſuâ vnitate expoliata: eſtne vna, aut multiplex? Si eſt vna: Ergo ſine ſuperadditione alicuius entis, quòd vnitatem prębeat vna eſt, & ſingularis: Si multiplex. Ergo ſine diuiſione aliquid poteſt fieri multiplex. Deinde adhuc vnum erit, cùm pluritas ex vnitatibus conſtet: Vnde per ablationem vnius plures conſequeretur vnitates. Si quid medium, ſtatim apparet abſurdum; quoniam vnum, & multiplex negatiuè opponuntur.

CONCL. II. PROPOS. VII.

Numerus, vt numerus eſt, non eſt ens diſtinctum à re numeratâ.

Contra Auicenam 3. Methaph. Caietanum, noſtrum Morandum, & alios.

Probatur. Quia numerus componitur ex vnitatibus. Sed vnitates non ſunt, quid diſtinctum à re vnâ: Ergo neque numerus.

2 Si eſſet aliquod accidens à ſubiecto ſeparabile numerari poſſet. Ergo numerabilitas numeraretur. Quòd eſt inconueniens.

3 Numerabilitas dicit poſſe numerari; nempe quandam potentiam ad actualem numerationem. Sed actualis numeratio nihil ſuperaddit aliud: niſi opus intellectus numerãtis: Ergo nec numerabilitas aliud ſuperaddet: niſi poſſibilitas operis intellectus numerantis. Quòd res in eſſe ſuo poſſibili tales ſint, quales in eſſe actuali quoad eſſentialia inueniuntur.

4 Si numerus eſt accidens; in quo inhæret? Non in omnibus numeratis; alioquin daretur vniuerſale à parte rei; nempe aliquod vnum in multis diuiſis. Si autem in aliquo tantùm; aut eſt vnum, aut duo, aut tria. Quare, cùm formæ expoſitæ ſuos effectus formales non poſſint ſuſpendere, trias in ſubiecto ſemper trinum denominaret ſubiectum, & dualitas duo. Quare nunquam poſſet fieri, aut quatuor, aut quinque. Deinde vnicum poſſet denominari, trinum, & duo ob formam triadis, vel dualitatis ſubiecto inhærentem.

5 Si numerus V. g. quinque eſt ens ſine ſubiecto erit etiam vnũ ſine ſubiecto; quia vnum, & ens conuertuntur. Quod ſi non obtinet vnitatem ſine ſubiecto; vt patet; neque erit ens ſine ſubiecto. Quod verò numerus, vt numerus vnitatem nõ cõſequatur, patet; quia numerus, vt numerus eſt formaliter, in multiplicatione cõſiſtit.

6 Non poteſt ſeparari ratio ternarij à tribus ſubiectis. Ergo non eſt accidens; nam ſi tale eſſet, poſſet auferri, & ſic tria indiuidua eſſent, & non eſſent tria. Eſſent enim tria: Quia adhuc manerẽt indiuidua tot, vt erant priùs; cùm nullum deſtructum fuerit, non eſſent autem tria; Quia ab eis ablata eſt ratio ternarij.

Dices. Si ergo numerus accidens non eſt; nec aliquid reale: Ergo Muſica, & Arithmetica agens de numeris erit ſcientia fictitia.

Reſpond. Agere de numeratis ipſis rebus, prout obijciuntur noſtris conceptibus, eiſque ſubſunt. Ideoque eſſe ſcientias reales.

CONCL. III. PROPOS. VIII.

Vnitas, & numerus metaphiſicè conſideratus dicit aliquid præter naturam, & ſuperadiungit aliquam rationem formalem.

1 PRob. Tunc eſt diuerſa formalitas. Quando conceptu affirmatiuo poteſt concipi vnum ſine alio. Sed natura poteſt concipi ſine indiuiduatione, & numero, & dicere. Natura non eſt vnitas indiuiduationis, aut numerus. Ergo ſuper naturam addit numerus, & vnitas aliquam formalitatem.

2 Omnes naturæ conueniunt in indiuiduatione; ſed non omnes conueniunt in naturâ. Diuerſificatur quoque numerus multoties, & non natura: Ergo vnitas, numeruſque dicit aliquid pręter naturam, ſcilicet vnitas, indiuiſionem in ſe, & diuiſionem à quocumque alio: Numerus verò huius rationis multiplicationem in pluribus ſubiectis.

EXPENSIO III.

An ratio Indiuiduationis conſiſtat in differentia aliqua, ob quam plurificetur ab alijs.

CVm aliqui ex Philoſophis diuiſionem, quam aliquod vnum habet ab alijs, dubitent, an ſit

diuiſio

Digitized by Google

diuiſio diſſimilitudinis; ideſt diſtinctio; an verò diuiſio realis per ſeparationem ſubſtantię effecta. Hinc eſt, quòd, vt penitùs eſſentiâ vnitatis perueſtigemus, ſit quoque videndum, an aliqua differentia afferat hanc vnitatem ſingularitatis ſubiecto, vel per ſolam diuiſionem obtineatur.

CONCLVS. I. PROPOS. IX.

Vnitas nullam importat differentiam in ſua formalitate; neque vlla diſtinctione conſtituitur ab alijs plurificata.

COntra multos Philoſophos, qui id aſſerunt de vnitate indiuiduationis, præcipuè Fonſecam in Methaph. cap. 10. quęſt. 7. ſec. 3. Suarez in Meth. diſp. 5. ſec. 8. Zachar. Paſqual. noſtr. Tom. 2. Meth. diſp. 44. ſec. 2. num. 10.

1 Probatur. Diuiſio non ingerit differentiam inter ſubſtantias, cùm nihil producat, nullamque formam nouam ſubiecto aduehat; ſed per ſolam diuiſionem indiuidua multiplicantur; & in vnitates plures tranſeunt; Sicut per coniunctionem duarum partium integralium in vnum coaleſcunt: Ergo vnitas nullam differentiam ſecum aduehit ex ſuo formali.

* 2 Prob. Huic aſſignato vni, V.g. huic indiuiduo non repugnat creari indiuiduum omninò ſimile, ne dum ſubſtantiâ; ſed etiam in omnibus ſuis accidentibus, vſque ad poſitionem in eodem loco, & ſituationem Et tunc expoſtulo. An hęc ſint duo Indiuidua. Quod ſi ſunt; hoc eſt quod volumus, duas vnitates reperiri, quæ tamen nullâ differentiâ diſſentiant. Quod ſi duo non ſunt; hoc eſt contra diuinam potentiam pugnare, cui ſimilia indiuidui creatio denegatur,

* 3 Prob. Similitudo eſt relatio, quæ fundamenta ſupponit proxima ad relationem fundandam. Sed fundamenta relationis non poſſunt eſſe minùs, quam duo. Quod ſi fundamenta omnimodæ ſimilitudinis duo ſunt: Ergo abſque aliqua diſſimilitudine duas vnitates habemus.

4 Prob. Diſſimilitudo eſt relatio; ſed relatio præſuponit pro fundamento plura; Ergo ipſa non facit pluralitatem.

* 5 Sunt multa vnitate pollentia; Ergo in genere vnitatis conueniunt: Sed nec diſcrepant in ratione talis vnitatis; Quia, cùm vnitas poneret genus, tunc ratio talis vnitatis aduceheret differentiam: Ergo tunc conſtitueret ſpeciem, ſcilicet aliquod vnum in multis, ideſt, non omninò vnum contra præſupoſitum.

6 Si quæ ſunt vnum repoſcerent ad ſui pluritatem differentiam; Illa, vel eſſet accidentalis, vel eſſentialis ipſi vnitati. Si dicas accidentalem; vim plurificandi non conſequitur, cùm accidens eſſe rei non conſtituat: Plurificatio autem entitatem ab intrinſeco, & in rei entitate conſiſtit. Si dicas eſſentialem, iam res different ſpecie, non numero; cùm poſſibilia eſſent alia indiuidua eamdem rationem participantia. Quare iam illa differentia eſſentialis, & participata à pluribus indiuiduis ſpecies eſſet.

7 Quia multa indiuidua dantur inter quæ nulla poteſt reperiri diuerſitas, vt duæ gemmæ omninò ſimiles. Sic multa dantur, quæ diſſimilia ſunt, & tamen vnum conſtituunt, vt partes diſſimilares in homine; quæ corpus humanum integrant: Ergo differentia, nec multiplicat vnitates, nec ſimilitudo vnitatem conſtituit.

CONCLVS. II. PROPOS. X.

Tota ratio multiplicationis indiuiduorum eſt ſola diuiſio.

PRobatur. Diuiſio formaliter importat negationem, & deſtructionem vnionis. Verùm, quę vnione non copulantur, vnum non ſunt. Ergo multiplicata ſunt. Sed nec genere, nec ſpecie; Quoniam nulla inuecta eſt differentia: Ergo ſunt multiplicata indiuiduatione, & vnitate numericâ.

Dices. Multa indiuidua, quæ nullo modo à ſubiecto diuiſa ſunt. Vt Accidentia materiæ, Anima corpori, Actus mentis ipſi intellectui, & inter ſe, Ens ſucceſſiuum ſubiecto, & Modi. Quapropter, cùm hæc ſint indiuidua, numeroque multiplicata, & tamen indiuiſa, diuiſio vnitatem numericam non conſtituet.

Reſp. Hæc omnia, dempta modis eſſe diuerſa numero à ſubiecto, in quo inexiſtunt, nō actu; ſed potentiâ; quia entitatem poſſident, vt ſaltem diuina operante potentia ſine ſubiecto commorari poſſint. Ad id verò de modis reſpondetur non conſtituere; neque in ſubiecto, neque inter ſe pluritatem numericam, ſed ſolùm ſpecificam; cùm nec ſine ſubiecto concipi poſſint.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Vnitas numerica, ſeu realis, ſeu potentialis per aliquam differentiam dignoſcitur.

PRob. Quæ differentia non ſunt ab intellectu diſtingui nequeunt: Ergo ea omnia, quæ diſtincta cognoſcuntur, aliquam differentiam ſecum ferunt, ob quam dignoſcantur. At ſi ab intellectu res non diſtinguantur, vt vnum concipiuntur: Ergo ad hoc, vt intellectus plures vnitates concipiat, debet recognoſcere aliquam differentiam, ob quam diſtinguat. Quod verò; quæ diſtincta non cognoſcuntur, vt vnum aprehendantur, patet experimento. Nam pone mihi aliquod corpus omninò alteri ſimile eodem loco, ac aliud, & deinde dico; an ſit aliquis intellectus humanus, qui poſſit illa duo corpora, vt duo recognoſcere. Et ſi aliquando oculus iudicat continuum gyrum eſſe Titionem pluribus locis celerrimo, & circulari motu deuectum; quia ob celeritatem loca non diſtinguit; Tantò magis id aſſerendum ſi duorum eſſet omninò idem locus.

2 Prob. Ratio indiuiſionis in ſe, & diuiſionis à quacunque alio eſt eadem in omni indiuiduo: Ergo hæc non poteſt penes intellectum rem à re diuerſam demonſtrare. Igitur aliæ differentiæ deſiderantur, ob quas rerum diſtinctio manifeſta euadat.

COROLLARIVM.

HInc autem deduces; quòd licet differentiæ non conſtituant indiuidua: ea tamen oſtendunt; & quædam notæ ſunt, & characteres, ob quę vnitates dignoſcuntur. Vnde non eſt mirum; quòd intellectus allucinetur quandoque, & concipiat indiuiduum, vbi eſt ſolùm poſſibile, vel vbi nullo modo reperiri poteſt. Quia ſcilicet intuetur aliquam differentiam; ob quã ſolet indiuidua diſtin-

diſtinguere. Vnde primò ob differentias; vel accidentales, vel ſubſtantiales concipit plura; vt euenit in omnibus heterogeneis. Secundò ob ipſius deſſignationem, vt in omnibus homogeneis, in quibus intellectus deſignat partes, & de illis agit, tanquam ſi eſſent plura actu indiuidua. Tertiò accipere quandoque pro pluribus, quæ nullo modo in plura faceſſere poſſunt. Quia differentias percipit, ob quas diſtinguit ea, quæ vnum ſunt, in plura. Quartò & aliquando concipere, vt vnum; quæ verè duo ſunt, ſic ſi Luces à diuerſis luminibus prodeuntes in eodem foramine decuſſentur, videntur, vt vna lux, cum tamen duę luces ſint, numero diſtinctæ.

EXPENSIO IV.

An vnitas numerum conſtituat.

NVmerus ex vnitatibus conſtare quibuſdam dificile viſum eſt; cùm vnitas oppoſita multitudini videatur. Verùm, vt rem determinemus, ſit.

CONCL. I. PROPOS. XII.

Vnitas eſt idem obiectiuè; ac numerus; non formaliter, & reduplicatiuè.

PRob. Plura ſunt numerus obiectiuè: Ea verò ſunt ab inuicem diuiſa, & in ſe ſingula nequaquam pluraficata: Ergo quodlibet vnum eſt. Ergo numerus ex vnitatibus conſtat.

Dices. Vnum, & plura opponuntur. Ergo pluritas ex vnitatibus conſtare nequit.

Reſpondetur. Vnum, & plura opponi diſparatè, non negatiuè; neque contrariè. Nimirum ex ſuppoſitione quòd intellectus conceperit vnũ, non poteſt cognouiſſe quinque. Hoc autem non dum vnitas habet; ſed quilibet alius numerus præter vnitatem. Nam eâdem oppoſitione, quâ opponuntur vnum, & ſex; duo, & ſex, vel duo, & ſeptem contradicunt; quia nec duo poſſunt eſſe ſeptem, eodem modo, quo nec vnum.

Dices. Quinque, & duo, V.g. conueniunt in ratione plurium. Non vnitas, quæ nulli numero conuenit; nec alicuius communis proprietatis conſors eſt.

Reſp. Numerum ſignificare implicitè vnitatem ſumptam cum alijs. Quare ſolâ vnitate non componitur numerus: Sola igitur vnitas, vt ſola, contradicit numero, eſtque ea contrarietas impropria, & per reduplicationem. Quam etiam nos fatemur. Sic etiam decimæ numeris ſimplicibus opponuntur, & tamen ab eis conſtituuntur.

2 Prob. Vnitas eſt quadratus, cubus; par, & multas ſimiles numeri proprietates continet. Ergo eſt numerus alioquin, ſi opponeretur ſpecie ipſi numero, eaſdem, quas numerus, proprietates non connumeraret.

EXPENSIO V.

An vnitas, numeruſque præſcindant perfectè à naturis numeratis.

PRæſcindere perfectè eſt concipere aliquid talis naturæ, vt eius conceptus, qui intellectui obijcitur nihil inuoluat eorum, quibus à parte rei adnectitur. Sic conceptus perfectus eſt animalis, quia iſte conceptus, prout in intellectu eſt rationalitatem, quæ ei à parte rei in homine connexa eſt, non inuoluit. At ſi ego concipiam ens. Iſte conceptus, prout menti ſe obijcit, non eſt perfectus; quia, etiam quatenus in mente eſt, ſine ſubſtantia quid chimericum euaderet.

CONCLVS. I. PROPOS. XIII.

Indiuiduatio numerica à rebus indiuiduatis perfectè non præſcindit.

PRobat Ariſt. 8. Metaph. text, 16. *In prædicatione vnus homo non addit aliquid aliud, quam homo, ſicut & ipſum eſſe, præter quid eſt, aut quale, aut quantum, & vni eſſe, eſt vnicuique eſſe.* Sic 3. Methaph. tex. 30. *Idem enim vnus homo, & ens homo, & non ſignificat diuerſum aliquid ſecundum diſtinctionem repetitam homo, & ens homo, & vnus homo.*

Probaturque ratione. Vnitas numeralis, & Indiuiduatio idem ſunt, vt ſuprà dictum eſt. Ideoque vnitas eſt eſſe indiuiſum in ſe, & diuiſum à quocunque alio. Sed nec indiuiſio, nec diuiſio ab alijs poteſt concipi ſine re indiuiſa in ſe, & ab alijs diuiſa. Igitur nec vnitas numeralis, nec numerus vnitatibus conſtans ſine ipſis rebus numeratis perfecto conceptu poteſt intelligi.

CONCL. II. PROPOS. XIV.

Naturâ, neque ipſa, ab vnitate numerali perfectè præſcindit.

PRobatur ex Ariſt. lib. 10. Methaphiſ. tex. 8. *Quòd autem id eſt quodammodo ſignificet vnum, & ens, patet, quòd ſimiliter ſe habet, ſicut ens.*

2 Prob. Quidquid eſt in Petro diuiſum eſt, V.g. à Paulo, & omnibus alijs; Ergo quidquid eſt in Petro vnum eſt.

3 Prob. Quoniam conceptus naturæ, ſi prout eſt in mente, conſideretur non poteſt ſaluari ſine vnitate, & Indiuiduatione: Ergo inuoluit indiuiduationẽ ſaltem poſſibilem. Neque enim poteſt dici natura hæc, quam concepi, ſine indiuiduatione eſſe poteſt: ſicut poteſt aſſeri: Natura animalis ſine rationalitate eſſe poteſt. Cùm autem natura, vt intellectu cognita non poteſt ſeiungi ab aliquo, perfectè non præſcindit ab illo. Quamobrem cùm nec ſine indiuiduatione naturâ concipi poſſit affirmatiuè; ideo nec perfectè.

CONCL. III. PROPOS. XV.

Datur conceptus communis vnitatis, non autem pluritatis.

ESt multorum Philoſophorum; qui id de indiuiduatione ſentiunt.

Pr. Omne indiuiduum conuenit in hoc cum alio; quòd ſit vnum in ſe, & diuiſum à quocumque alio: Sed hæc ratio poteſt concipi ab intellectu alijs non conceptis, & ſine hoc, vel altero indiuiduo cogitari. Ergo ſaltem imperfectè præſcindi poteſt. Maximè quia, ſicut indiuiduatio

Digitized by Google

perfectè à naturâ non præſcindit; ſic nec natura ab indiuiduatione. Sed natura poteſt concipi ſine indiuiduatione: Ergo etiam indiuiduatio ſine naturâ.

Prob 2. para. Pluritas nihil addit vnitati; niſi aliam vnitatem, & vnum vni; Ergo ab vno, & vno præſcindi nequit.

2 Ratio præciſa eſſentialiter excludit pluritatem: Quia debet eſſe quid vnum commune multis, atque conueniens. Ergo pluritas, vt pluritas præſcindi nequit.

Dices con 2. partem. Rationes contrahibiles, & contrahentes debent eſſe diuerſæ. Sed indiuiduatio præciſa eſt eadem, ac illa, de qua dicitur; cùm ſit vnum, & idem: Ergo non datur ratio contrahibilis vnitatis, & per conſequens nec præciſa.

Reſp. Totum concedendo demptâ vltimâ conſequentiâ. Nam res, quæ à parte rei contrahit indiuiduationem, non eſt; niſi ipſum indiuiduū, nempe hoc, & illud. Non requiritur autem; quòd hoc contrahens, & illud ſit aliquid diuerſum à conceptu meo mentali; niſi per accidens. Ratio eſt: Quia intellectus multiplicat conceptus ſuos non ratione diuiſionis: Sed ratione diſtinctionis. Cùmque diuiſio à parte rei nullam differentiam dicat: Hinc eſt, quòd per ipſam conceptus ſuos multiplicare non poſſit, & in plura ſecernere, niſi oſtenſione huius, vel illius; vel (ſi adſit) mediante aliqua differentia extrinſeca.

Dices con. 2. Mathematica, vtpote ſcientia, præſcindit à rebus materialibus: Sed numerus eſt obiectum mathematicæ. Ergo ab indiuiduis, in quibus ineſt poteſt præſcindi.

Reſp. Præſcindi quidem numerum ab hoc, & alio indiuiduo, ſed non per ſe ipſum, at mediante vnitate, quam eſſentialiter dicit, & ex quâ methaphiſicè componitur. Ideoque, cùm numerus ſit idem, ac vnitates, & vnitas præciſa reperiatur, etiam numerus præſcindi poterit. Inquies. Ratio præciſa importat immultiplicationem, vt dictum eſt: Ergo, neque ratione vnitatis præſcindi poterit.

Reſpond. Poſſe naturam abſtractam in indiuidua abſtracta multiplicari: Vt quando concipiuntur plura animalia; certum eſt, quòd non concipitur hoc, ſeu illud animal. Sed concipitur animal abſtractum ab hoc indiuiduo, & animal abſtractum ab alio. Nam ſicut ratio animalis à pluribus abſtrahi poteſt, ita etiam ab vno tantū. Conſideratur ergo animal quodlibet tanquam ab vno præciſum, & cum indiuiduatione abſtracta. Quare ſi ſpecies, & genus abſtractè, concipitur multiplicatum, tantò magis ipſa Vnitas.

COROLLARIVM.

Hinc poteſt agnoſci rationem communem indiuiduationis eſſe vniuocam. Ratio eſt, quia tunc tollitur vniuocatio; quando in ipſa ratione vniuocâ ſeſe ingerit aliqua diſſimilitudo; ita vt ex parte quidem ſit ſimilis, ex parte diſſimilis. Verùm ratio, per quam dicuntur vnitates, ſimiles, nullam aduehit diſſimilitudinem, quare relinquit vniuocationem.

EXPENSIO VI.

An poſſit dari numerus infinitus.

AD complementum tract. antecedentis hæc Expenſio neceſſaria eſt; nam ſuppoſito, numerum infinitum dari non poſſe: Nec ipſa quantitas continua infinitis punctis; vtpote numerabilibus conſtare poteſt: Ac ſi numerus infinitus non repugnat, ibi ſtatuta ex parte debilitantur.

CONCL. I. PROPOS. XVI.

Non poteſt dari infinitum actu in multitudine.

PRob. Multitudo infinita, vt perſpicuum eſt, numeris aliquibus finitis conſtat. Quare, cùm ſint finiti, omnes ſumi poſſunt. Sumantur. Eritque ea, quæ ſuperaddetur, vnitas extra omnem finitatem: Ergo infinita per additionem huius vnitatis ea multitudo efficietur. Rurſuſque infinita non erit: quia per additionem vnius, numerus finitus, infinitus non euadit, cùm finitum additum finito nō faciat infinitum.

Neque dicas. Hoc argumentum contra Dei æternitatem militare: hoc enim falſum eſt, quia æternitas numerabilis non eſt; cùm ſit tota ſimul; nec fluat per partes.

2 Vel in infinito numero adſunt partiales numeri, vel non. Si non: Ergo quantitas diſcreta ſummam vnitatem poſſidet; cùm numeros partiales non amplectatur. Et ſic infinitus numerus vnitas eſt. Si verò numeros partiales poſſidet: Illi, vel infiniti ſunt, vel finiti. Si infiniti: Ergo totum partibus infinitis conſtat, cùmque non detur infinitum maius alio, pars erit æqualis toti. Neque dicas, hoc non verificari in infinito, vt aiunt Conimbricenſes l.1. phyſ. cap. 8. q. 2. ar. 4., & in eo totum ſuæ parti eſſe æquale. Nam hæc proprietas eſt eſſentialis conceptui totius, & partis; nec ſine illa concipi poteſt. Quare ſi conceduntur partes in infinito: Fatendum quoque eſt partem in eo totum adæquare non poſſe.

Neque dicas poſſe admitti infinita numerorum inæqualia, & maius aliquo infinito concipi poſſe. Nam ſi hoc concedatur, etiam multa infinita poterunt reperiri æqualia. Sed numerus infinitus vnicus ſolùm eſſe poteſt, cùm omnia per eandem ſeriem numerorum naturalium augeantur. Ergo cùm multa non dentur infinita æqualia, neque inæqualia admitti poterunt. Quod verò vnicus numerus tantùm ſit, patet: quia non loquimur de numero rebus applicato. Sed ſecundùm ſe, & abſtractè; qui vnicus eſt, & immultiplicabilis; ſic enim neque plura 4, neque plura 5, dantur; Sed tantùm ex ſingulis numeris vnum. Sed iam ad ſecundam partem Dilēmatis tranſeamus. Et ſi admittuntur partes huius infiniti omnes finitæ. Ergo totum infinitum, finitum erit: Cum quidquid in eo partium reperiatur finitum ſit, & totum maius ſuis partibus ſimul ſumptis non ſit.

3 Quia Aduerſarij contendunt, quemlibet numerum in infinito eſſe innumerabilem, etiam ſi ſit veinti pars ipſius infiniti. Quæro: an diuidendo in infinitum ſemper reperiam, quidquid diuiſum ſit, infinitum, vel non. Si numerum finitum

finitum nullum inuenio. Ergo infinitus numerus numeris non conſtat, cùm in numeris, duo, tria, quatuor eſſentialiter reperiantur; qui certè numeri infiniti non ſunt: Si inuenio aliquos finitos, V. g. duo; Ergo infinitum, finitis numeris conſtat, & per medium diuidi poteſt; Vnde & duo numerorum infinita darentur vnum maius alio.

* 4 Secetur numerus infinitus proportionaliter; ita vt minus extremum ſit ad maius, vt maius ad totum, & de minori, & minori extremo id fiat in infinitum. Certè illud extremum ſemper hac diuiſione minus fiet, & in infinitũ procedẽdo fiet minus omni quantitate propoſitâ. Sit ergo propoſita quantitas 4, Vel ergo hac continua diuiſione manet ſemper infinitum, & ſic dabitur aliquis numerus infinitus minor, quam 4, vel ſit tandem finitus; cùm ergo ita ſit iſte numerus finitus vltimo repertus ad maius extremum, vt maius extremum eſt ad totum; & ſic conſecutiuè, erit etiam maius extremum finitum; cùm finiti ad infinitum nulla ſit proportio. Quare & totum erit finitum, non infinitum, vt à principio ſupponebatur.

Neque dicas contra hoc, & antecedens argumentum: Dualitates in numero infinito eſſe infinitas, ſicut & triadas, & quatriadas, &c. Reſp. enim idẽ ſequi incõueniẽs, quod in 3. Argum. Nã omninò vnitates plures erunt dualitatibus, & dualitates minùs erunt numero quaternarijs. Quod ſi ſic. Ergo adhuc vnum infinitum eſt maius alio, & aliud includit. Quod ſi non. Iam inter numeros infinitos non datur proportio, quæ conſiſtit. Quòd vna quantitas plures partes de alia conſequatur; quam quòd ipſa contineat, vel pauciores, vel æquales. Si verò quantitates infinitæ proportionem excludunt; iam & quantitatis eſſentiam exuunt; quę inter prędicata eſſentialia proportionem enumerat.

5 Vel proceſſus finitorum numerorum per finitos numeros, vſque dum perueniat ad infinitum, repugnat, vel non. Si repugnat, cur in infinitis deinde admittitur. Siquidem ternarij in infinito, licet infiniti, poterunt addi infinitis quaternarijs, & hi quinarijs, & ſic in infinitum. Vnde infinitus eſſet numerus in infinitum numerorum, qui facerent infinitum numerum, licet naturali ſerie per 1, 2, 3, 4, &c. progredientes, & ſe augentes. Quod ſi non repugnat. Ergo repugnabit infinitus numerus; cùm admiſſo perpetuò finito, infinitus numerus excludatur.

* 6 Si datur infinitum maius alio, vt videtur concedendum. Admiſſo numero infinito quęro, An infinitum minus includat omnem numerum poſſibilem. Si includit omnem numerum poſſibilem includit etiam maius ſe. V. g. infinitum quaternariorum concludet infinitum decimarũ. Si non amplectitur omnem numerum poſſibilẽ. Ergo non totam ſeriem naturalem numerorum includit. Sed ſeries naturalis numerorum non tota finita eſt. Ergo etiam illud, quod dicitur infinitum; finitum.

* 7 Dantur numeri quadrati, qui naſcuntur ex multiplicatione ſui in ſeipſis, vt 3, multiplicatus per 3, facit 9 Dantur quoque ſimplices numeri non quadrati; qui omnes quadratorum ſunt radices, cùm in ſeipſis multiplicari poſſint. Et idem dicas de numeris cubicis: nempe geminata vice in ſe multiplicatis, qui, & pro radicibus habent ipſos numeros, qui quadratorum ſunt radices. Quare cùm omnes numeri ſint radices ſuumque quadratum, & cubum obtineant; Tot erunt quadrati, & cubi, quot numeri. Quare ſi ſunt infiniti, etiam quadrati, cubique erunt infiniti. Sed inter quadratum, & radicem; inter cubum, & radicem multi neceſſariò ſunt numeri intermedij, vt inter 3, & 9, ſunt 4, 5, & 6, &c. Et quo maiora quadrata, maioreſque cubi, eo plures ſunt numeri intermedij. Ergo datis numeris infinitis erunt plures radices; quam quadrata, & cubi. Sed ſupra oſtenſum eſt eſſe tot, quot numeri. Ergo æquales, & inæquales; quod repugnat.

* 8 Quantò magis procedimus in numeris, eo pauciores numero inueniuntur quadrati numeri, multoque pauciores cubi, & tantò ampliùs pauciores ſuper ſolidi. Sed numerus infinitus debet conſequi tot cubos, tot quadrata, tot ſuperſolida, quàm numeri; Ergo quo magis progredimur in numero, eo magis elongamur ab infinito quadratorum, & cuborum, vel ſuperſolidorum: Quia rariores eos inuenimus. Sed non poſſumus diſcedere ab infinito quadratorum, & cuborum; quin diſcedamus ab infinito radicum, qui numeri ſimplices ſunt; Ergo multiplicando numeros ab infinito diſcedimus.

* 9 Si numerus infinitus totalis infinitos numeros partiales claudit; multiplicetur infinitum partiale per infinitum totale. Vtique producetur numerus planus maior ipſo totali; Ergo ipſe non erat totalis; cùm maior illo detur. Sed rurſus erit totalis, vt præſuponitur, cùm omnem numerum poſſibilem includat. Ergo totalis, & non totalis.

Quod ſi dicas. Hanc multiplicationem adhiberi neutiquam poſſe: Ergo illud, quod dicitur infinitum, numerus non eſt; cum multiplicationem excludat, qui numero eſſentialis proprietas eſt. At ſi numerus totalis immultiplicabilis eſt; numeri partiales fortè non erunt. Multiplicentur ergo inuicem duæ medietates, vel proximè numeri totalis, & producetur quadratum quadrùplo maius, quam duę medietates: Quare totius infiniti totalis, duplo maiùs infinitum erit productum, vt priùs.

EXPENSIO VII.

An numerus eſſentiam conſequatur.

FRuſtra Arithmeticus numeros ſpecularetur, ſi nullam eſſentiam poſſiderent. Neque enim, vt volunt Philoſophi veriſſimo decreto, entia per accidens ſcientijs, quæ ſunt æternæ veritatis ſufficiens fundamentum præbere poſſunt; Sed ſolùm eſſentiæ rerum; quæ immutabiles ſunt, & æternæ. Videtur autem numerus nulla eſſentia frui, cùm ſit vnum per accidens, vt lapidum aceruus, vel vt multitudo. Verùm ſit.

CONCLVS. I. PROPOS. XVII.

Numerus eſſentiam non poſſidet vt numerus eſt.

PRobatur. Numerus, vt numerus, eſt quædam multitudo; ſed multitudo eſſentiam non obtinet, cùm ſit ens per accidens; Ergo neque numerus eſſentiâ potitur.

2 Multitudo, & numerus excludunt, vt talis, vnitatem: Ergo quid eſſentiale non ſunt: Patet.

Digitized by Google

Omne eſſentiale ens eſt. Omne ens eſt vnum; cùm vnum & ens conuertantur. Ergo, quòd non ſit neque vnum, neque ens numerus eſſentia non gaudebit.

2 Numerus; ſeu ſumitur in ordine ad intellectum, & ſunt plures eius operationes ad placitum factæ, vel in ordine ad res numeratas, & eſt multitudo ad placitum coadunata: Sed entia ad placitum nullam eſſentiam adipiſcuntur. Ergo numerus eſſentiâ deficit.

CONCL. II. PROPOS. XVIII.

Numerus, prout dicit partes quantitatis numeratas, eſſentiam poſſidet.

PRobat. Quantitas illa prout ſuis partibus integrata eſſentia potitur: Ergo etiam numerus, vt eam exprimens ſuâ gaudet eſſentiâ. V.g. ſi 4. aſſumatur tanquam quatuor partes alicuius planitiei, neceſſariò multiplicatæ in ſe producent cubum; Quia cubus, qui ſuperficies ſuas in quatuor partes diuiſas habeat neceſſariò amplectetur 16. cubos partiales, quorum quilibet ſuperficiem vnam habet vni ex illis 4. æqualem, & ſic dicas de alijs.

CONCL. III. PROPOS. XIX.

Numerus quoque poſſidet eſſentiam in ordine ad opera noſtri intellectus.

PRobatur. Opera noſtri intellectus eſſentialiter connexa ſunt, & in arguendo dependentia. Nam priùs oportet cognoſcere; deinde iudicare, tandem diſcurrere. Sic quod acceptum eſt, vt priùs: ſemper acceptum erit, & ſtante eâ acceptione, poſterius eſſe non poterit quòd ordinatum; ordinatum; Quod ſimile; ſimile, &c. Quare intellectus, ſi accipit duos numeros dicentes relationem æqualitatis; vel proportionis ad alios, neceſſariò illi numeri tales erunt; quia ſcilicet intellectus accepit numerum talis reſpectus participem, & diſcurres de alijs.

Dices. Euclides 7. lib. 8 & 9. abſque vlla dependentia ab operibus intellectus, vel à quantitate continuâ affectiones numerum demonſtrat. Ergo numeri ſecundum ſe eſſentiam; quam demonſtremus; paſſioneſque poſſident.

Reſp. Euclidem 7. 8. & 9. lib. affectiones numerorum demonſtrare per reductionem ad impoſſibile quoad primas propoſitiones, quæ in alijs arguendi fundamenta ſteruunt. Deinde arguere à ratione continentis, & contenti, menſurantis, & menſurati, quę relationes ſunt, & applicationes vnius quantitatis ad aliam noſtri intellectus; eo quod V. g. ſi aſſumatur numerus; qui ſit pars alterius A; quòd etiam erit pars maioris; cuius A pars eſt. Relationes verò licet præbeant fundamentum euidenter arguendi, non tamen entia eam relationem habentia per eam eſſentialiter conſtituuntur; cùm per multos Philoſophos relationes nihil ſint à parte rei, & ſolùm per opus noſtri intellectus comparantis habeantur: Cùm itaque numerorum demonſtrantur paſſiones, operationum noſtri intellectus in accipiendis vnitatibus demonſtrantur, quæ taliter acceptæ, alio modo accipi nequeunt, alioquin implicantia in ipſis operationibus ſequeretur.

Et licet operationes intellectus, vt ſimpliciter tales, ſint ad placitum, vt 2. prob. Concl. 1. diximus: non tamen, vt relatiuæ, & dependentes inuicem: nam poſitis quibuſdam cognitionibus, ad tali modo operandum deinceps in ſequentibus mens impellitur ab ipſâmet ſpeculationum naturâ, vt Logici nouerunt.

TRACTATVS III.

De Mathematica eiuſque Affectionibus.

QVÆDAM de ipſâ Mathematicâ præcognoſcendâ, antequam limina ipſius tentemus, & præcipuè quodnam ſit eius obiectum; qui modus procedendi, & ſimilia; qui animum doceant, quò modo in mathematicis ſe debeat gerere; qui primus & inaſſuetus eas addit. Sic, & in artibus, congruum eſt; vt qui eas callere velit, inſtrumenta priùs, & materiam; quæ ei tractanda ſunt, noſcat, modum quoque, quo ea tenere, & manibus verſare, adiſcat; vt deinde in ipſa arte promptiùs ſe exercere, vt illa potiatur, faculras ſit.

EXPENSIO I.

De obiecto Mathematicæ eiuſq; abſtractione.

PRÆASSVMPTVM.

QVælibet ſcientia, vt Logicus docet, obiectum materiale, & formale conſequitur. Materiale quidem eſt illud, quod ab illa ſcientia conſideratur; Formale verò eſt illa ratio ſub qua conſideratur. Sic Medicus conſiderat corpus animatum; ſed vt ſanabile. Sic Phyſicus conſiderat corpus naturale; ſed vt mutabile. Sic Theologus Deum ſpeculatur; ſed vt cognoſcibilis lumine reuelato medio diſcurſu. Vnde in medicina corpus animatum erit obiectum materiale, ſed eius ſanabilitas obiectum formale.

PRÆASSVMPTVM II.

ITem conſiderandum eſt; quòd nulla ſcientia intuetur ſuum obiectum; vt in ſingularibus; ſed, vt abſtractum ab eis. Neque enim Medicus conſiderat corpus Petri, vt Petri: Sed, vt corpus. Ratio eſt, quia non vt ſingulare rationem formalem participat, ſed vt vniuerſale. Quare ſub ea ratione conſideratum, debet etiam concipi, non vt ſingularizatum. At vt inferioribus, particularibuſque naturis denudatum; cum Petrus, vt Petrus ſanus ſit, non ſanabile corpus. Et tantò magis, quod omnis ſcientia rei ſpeculetur eſſentiam: quæ à particularibus, & indiuiduis præſcindit.

CONCL. I. PROPOS. I.

Obiectum Mathematicæ eſt ens quantum, vt menſurabile.

PRobat. ex Ariſt. lib. 1. poſt. cap. 10. *Quare propter nos non malè Geometræ dicunt, & de entibus diſſerunt, vt entia ſunt.*

Prob. Nam, quòd ſit ens quantum, patet. Conſiderant enim trinam dimenſionem longitudinem, latitudinem, & profunditatem, quę ſunt dimenſiones ens quantum conſtituentes. Conſiderat quoque quantitatem eorum, quæ corpora non ſunt; Ergò eius cognitio latiùs patet, quã corporis, & in ente quanto conſtituenda eſt.

2 Agit de Conis, Cylindris, Sphæris. De numeris, de tempore, de luminis intenſione, de quantitate motuum, quæ conueniunt tantùm in ratione entis quantitatiui: Ergo ratio, per quam Mathematica ad illa perſcrutanda fertur, eſt entis quanti; Nam enim de illis ageret omnibus; niſi in aliquâ ratione, conuenirent ob quam in illa ſimul poſſet intendere.

Dices. Agit de Superficiebus Lineis Angulis; quæ entia quanta non ſunt, cùm ſint negationes. Item obiectum, cuiuſcumque ſcientiæ debet eſſe abſtractum; vnde etiam obiectum Mathematicæ. Quapropter, eius obiectum erit potiùs quantitas ipſa; quàm ens quantum.

Reſpondetur ad primum. Superficies, lineas, puncta eſſe corporis extrema, ab illo, nec quidem mente, ſeparabilia, vt diximus. Vnde agendo de illis, implicitè agit de corpore. Deinde multa in ſcientijs conſiderantur; quæ quidem obiectum non ſunt. Sed ſolùm aſſumuntur, tanquam neceſſaria ad perfectam cognitionem obiecti. Sic agit medicina de plantis; quòd illa cognitio ad ſanabilitatem corporis indagandam, conducat. Sic Theologia de Angelis, Sacramentis, Peccatis. Quæ licet Deus non ſint. Ordinantur tamen ad cognitionem Dei ſub ea formalitate, ſub qua conſideratur à Theologo. Vnde licet ſuperficies, lineæ, puncta entis quanti conceptu non fruerentur; eorum tamen commenſurationes deberet Mathematicus conſiderare, vt ad corporis quanti cognitionem, pernèceſſarias.

Ad ſecundum reſpond. Obiectum cuiuſcunq; ſcientiæ debere eſſe quid ſubſiſtens, & quod directæ ſit poſitum in prædicamento ſubſtantiæ. Quantitas verò non ponitur in prædicamento ſubſtantiæ; ſed ens.

Prob. quoque ſecunda pars, quòd in ens quantum tendeat; ſed ſub ratione menſurabilis. Nam intendit acquirere cognitionem entis quanti. Quanti verò eſſentia in capacitate partium conſiſtit. Quare ens, vt partibus conſtans, & in partibus

tibus

tibus conueniens; aut diſconueniens cum alio, debet cognoſci, quæ eſt ratio menſuræ. Deinde tota diſputatio, quæ inter Mathematicos verſatur proportiones corporum rimatur: proportio verò in commenſurabilitate conſiſtit.

Dices agit de lineis, ſuperficiebus, corporibuſque irrationalibus; quæ nullam commenſurabilitatem poſſident.

Reſp. Primo quantitates incommenſurabiles non eſſe omninò tales. Sed ſolùm reſpectiuè ad aliam quantitatem. Vnde de illis ſimpliciter agere poteſt. Deinde agit de ipſis, vt ad cognitionem commenſurabilitatis conducunt: niſi enim ſciret, quęnam lineæ eſſent incommenſurabiles, nec commenſurabiles agnoſceret, aut diſtingueret. Sicuti Phyſicus agit de priuationibus, & negationibus, de vacuo, de ſpatijs immaginarijs; licet entia non ſint naturalia: Quia ad cognitionem corporis naturalis deſeruiunt.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Mathematica, quidquid conſiderat abſtractè conſiderat, & ab ente indiuiduali præſcindit.

PRob. 1. ex Ariſt. l. 2. Methaph. cap. 12. *Materia quædam ſenſibilis, quædam intelligibilis; ſenſibilis quidem vt æs, lignum. Intelligibilis verò, quæ in ſenſibus exiſtit, non prout ſenſibilia, vtpote Mathematica.*

Probatur verò ratione. Quoniam ſi hæreret ſenſibus: tunc multa falſa mentiretur; dum lineam alteri æqualem omninò dicit; cùm tamen linea alteri præciſè æqualis, vel dari nequeat in rebus materialibus, vel dari ſaltem certum non ſit. Sic rectam eſſe ductam, quæ quidem, an poſſit rectiſſimè duci, dubium eſt. Sic circumferentiam circuli perfectam; quæ in circumferentijs materialibus non reperitur. Quod etiam aduertit Ariſt. l. poſt. cap. 10. *Neque*, inquiens, *Geometra falſum ſupponit quemadmodum quidam aſſeruere dicentes; quod non oporteret falſo vti; Geometram verò mentiri dicentem pedalem, non pedalem; aut rectam deſcriptam non rectam exiſtentem. Geometra verò nihil concludit, eo quod hæc eſt linea, quam ipſe loquutus eſt, ſed quæ per hæc oſtenduntur.* Sic Proclus lib. 2. cap. 2. *Qui in ſenſibilibus circulus compoſitus, magnitudine diſtans, ac certa ratione diminutus, ac ineptiarum plenus ab immaterialium paritate longè deficiens. Geometria verò, cùm de circulo quidquam loquitur, atque diametro, & de paſſionibus; & affectionibus, quæ ad circulum ſpectant, non de ſenſibilibus docet, aut differit, ab ipſis quidem ſeparare conatur; & vniuerſale ipſum conſiderat.*

* Prob. 2. Nam oſtendimus puncta impartibilia nequaquam dari poſſe, à materia ſeiuncta parteſque in infinitum diuiſibiles eſſe prout conſiderātur à Mathematicis. Cùm itaque Mathematici præſuponant partes in infinitum diuiſibiles, patet ſumere ens quantum, vt quantum eſt; & ideo, vt ſemper partium capax. Non autem ſumere ens, quod eſt à parte rei: quod diuiſibilitatis infinitæ capax non eſt, aut ſaltem incertum. Sic in circulo ſupponit Mathematicus figuras inſcriptibiles in infinitum. Hyperbolem ad Aſymptotum accedere in infinitum, & multa alia, quæ certè de rebus ſenſibilibus non poſſunt verificari, ſed de ipſis, vt abſtractis, & vt tales ſunt.

Dices. Mathematica docet operari in problematibus; Sed operari eſt circa res ſenſibiles, & vt ſunt à parte rei. Mathematica igitur ſaltem in problematibus à materiâ non abſtrahit.

Reſp. Docere quidem operari, ſed adhuc illam operationem, vt à materiâ ſeiunctam, & ei non applicatam conſiderare. Vnde Proclus lib. 2. com. 5. inquit. *Propriè in Mathematicis diſciplinis problema vocatur, quòd ad contemplationem operantem proponitur. Quæ namque in his fit, finem, contemplationem habet; & ſæpenumero quidem eorum, quæ fieri non poſſunt, quædam problemata vocant.* Igitur, cum Mathematicus problema proponit, & docet operari, inſtruit, quid operetur, non circa rem materialem, licet, vt plurimùm etiam id, per doctrinam, quam tradit, præſtari queat; ſed circa rem conceptam, & eam operationem, vt verſantem circa res abſtractas conſiderat. Quare & aliquando docet problemata, quæ fieri nequeant, prout res ita ſe habent, non abſolutè, V.g. datum pondus datâ quacumque potentiâ mouere. Quaſi quod eſſemus cuiuſcumque potentiæ vltimis viribus inſtructi, Vel cum docet Altitudines ſtellarũ fixarum, latitudines, lõgitudines mẽſurare, tãquã ſi eſſemus in centro, cùm nec ibi eſſe poſſimus; ſed in ſuperficie. Sic deſcribere Horologia; tamquam ſi planum horizontale ſubeſſet centro mundi, & à centro in illud planum vmbra decideret.

EXPENSIO II.

De Mathematica.

DIfficulter poteſt apprehendere, quis quod proponitur: niſi nec nomen eius quod proponitur nouerit. Quare in primis quærendum quid ſit Mathematica.

Mathematicę nomen deriuat à Gręco nomine, quod Latino depromptũ ſignificat doctrinã: ſeu diſciplinam, eo quia verè doceat; quòd nihil, niſi per oſtenſionem, vt plurimùm, affirmet, & nihil, niſi, aut per ſe euidens, aut probatum ad arguendum pro principijs aſſumat. Aliæ verò ſcientiæ pro maxima ſui parte potiùs probabiles ſunt, quam euidentes, vnde poteſt deffiniri.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Mathematica eſt ſcientia oſtenſiua, cuius obiectum eſt omnè illud, quòd menſurari poteſt.

HÆc Concluſio probatur ipſo experimento quoad primam partem, cum omnes eius propoſitiones oſtenſiuæ ſint.

Dices. Sunt aliqui tractatus, vt Optica, Aſtrologia, Sphęra, & multæ aliæ partes, quæ rationibus probabilibus innituntur. Reſp. id quidem eſſe verum ſaltem penes aliquas concluſiones, & tunc non appellatur ſimpliciter Mathematica; ſed Phiſiomathematica; quòd ſic exigente obiecto partim Mathematica ſit, quoad menſurationem, partim verò Phyſica, quò ad eas concluſiones, quæ menſurationi deſeruiant, V.g. Sphęra quòd probet fluiditatem Cœlorum erit Phyſica; quatenus verò ex fluiditate motus Planetarũ hypo-

Digitized by Google

hypoteſes, & commenſurationes colligit, & ea doctrinâ ſuppoſitâ oſtendit, erit Mathematica.

CONCLVS. II. PROPOS. IV.

Mathematica in tres partes diuidi poteſt in Mathematicam, Vniuerſalem, Coſmicam, & Microcoſmicam.

PRobatur. Quia eius obiectum in tres has ſpecies faceſſit. Nam aut eſt vniuerſaliſſimum, & à quocumque obiecto ſpeciali præſcindit. Et hoc à Mathematica vniuerſali conſideratur; Aut eſt ſpeciale, & hoc diuiditur in duas ampliſſimas partes, nempe *mundum, & hominem*; Quæ conſiderat mundum eiuſque proportiones dicitur *Coſmica*; quæ hominem *Microcoſmica* appellari poteſt.

Prima eſt duplex, nam alia eſt, quæ agit de quantitate *Diſcreta*, alia de *Continua*. Secunda quoque duplex eſt, alia agit de Cœlo, altera agit de Terra, terrenſque omnibus, quæ menſuris ſubſunt. Tertia quoque duplex eſt. Alia enim pertinet ad naturam hominis; vt viſus circa quē verſatur Optica. Alia ſpectat ad artem, vt Mechanica, & huiuſmodi.

Hoc autem libro tradimus Mathematicam Vniuerſalem, quæ de omni quantitate in communi peragit, & omnibus alijs Mathematicis partibus aditum aperit. Omnes verò Mathematicæ partes poſſunt tendere in ſuum obiectum promiſcuè. Modo illud ſpeculando, vt quantitas diſcreta eſt, modo, vt quantitas continua. Quia ſcilicet, & quantitas, vt ſic ſumpta, & mundus, & homo, in ſe quantitates diſcretas, & continuas amplectuntur, in quas poteſt tendere intellectus; vnde promiſcuè ſecundùm quod res exigit, & dependentia obiectorum repoſcit, modo ſit Geometria, modo Arithmetica: Vnde & harum ſcientiarum naturam exponere oportet.

CONCL. III. PROPOS. V.

Geometria eſt ſcientia oſtenſiua, quæ de quantitate continuâ pertractat: Arithmetica verò eſt ſcientia pariter oſtenſiua, quæ quantitatem diſcretam intuetur, & ambæ iſtas quantitates, vt menſurabiles conſiderant.

PAtet per ſemet concluſio; ſi nomen Arithmeticæ, & Geometricæ ſecundùm ſuam latam ſignificationem accipiantur. Verùm non ſemper ita eſt. Geometria enim vt plurimùm ſignificat eam partem Mathematicæ, quæ agit de planis nomine vniuerſali ſibi ſpecialiter applicato, quæ propriè Panthometria dicitur. Arithmetica quoque ſtrictiùs accepta illa eſt, quę dat regulas ſupputandi nullis adhibitis demonſtrationibus. Mathematica, itaque vniuerſalis, de qua hoc Libro agimus partim per occaſionem Geometriâ, partim Arithmeticâ conſtans, in duas quoque partes ſecernitur intuitu modi procedendi: Nam alia eſt Elementaris; alia verò nequaquam, & licet eadem tractentur, tum in Elementari, tum in altera parte, & circa eadem obiecta ſpeculatio verſetur. In Elementis tamen ſolùm traditur quædam fundamentalis, & prima doctrina, & velut primi aditus ad profundiores ſpeculationes aperiuntur, in alijs verò non elemētaribus circa eadem obiecta profundiora quidem cognoſcuntur, ſed quæ elementares cognitiones nequaquam dici poſſint, quoniam limen non aperiant, vt Elementa efficiunt, alijs ſpeculationibus.

EXPENSIO III.

De titulis Mathematicis.

COngruum eſt librorum, & partium, quæ in ipſis reperiuntur titulos quandoque exponere, vt magis, quæ ipſâ continentur oratione, & euidentiùs innoteſcant: Ideoque cum Mathematica ſuis præfigat propoſitionibus titulos; qui non explicati poſſent, & ipſius rei, de quâ agitur, obnubilare euidentiam: hinc eſt, quod eos declarandi prouinciam ſumpſerim.

QVID SINT ELEMENTA.

DE Elementis inquit Proclus. *Totius Geometriæ ſunt quædam theoremata principalia, & ad ea, quæ ſequuntur, principij rationem habentia, quæ Elementa appellantur. Elementaria verò ſunt, quæcumque extra ſe in multitudinem cognitionem non habeat.* Et deinde. *Non omne elementum vocabitur. Verùm ea, quæ principaliſſimâ ſunt eorum, quæ in rei effecta ratione ſunt conſtituta.*

Itaque Elementa ſunt quædam Theoremata, vel etiam problemata; quæ in re, de quâ agitur vniuerſaliſſima ſunt, & plurimarum propoſitionum fons, & origo. Quas viſum eſt Mathematicis, ſeorſim ab alijs propoſitionibus à ſe dependentibus ſegregare; vtpote illæ, quæ non ſolùm propoſitionibus de eâdem materiâ agentibus deſeruiant; ſed multis alijs poſſint aditus aperire. Vnde vt magis eſſent, ad manus, & familiariùs adiſcerentur in vnam ſeriem coordinata fuerūt: Maximè quia, nec cognitio quidem omnigena; quæ extra Elementis erat; licet eamdem materiam; quæ in Elementis verſata eſt, ſpecularetur ſæpenumerò poterat perfici: ſine Elementis ad illam materiam ſpectantibus: Vnde, ne dum fuit vtile; ſed etiam neceſſarium, Elemētares cognitiones ab extraelemētaribus ſeiungere: vt ipſis ſingulis omnia Elementa, vt res poſtulabat, poſſent inſeruire.

QVID SINT PRINCIPIA.

QVoniam, vt ait Ariſt., omnis cognitio fit ex præexiſtenti cognitione. Etiam Mathematica quædam habet principia adeo clara, vt prorsùs negari nequeant; niſi ſtultè, & imprudenter. Talia ſunt. *Omne totum eſt maius ſua parte.* In quibus ab alijs omnibus ſcientijs differt. Nam principia aliarum ſcientiarum multa, aut negari poſſunt, aut explicari, cùm vera ſemper non ſint principia; ſed quædam potiùs perſuaſiones mente firmiter radicatas, quàm euidentiæ. Mathematica verò, quæ principia ponit, aut omninò innegabilia ſunt, aut talia, quæ, ſi negantur, protinùs per reductionem ad impoſſibile oſtendat.

DE

Digitized by Google

DE DEFINITIONIBVS.

DEfinitiones apud Mathematicos verè naturam rei non explicant ex eorum intentione; cùm eſſentiam rei explicare; ſed tantùm nomen exponere ſit apud ipſos in definitionibus conſtitutum, vt ſentit Clauius in prolog., & Galilæus in dialog. contra Betinum. Id verò patet; quia ſi naturam rei explicarent; oporteret, quòd eam definitionem oſtenderent quidditatiuam eſſe, & naturam rei exponere; quod nequaquam efficiunt. In conceſſis tamen eſt; quòd etiam aliquandò naturam rei exponant. Sed id non curat Mathematicus; ſiquidem, ſi curaret, maximè in id incumberet; vt talem eſſe rei naturam; qualem definitio deſcribit, comprobaret.

DE POSTVLATIS.

POſtulata ſunt quædam; quæ faciliter conceduntur, vt fiant, & quaſi axiomata ſunt; ſed hæc ſolùm ſpeculatiua; illa verò operatiua. V. g. vt liceat *lineam ducere*. Vt liceat, *lineæ adiungere*. Vt liceat. *Quacumque diſtantia circulum ducere*. Verùm non omnia; quæ clara ſunt, & concedibilia poſtulantur. Cùm etiam. *Producere lineam æqualem alteri*, aut. *Quacumque diſtantia lineam producere* potuiſſet poſtulari ab Euclide: quod tamen non fecit: Sed ea ſine quibus permiſſis nulla poſſet inchoari Mathematica operatio. Cùm debeamus poſſe aliquid efficere. ſine probatione, vt opus primâ eâ operatione effectum oſtendatur euidenter ſe bene habere.

QVID SIT THEOREMA.

THeorema eſt pura ſpeculatio alicuius paſſionis quantitatiuæ euidens. quæ nullo modo aliter eſſe poteſt, vocaturque Theorema; quia in purâ ſpeculatione ſiſtit, & nihil efficit.

QVID SIT PROBLEMA.

PRoblema vocatur ſic. Quod ſit circa operationem, quæ, aut alio modo exequi poſſet, aut circa illam materiam aliud effici: vt ſi quando demonſtrat. *Triangulum æquilaterum ſuper rectam conſtituere*, hoc opus, aut alio modo executioni mandari, aut aliquod aliud triangulum ſuper illam rectam conſtitui poſſet, & ideo *Problema* vocatur ad ſimilitudinem Problematis dialectici; quod ſicut in vtramque contradictoriam affirmari poteſt; ſic & Problema Mathematicum, & hoc modo, & alio effici, & circa eamdem materiam aliud in opus demandari. Vnde illud, quod alio modo effici nequit; nec de eadem materia aliud fabricari, non vt Problema; ſed vt Theorema proponendum eſt. Sic ſi quis proponeret in ſemicirculo angulum rectum efficere: Omninò errorem acciperet; cùm omnis angulus in ſemicirculo rectus ſit: vnde cum alio modo effici nequeat; nec alius angulus in ſemicirculo conſtitui poſſit: Non erit hoc, vt *Problema*; proponendum; ſed vt Theorema. At; inquies, ſunt quædam, quæ ad modum problematis, & Theorematis proponi poſſunt. Id enim verum eſt, & licet aliquod Theorema poſſit etiam ſubire rationem problematis: non tamen vice verſâ. Vnde attentiùs conſiderandum eſt; an ea, quæ problematis ſpeciem ferunt. Verè illius naturam aſſequantur. Antiquorum verò ſententiam Pappus refert de Theoremate, & Problemate. *Dixerunt*, inquiens, *Theorema eſt, quod proponitur in ipſius propoſiti demonſtrationem. Problema, quod effertur in conſtructionem propoſiti*; ideſt propoſitionis.

QVID SIT PORISMA.

POriſmatis nomen etiam apud antiquos fuit controuerſum, & videtur Pappus triplicem efferre Poriſmatis ſignificationem. Primam explicat, quam antiquioribus tribuit; dum ait. *Horum autem ſpecies omnes neque Problematum, neque Theorematum: ſed mediam quandam inter hæc formam, & naturam habent; quo factum eſt, vt ex multis Geometris alij quidem ex genere eſſe Problematum, alij verò Theoremata opinati ſint.*

Secũdã verò iuniorũ affert, inquiẽs, *Immutata eſt autem hæc Poriſmatis definitio apud iuniores, & deffinierunt; Poriſma eſt, quòd hypotheſi deficit à locali Theoremate*. Ideſt, quod nullam conſequitur hypotheſim, ſeu ſuppoſitionem: Pro quo ſciendum, quò Theorema triplici modo poteſt conſiderari. Primò quoad modum procedendi in probatione. Secundò quoad ea, quę antecedunt demonſtrationem. Tertiò quoad ea, quæ in demonſtratione oſtenduntur.

Modus procedendi quadruplex eſt; nam aut diuerſas partes enumerat, aut plures caſus, aut diuerſus progreſſus probando priùs multa alia, antequam ad vltimam concluſionem deueniat, aut ſimplex eſt, nullaque vel partium, vel progreſſuum, vel caſuum multiplicitate diſcriminatur. Poriſma itaque videtur appellatum Theorema multiplex ex aliquorum ſententia, aut partibus, aut caſibus, aut progreſſibus. Quare, inquit Pappus. *Poriſma à multis ſic intelligitur, vt artificioſa collectio ſit ad Analyſim grauiorum, ſeu difficiliorum problematum, & generum incomprehenſibilem multitudinẽ præbeate ipſorum natura.* Si verò Theorema conſideretur quoad antecentia; in triplici quoque differentia verſantur. Alia præſuponunt aliquid in gratiam aduerſariorum. Alia præſupponunt aliquid factum; quod non eſt operi demandatum, vt Archimedea præſuponit. V. g. Spheram eſſe proportionaliter ſectam per talem ſuperficiem, & probat deinde, id verè taliter ſe habere. Alia iubent ad demonſtrationem efficiendam, talem, aut tali modo operationem faciendam. V. g. talem lineam ducere. Tandem ſi conſideretur Theorema, quo ad ea, quæ in demonſtratione oſtenduntur duplex eſt; nempe locale, & non locale. Locale eſt illud, quod oſtendit locum. V. g. lineas eſſe parallelas. Extremum alicuius lineæ eſſe in circumferentia. Tale punctum eſſe in medio circuli; quæ propriè circa quantitatem non ſunt; niſi reductiuè, quatenùs locus eſt proprietas rei quantitatiuæ, & deſeruit ad illius cognitionem.

Dicit itaque Pappus. Quòd ſecundum Iuniores Poriſma non eſt Theorema locale, eo quia præſuponat Hypotheſim, ſeu aliquam ſuppoſitionem, quam deinde non explicat, cuius ſit illa ſuppoſitio, ſeu quænam? inſuper illud verbum *deficit* ambiguum eſt; neſcimus enim: An deficiat ipſa hypotheſis ad hoc, vt ſit theorema locale: An ipſum Theorema deficiat à locali, ideſt localis naturã nõ aſſequatur, eo quod Hypotheſim obtineat.

Verùm

Verùm Proclus in Euclidem lib. 3. ſic Poriſma definit. *Poriſma etiam de quibuſdam problematibus dicitur qualia ſunt ab Euclide conſcripta poriſmata. Propriè verò talia dicuntur; quando ex demonſtratis aliud aliquod Theorema nobis non propoſitis emergit, & effertur: Quod propterea Poriſma appellarunt quaſi lucrum ex ſcientifica demonſtratione abiter, & præter expectationem factam.* Itaque habemus clarum duplicem ſenſum, penes quem Poriſma accipi queat. Primum ex Pappo iuxta antiquos. ſ. quod ſit quid medium inter Problema, & Theorema, quòd & poſſit, vt Theorema, & vt Problema proponi. Secundum ex Proclo. Quod ſit veluti quoddam Corollarium ex demonſtratione collectum, & breuiter ex dictis oſtenſum. Obtinemus quoque alias duas ex Pappo Poriſmatis acceptiones; ſed obſcuras, & acciptea: Nempe, quod ſit aliquid ſimile Theoremati locali. Vel quod ſit Theorema, vel Problema quoddam multiplex.

QVID SIT ZETEMA.

Zetema eſt titulus; quem Algebrici ſuis operationibus præfigunt: cùm enim ea, quæ Algebra docet non demonſtrentur; ſed in ipſa operatione nota, & euidentia euadant; propter hoc, nec Problema, nec Theorema appellare potuerunt; vnde quam medio nomine Zetema appellauerunt.

QVID SIT LEMMA.

Lemmata ſunt propoſitiones minus principales, & quæ obiectum, de quo agimus, non reſpiciunt. Sed tamen ad demonſtrationes alterius propoſitionis omninò neceſſariæ ſunt. Lemma itaque eſt demonſtratio, ſeu conſtructio, quæ neceſſariò ad demonſtrandam aliam propoſitionem principalem, & ad rem ſpectantem præter inſtitutum aſſumitur.

QVID SIT PROPOSITIO.

Propoſitio eſt nomen quoddam genericum; quod tùm Poriſmati, tùm Problemati, tùm Theoremati conuenit, & nihil aliud ſignificat; niſi quòd proponitur aliquid oſtendendum.

QVID SIT ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

Analyſis nihil aliud eſt; niſi quædam explicatio rei, quæ proponitur. Syntheſis verò accipitur, cùm traditur modus operis, quòd fieri iubetur.

EXPENSIO III.

De Mathematica inſtructione.

Mathematica inſtitutio, aut poteſt ſumi iuxta ſubiectum, aut penes modum inſtruendi.

Si penes modum inſtruendi. Modus quidem euidens eſt. Sed Syllogiſmis non procedit, at Enthimematum continuata ſerie, quæ breuiùs probant. Ratio huius rei eſt: Quia, cùm ſæpè repetant eaſdem literas, ſi tres propoſitiones efferrent, vt requirit Syllogiſmus, pronam in mentem audientium confuſionem inducerent. Vnde Entymematibus vtũtur, quę cõcluſionẽ immediatam habent, & quæ probata Syllogiſmi demonſtratiui efficatiam conſequuntur.

2 Quod incipiat à primis principijs, & paulatim deueniat ad concluſiones. Vnde contrario modo, ac Philoſophia facit, ſiquidem hæc concluſionem immediatè à præmiſſis deducit immediatioribus, & deinde aſſumptas præmiſſas probat euidentioribus alijs, donec ad prima principia deuentum ſit. At Matheſis à primis principijs incipit, & paulatim per diuerſa Enthimemata, diuerſaſque concluſiones, ad illam vltimam, quam propoſuit, tandem accedit, & in illa conquieſcit.

3 Mathematici nunquam anticipant, neque vt probata accipiunt, quæ probanda poſtmodum ſunt. Vnde Proclus ad 11. Eucl. propoſ. ait. *Demonſtrationem autem, quæ per ſemicirculum fit; nec commemorare dignum eſt: Multa enim præſupoſuit eorum, quæ poſteriùs oſtendenda ſunt, ab Elementariſque inſtitutionis ordine omninò recedit.* Et propoſ. 23. reijciendo operationem, quâ fiunt anguli æquales ex peripherijs interceptis æqualibus inquit. *Huiuſmodi itaque oſtenſionem, tanquam poſterioribus vtentem, ab elementari inſtitutione alienam eſſe cenſemus.*

Aliquando tamen ipſe Proclus anticipauit oſtendendo ad propoſ 24 Eucl. quæ ſequentibus indigebant ad ſui oſtenſionem, in hoc verò ſe geſſit tanquam interpres, & non vt abſolutè pareret euidentiam; ſed potiùs, vt indigitaret fallacias, quæ in ea propoſitione potuiſſent accipi. Sic Clauius contra Pelletarium anticipat, & Commandinus, vel qui addiderunt propoſ. extremas lib. 5. Eucl. ſupponunt enim propoſ. 12. lib. 6. Nam verè non poteſt dici demonſtratio, nec intelligi quidem, quæ præſuponit non oſtenſa, ſed potiùs credulitas, & obſcuritas: cùm addiſcẽtem opporteat credere ea eſſe demonſtrata; vt hæc, quæ ab illis dependent, ſibi perſuadeat, & capere nequeat illa, quorum, nec quidem figuram aſpexit. Vnde valde illi culpandi ſunt; qui Euclidis Elementa perperam augentes, ea introducunt, quæ multa cognitione aliarum propoſitionum indigent, non dum hauſtam, vt ſuam euidentiam nanciſcantur.

4 Peregrina fugiunt, & quæ ab inſtituto recedunt. Sic Procl. lib. 2. cap. 10. enumerat conditiones, quæ ad inſtitutionem Mathematicam neceſſariæ ſunt; & ea inter primas eſt: *quod ſicut neceſſaria non omittat; ſic ſuperflua non interſerat; perſpicuitatem, & breuitatem ſeruet.* Et ratio eſt. Quod impertinens ſit, ſcientiam extra ſuum obiectum vagari, & alia obiecta contemplari, quæ ad ipſam non ſpectant. Cúmque partes Mathematicæ ſint ſcientiæ maximè ſubordinatæ; quarũ vna ab alia aliquo ſemper ſubalternationis vinculo dependeat; omnes commiſcere, eſt omnes confundere, nihilque certi tradere; dum omnis ſine neceſſariâ dependentiâ traduntur. Vnde in Iura Mathematica maximè illi peccant, qui, vt ex vngue adiſcamus Leonem, dum vnam propoſitionem probant, alias, quæ illius loci non ſunt, praxes, propoſitioneſque ex alijs non cognitis oſtenſas, aut tantummodò aſſertas adferunt, & ſic mentes diſcentium tenebris, offundunt, & in ambages vrgent.

5 Eandem probationem multoties repetunt; dummodo propoſitioni deſeruiat, quam demonſtrare ſatagunt: Sic eandem demonſtrationem

9. & 11. propoſ. primi Euclides replicat, vt paſſim vbique videre eſt.

6 Licet nitantur, quæ proponunt, oſtendere Mathematici, aliqua tamen ſunt; quę nonniſi probabili ratione attingunt: Vnde Matheſis ſecundum omnes ſuas partes euidens non eſt: Nam in multis ſuis partibus ob defectum principiorum, ab inſtituto deficit, & probabilitate conquieſcit: Sic Aſtrologia, Optica, Sphera quoque, & Theorica Planetarum, & multi alij tractatus ex parte quidẽ euidentes ſunt, ex parte verò probabiles euadunt, vnde & Phiſiomathematici dicuntur. Omnes autem praxes Mathematicę probabiles ſunt. Quis enim credat ſe diuiſiſſe perfectiſſimè lineam bifariam? Circulum perfectiſſimum duxiſſe? & circinum, aut crure ſe girante, aut pede immoto parumper non diuaricaſſe, & ſic de alijs. Qua de re Problemata Mathematica, vt monuimus, abſtractæ ſemper ſunt intelligenda, vt euidenter concludant.

EXPENSIO IV.

De illis, qui ſtudijs Mathematicis operam nauant.

SCiant illi fruſtra terere tempus, & in ventos niti: ſi poſtpoſitis Elementis, & prærequiſitis tractatibus, velint poſteriores Mathematicas demonſtrationes haurire. Duplici enim de cauſa nunquam intelligent. Primò, quòd ea, quæ in demonſtratis apud Mathematicos ſunt, obſcura per ſe ſint, & quæ ænigmatis formam præſeferant, vt putes de tripode Apollinem loqui, & abſoleta effari. Imò & aliqua à probabilitate remotiſſima ſunt: niſi demonſtratione firmentur ita quòd; nec quidẽ probabilem aſſenſum eis Intellectus præbere poſſit proprio lumine ad id ſuadente, quod nõ euenit in alijs ſcientijs. Siquidem, quæ V.g. Philoſophi aſſumunt, vt probata, & demonſtrata in antecedentibus talia ſunt, vt intellectus propriâ vi impellente non abnuat. Vnde ſi non euidentem, ſaltem probabilem cognitionem aſſequuntur.

2 Termini Mathematici obſcuri ſ, neque propriè, quid ſignificent, & quo pacto imaginationi repræſentari queant, neſcit ille, qui prima non viderit. Sicut enim propoſitio ſine figurâ licet multis explicata, & clariſſimis verbis, argumentiſque oſtenſa percipi nequit. Ita multò minus, quæ præceſſerunt intellectui, ſeu imaginationi ſuccurrere queunt, cùm tum demonſtratione, tum figurâ deſtituantur. Quamobrem patientèr procedendum eſt, & cùm tractatus primus alteri aditum præbeat, per omnes ſucceſſiuè tranſeundum. Verum tamen eſt, quòd non omnes tractatus æquali nexu ſe vinciunt, aut adeo neceſſario, vt quis aliquem intermittere non poſſit, dum ad alios feſtinet; ſed vt plurimùm ſe neceſſario aſtringunt vinculo, aut certè multò facilius erit antecedentia legiſſe, vt ſingula poſtrema omninò percipiantur.

Verum eſt quoque Mathematicā praxibus vti, quæ independenter ab omni demonſtratione poſſint exerceri, ſed nunquam intelligi. Et hinc artifex Mathematicus excellens, & peritus euadere poteſt ſpretis demonſtrationibus, quę oſtendendis, non exercendis praxibus inſeruiunt.

Ne tamen aliquis, qui vnam, aut alteram Matheſeos partem conſequi exoptat, non omnem animo amplecti, mole rerum adiſcendarum obrutus, deficiat, & ab incepto ſe abſterreat, ſingulis tractatibus indicabimus, quænam neceſſariò præcognoſcenda, quænam tantùm vtiliter, vt facilè prætermitti poſſint; Et per omnes partes expeditè omnibus ſuperfluis amputatis diſcurremus, vt quantum in nobis eſt, omnis faceſſat difficultas, & planum ſternatur iter ad omnia intelligenda.

Si quis verò exquirat. Quęnam ingenia ad ſtudia Mathematica apta ſint. Iſti reſponſum erit. Pueros omninò ablegandos, ſi de demonſtrationibus agatur, ſolùmque ad primas definitiones, & praxes admitti poterunt. Demonſtrationes enim Mathematicæ arduæ ſunt, & intellectum perſpicacem & acutum ſummoperè requirunt, maximè, cùm agitur de proportionibus. Et ſi quando quærit Ariſtoteles. *Quid eſt, quòd puer fieri Mathematicus poteſt, ſapiens autem, aut naturalis non poteſt.* Non intelligit ſimpliciter de puero; Sed de iuuene. Sic enim affirmat 6. mor. cap. 8. *iuuenes licet Geometrici, & Mathematici, & in eiuſmodi rebus ſapienter euadant; prudentes autem euadere non videntur.* Quod & poteſt intelligi circa praxes; ſicut & prudens ſpeculatiuè iuuenis fieri; ſed non practicè poteſt; iuuentute, & feruore animi, rerumque inexperientiâ prohibente axiomata prudentię ad opus rectè demandari. Sic licet iuuenes exercitatiſſimi in rebus Mathematicis ſint; non tamen in demonſtrationibus exhauriendis. Cùm enim iuuenum animi inſtabiles, & ad oblectaments aclines ſint, parùm ad Mathematicam habiles videntur, quæ ingenium patiens, ſtabile, remotum, & ſolitarium requirit, & maximè quòd hodie Matheſis in tantam molem excreuerit; vt qui omnia probè nouerit, iam ad canos ſe perueniſſe cum ipſa perfectione doctrinæ experiatur.

EXPENSIO V.

De Principijs.

PRincipia, quæ primo Elementorum libro inſeruiunt, ea toti Mathematicæ aditum ſternunt, ſicut & ipſe primus liber ianua ipſius eſt, & limen, quo poſthabito, nullum aliunde in eius demonſtrationes ſeſe iter aperiat. Sunt autem in duplici differentia; nam quædam ſunt, quæ pertinent ad materiam, de qua agitur, vt definitiones; aliæ, quæ ad diſcurſum, & argumentationem inſeruiunt: vt ſunt prima principia per ſe nota, & conceſſiones.

DEFINITIO I.

PVnctum eſt, cuius pars nulla.

DEFINITIO II.

LInea eſt longitudo latitudinis expers.

DEFINITIO III.

SVperficies eſt, quæ longitudinem, & latitudinem tantùm habet.

Dicitur *punctum* nullam partem habere; quia acci-

accipitur, vt vltimus terminus lineæ, & linea, vt vltimus terminus ſuperficiei: Superficies autem, vt vltimus terminus corporis conceptu explicito, & inadęquato. Ideoque à ſuperficie excluduntur partes ſecundùm eam rationem, in qua concipitur terminus: nempe penes profunditatem, non quidem poſitiuè, & conceptu affirmatiuo, ſed negatiuè præſcindendo à partibus ſecundùm profunditatem, & de illo conceptu loquitur Euclides in ſuperficie definienda excludendo partes, quoad profunditatem à ſuperficie prout inadæquatè concepta, & prout ſtat in intellectu. Et eodem modo loquitur de lineâ, latitudinem ab ea excludendo; quia præciſè, vt inadęquatè concepta, prout terminus ſuperficiei, partes penes latitudinem excludit. Et quia puncta ſunt quoque termini lineę; hinc eſt; quòd etiam à puncto debuit excludere partes ſecundùm longitudinem, & quia erat in linea, & pertinebat ad quid ipſius; cùm eſſet eius vltimus terminus; hinc, etiam debuere ab eo excludi partes penes latitudinem; & quoniam linea, quid erat ſuperficiei; vtpote terminus ipſius; hinc & à linea, & ideo etiam à puncto debuit excludere partes penes profunditatem. Ideoque punctum præciſè ſumptum, vt terminus lineę debuit excludere partes, & penes longitudinem, & latitudinem, & profunditatem. Vnde benè definitum eſt *cuius pars nulla*; non quidem à parte rei; ſed prout ſubſtat noſtris conceptibus negatiuis explicitis & inadęquatis: cùm punctum, etiam prout eſt in intellectu; ſed adęquatè conceptum partes obtineat.

DEFINITIO IV.

L*Ineæ autem termini ſunt puncta.*

Non quòd omnis linea terminos conſequatur, cum multę recedant in ſemetipſas, vt *Circularis, Elliptica, Orbicularis*. Sed quia omnia linea, quę terminos conſequitur puncta vice terminorum recognoſcat, & quod omne punctum, vt terminus alicuius lineę concipiendum ſit; cùm ſe ſolùm, vt quantitas concipi nequeat ea ratione; quòd nullam ſiue lineæ partem obtineat: Ex partibus autem, vt dictum eſt, quantitas eſſentialiter conſtat.

DEFINITIO V.

R*Ecta linea eſt, quę ex æquo ſuis interiacet punctis.*

Id eſt, vt exponit Proclus, *quod quanta ſit punctorum alterius ab altero diſtantia, tanta ſit recta linea, quæ ab ipſis terminatur magnitudo; atque hoc eſt ex æquo inter ſua puncta collocari.* Quare linea recta eſt breuiſſima, quę de puncto ad punctum duci queat, vt patet in 1. figura. Siquidem punctata eſt maior, quàm continuata linea, quæ inter A, & C, puncta mediant.

Regulæ verò alicuius, aut cuprea, aut ligneæ; quę deſeruit ad ducendas rectas lineas examen eſt. Si eâ adhibitâ ducatur linea A B ab A in B puncta. Deinde inuertatur, vt regulę ſuperior ſuperficies ſit inferior relinquendo extrema ipſius ad eas partes, ad quas erant, dextrum ad dextram, ſiniſtrum ad ſiniſtram, & ducatur alia linea, de puncto A ad punctum B, nam ſi per primam lineam incedit optima eſt, ſi verò non incedit falſa. Ratio eſt; quia linea, recta eadem extrema conſequens, ſpatium non occupat, vt infrà in

DEFINITIO VI.

T*Ermini ſuperficierum ſunt lineæ.*

Superficierum, & linearum terminantium exempla Proclus aſſignat, *vmbras*, quę cùm priuationes ſint, & nihil conſequenter altitudinis habeant, latitudinem tamen, & longitudinem poſſideat lineiſque terminantibus circumſcribātur, Illud namque, in quo vmbra finit, lux incipit, quod equidem indiuiſibile eſt: niſi, pœnumbra obliteretur, linea eſt, vmbroſam ſuperficiem terminis definiens.

DEFINITIO VII.

S*Vperficies plana eſt ea, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.*

Scilicet, quæ ad inſtar alicuius ſpeculi, nihil anfractuoſum, impolitum, aut montuoſum, rugoſumue continet. Eſtque ſuperficies breuiſſima; quæ de linea ad aliam lineam, duci queat. Et ſi ſuper eam ducantur rectę, omnes ſecundùm omnem ſuam ſuperficiem, ſubiectum tangent; Vnde modus experiundi ſuperficiem, eſt regulam exactiſſimam illi multimodè, & penes diuerſos ſitus applicare.

DEFINITIO VIII.

P*Lanus angulus eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium alterius ad alteram inclinatio.*

Angulus planus, qui fit à lineis rectis hic ſpecialiter definit ab Euclides: Quamuis, & angulos curuilineos comprehendat, qui eodem plano iacent. Licet enim multæ lineę curuę ad ſeſe perpetuo fluxu inclinent, vt circularis, Elliptica, Spiralia, & tamen angulum non conſtituant. Nihilominus, & ipſę angulum efficient, vel ad aliam curuam, vel ad rectam inclinatę, quę ſequelam ſuę inclinationis, & normam non imitetur, vt videas figura 3. & 4. & 5. At duę circulorum portiones A B, & B C ductę duobus centris E, & D angulum non conſtituunt, quia licet diuerſo centro ducantur, altera tamen alterius ductum ſuauiter ſequitur, & inclinationem emollit. Sicut enim rectę à rectitudine deflectentes angulum conſtituunt; Sic quoque curuę ſuam inclinationem, & ductum non continuantes angulum conſtituent.

Nota verò; quòd in angulo duo poſſunt conſiderari, & ipſa linearum inclinatio, & ſpatium, quod inter lineas rectas ab illa inclinatione relinquitur. Euclides verò non loquitur de ſpatio; ſed de ipſa inclinatione. Vnde frigidum eſt illud aliquorum paradoxum; Lineas mutuò inclinatas duos angulos conſtituere, licet enim duo ſpatia relinquant, nempe A B E C extimum; & A E C intimum; adhuc tamen vna eſt inclinatio. Quare & vnus angulus, qui relinquit ſpatium exterius A B C A vtcumque terminandum, & non vnicâ rectâ, & internum A E C, quod ductâ lineâ rectâ à puncto A ad C terminari poteſt, & hoc ſpatium eſt propriè anguli, qui circumferentiâ A C metitur facto centro in E vertice inclinationis; Itaut maior ille angulus dicatur, qui habere poteſt æqualis circuli interpoſitam maiorem circumferentiam inter crura A E, & E C; minor verò, qui minorem inter ſua crura complectitur Peripheriam.

DEFINITIO IX.

CVm autem, quæ angulum conſtituunt lineæ rectæ fuerint; rectilineus ille angulus appellatur.

Patet definitionem octauam de angulis rectilineis præcipuè loqui: quia tantùm hanc rectilineorum ponit definitionem. Sunt autem plures formæ angulorum rectilineorum & mixtorum, de quibus hic ſuperfluè loqueremur. Tantummodò genericè aduerte. Mixtos eos eſſe, qui curuâ, & rectâ continentur, vt in figura 4. Curuilineos autem duobus curuis, vt in 5. figura videre eſt.

DEFINITIO X.

CVm autem recta linea ſuper rectam inſiſtens lineam angulos ſibi deinceps æquales, rectus eſt vterque æqualium angulorum; & quæ inſiſtit, recta linea perpendicularis vocatur eius, cui inſiſtit.

Anguli deinceps ſunt illi, qui ab eadem linea vltra contactum productâ, & ab altera inclinatâ fiunt ad idem punctum: Sic apud 6. figuram angulus B A D, & angulus D A C ad idem punctum A effecti, anguli deinceps vocitantur. Si ergo, in ipſa 6. figura, in puncto 6. recta A 6. cadat, & angulum A 6 B, & alterum A 6 A, qui ſunt anguli deinceps, æquales fecerit; itaut 6 A non magis inclinet in hanc, aut alteram partem, anguli illi recti dicuntur.

DEFINITIO XI.

OBtuſus angulus eſt, qui recto maior eſt.

DEFINITIO XII.

ACutus verò, qui minor eſt recto.

Acutus itaque angulus erit E 6 A, qui minor recto eſt A 6 A. At verò C 6 B recto maior erit. Anguli autem apud Mathematicos tribus literis deſignantur, & media litera ſemper ſignificat illud punctum, ad quod fit inclinatio, & ipſum angulum denotat.

DEFINITIO XIII.

TErminus eſt alicuius rei extremum.

Vnde ſunt tres termini quantitatis, Punctum, Linea, Superficies; quia eam ſecundùm tres rationes terminant.

DEFINITIO XIV.

FIgura eſt, quæ ſub vno, vel pluribus terminis comprehenditur.

Igitur, nec punctum, nec angulus figura eſt; quia terminata non ſunt ſuis terminis. Angulus enim licet ſi clauſus duobus terminis; non tamen vndique: Cùm ab ea parte, quâ lineæ patent, licet poſſit terminari, vel rectâ, vel curuâ, & fieri triangulum; non tamen de ſua eſſentia, & ſecundùm eſſe præciſum angulus id conſequitur. Punctum verò ſecundum rationem puncti terminus omnigener eſt, eum nullam partem amplectatur: Quaderè, nec plures terminos, aut ambitum conſequi poterit hinc, & inde claudentem: alioqnin in partes diſtingueretur. Sic nec quantitas infinita; etiam ſi aliquibus terminis clauderetur; ſi tamen ab aliquâ parte in infinitum pateret, figuræ appellationem mereretur; quia terminis vndiquè non comprehenderetur.

DEFINITIO XV.

CIrculus eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ Peripheria appellatur; ad quam, ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ terminantes æquales ſunt.

Si in figura 7. omnes rectæ à puncto A in peripheriam terminantes, vt A B, & A C, A E, & A I ſint æquales, ille vocatur *Circulus*. Poteſt etiam hoc pacto definiri. *Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à linea finita altero manente extremorum, alio ſe mouente, donec perueniat, ad idem punctum, à quo diſceſſit motus.* Sic ſi linea A B manente A moueatur, donec alterum extremum B ſe mouens perueniat ad punctum idem B, à quo incepit motus, circulum deſcribat. Differunt autem iſtæ definitiones, quòd hæc cauſam efficientem explicet, illa formalem. Geminus apud Proclum vocat lineam circularem compoſitam; nempe refractam, & in ſeſe inclinatam, & angolatam. & Ariſt. 1. de Cœlo inquit. Circulum infinitis angulis conſtare, quod intelligendum eſt, non à parte rei, quaſi quod circulus materialis infinitis angulis plicaretur, cùm, nec quidem infinitas partes conſequatur; Sed quod ex ſuo conceptu debeat vna pars concipi inclinata ad aliā. Cùmq; in quantitate partes quidem in infinitum conceptibiles ſint; licet non factibiles; hinc eſt, quòd infiniti anguli in circulo concipiendi ſint; nempe quælibet pars, quæ concipiatur, ſi vt circuli concipiatur, oportet concipi, ad aliam inclinata, interiùs minor, exteriùs maior.

DEFINITIO XVI.

HOc verò punctum Centrum circuli appellatur.

Itaque nullum aliud punctum *Centrum*, niſi circuli dici poteſt, eo quod debeat eſſe in circuli plani medio. Benè autem *Centrum* circuli dicitur punctum, licet enim nullas concludat partes; omnes tamen lineas, quæ à circumferentia ducuntur terminat. Quod nec lineæ ſecundùm, id iuxtà quod in punctum feruntur, partes obtineant; nimirum latitudinem, & hoc Methaphyſicè, & abſtractè, cum fundamento tamen in re, ſcilicet in ipſa diuiſione circuli in ſectores, vt eſt ſector I A E, cùm enim diuiſiones ſpatium non occupent in latitudinem, mente conceptæ; nec illud, quod terminat iſtas diuiſiones, partes habebit in latitudinem. Sed neque in longitudinem: cùm lineæ terminus ſit. Verùm materialiter, & in ipſa quantitate punctum propriè non eſt, nec indiuiſibile, cùm nulla pars in quantitate ipſa indiuiſibilis ſit; vt ſupra dictum eſt.

DEFINITIO XVII.

DIameter autem Circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ſuis extremis in peripheriam terminans; quæ circulum biſariam ſecat.

Tales ſunt in fig. 7. lineæ I C, & E V; Tranſeunt enim per centrū A, & in peripheriā finiunt ſuis extremis I, & C, ſicut etiam E, & V; circulumque biſariam ſecant; quia per punctum medium tranſeunt, nempe per centrum. Quamobrem, ſi ſuperficies circuli plicaretur, in punctis,

E V,

E V, congrueret pars circuli E B V parti E D V; cùm A B ſit æqualis lineę A D.

DEFINITIO XVIII.

SEmicirculus eſt figura, quę continetur ſub diametro, & ſub dimidio peripheria.

Talis eſt *ſemicirculus* E D V, qui continetur ſub peripheria E D V, & ſub diametro E V.

Porrò ſegmentum circuli erit illud, quod ſub peripherię portione, & linea, quę diameter non ſit, contineatur. Sunt autem compoſitę figurę, & mixtę ex curua, & recta linea; anguluſque tũ ſegmenti, tum ſemicirculi mixtus eſt, curua, rectaque comprehenſus, vt A E D.

DEFINITIO XIX.

REctilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

Genus explicat Rectilinearum figurarum. Non autem earum, quę vnica linea contineantur. Quod in iſtis libris agat quidem de pluribus figuris rectilineis; de ſolo autem circulo ſermonem ſit facturus. Quapropter non fuit neceſſe explicare genus figurarum vnico ambitu comprehenſarum. Verùm poſſent ſic definiri *figuræ orbiculares vnica linea clauſæ, quæ in ſeſe redeuntes*. Figurę verò plurium laterum; ſed curuorum definirentur, *quę flexis lineis continentur*. Mixtę autem, *quæ ſub curuis, & rectis clauduntur*.

DEFINITIO XX.

TRilineæ figuræ ſunt, quæ ſub tribus lineis continentur.

DEFINITIO XXI.

QVadrilateræ, quæ ſub quatuor.

DEFINITIO XXII.

MVltilateræ, quæ ſub pluribus, quam quatuor rectilineis comprehenduntur.

Quoniam ſpecies figurarum rectilinearum deſumptę à multitudine laterum in infinitũ progrediuntur. Ideo omnes alias generali definitione complectitur. Attamen explicauit trilateras, & quadrilateras; quòd de iſtis hoc primo libro tractet; quę & omnibus alijs fundamenta prębent, & propriè ad Elementa pertinent; cùm omnis figura rectilinea plana, vt videbimus, in triangula reſoluatur.

DEFINITIO XXIII.

TRilaterarum autem figurarum, Æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DEFINITIO XXIV.

ISoſceles autem, quod duo latera æqualia tantummodò tenet.

DEFINITIO XXV.

SCalenum *autem, quod tria inæqualia habet latera.*

Nam, cùm triangulum tribus lateribus clauditur, in tres etiam ſpecies diuiditur. Si etenim omnia latera ſint æqualia, conſtituitur *Æquilaterum*, vt fig. 8. Si duo tantùm *Iſoſceles*, vt 10. fig. & 11. Si omnia inęqualia, vt fig. 9. *Scalenum* conſtituitur.

DEFINITIO XXVI.

AD hæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

Vt fig. 10. vel 11. Hęc autem ſecunda triangulorum diuiſio non eſt ſubordinata primæ; ſed æquã vniuerſalitate patet, nec ei vllo pacto adnexa. Nam vt benè aduertit Proclus ad hanc definitionem poſſunt pertinere figurę laterum quatuor; quæ tamen tres angulos ſolùm obtineant, vt triangula Cilogonia, & Aceidoidea cuſpidi ſagittę ſimilia, vt fig. 12. quæ tamen tres tantùm angulos obtinent. Deinde triangulum rectum angulum habens poteſt eſſe, & Iſoſceles, & Scalenum, non autem æquilaterum. Vnde patet hanc triangulorum diſtinctionem à prima non pendere. Licet magnitudo angulorum à lateribus quaſdam inſignes obtineat dependentias; vt videbimus.

DEFINITIO XXVII.

AMblygonium *autem, quod obtuſum angulum habet.*

Veluti fig. 12. apud circulum. Quod etiam poteſt eſſe Scalenum, & Iſoſcelum.

DEFINITIO XXVIII.

OXigonium *autem, quod tres habet acutos angulos.*

Velut fig. 8. Quod etiam poteſt eſſe Scalenum, Iſoſceles, & Æquilaterum. Eo quod in omni triangulo tres quidem poſſint eſſe acuti anguli; ſed rectus, & obtuſus ſolùm vnus eſſe poteſt. Quamobrem reliqui duo neceſſariò acuti erũt. Qui ſi erunt æquales, triangula quoque, duo latera ęqualia obtinebunt: ſi inęquales inuicem, duo latera quoque ſubtenta erunt inęqualia, & ſemper latus tertium angulo obtuſo, vel recto ſubtenſum maius, ob angulum maiorẽ reliquis, quem ſubtendit.

Oxigonium, cum tribus acutis angulis potiatur latera poteſt conſequi omnia inęqualia, vel duo, vel tria æqualia, & ſic eſſe Æquilaterum, Iſoſcelum, & Scalenum. Nam dari poteſt triangulum, vt cum Barocio aduertit Clauius ad propoſ. 15. lib. 4. Elemen. Oxigonium, quod latus habeat, tum hoc, tum altero crure ſeorſim ſumpto maius; etiam ſi crura reliqua inuicem ſint æqualia.

DEFINITIO XXIX.

QVadrilaterarum figurarum quadratum *eſt, quod æquilaterum, & rectangulum eſt.*

DEFINITIO XXX.

ALtera parte longior figura eſt, quæ æquiangula quidem eſt, & non æquilatera.

DEFINITIO XXXI.

RHombus, *quæ æquilatera, at æquiangula non eſt*.

DEFINITIO XXXII.

RHomboides, *quæ oppoſita, & latera, & angulos æqualia tantùm habet, Non omnia.*

DEFINITIO XXXIII.

R*Eliqua verò ab his quadrilatera* Trapezia *vocentur*.

In iſtis Definitionibus illud aduerte. Quòd ab altera parte longiori, qualis eſt fig. 13. differt quadrata 2. non in angulis; ſed in lateribus tantùm: Rhombo verò fig. 14. expreſſo in angulis; at non in lateribus: A Rhomboide fig. 16. ſignato in angulis ſimul, & in lateribus; ſicut & à Trapezio, fig. 15. deſignato.

DEFINITIO XXXIV.

P*Arallelæ rectæ lineæ ſunt, quæ, cum in eodem ſint plano, ab vtraque parte, etiam ſi in infinitum producantur, in neutram partem ſibi mutuò incidunt.*

Tales ſunt in fig. 17. Parallelæ A B, & C D. Quare duas conditiones eſſentiales requirit Euclides; vt lineæ parallelæ, Ideſt æquidiſtantes ſint, Prima, quòd ſint in eodem plano, alioquin in diuerſis certum eſt non conuenire. Secunda quòd numquam coeant, licet in infinitum producerentur. Quod licet nequeat cognoſci experimento, cognoſcitur tamen animo, & ratione. Quòd, cùm diſtantia inuicem non ſit imminuta, dùm procedunt vſque ad certum ſpatiũ atque terminum; nec vnquam imminuetur, cum par ſit ratio de illo proceſſu ad quamcumque diſtantiam: neque dicas, poſſe illam quidem diſtantiam eſſe imminutam; ſed non ſenſibiliter: nam non loquimur de lineis ſenſibilibus; ſed abſtractis, & animo conceptis, in quas, vt ſupra diximus Mathematica, velut in ſuum obiectum fertur.

Definitiones, quę ſequuntur Euclidis non ſunt. Ab authoribus tamen adduntur, vt neceſſariè ad ea, quę primo libro traduntur, percipienda.

DEFINITIO XXXV.

P*Arallelogrammum eſt figura quadrilatera parallelis oppoſitis lateribus*.

Sic fig. 13. 14. 16. 2. Parallelogramma ſunt, eſtque nomen genericum conueniens quadrato, Rhomboidi Rhombo, & altera parte longiori, ſed non Trapezio.

DEFINITIO XXXVI.

D*Iameter in parallelogrammo eſt linea; quæ diuidit angulos oppoſitos, & latera bifariam.*

Hoc aduertit Ariſt. lib. 15. Probl. 1 & 2. Cur diameter appelletur, quę de angulo ad angulum ducta ſit, vt A B, & non quęlibet alia bifariam figuram diuidens, & reddit rationem, quia diuidit bifariam non ſolùm latera, Ita vt duo remaneant hinc, duo indè; ſed etiam angulos, quod nullę aliæ rectę in parallelogrammis ductę efficiunt.

DEFINITIO XXXVII.

S*I parallelæ in parallelogrammo ducantur per idẽ diametri punctum, partes, per quas tranſit diameter*, circa diametrum; *per quas verò non tranſit,* complementa *dicuntur*.

Sic ductis parallelis A B, & C D per idem punctum I, nigra, per quę diameter non tranſit, Parallelogramma *Complementa* 3 & alba, per quę tranſit, vocantur, *circa diametrum*, conſiſtentia.

POSTVLATA.

1 POſtuletur. *Vt à quouis puncto ad quoduis punctum lineam rectam duci concedatur.*

2 *Lineam rectam terminatam in continuum rectâ producere.*

3 *Quouis centro, & interuallo circulum deſcribere.*

4 *Omni magnitudine data poſſe ſumi maiorem.*

PRIMA PRINCIPIA.

QVæ etiam ſolent dici *Dignitates, Axiomata, Pronuntiata, Effata, communes Notiones*; Alia omninò prima, quę adeo ſunt clara, vt primo conceptu indubitata euadant; Alia non item; ſed quaſi immediatæ primorum principiorum concluſiones. Primi generis ſunt.

PRINCIPIVM I.

Q*Væ eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia, & quod vni æqualium maius eſt; maius etiam alio neceſſè eſt eſſe, & ſi minus vno ſimiliter minus altero. Et ſi vnum æqualium eſt maius magnitudine quapiam, aut minus alterum quoq; æqualium ea magnitudine maius eſt, aut minus.*

PRINCIPIVM II.

E*T ſi æqualibus æqualia adiecta fuerint, tota erunt æqualia; Et, ſi ab æqualibus æqualia ablata fuerint, tota erunt æqualia.*

PRINCIPIVM III.

E*T ſi inæqualibus æqualia adiecta fuerint, remanent, vt prius inæqualia, & ſi iiſdem inæqualia inæqualia quoq; addantur; ſed maius maiori, minus minori; adhuc ſũt inæqualia; Et, ſi ab inæqualibus æqualia ablata fuerint manent, vt priùs inæqualia. Quòd ſi ab iiſdem inæqualia ablata ſint maius minori, minus maiori remaneat inæqualia.*

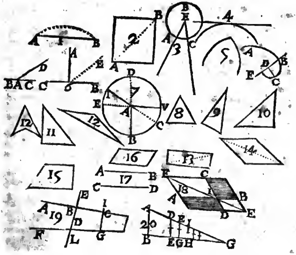
PRINCIPIVM IV.

E*T quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia, & quòd vni æqualium duplum eſt, duplum etiam eſt alteri. Et, quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia; Et, quæ ſunt æqualia, eiuſdem dupli, ſunt dimidia.*

PRINCIPIVM V.

E*T, quæ mutuò ſibi congruunt, inter ſe ſunt æqualia: Nimirum quando vnum alterum nulla parte excedit.*

PRIN-



PRINCIPIVM VI.

T*Otum ſua parte maius eſt.*
Quibus auctores addidere ſequentia:

PRINCIPIVM VII.

O*Mne totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.*

Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum exceſſus adiunctorum exceſſui æqualis; & ſi iiſdem inæqualibus æqualia addantur erunt adhuc exceſſus totorum, & adiunctorum æquales. Sic ſi è conuerſo æqualibus inæqualia demantur, aut inæqualibus æqualia eſſent totorum exceſſus, & adiunctorum æquales.

V. G. ſi duobus palmis addantur, hinc tres quartæ palmi, inde palmus, differentia erit horum compoſitorum vnius quartæ palmi, vt differebant priùs tres quartæ palmi à palmo, antequam adderentur. Et ſi tribus quartis palmi palmus, & palmo palmus addatur quantitates additæ different vna quarta palmi; vt differebant priùs tres quartæ, & palmus antequam vnus palmus ſingulis adderetur: quod eſt dicendum pariter de ablatione.

Principia, quę minus clara ſunt, & ideo oſtendi poſſunt.

PRINCIPIVM VIII.

D*Va lineæ rectæ non habent vnum & idem ſegmentum commune.*

Ideſt. Nequeunt reperiri duæ lineę quarum vna pars ſit eadem cum altera, ita vt eandem lineam integret: Reliqua verò ſit ab illa remota, V. g. in fig. 7 Quod I A V ſit vna recta, I A C ſit altera recta, quę conſequantur eamdem partem I A, & in ipſa idem ſint; Reliqua verò in duas partes abeat. Si enim hoc eſſe poſſet, vt oſtendit Proclus, I D V eſſet ſemicirculus; quia linea, quę ſupponitur recta I A V, tranſiret per centrũ; vnde pars circuli I A D V ab ipſa, & à peripheria concluſa eſſet ſemicirculus, & ideo æqualis I A C D V ſemicirculo, quod eſſe nequit.

PRINCIPIVM IX.

D*Va lineæ ad idem punctum concurrentes, ſi producantur, ſe mutuò ſecant.*

Sic A C, & A B in fig. 7. quæ ad idem punctum A concurrunt productę in D, & I ſe mutuò ſecant. Id autem poteſt oſtendi. Nam ſi ſe non ſecant, congruunt (Si enim producantur vtique retrò non redibunt) & I A erit idem ſegmentum, ac A D, & idem erit cum ipſa, quod eſt contra præcedens pronunciatum.

PRINCIPIVM X.

D*Va lineæ rectæ in eadem puncta concurrentes ſpatium non comprehendunt.*

Sic in prima figura. Si à puncto A, in B alia linea recta ducatur, cadet in lineam primo factam, & per eam ductus ipſius lineę incedet, nec inter eas ſpatium mediabit, vt mediat inter punctatam, & rectam A B.

PRINCIPIVM XI.

O*Mnes anguli recti ſunt æquales.*

Quoniam, ſi eſſent inæquales alter eſſet maior recto, vel minor, & ſic eſſet acutus, vel obtuſus; quod eſſe nequit, cùm eſſet rectus, vt ſupponitur; non rectus autem, quia minor altero recto. Et ſic rectus, & non rectus.

PRINCIPIVM XII.

S*I duas alias lineas alia ſecans, angulos intra ipſas; & verſus eandem partem, minores duobus rectis*

rectis fatiant; illæ lineæ tandem concurrent.

Quia eſt altera, ad alteram inclinata; vnde cùm non ſint æquidiſtantes, neceſſariò tandem conuenient: Sic quia anguli in fig. 9. ad CBD, & GDB ad eaſdem partes, quas facit linea EL incidẽs, vel ſecans duas AC, & OF ſunt minores duobus rectis; neceſſariò tandem concurrent, dummodo ducantur per partes ſemper æquales.

Ratio eſt. Quia ſi B C procedendo à B in C abſumat aliquam partem diſtantię, V. g. ſextam C B, quę eſt eadem, ac illa, quę eſt inter B. & D. Si producatur etiam per aliam partem æqualem; abſumet rurſus aliam partem æqualem ſextam: Cumque partes æquales inter B, & D infinitę non ſint. Ideo tandem omnes abſumet, & ſic perueniet ad aliam lineam F G. Dices; Dantur lineę aſymptotales, quę ad rectam accedunt ſemper; nec vnquam eam aſſequuntur. Reſpondetur eas aut eſſe flexas, & de iſtis non loquimur; aut eſſe rectas, & iſtę non ducuntur per partes æquales, ſed ſemper minores, & minores; Vnde eſt diſpar ratio.

Nam Sint duę rectę, vt in fig. 20. AC, & BC, ſed tali modo ducantur. Producatur AD vſque ad D, & B E vſque ad E, & ducatur E D. Deinde medietas E D aſſumatur, & ad eam diſtantiam ducatur parallela G F, & poſtea producatur A D in F, & B E in G. Aſſumptaque rurſus medietate G F, quę eſt minor: quam E D ducatur alia parallela H I, & ad eam ducatur A D in I, & B E in H. Itaque Mathematici oſtendunt, quòd lineę de parallela in parallelam viciniorem ductę, & ſemper in minores, minoreſque diſtantias continuatę quales ſunt A D, D F, & F I; numquam eſſe peruenturas ad punctum C, in quo ſe coniungant. Eo quod ſpatium A C ſit diuiſibile in infinitum. Sed hoc eſt ducere lineas inuicem inclinatas per partes ſemper minores, & conſequenter minori, minorique augmento eas prolungare, at non per partes æquales, & æquali additione eas continuare. Partes verò ſeipſis perpetuò minores ſaltem Methaphiſicè Exp. 1. tract. 1. admiſimus. Non autem æquales; quę ipſo ſenſu iudice infinitę in quantitate non reperiuntur,

EXPENSIO VII.

De Elementiis in genere.

SVpra nomen Elementi, vimque explicauimus; modo de eius differentia, atque diuiſione peragendum.

Elementares inſtitutiones à varijs olim inuentas collegerunt antiquitùs aliqui Hypocrates, Chius, Leo diſcipulus Neoclidis, Theudius Magnes, Hermotinus, Colophonius. Omnium autem Euclides prę̄ſtãtiſſimus, qui, cùm longò tẽpore Alexandrię docuiſſet, vt teſtatur Procl. l. 2. c. 4. *Multa conſtruxit eorum, quæ ab Eudoxo multa verò perfecit eorum, quæ à Theæteto reperta fuerant, & ea prætereà, quæ à prioribus molliore brachio oſtenſa fuerunt, ad eas redegit demonſtrationes; quæ nec redargui, nec conuinci poſſunt.* Vnde etiam Ramus lib. 3. Scho. Math. teſtatur. *Nullus paralogiſmus nulla Pſeudographia in totis Elementis Euclidis nobis, quamquam ſeuerè inquirentibus animaduerti potuit.* Nec ſolùm Elementa, ſed multas alias inſignes lucubrationes edidit quarum, quę ad nos peruenerunt, ſunt Optica, Catoptrica, Muſicæ elementares inſtitutiones, Phęnomena Datorum liber, & inſuper quas, non habemus, operas liber de diuiſionibus, & Conicis: vnde inſignem in Geometricis conſecutus eſt, & primam laudẽ.

CONCL. I. PROPOS. VI.

Elementa in duplici ordine ſunt, alia ſubalternata, alia ſubalternantia.

PAtet, quia aliqua dependent à primis, & ſuppoſitis illis probantur: Ergo aliqua ſunt ſubalternantia, idest, quę alijs prima principia prębent, alia dependentia, ab illiſque principia mutuant, & ex eis euidentiam adipiſcuntur. Vnde propriè, & verè Elementa non ſunt. Hæc verò ſunt, quę 11, & ſequentibus libris explicantur; maximè quia non adeò vniuerſalia ſunt; ſed ad certas figuras, nempe ſolidas tales, aut tales reſtringuntur.

CONCLVS. II. PROPOS. VII.

Ordo Elementorum decem libris comprehenſorum talis eſt; Primò agitur de proportione; Secundò de proportionum ſimilitudine; Tertiò de quantitatis Diſcretæ, & Continuæ comparatione.

PRob. Quia primis 4. libris oſtendit figurarum, aut partium in ipſis factarum proportionem, & aut æquales, aut maiores, aut minores probat, Primo quidem lineas triangula parallelogrãma quo ad ſe, Secundo lineas quoad earum potentiam, Tertio circulos, Quarto alias figuras planas explicans. Libro verò 5. agit de proportionum ſimilitudine in genere, Sexto de proportionum ſimilitudine in quantitate continua, Septimo, Octauo, & Nono de proportionum ſimilitudine in numeris. Decimò comparat quantitatem Diſcretam, & Continuam, & earum proportiones componit, aliaſq; conuenire cum proportionibus numerorum, alias non conuenire affirmat, & ideò numeris inexprimibiles, & irrationales aſſerit, & quamuis paſſim agat de effectione figurarum, vt cũ agit de conſtituendo triãgulo æquilatero, & quadrato, &c. Attamen in ipſa probatione oſtenditur, earum partium adinuicem æqualitas, vel quod vna alterà ſit, vel maior, vel minor. Vnde ſemper agit de proportione corporum, vel eorum partium adinuicem. Non agit verò de proportione numerorum, quia in ipſa prolatione numeri ſtatim agnoſcitur, an numerus ſit maior, aut minor, aut æqualis. Vnde ſuperfluum erat de hac re demonſtrationem extruere. Agit itaque de proportione in genere, 1. 2. 3. & 4. libro. De proportione verò in ſpecie, eam comparando alteri proportioni, ideoq; de proportionum ſimilitudine 5. 6. 7. 8. & 9. libro, & tandem 10. de quantitatis Continuæ, & Diſcretæ comparatione.

TRACTATVS IV.

In primum Librum Elementorum.

LIBER primus Elementorum agit præcipuè de lineis inter ſe comparatis, quoad ſitum, æqualitatemque, & de triangulis duplici modo, primò item in ſe, comparando latera angulis, quibus ſubſunt. Secundò etiam reſpectu aliorum triangulorum, oſtendendo quænam ſint æqualia, quæ verò non. Tandem agit de quadratis,& parallelogrammis verſus finem. Agit autem duplici modo quædam ſpeculatiuè tantùm, & Theoricè, quædam verò Problematicè, & in ordine ad operationem. Ordo verò confuſus eſt; non quidem, quoad rerum dependentiam, cùm aptiſſimè in hoc procedat; ſed quoad materiarum diuerſitatem. Siquidem primo agit de triangulo, inde de lineis; rurſus reddit ad triangula, &c. Nos verò hunc ordinem auſi ſumus paululùm immutare; vt etiam ſecundus ordo ſeruaretur in ipſis rebus tractandis. Et quia modo nominantur latera, modo anguli, angulos nigro, alboque, vel ſub nigro diſtinximus; at lineas literis notauimus, vt magis perſpicua eſſet demonſtratio, & literarum ferè eadem repetitio intellectum legentium non confunderet. Sicca verò, & nuda ponimus Elementa, quòd & ipſe Euclides ita faciendum duxit, vt teſtatur Proclus lib. 2. cap. 5. *Præcipuè verò circa Geometricam Elementorum inſtitutionem eum*, nempe Euclidem, *quiſpiam admirabitur, propter ordinem, & electionẽ eorũ, quæ per Elementa diſtribuit; etenim non ea aſſumpſit omnia, quæ poterat dicere;* ſed ea dumtaxat, *quæ Elementi potuit ordine tradere*. Vnde puto grauia per ſe, & difficilia primo ingreſſu eſſe Elementa; vt contra jus faciat, & æquitatem, illum, qui inſuper ad augendam faſcem, aliena vocet in Elementa, & ex alijs principijs dependentia, & ideò obſcuriſſima, & altioris ordinis, vt tenebras offundat clariſſimis, proponat. Satiùſque exiſtimaui ſobriè me agere, & neceſſaria ſolùm proponere conſulens ſimul, & breuitati, & claritati.

EXPENSIO I.

De Triangulis conſtituendis.

CVm Triangulum prima figurarum ſit, & quædam etiam inter lineas exerceri nequeāt ſine eorum conſideratione, & effectione, ideò primus limes in triangula ingreditur.

PROB. I. PROPOS. I.

Super data linea terminata Triangulum æquilaterum conſtituere.

SIt linea B A finita, ſuper quam triangulum æquilaterum ſit conſtituendum.

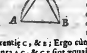
Centro B trahatur circulus interuallo A B vt in poſtulatis conceſſum. Iterumque centro A eodem interuallo A B alius circulus deſcribatur.

Se interſecabunt in C; Trahatur igitur ad illud punctum interſectionis C à puncto B linea recta C B, & item à puncto A alia recta A B ducatur ad idem punctum C: eritque factum triangulum A C B rectilineum, *quod dico eſſe æquilaterum.*

PRÆASSVMPTVM.

PRimò ſupponendum lineas tractas à circumferentia ad cẽtrum eſſe æquales ex dictis. Secundò quod, quæ ſunt æqualia alicui tertiæ rectę, eſſe lineas æquales inuicem ex I. pronunc.

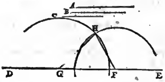
Prob. Linea C B eſt æqualis lineæ B A I vt ductę à centro B ad punctum circumferentiæ A,& C. Linea quoq; altera A C eſt æqualis eidem A B, ob eandem rationem, quod ductæ ſint à centro A ad puncta circũferentię C, & B; Ergo cùm lineæ tertiæ A B, duo crura A C, & C B ſint æqualia, erunt & inuicem æqualia.



PROB. II. PROPOS. II. Euc.22.

Datis tribus partibus in vna recta, quarum duæ ſimul ſumptæ reliquâ mediâ ſint maiores, conſtituere triangulum habens crura illis æqualia.

SVnt datæ in recta D E partes D G, & G F, & E F æquales, ſi ita placuerit, ſingulę ſingulis A, C, B. Debeatque triangulum conſtitui, cuius crura dictis partibus ſint æqualia.



Facto centro in F circulus ducatur Interuallo F E. Iterumque facto centro in G interuallo D G circulus ducatur, qui ſe interſecabunt in H. Ductis igitur ad H rectis G H, & F H *erit factum triangulum* G H F. *Cuius baſis eſt* G F *vna pars, lineaq;* G H *æqualis* G D *alteri parti, &* F H *tertiæ parti* F E.

Probatur; quia ſunt duæ D G, & G H æquales, vtpote radij eiuſdem circuli ducti centro G. Sic quoque duæ F H, & F E ſunt æquales, vtpote radij eiuſdem circuli ducti centro F; Tertia autem G F eadem, quæ priùs. Ergo crura huius trianguli G F H, tribus partibus lineæ D G, & G F, & F E ſunt æquales.

Quòd autem circuli ſe debeant interſecare; patet ex conditione, quam poſuimus in propoſitione; quòd duæ D G, & F E reliquâ mediâ ſint maiores ſimul ſumptæ; quia ſic circulus F H, & G H in linea G F vnus, vbi alter eſt, ſecundùm aliquam ſui partem cadet: Vnde neceſſariò deuecti ad H, dum alter exit ab altero, ſe interſecabit.

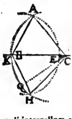
PROB. III. PROPOS. III.

* *Dato triangulo, ei triangulum æquale ad aliam partem conſtituere.*

AB antecedenti Propoſ. emergit, quod dato triangulo A B C poſſit fieri aliud triangulū B H C ſuper eãdem baſim B C alteri æquale. Interuallo B A deſcribatur circulus, & interuallo C A deſcribatur rurſus circulus; vbi ergo ſe interſecant in H à punctis B, & C ducantur rectę B H, & H C, *Et erit factum triangulum* B H A *æquale triangulo* B A C.

Probatur latera enim ſunt æqualia; Nam B A crus, & B H crus ſunt eiuſdem A B H radij; Ergo æqualia: Sic & A C, & C H crura ſunt eiuſdem circuli A K H radij; Ergo æqualia. Crus verò B C commune.

Anguli autem ſinguli, angulis erunt æquales; Nam ſi aliquis eſt inæqualis; Sit V.g. B C H, qui ſit maior: Ita vt B C Q niger dicatur angulo B C A æqualis. Et tamen latera ſint lateribus, ſingula ſingulis trianguli B A C æqualia; Ergo B Q crus



erit æquale B A: ſed B A eſt æquale cruri B H; Ergo etiam B Q crus eſſet inæquale cruri B H, minus maiori; quod eſſe nequit. Ergo omnes quoque anguli erunt æquales: Cùm idem argumentum ſit de reliquis, quòd verò poſſimus ducere circulū interuallo dato, & centro V.g. ex hoc poſtulauit Eucl. & fecit in prima Propoſ. Nã in ducendo poſteriori crure æquilateri trianguli interuallum aſſumpſit idem, quòd priùs facto alibi centro.

COROLLARIVM.

HInc eſt vniuerſaliter, quòd ſi detur triangulum habens duo crura inniſa eidem baſi. V.g. B C vel æquali, & crus vnum vni, alterum alteri ſit æquale, quòd & triangula ſingulis angulis inſiſtentibus, iiſdem lateribus æqualibus erunt æqualia: Sic anguli ad C erunt æquales; quia æqualibus B H, & B A cruribus inſunt, vel inſiſtūt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Datum angulum, & baſim, æquicrurumque triangulum biſariam ſecare.

* SIt datus angulus I A C, qui in duo ſecãdus ſit centro A interuallo ad libitum A B ducatur circulus B V D, & ſecet crus A C in D, & recta ducatur B D. Facto deinde centro in D interuallo D A ducatur circulus, & idẽ fiat in B interuallo B A. Et à puncto, in quo ſe interſecãt in E, ducantur rectæ E B, & D E. A puncto deinde A, ad E ex poſt. 1. ducatur A E. Dico *angulum apud* A *eſſe med um ſectum, medietatemque nigram albæ eſſe æqualem.*

Probatur. Quia A D, & B A, vtpote eiuſdem



circuli radij ſunt æquales; & B E eſt linea æqualis lineæ B A ob eandem rationem; nec non E D, ipſi A D. Ergo etiã erunt, vt illa A D, & B A, inter ſe æqualia hæc poſtrema crura B E, & E D. Ergo triãgulum A D E ſuper eandem baſim A E, ex præced. erit æquale triangulo E B A. Et ſicut ſingula latera, ſingulis lateribus, ſic & anguli ſinguli, ſingulis angulis; Quare angulus niger erit æqualis albo, apud A.

Dico ſecundo baſim B D in duo ſectam.

* Prob. Nam; ſi non eſt ſecta biſariam, erit pars altera; vel maior, vel minor. Sit, V g maior H B, quę, vt eſſet ęqualia, deberet eſſe H V, & ducatur ab V linea V A.

Quęro, an V A ſit æqualis A D, vel non? Si nõ. Iam ſumus extra prę ſuppoſitionem: Nam A D, & A B præſuponimus æqualia crura: Vtpote Iſoceles. Si verò æquat V A crus A D. Iam habemus V A H triangulum æquis cruribus, ſingula ſingulis correſpondentibus trianguli A H D, & baſis communis: Ergo etiam anguli ex pręced. erunt æquales. Quare angulus apud A inter V A, & A H erit æqualis angulo maiori H A D nigro, & conſequenter albo ſibi æquali B A H; pars toti, quòd eſſe nequit. *Quare baſis* B H *non erit maior baſi* H D, *ſed æqualis.*

*Pro.

* Prob. 3. pars: Quòd etiam triangulum B A D nuper factum ſit bifariam ſectum. Nam cum omnia duo crura trianguli B A H, & H A D, vnum B A, vni A D, & aliud B H, alteri H D correſpondenti ſint æqualia, & baſis H A cõmunis, erũt triãgula ipſa inter ſe æqualia, ex pręced. BAH, & HAD.

EXPENSIO II.

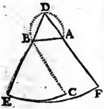
De lineis ſecandis.

LIcet lineæ circino ſecari poſſint, & æquales aſſumi, & inter poſtulata id potuiſſet connumerari; vt liceret lineam, ad placitam diſtantiam ducere. Id tamen noluit Euclides: Quia, vt aduertit Tartalea, poterat oſtendi; & ipſe voluit oſtendere, quidquid oſtendibile fuit.

PROB. I. PROP. V. Euc. 2.

A dato puncto datæ rectæ æqualem rectam ducere.

SIt linea data punctata B C, & datum punctum A. Oporteatque ab illo puncto A ducere rectam, quę ſit æqualis datę punctatæ B C. Coniungatur punctum extremum illius lineæ punctatæ, quę datur, cum puncto A dato, & ſit linea coniungens A B. Superque eam conſtituatur triangulum ęquilaterum B D A: Deinde pũcto B, quod coniũctum eſt ad A, interuallo B C fiat circulus, & ſecet B D productum latus trianguli in E. Centro poſtea D vertice trianguli, interuallo prolungati lateris E D circulus deſcribatur. Poſtea latus alterum D A prolungetur vſque ad hanc ſecundi circuli peripheriam E C F, nempe vſque ad F. *Et erit* A F *ea linea, quæ quæritur æqualis lineæ punctatæ* B C.

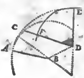


Probatur lineę D F, & D E ſunt æquales, vtpote radij maioris circuli. Vnde demptis cruribus æquicruris trianguli D A, & D B, reſiduę portiones remanebunt æquales E B, & A F ex pronunc 1. Sed etiam B E, & punctata B C; vtpote radij minoris circuli; ſunt æqualia. Ergo duę A F, & A C æquales tertię B E, inter ſe erunt æquales.

PROB. II. PROP. VI. Euc. 3.

Duabus datis lineis inæqualibus de maiori æqualem minori rectam lineam detrahere.

DEntur duæ rectæ A B minor, C D maior; Et iuxta præcedens Problema, vt punctatę lineæ, & circuli oſtendunt à puncto D ducatur æqualis minori A B linea D E: Et ducatur cẽtro D interuallo D E circulus: qui ſecet D B in F. *Dico ſegmentum* D F *æquale eſſe lineæ* A B.



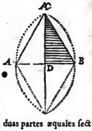
Probat. Quoniam ſunt æquales vni tertiæ D E, linea A B ex effectione iuxta præcedens Problema, & F D ſegmentum, vtpote radius eiuſdem circuli centro D ducti. Ergò etiam ſunt inuicem æquales A B, & D E.

Patet itaque quod lineæ rectæ in tantum aſſumuntur æquales; quia ſunt eiuſdem circuli diametri, quod fortè Intendit Euclides. Et ideò noluit id inter poſtulata exquirere, tanquam concedibile; cùm hæc proprietatem æqualium voluerit demonſtrare; Quod ſcilicet potentiâ ſint eiuſdem circuli ſemidiametri.

PROB. III. PROP. VII. Euc. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam ſecare.

SIt linea recta data A B; quæ non in infinitum extendatur; & quæ in duas partes æquales ſit diuidenda. Super eam fiat triangulum æquilaterum. Ex prop. 1. A B C. Cuius angulus C bifariam ex prop. 4. diuidatur. *Dico lineam* A B *in duas partes æquales eſſe ſectam.*



Probat. Quia in propoſ. illa 4. oſtenſum eſt ſegmentum D B baſis A B æquale ſegmento A D eiuſdem: Ergo in duas partes æquales ſecta eſt.

EXPENSIO III.

De linearum ſe tangentium ſitu.

QVo ad ſitum lineę conſideratę ſecũdùm ſe, non prout figuræ alicuius latera, inuicem referri poſſunt; quæ ſunt in duplici differentia; aliæ paralellæ, quæ nunquam ſe tangunt, etiam in infinitum productæ; aliæ verò ſe tangunt, vel ſaltem productæ ſe tangunt, & de iſtis ſermo in præſenti eſt.

PROB. I. PROP. VIII. Euc. 11.

Datâ rectâ lineâ à puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos excitare.

REcta linea detur, quæ ſit A B: & in ea punctum C, à quo linea perpendicularis, quæ def. 10. deſcripta eſt, ſit educenda.



Electo puncto altero in ea, V. g. in E. Ex prop. 6. Portioni C E auferatur æqualis ad alteram partem C D; ita vt C ſit pũctum medium. Et ex docum. propoſ. 1. ſuper E D triangulum

 æqui-

æquilaterum conſtituatur D E F. Et à puncto C ad F recta ducatur: *Hæc enim inſiſtit ſuper rectam dat. A B perpendiculariter.*

Probatur crus C E, & D C ſunt æqualia, & E F crus alteri F D; baſis verò C F communis. Ergo totum triangulum nigrum toti albo triangulo erit æquale, etiam quoad angulos ex Coroll. prop. 3. Angulus itaque niger, eſt æqualis albo apud C exiſtenti; Ideoque F C erit perpendicularis, ex defin. 10.

PROB. II. PROP. IX. Euc.12.

Super datam rectam infinitam à dato puncto, quod in ea non ſit, perpendicularem rectam ducere.

HAnc lineam indefinitam vult eſſe Eucl. quia, ſi eſſet nimis breuis poſſet euenire, circulum ad operationem neceſſarium ipſam non ſecare; vel quò 1 punctum, ita extra eam eſſet poſitum, vt ipſa prolungata, in illud incideret, & ſic circulus neceſſarius ad operationem, vt oportet, duobus punctis nõ ſecaret, vt ſi eſſet linea P Q, & punctum H: itaque.

In puncto dato C; quod in linea non eſt, fiat



centrum electo radio, & interuallo tali, vt rectam datam A H ſecet in duobus punctis A, & B. Et ab illis ducantur ad punctum C duæ rectæ A C, & C B. Deinde ex propoſ. 8. ea diuidatur in duas partes æquales in D, & ducta C D. *Erit, quæ in propoſ. promittitur, ipſi A B perpendicularis.*

Probat. Nam trianguli nigri crus D B alterius triãguli albi cruri A D ex cõſtructione eſt ęquale, & item crus C B, cruri A C vtpote radij: Baſis verò D C communis; Ergo totum triãgulũ nigrũ etiam quoad angulos toti albo eſt æquale. Vnde angulus niger ad D correſpondẽti albo ad D erit ęqualis, & ideò ex defin. 10. D C *erit perpendicularis.*

THEOR. I. PROP. X. Euc.13.

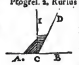
Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

INcipit hic ſola ſpeculatio, & primam proprietatem linearum ſe tangentium demonſtrat.

Sit itaque recta A B, ſuper quam conſiſtat C D, & ſi quidem anguli hinc, inde ſunt æquales, ſumus extra quæſtionem: Nam ex 10. defin. illi anguli recti ſunt. Quòd ſi anguli illi ſint inæquales: Dicit tamen Eucl. duobus rectis, ſimul ſumptos eſſe æquales. Quod vt oſtendat, imperat ex propoſ. 9. à puncto C dato erigi perpendicularem C I.

Probatur. Quoniam ex 7. pronunc. omne totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis; rectus angulus I C B erit æqualis nigro, & albo, vtpote ſuis partibus: Si verò addas, tum recto angulo I C B, tum albo, & nigro, nigerrimum A C I rectum, efficietur, vt albus niger, & nigerrimus additus, ſint æquales duobus recto I C B, & item eidem nigerrimo ei addito, ex 2. pronunt. quòd memor i tenendum.

Progreſ. 2. Rurſus Angulus A C D ex eodem



pronunt. 7. eſt æqualis, vtpote ſuis partibus angulo nigro I C D, & nigerrimo A C I: quare, ſi addas vtriſque angulũ album, efficietur, vt angulus A C D, & angulus albus ad C ſint æquales tribus albo, nigro, & nigerrimo ad C. Iam itaque vide angulum I C B rectum, & nigerrimum item rectum, vt priùs probatum eſt, tribus albo, nigro, & nigerrimo eſſe æquales: Rurſuſque, vt modo dixi, A C D obtuſum, & album acutum factos à lineâ D C, tribus albo, nigro, & nigerrimo item eſſe æquales, vt modò demonſtraui: ſed quę eiſdem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia ex 1. pronun. Ergo *angulus* A C D, & *albus* ad C *ſunt æquales angulis duobus* I C B *recto, & recto nigerrimo* A C I.

COROLLARIVM.

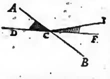
COlligo quoſcumque angulos ſuper rectam à pluribus lineis inſiſtentibus effectos eſſe duobus rectis æquales, ſicuti hi tres albus, niger, & nigerrimus duobus rectis oſtenſi ſunt æquales.

THEOR. II. PROP. XI. Euc.14.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ, eos, qui ſunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter ſe illæ lineæ rectæ.

ELigendum eſt punctum C in linea A B, & ab eo duæ lineæ trahendæ ſunt in diuerſas partes, ideſt ad oppoſitas, vt ſunt C D, & C E. Modò inquit. *Si hæ lineæ angulos, qui ex eorum tractione naſcuntur, æquales duobus rectis fuerint, neceſſariò erunt in directum, & vnicam lineam rectam continuabunt.* Hęc verò propoſitio conuertit ſuperiorem, ibi enim probatum eſt ea rectis lineis naſcentes angulos debere eſſe æquales duobus rectis, hic probatur lineas *rectas*, & *in directum poſitas* fore; ſi angulos, quos hinc, inde faciunt, cum lineâ, ſuper quam cadunt, duobus rectis æquales fecerint.

Probatur. Nam ſi anguli, quos ſuper lineas



C E, & C D facit C A duobus rectis ſunt æquales; ſicut & illi, quos B C efficit; & tamen D C, & C B in directum nõ ſunt. Linea D C prolungata non coincidet, nec ſuper lineam C E incedet: Sed vel ſuprà, vel infrà. Cadat V. g. ſuprà, & ſit D C I recta, prout inquiunt aduerſarij. Itaque C A ſuprà D C I cadens, vtpote ſuper rectam, angulos nigerrimum D C A, & album A C I duobus rectis æquales efficiet ex præcedẽti Prop.

Verùm

Verùm id præſuponimus, & facere A C inſiſtens ſuper D C, & C B. Quamobrem, cùm, ex 12. pronun. omnes recti ſint æquales, emergit; vt tum anguli facti ab A C inſiſtente ſuper lineam A C B, quam volunt aduer. etiam rectam, quales ſunt nigerrimus, & albus, quàm anguli affecti ab eadem A C cadente, & inſiſtente ſuper D C, & C B, quales ſunt niger cum albo, & nigerrimus, inuicem eſſe æquales; vtpote omnes duobus rectis æquales; Si itaque auferas D C A nigerrimum ab vtriſque, remanerent æquales albus tantùm, cum albo, & nigro ſimul ſumptis, nempe pars toti, quod eſſe non poteſt. Aſt ſi dicas infra eadere lineam prolungatam D C, eodem argumento perurgeris: vnde oportebit conſiteri; quòd *cadet in directum* D C *ipſi* C E, *& quòd eadem in vnicam lineam dirigantur*.

THEOR. III. PROP. XII. Euc. 15.

Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint; angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

PRo angulis ad verticem intelligit eos, qui iuxta interſectionem ſibi oppoſiti ſunt; vt eſt in duobus lineis ſe interſecantibus A C, & B D, angulus nigerrimus, & albus E.

Prob. de angulis obtuſis primò ex Propoſ. 10.



Cùm linea B E inſiſtat ſuper lineam A C, faciet angulos ſuos, nempe album E, & nigrum duobus rectis æquales: Rurſus; quia recta C E inſiſtit ſuper rectam B D faciet item ex eadem 10. Propoſitione angulum nigrum, atque nigerrimum æquales duobus rectis: Omnes verò recti ſunt inuicem æquales, ex 12. pronunc. Vnde, & duo albus E, & niger anguli, duobus nigro eidem, & nigerrimo æqualitate commenſurabuntur. Aufer itaque angulum nigrum vtriſque coniunctum, & annexum, quia idem ab vtriſque abſtuliſti; ex 3. pronunc. *Angulus albus* apud E, & *nigerrimus, æquales remanebũt.*

Similis argumenti ſpecie de angulis acutis vteris, qui ſunt niger, & albus oppoſitus, cum etenim A B recta inſiſtat rectæ B D; faciet ex propoſ. 10. cit. angulos duobus rectis æquales; nempe obtuſum album E, & acutum album: Quòd & præſtabit B E cadens ſuper A C: Quapropter angulus niger acutus cum albo obtuſo E, ſicut & angulus albus acutus cum albo obtuſo E, erunt æquales, vtpote duobus rectis æquales. Auferatur communis obtuſus albus E; remanebuntque albus, & niger acuti æquales.

COROLLARIVM I.

EX ſententia Procli colligit primò Euclides: *Lineas ſe ſecantes facere quatuor angulos, quatuor rectis æquales*; nam in demonſtratione oſtenſum eſt, nigrum, & album E eſſe duobus rectis æquales; ſicut & nigerrimum cum albo acuto.

COROLLARIVM II.

ET hinc colligitur ſecundò, *Omnes quotcumque angulos, qui circa aliquod punctum fieri poſſint tantùm eſſe quatuor rectis æquales*. Namque ſi multiplices rectas ad punctum E terminantes, nihil aliud efficies, quàm diuidere in multas partes quatuor angulos dictos ad E conſtitutos, quæ omnes ſimul ſumptę totis ſuis adęquantur; Cùmque illi anguli quatuor rectis ſint æquales; hinc eſt, vt omnes quotcunque anguli circa aliquod punctum conſiſtentes quatuor ſolùm rectis ſint æquales. Quare & omne ſpatium circa aliquod punctum conſiſtens non, niſi quatuor rectis angulis, poterit æquiualere.

EXPENSIO IV.

De proprietatibus Triangulorum.

TRiangula poſſunt, aut conſiderari in ſe, aut conſiderari quatenus comparantur cum alijs. Primò agemus de triangulis in ſemet conſideratis.

THEOR. I. PROP. XIII.

Si ſit triangulum ita diſſectum; vt crus, cruri, & alterum crus, alteri ſit æquale; angulus quoq; ab illis cruribus clauſus angulo ſit æqualis. Baſis quoq; erit baſi æqualis, & totum triangulum toti.

SIt triangulum E A D linea ſectum; ita quòd crus B A ſit æquale cruri A I, & crus B C cruri F I, anguli verò ad B, & I æquales. *Dico Baſim* A F *baſi* A C, *& triangula per ſectionem facta inuicem eſſe æqualia.*

Probatur. Nam, ſi baſis baſi non eſt æqualis, ſit maior A F, quę, vt eſſet ęquales, deberet eſſe V. g. V A: Tunc quęro ductâ rectâ V I; an hęc ſit æqualis cruri B C; Si non eſt æqualis, eſt contra hypotheſim. Si verò eſt æqualis V I crus cruri B C, iam habemus triangulũ V A I, quod habet vnum crus V I, cruri A C æquale, & alterum B A alteri A I, baſimque V A baſi A C æqualem. Quare ex Coroll. Propoſ. 3. totum triangulum toti erit æquale, & angulus ad I niger erit æqualis angulo apud B; Et ideò angulo ſibi æquali A I F ſeminigro, quod eſſe nequit; Cùm niger ſit eius pars, & ille I A F totum, & idem contexes argumentum, ſi crus A F ſit maius; Nam A C erit minus, & eadem operatio, & demonſtratio valebit.



THEOR. II. PROP. XIV. Euc. 5.

Anguli Iſoſcelium triangulorum, qui ſunt ſuper baſim, ſunt inuicem æquales, & productis cruribus, anguli infra baſim ſunt etiam inuicem æquales.

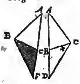
SI Triangulum duorum æqualium crurum A B C, & eius duo crura producãtur A B in D, & A C in F, & ex Propoſ. 5. B D, & C F portiones adiunctę fiant inuicem ęquales; & rectâ B F coniungantur puncta B, & F, ſicut lineâ D C puncta D, & C.

D, & C. *D'eo angulos ſuper baſim* A C *apud* B, *& C eſſe inuicem æquales; & angulos infra baſim, vt ſeminiger ad* B, *& niger ad* C *eſſe quoq; inuicē æquales.*

Probat. ſecunda pars, & conſiderentur D A C, & D C A; tanquam duo triangula; quæ vt tali ratione cogitarentur fecimos ſeparata, replicando in ipſis triangulum idem Iſoſcelum B A C. Quoniam itaq; anguli ad A in triangulo ſeminigro, & albo ſunt æqualia, & crus vnum B A vni A C ex hypotheſi alterum A F ex effectione alteri A D eſt æquale; Ergo ex præced. A F baſis baſi D C erit æqualis; & totum triangulum ſeminigrum toti albo erit æquale.



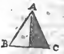
Piogr. 2. Deme. B A C triangulum ab vtriſq; & quod reſiduum eſt æqualium, triãgulorum nigrum albo B D C erit æquale: *Quare, & angulus niger ad* C, *& ſemialbus* D A C *erunt æquales, qui ſunt infra baſim anguli.*



Prob. 1. pars. Quia triangulum A C D triangulo B A F eſt æquale ex 1. parte probat. erit angulus apud B totus angulo apud C toti æquale. Et eadem ratione pars nigra apud B parti C cruce ſignatę erit æqualis; quòd triangulum nigrum ſit ęquale albo B C D. Ablatis ergo partibus æqualibus angulorum nigra, & C cruce ſignatâ ab angulis totis æqualibus; ex poſt. 1. *remanebunt æquales anguli ſupra baſim* reſidui apud B, & C; nimirum C B A, & A C B, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc emergit triangulum æquilaterum habere omnes angulos ęquales. Prob. Nam cũ duo crura A B, & A C ſint ęqualia, anguli ſupra baſim C niger, B albus erunt ęquales ex pręced. Sic quia duo crura A C, & C B ſunt ęqualia angulus seminiger apud A, & albus B erunt ęquales. Duo itaque anguli ſeminiger A, & niger C vni tertio B ſunt ęquales; Ergo ex Pron. 1. sũt ęquales inuicem.



THEOR. III. PROP. XV. Euc.6.

Si in triangulo duo anguli æquales inter ſe fuerint; & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

Licet hoc Theorema faciliter poſſit colligi ab antecedenti; cùm ſit conuerſa eiuſdem propoſitio nihilominus, quia aliquę ſunt propoſitiones, quę conuerti nequeunt, ex logicis: Ponendo prędicatum loco ſubiecti; eo quòd prędicatum ſit minus vniuerſale ſubiecto; vt *hęc omnis homo eſt animal*, conuerti nequit, & dici, *omne animal eſt homo.* Cùm animal magis pateat. quam prędicatum hominis; ſed dici debet, *aliquod animal eſt homo.* Ideò conſueuere Mathematici etiam conuerſas propoſitiones oſtendere, vt demonſtrent illas propoſitiones conuerti ſeruata quantitate, & qualitate earum; nimirum eſſe affirmatiuas, & eodem pacto vniuerſales, cõuerſę; vt priùs erant; quòd euenit in iſta propoſitione.

Dicit itaque Euclides, quod ſi ſit triangulum B A C, cuius duo anguli ſint ęquales B niger, & C ſemialbus; *quòd latera ſubtenſa* A B *ſeminigro, &* A C *nigro æqualia inter ſe erunt.*

Quod ſi aliquis neget; Ponatur; quod B A ſit crus maius, quam A C, & ideò quod ad hoc, vt ſit ęquale debeat eſſe B D.



Probatur itaque, quia B D eſt ęquale cruri A C ex aduerſarijs: Crus verò B C eſt commune, & angulus B niger, communis quoque, tàm triangulo nigro minori, quàm ſeminigro maiori: Ex prop. 13. erunt triãgulũ nigrũ B C D, & ſeminiger B C A æqualia; para nigra toti B C A, quod eſſe nequit.

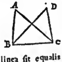
COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propoſitione omne triãgulum æquiangulum eſſe quoq; æquilaterum; quòd eſt conuerſum pręcedentis Corollarij, cùm enim anguli B albus in fig. pręced. Coroll. & C niger ſint æquales, latera A B, & A C erunt æqualia: Item, cùm angulus A ſeminiger, & angulus B albus ſint æquales, etiam latera A B, & B C erunt æqualia: Quare omnia latera erunt æqualia.

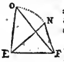
THEOR. IV. PROP. XVI. Euc.7.

A baſis alicuius trianguli termino cruri diſcedenti æqualis linea, & ab altero extremo alteri cruri alia linea æqualis non diſcedet, quæ terminet ad aliud punctum; quàm ad verticem prioris trianguli: dummodo verſus eandem partem lineæ ducantur, in quam crura conueniunt.

Multę requiruntur conditiones ad hoc, vt Theorema verificetur; Primò, quod linea æqualis cruri exeat ab eodem extremo baſis; Ideoque C A, & B D ſunt æquales; Sed non exeunt ab eodem puncto C, quod requirit propoſitio, & ideò de eis non loquitur.



Secundò, quòd, tum hæc linea ſit ęqualis vni cruri, tum altera æqualis alteri; nec ſufficit æqualitas vnius cruris cum vna linea, & vt E O, & E N ſint æquales, & F O, & F N inęquales, & ideò de iſtis non eſt ſermo.



Tertiò requirit, quòd ducantur verſùs eaſdem partes: Et ideò licet I M, & I L ſint æquales, & H M, & H L; quia tamen ducuntur ad duas partes oppoſitas M, & L. Ideò nec de iſtis loquitur propoſitio.

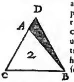


Multos verò habet caſus, hæc propoſitio ſecundùm quòd punctum hoc prope verticem trianguli, in quod conueniunt collocatur.

Caſus

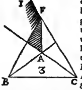
Caſus 1. Si ergo duę lineę dicantur conuenire, & non in verticem trianguli; quarum quęque ſuo cruri, à cuius extremo diſcedit, ęquetur. Sit illud punctum aſſignatum o, pro primo caſu iſta vt linea DC à puncto c diſcedens ſuper crus CA ducatur, & perueniat ad o cũ alterâ BD æqualis alteri cruri BA. extra triangulum CAB. Sed hoc euidenter implicantiam inuoluit, & falſum eſt. Nam linea CD eſſet maior, quàm crus CA contra hypotheſim.

Caſus 2. Idem erit. Si punctum cadat in latere aliquo, V.g. CD in fig. 2. Nempe, quòd linea BA ęqualis cruri BD, & linea CA diſcedens ab C, & ſuper crus CD ducta conueniant in A infra verticem trianguli D; Et hoc etiã extra hypotheſim; quia linea CA eſſet minor; quàm CD.



Caſus 3. Si punctum hoc concurſus ponatur intra triangulum in A; vt in 3. fig. Et tunc oſtendetur propoſitio, ex propoſ. 14. Productâ enim linea AC, & crure CF ducatur recta AF; Et habebimus duo triangula; ex aduerſarijs æquicrura CAF, & BAF.

Quia ergo BA linea cruri BF ex aduerſarijs æquatur; erunt anguli ſuper baſim AF; nempe A ſeminiger, & niger F æquales in triangulo BFA. Angulus verò F eſt pars anguli IFA infra baſim AF trianguli alterius AFC, & AFI totum. Ideoque angulus ſeminiger A, toto illo IFA minor erit, & pars ipſius nigra ad A multò minor angulo eodem IFA infra baſim trianguli ACF exiſtenti.

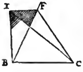


Pars verò iſta nigra anguli ad A eſt infra baſim AF trianguli ACF. Sunt ergo duo anguli infra baſim apud A, niger A, & IFA inæquales. Sed rurſum ſunt æquales ex propoſ. 14. quia linea AC ex aduerſarijs eſt ęqualis cruri CF Ergo eſſent æquales, & inęquales anguli infra baſim, quòd eſſe nequit.

Caſus 4. Quod ſi punctum concurſus ponatur extra triangulum ſit illud in F. Et productis cruribus trianguli BAC, & ducta AF, & producta CI idem contexes argumentum.

Caſus 5. Eſt. Si punctum concurſus cadat extra triangulum in I aſſignatum ab aduerſarijs tali modo; vt altera linearum poſteriùs ductarum ſecet aliquam ex primo ductis; V.g. ſecet lineam BF, & excurrat in punctum I.

Coniungatur recta FI, eritque factum triangulum CIF; cuius duo anguli ſupra baſim debebunt eſſe æquales; nempe angulus I niger, & angulus F ſeminiger ex propoſ. 14. quòd linea CI ab aduerſarijs dicatur æqualis cruri CF. Quare pars nigra anguli ſeminigri apud F erit minor angulo nigro CIF, & multò minor addita ei parte nigerrima, vt fiat angulus BIF: Sed angulus niger F, & totus BIF niger ſunt quoque æquales; quòd ſint anguli ad baſim in altero triangulo BIF, cuius linea BI ex aduerſarijs æquatur cruri BF; & ideò ex pr. 14 ſint æquales. Ergo æquales, & inæquales, quod eſſe nequit. Quare nullibi punctum concurſus linearum poſtremò ductarum poteſt cadere; niſi in verticem trianguli, igitur vera propoſitio.



THEOR. IV. PROP. XVII. Euc. 32.

Cuiuſcumque trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

Et vno crure producto, externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis.

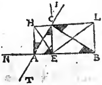
SI triangulum ABC. Volo primum oſtendere angulum ad A album, C ſeminigrum, & B nigrum omnes internos eſſe æquales duobus rectis; Quòd vt oſtendatur.

Progreſſus 1. Ducatur perpendicularis à puncto C ad baſim AB ex propoſ. 10. & ſit EC. Producto deinde AC in T, & I detruncetur ex propoſ. 5. CI æqualis AE, & AT æqualis EC; Et ex propoſ. 2. conſtituatur triangulum AHC; quod erit æquale ex Coroll. prop. 3. triangulo AEC; Ideoq; ad H angulus CH, & HA clauſus erit æqualis angulo recto nigro apud E. Ducatur deinde HE; Eritque rurſùs triangulum HCE æquale triangulo HAE ex prop 3. quod ſit ſuper eandem baſim HE, & inter crura vnum HC vni AE, & alterum CE alteri HA æqualia ex effectione; Sed hæc duo componunt totum AHCE. Quòd priùs erat. Ergo ambo ſimul æqualia triangulis ACE; & AHC; quæ priùs erant; Sed illa erant æqualia inter ſe, & ideò dimidia eiuſdem totius: Sed hęc etiam ſunt æqualia inter ſe, & dimidia eiuſdem totius; Ergo æqualia cum primis. Vnde HCE erit ęquale triangulo AEC, & angulus C in ipſo ſeminiger, angulo E nigro, & recto. Sic dicas de angulo ſeminigro apud A, quòd erit æqualis angulo H albo, vel à nigro rectis. Vnde recti erunt angulus HAE, & HCE.

Eodem modo procedemus in conſtituendo triangulo CLB; & eodem pacto argumentabimur, oſtendendo angulum C, & B ſemialbos in triangulo ECL, & EBL eſſe rectos angulos.

Prog. 2. Quo poſito. Sic prima pars propoſitionis prob. In parte ACE; quę prima conſideratur. Angulus apud A niger eſt æqualis angulo apud C nigro, & albus apud C albo apud A ex propoſ. 3. Coroll. eo quod æquis cruribus inſiſtant. Quare interni trianguli niger apud C, ſimul cum albo apud A, ſunt æquales toti ſemialbo EAH. nempe angulo recto.

Prog. 2. Iterum in ſpatio ECB angulus niger apud B, & niger apud C; vtpote æqualibus cruribus inſiſtentes EC, & EL ęquales ſunt. Item albus B, & albus apud C æquales; Ergo albus apud C, & niger apud B angulo recto EBL, vel ECL erunt ęquales. Cum ergo in triangulo ACB anguli ACE nigra pars, cum angulo A ſit recto æqualis ex primo prog. & 10 angulo item C pars alba, cum nigra apud B ſit recto æqualia, qui in triangulo ACB ſunt interni anguli. Patet, quod omnes anguli interni trianguli ACB duobus rectis erunt æquales.



Prob. pars 2. Et producatur latus aliquod, V.g. NA. Quia angulus EAH ſemialbus rectus eſt, erit

erit quoque angulus NAH rectus; & ideò angulus externus NAC, & internus CAB erũt æquales duobus rectis ex propoſ.10. & propterea tribus internis angulis trianguli CAB. Tolle internum communem album apud A; remanebit itaque ſolus angulus externus NAC æqualis duobus internis,& oppoſitis ſeminigro apud C, & nigro apud B.

Hincque eſt quadrangulum quodlibet habere angulos quatuor ſuos quatuor rectis æquales: Cum enim CHAB in duo triangula diuidatur, & quodlibet triangulum ſuis angulis duos rectos angulos æquet; patet omnibus angulis ſuis quadrangulum quatuor rectos æquare.

COROLLARIVM I.

HInc eſt primo, quod angulus externus maior ſit: quàm quilibet oppoſitus, & internus ſeorſim ſumptus; quia duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis; quod oſtendit Eucl. propoſ. 16. ptimi, alia ratione ſatis difficili.

COROLLARIVM II.

SEcundò deducitur cuiuſcumq; trianguli tres angulos ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis ſimul ſumptis alterius: Quia tum hi, tum illi ſunt æquales duobus rectis. Deduciturque etiam, quòd, ſi duo anguli vnius erunt æquales duobus angulis alterius trianguli; quòd reliquus angulus reliquo erit æqualis, & æquiangulum erit triangulum alteri quoad omnes angulos.

COROLLARIVM III.

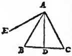
COnſtat etiam in omni triangulo Iſoſcele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehenſus, fuerit rectus, quemlibet reliquorum eſſe ſemirectum; cùm omnes tres ſint æquales duobus rectis,& tertius ex ipſis ponatur rectus. Quare, cùm duo reliqui inter ſe ſint æquales, ex prop. 14. erit quilibet eorum ſemirectus. At ſi angulus cruribus comprehenſus fuerit maior recto, nempe obtuſus, qui ad baſim ſunt, erunt minus, quàm ſemirecti; Si verò minor recto, ideſt acutus, reliqui erunt magis, quàm ſemirecti.

COROLLARIVM IV.

PErſpicuum quoque fit. Quemuis angulum trianguli æquilateri eſſe duas tertias partes anguli recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Quia omnes tres inter ſe æquales, eæquant duos rectos.

COROLLARIVM V.

FIt etiam manifeſtum. Quòd ſi ab vno angulo A trianguli æquilateri BAC perpendicularis AD ad latus oppoſitum BC ducatur, conſtitui duo triangula Scalena ADC, & BDA; quorum cuiuſlibet angulus ad D rectus erit duo B,& C quiſque duas tertias anguli recti; reliquorum verò ad A; vtpote partes æquales vnius anguli in æquilatero vnam partem tertiam anguli recti quiſque continebit. Quamobrem ſi ſuper latus AC perpendicularis ab A eleuetur EA ex propoſ 9. habebis angulum rectum inter crura EA, & AC diuiſum in tres partes æquales, vt ſunt EAB, & BAD, & DAC anguli.



COROLLARIVM VI.

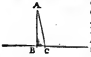
CViuſcumque trianguli duos angulos duobus rectis eſſe minores omnifariam ſumptos; Quia tres duobus rectis ſunt æquales. Ergo duo tantùm erunt minores.

COROLLARIVM VII.

COlligitur quoque angulum externum ſuperare hunc, ſiue illum internorum reliquo angulo oppoſito. V.g. NAC externum in fig. prop. ſuperare oppoſitum internum ACB tantùm, quantùm eſt angulus niger. Et etiam, quod duo anguli interni cuiuſcumque trianguli deficiunt à duobus rectis reliquo angulo interno.

COROLLARIVM VIII.

HInc etiam manifeſtum eſt ex Proclo. Ab eodem puncto ad eandem rectam non poſſe duci plures lineas perpendiculares, quã vnam. Quod ſi fieri poteſt ducatur ex A puncto ad rectam BC duæ perpendiculares; nempe AB, & AC, facientque triangulum ABC; In quo, quia AB eſt perpendicularis faciet angulum B internum nigrum rectum: Rurſuſque, quia AC perpendicularis præſupponitur, faciet angulum C album internum rectum; quòd militat contra præced. prop. in qua oſtenſum eſt, angulos duos internos cuiuſcumque trianguli eſſe duobus rectis minores; cùm tres ſint æquales duobus rectis.

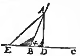


COROLLARIVM IX.

SEquitur quoque ex præc. propoſ. omnia triangula habentia vnum angulum rectum, vel obtuſum reliquos obtinere acutos: cùm enim duo anguli interni ſint duobus rectis minores, ſequitur; vt ſi vnus ſit rectus, aut obtuſus, nempe maior recto; quod reliqui ſint recto multò minores, nempe acuti; namque ſi reliqui, vel vnus eorum eſſet æqualis recto, vel maior, iam haberemus contra præced. propoſ. duos angulos in triangulo duobus rectis, aut maiores, aut æquales, ſequitur quoque, quod vnus ſit alterius complementum cum ambo vni recto ſint æquales ſi tertius ſit rectus.

COROLLARIVM X.

SEquitur quoque, quod ſi linea recta cum aliâ rectâ angulos faciat hinc, inde, obtuſum vnum, alterum acutum, lineam perpendicularem à quouis eius puncto ad aliam rectam demiſſam, cadere ad partes anguli acuti. Faciat enim linea AB recta cum rectâ conſimili DB angulum, nigrum quidem obtuſum, album verò cruce notatum, acutum, & à puncto A demittatur perpendicularis AD. Cadet vtique ad partem anguli acuti albi cruce inſigniti; nam ſi caderet ad aliam partem anguli obtuſi nigri, vt facit linea altera AF; iam duo anguli interni eſſent duobus rectis maiores; nempe,



nempe, quia vnus, quem perpendicularis efficeret, eſſet rectus, alius verò, vt niger eſſet obtuſus ad B contra poſitam propoſitionem. Itaque ſi perpendicularis rectum angulum internum nigerrimum efficit ad D, alius debebit eſſe acutus, vt eſt albus cruce notatus B; ſic enim poſiti ſimul minores erunt duobus rectis, vt oportet eſſe duos angulos internos.

THEOR. XI. PROP. XVIII. Euc.15.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.

MVltâ declaratione non indiget propoſitio, cùm clarum ſit, dici illud latus angulum aliquem ſubtendere, quod è regione illius eſt, & coniungit duo latera angulum illum comprehendentia; ita C B ſubtendit angulum A conſtantẽ medietate nigrâ, & albâ; quia è regione eius eſt, & copulat duo latera A C, & A B, quę illum angulum nigrum, & album A comprehendunt. Igitur ponatur, triangulum A C B habere latus C B maius alijs, *dicit, & angulum* A *nigrum, albumq; eſſe alijs maiorem*; nempe angulo C, aut angulo B. Et priùs probat de angulo C, & ad id prętandum ex docum. 3. propoſ. detruncetur latus in D tali modo; vt recta B D æqualis ſit lateri B A; ducaturque recta A D.

Probatur. Quia A B eſt æqualis B D, anguli ad baſim A D, vt pote trianguli Iſoſcelis, quales ſunt ad D nigerrimus, & ad A albus ſtellula notatus erunt inuicem æquales ex 14. prop.



Sed angulus nigerrimus ad D ex Coroll. I. prop. 17. vtpote externus trianguli A D C eſt maior interno, & oppoſito C: Quamobrem, & angulus albus A ſtellula notatus; cùm ſit æqualis nigerrimo ad D; erit maior angulo C; Sed iſte eſt pars totius anguli A albo, nigroque conſtantis; Ergo iſte angulus niger, albuſque maior eſt angulo C.

Sed, vt probetur, angulum A eſſe quoque maiorem angulo B, replicetur idem triangulum, & à C B latere maiori detrũcetur æqualis lateri C A ſitque C G, trahaturque A G: eodemq; genere argumenti oſtendetur, angulum nigrum, albumque A eſſe maiorem angulo B.

Probatur itaque. Nam angulus niger A, nigerrimuſque G ſunt æquales ex propoſ. 14. eo quod triãgulum A C G Iſoſceles ſit. Vnde & anguli ad baſim, quales ſunt nigerrimus G, nigerque A, ſunt æquales.



Sed angulus nigerrimus externus reſpectu trianguli A G B eſt maior oppoſito, & interno B. Quare etiam niger A æqualis nigerrimo G maior erit ipſo angulo B: Sed angulus niger A eſt pars anguli A nigri albique totius trianguli A C B: Ergo erit multò maior angulo B. *Et ecce tibi oſtenſum angulum* A, *album nigrumque eſſe maiorẽ alijs angulis, cui maius latus* B C *ſubtenſum eſt*.

COROLLARIVM.

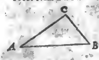
SEquitur hinc omnes tres angulos trianguli Scaleni eſſe inæquales, Triangulum enim Scalenum eſt illud, quod habet tria latera inæqualia, vt eſt ſuprapoſitum A C B. Si autem maius latus maiorem angulum ſubtendit ſequitur, vt angulus A ſit maior reliquis C, vel B. Iterumq; quia latus A C eſt maius, quàm A B, erit quoque maior angulus B angulo C: Vnde omnes erunt inæquales, maximus quidem A, minor verò B, minimus tandem C.

THEOR. XII. PROP. XIX. Euc.19.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.

PRopoſitio conuertit precedentem: Tunc autem angulus maiori lateri ſubtenditur, cùm è regione illius eſt, & ſuper eo aperitur; ita vt ei maius latus deſeruiat pro baſi, eiuſque latera necta. Sit itaque triangulum A B C, cuius angulus maior C ſubtenſus ſit lateri A B, *dicit latus* A B *neceſſariò omnibus alijs debere eſſe maius*.

Prob. Nam ſi A B non eſt maius, aut latus A C, aut latus C B ei, aut æquales erunt, aut eo maiora: Hoc verò eſſe non poteſt; & primò oſtendemus id de latere A C, quòd ſilicet, nec æquale lateri A B, nec eo maius eſſe poſſit.



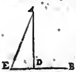
Nam ſi dicatur æquale etiam angulus B cui ſubtenditur, erit æqualis angulo C ex demonſtratis in pręcedenti propoſitione, in quâ oſtendimus *latus maius, maiorem angulum ſubtendere*, & per conſequens æquale; æqualem. Iam verò in hypotheſi, & propoſ. ſuppoſuimus angulum C omnibus alijs eſſe maiorem. Quòd ſi dicas latus A C eſſe maius latere A B; tantò magis vrgebit argumentum. Nam angulus B conſequenter erit maior angulo C, ex 18. propoſ. eo quod pręſumas A C latus ſubtenſum eſſe maius; & tamen in hypotheſi ſupponimus non angulum B, ſed C eſſe maiorem.

Sed modo probemus latus A C eſſe quoque maius latere C B, & eodem modo argumentandi vtemur. Nam ſi C B non eſt minus, ſequetur vel eſſe maius, vel eſſe æquale. Sed poſito B C latere maiori, vel æquali, angulus A, cui ſubtenditur, ex propoſ. antec. erit quoque angulo C, aut maior, aut æqualis contra pręſuppoſitum, & hypotheſim. *Maior itaque angulus in ſua apertione maiorem lineam requirit; cui ſubtendatur, & è regione ſit*.

COROLLARIVM.

SEquitur ex hac propoſitione lineam perpendicularem eſſe breuiſſimam inter omnes, quę à dato puncto ad ſubiectam lineam deducuntur.

Ducatur ex A perpendicularis, quæ vnica, (vt ex Prop. 17. Coroll. 8 cum Proclo deduximus) eſſe poteſt; & poſtmodum alię ab eodem puncto deſcendant ſuper E B. Breuiſſima omnium perpendicularis erit A D: Nam ſi ſtatuatur, aliam eſſe, V.g.



A E, In triangulo itaque A D E, cum angulus D ſit rectus, alius E erit acutus, cùm duo anguli in nullo triãgulo poſſint eſſe duobus rectis æquales,

ex

ex Coroll. 6. Propoſ. 17. Quare ex hac Prop. 19. cùm angulus rectus D ſit maior, quàm B, obtinebit quoque latus, cui ſubtenditur, nempe A B maius, quàm latus, cui ſubtenditur angulus B acutus, quod latus eſt perpendicularis A D: Ergo hęc perpēdicularis minor eſt crure B A: quòd ſemper eodem pacto concludes poſitis alijs, alijſque lineis ab A cadentibus ſuper E B, vt manifeſtum eſt.

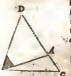
THEOR. XIII. PROP. XX. Euc. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora quomodocumque ſumpta.

DIcit, quod ſi ſumãtur ſimul dua *latera* trianguli cuiuſcumque; ſiue hęc, ſiue illa aſſumas, vt tibi placet, *comparata cum reliquo ſemper eſſe eo maiora.*

Ad quod oſtendendum Euclides facit triangulum quodcumque A B C: Prolungatque vnum ex lateribus, quod libuerit, V.g. A C in D, & quod ex documentis 6. *propoſ.* perficit, A D æqualem facit lineę A B, coniungitque rectã D B; ita quod triangulum conſtituatur A D B duo latera habens æqualia A B, & A D.

Probatur. Nam cùm in triangulo A B D duo latera ex conſtructione conſtituta ſint æqualia; nempe B A, & D A ſit (vt ex probatis in 14. propoſit. conſtat) quòd anguli B niger, & D ſint æquales, vt ſunt in Iſoſcelibus anguli ſuper baſim: Quamobrem, cùm B niger angulus ſit pars anguli nigri, albique B, trianguli D B C, ſiet, vt angulus B niger alboſque ſua parte nigra maior, erit quoque maior angulo D, huic parti nigrę æquali. Hinc verò enaſcetur, quod latus D C, vtpote oppoſitum maiori angulo B albo, nigroque, erit maius, quàm latus B C oppoſitum minori angulo D (vt ex probatis in anteced. prop. conſtat) at tota D C eſt æqualis duobus lateribus trianguli A B C, nempe, quod pars C A ſit vnum latus, & pars A D ex cõſtructione ſit æqualis lateri A B. Quamobrem ſi tota D C eſt maior latere B C, etiam maius erit latus B A, & A C eodem latere B C. Et eodem modo argumentum contexes de quibuſcunque alijs duobus lateribus reſpectu tertij reliqui. *Quapropter omnis trianguli duo latera reliquo erunt maiora*, &c.



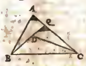
THEOR. XIV. PROP. XXI. Euc. 21.

Si ſuper trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs conſtitutæ fuerint: Hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt; maiorem verò angulum continebunt.

DVas partes hęc propoſitio habet: Prima, quę depēdet in Probatione ab anteced. dicit. Quod ſi ab extremitatibus vnius lateris, puta B C duę lineę ducantur in angulum D intra triãgulum A B C cõuenientes. *Illæ erunt minores exterioribus lateribus* A B, *&* A C. Dicit autem ab extremitatibus vnius lateris eſſe trahēdas prędictas lineas interiores, quia poteſt eſſe, ſi trahatur à medio B C vna earum (vt in triangulo, rectangulo, vel amblygonio) quod lineę interiores ſimul ſumptę, ſint maiores, vt prob. Proclus. Secunda verò pars eſt, quæ in Coroll. 6. prop. 14. fundatur; quod angulus D, quem conuenientes in apice lineę ab extremitatibus lateris vnius B C protractę efficiunt, erit maior angulo exterioribus comprehenſo, vt eſt angulus A in triangulo A B C. Debent autem, & hic lineę protrahi ab extremitatibus; quia angulus tunc, quem conſtituunt lineę non ab extremis ductę, ſed ab intermedijs partibus, vt idem Proclus oſtendit, poteſt eſſe maior, aut æqualis angulo exterioribus cruribus effecto.

Ad oſtendendũ verò id, quod propoſitio proponit. Altera earum, V.g. B D continuanda eſt, vſque ad latus alterum ad Q. Quo facto: ita primum aſſertum in propoſitione oſtendetur.

Quoniam ex propoſ. antecedenti duo latera A B, & A Q trianguli B A Q maiora ſunt latere B Q. Si addamus vtriſque latus Q C remanebunt latera B A, & A Q cum Q C adhoc maiora; quàm duo B Q, & Q C. Rurſus: Si vertamus conſiderationem ad aliud triangulum D Q C ex eadem propoſ. anteced. concludemus duo latera D Q, & Q C eſſe maiora latere D C, & ſi addamus huic D C ſicut, & duobus D Q, & Q C, latus D B: Maiora adhuc erunt hęc duo D Q, & Q C cum addito D B; quàm D C, cum addito eodem B D. Modò reaſumamus id, quod probatum eſt primò, nempe duo latera B A, & A C eſſe maiora, quàm B Q, & Q C. Quod ſi verum eſt; cùm & B Q, & Q C ſint maiora, quàm B D, & D C ſequitur illa, nempe B A, & A C eſſe latera multò maiora: *Nempe externa, internis ab eiſdem extremitatibus ductis.*



Secunda verò pars oſtenditur quoque: Nimirum, quòd ſit maior angulus D, quàm angulus A. Nam angulus niger Q externus reſpectu triãguli A B Q eſt maior; quàm eius internus niger A ſibi oppoſitus: ſed angulus D externus reſpectu alterius trianguli D Q C, eſt maior interno, & oppoſito nigro Q in eodem triangulo D Q C; *Ergo angulus* D *erit multò maior, quàm angulus niger* A, *ſiquidem ſuperat nigrum* Q *ſuperantem nigerrimum* A.

EXPENSIO V.

De comparatione triangulorum ad inuicem.

COmparantur hic triangula prout, aut lateribus, aut angulis talibus conſtant, propter quę euadant æqualia (Nam infra, vt partes parallelogrammorum comparationem quoque ſubibunt) & demonſtratur quod datis aliquibus lateribus, aut angulis æqualibus, ſequitur deinde, totum triangulum toti eſſe æquale.

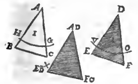
THEOR.

THEOR. I. PROP. XXII. Euc.4.

Si duo triangula habent crus vnum vni, & alterum alteri æquale, & angulum ijs comprehenſum æqualem; baſim quoq; habebunt æqualem.
Et totum triangulum toti erit æquale.

SIt triangulũ D E F nigrum, cuius angulus niger D ſit æqualis albo A trianguli B A C cruſque vnum E D vni A B, alterum D F alteri A C ſit æquale. *Dicit, quòd baſis* E F *quoque baſi* B C *erit æqualis; & totum triangulum toti albo æquabitur.*

Probat Euclides ſuperpoſitione. Nam ſi intelligantur vnum alteri ſuperponi, vt E B, A D, F C, trianguli angulus D angulo A congruet, & fiet vnus angulus A D, crus verò vnum D E æquale vni A B congruet quoque, & in idem punctum finiet in E B; Sic & alterũ latus D F alteri A C æquale finiet in idem punctum F C. Ergo baſis, tum vnius, tum alterius in eadem duo puncta E B, & F C, finiet. Ergo ex 10. Axiomate erit eadem linea; Quia duę lineę in eadem puncta terminantes latitudinem non faciunt, qualis eſſet, ſi terminaret altera ex ipſis ad X.



THEOR. II. PROP. XXIII. Euc.8.

Si duo triangula, dua latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vnum vni, alterum alteri; habuerint verò & baſim baſi æqualem. Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt; Totumque triangulum toti æquale erit.

HÆc propoſitio conuertit antecedentem. Nam ibi ab æqualitate vnius anguli, & duorum crurum concluſimus æqualitatem baſis, & ideò totius trianguli, hic ab æqualitate baſis, & duorum crurum concludimus æqualitatẽ anguli.

Sit itaque datum triangulum, cuius baſis A B baſi D E alterius, & crus vnum A C vni D G, alterum B C alteri G E ſit æquale. *Dico angulum* C *nigrum nigro* G *eſſe æqualẽ* lateribus AC, & G D æqualibus, atque C B, & G E item æqualibus contentos.

Probatur baſis æqualis A B baſi ęquali D E ſuperponatur; Tunc ab eodem puncto extremo baſis D, & etiam A duo latera exient æqualia D G, & ſuperpoſitum A C. Sic à puncto E, idemque B duo crura æqualia prodibunt versùs eaſdem partes ſ. crus E G, & ſuperpoſitum B C. Ergo ex prop. 16. in idem punctum terminabunt C, & C erit idem, ac G. Ergo eundem angulum conſtituent; & ideò totum triangulum toti erit æquale.

Poſſent autem hæ duę propoſitiones colligi ex d ctis: hęc ex Coroll. propoſ. 3. illa ex propoſ. 4. Verùm euidentiùs, & vniuerſaliùs hic rem concludimus.



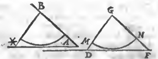
PROB. I. PROP. XXIV. E.

Ad datam rectam lineam; datumq punctum conſtituere æqualem ang atque etiam triangulum alicui angulo rectilineo, ſiue triangulo.

HOc Problema parum differt à prop. 3. Tantùmque in eo aliquod diſcrimen patitur, quod præſuponat datas duas lineas angulum facientes, & tertiam, quæ debeat trahi, aut tractam triangulum complentem, quę tres lineę in illa dantur, vt partes vnius lineę, & abſque eo quod faciant triangulum.

Sit itaque Angulus B comprehenſus lineis A B, & A ✳, compleatur (ſi non ſit completum) triangulum, & trahatur B ✳, & poſtmodum tracta linea indefinita diuiditatur in tres partes, ſingulę ſingulis cruribus æquales, ex prop. 6. & ex prop. 2. ſuper eam conſtituator triangulum, quod obtineat latera tribus trianguli iam facti lateribus æqualia, nempe G D lateri B ✳, & D F alteri ✳A, & tandem F G poſtremo A B. Nam hoc pręſtito *angulus* F *erit æqualis angulo* A.

Ratio eſt, quia ex propoſ. anteced. hęc triangula duo latera duobus lateribus vtrunque, vtrique ſibi correſpondenti, vt baſim baſi æqualem adipiſcuntur. Quare & omnes angulos correſpondentes æquales habebunt, & ideò angulus A erit æqualis angulo F.



Verùm facilius praxis hęc fiet, ſi in B; & G poſito centro fiat ad internallum quodlibet circulus, ſumaturq; in dato ✳BA portio circuli, quę intercipitur inter B ✳, & B A, & transferatur in altera portione circuli M N; Nam, ſi per puncta M, N trahas G D, & G F, à G habebis angulum G æqualem angulo B. Docet Clauius hic.

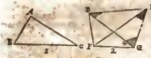
THEOR. XV. PROP. XXV. Euc.24.

Si triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque, vtrique: Angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſim baſi maiorem habebunt.

SIt triangulum, A B C cuius angulus A, cum angulo D trianguli alterius D F G comparatus dignoſcatùr maior, cùm tamen latera am-

blentia hunc angulum; qualia ſunt A B, & A C, ijs lateribus alterum angulum D claudentibus correſpondeant, vt vnum ſit æquale vni, V.g. A B, & D F, & alterum alteri; vt A C, & D G. Concludit Euclides, *quod hoc triangulum* A B C *baſim quoque ſuam* B C *maiorem conſequitur, quàm alterius baſis ſit, nempe* F G, *quod vt probetur.*

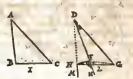
Fiat ex antecedenti propoſ. angulus D æqualis prædicto angulo maiori A trianguli A B C trahendo latus punctatum D H. Hoc autem latus ſemper cadet extra triangulum, quia angulus ad D ſit maior. Sitque hic angulus maior ad D albus, & niger; Longitudo autem huius lateris punctati D H ſit æqualis lateri D G: Trahaturque F H, quæ triplicem occupare ſitum poteſt ſecundùm diuerſitatem triangulorum, quæ fiunt, nimirum ſupra F G, vt eſt in propoſito triangulo; In ipſam F G, ita vt vna linea fiat. Vel infra F G ad partes exteriores, qui tres caſus diuerſam probationem requirunt. Vnde in tres partes probatio diuidenda eſt. Primò itaque ponimus cadere ſupra versùs ipſum triangulum, vt eſt F H. Coniungenda itaque ſunt extrema H, & G lineâ H G. Quò poſito ſic Euclides contexit argumentum.



Probatur. Quoniam enim latus D F eſt æquale lateri A B, ſicut & D H pũctatum lateri A C angulus quoque D ex albo nigroque integratus angulo A prioris trianguli. Sequitur ſecundùm documenta 22. propoſ. quod & baſis punctata F H ſit æqualis baſi B C prioris trianguli. Rurſus oportet conſiderare, quòd & latus D G, vt pręſuponimus eſt æquale lateri punctato D H; Quare anguli ad baſim niger G, & ſeminiger H, ex doct. 14. prop. erunt æquales. At pars nigra huius anguli H, ex 6. pron. eſt minor, quàm totum ipſum nimirum, quàm pars nigra ſimul cum alba. Ergo, & angulus niger G toti H æqualis, eſt maior, quàm eius pars nigra: Sed ſi addatur angulo nigro G altera pars alba ſtellulâ notata, multò maior euadet eadem parte nigra, anguli eiuſdem H. Igitur ex doct. prop. 19. ſubtendet maius latus, quod eſt F H, quàm pars nigra anguli ad H, cuius latus ſubtenſum eſt G F. Linea verò F H æqualis eſt, vt in principio oſtendimus baſi B C prioris trianguli. *Igitur* F G *baſis poſterioris trianguli erit minor ipſa* B C, quod probare oportebat.

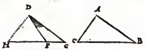
Caſus ſecundus. Sit triangulũ primũ A B C acutangulum, aliudq; D F G ſecundum, habens anguiũ D nigrum minorem angulo A, huic verò angulo D nigro addatur talis pars, vt fiat æqualis angulo A, ex anteced. propoſ. trahendo latus punctatum D H, vſque ad M. Abſcindaturque æqualis ex 6. prop. lateri D F, & fit D H. Coniungantur deinde ſimul H, & G linea, quę cadet infra baſim F G. Rurſus coniungatur H F, & tandem prolungetur latus D F vſque ad N.

Patet itaque in primis H G baſi B C æqualem eſſe, ex prop. 22. quod angulus D albus, nigerque ſit æqualis angulo A, & latera ſecundi lateribus primi trianguli ſibi correſpondentibus æqualia, nimirum D H lateri A B, & D G lateri A C. Cumque, & latus D F, prout ſupponimus, ſit æquale lateri punctato D H, ex 14. prop. fit, quòd anguli infra baſim, quales ſunt H niger, & albus, &



angulus alter H F N totus niger ſint æquales. Vnde hic totus niger F erit maior parte nigerrima anguli H: Angulus verò idem F niger, eſt pars anguli totius comprehenſi lineis H F, & F G, & altera eius compars cruce notata eſt, quare totus F nimirũ pars nigra, & altera cruce notata ſimul, erunt multò maiores, quàm pars nigerrima anguli H. Quamobrem totus angulus F, ex documentis 19. propoſ. habebit ſubtenſum maius latus, nempe H G lineam, quàm pars nigerrima H cui ſubtenditur F G: Sed iam in principio dictum eſt H G eſſe æqualem baſi B C. Igitur F G baſis trianguli D F G, eſt minor, quàm baſis B C.

At ſi tertius caſus detur, nimirum. Quod F H neque cadat infra, neque ſupra F G, ſed in ipſam, vt fiat vna linea. Facilis eſt probatio. Nam cum angulus niger ad D ſit minor angulo A; ſi fiat æqualis addendo partem albam, & trahendo D H. Patet ex doct. propoſ. 22. quòd ſubtendet baſim H G æqualem baſi C B, & conſequenter maiorem, quàm F G.

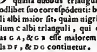


THEOR. XVI. PROP. XXVI. Euc. 25.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunq; vtrique; baſim verò baſi maiorem: & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVo latera A C, & C B trianguli ſibi ſint æqualia duobus trianguli nigri D F, & D G quodlibet ſuo correſpõdenti: baſis autem A B triãguli albi maior ſit, quàm nigri F G. Dicit, & angulum C albi trianguli, qui clauditur inter lineas C A, & C B eſſe maiorem angulo D, qui lineis D F, & D G continetur.

Probatur autem faciliter. Nam ſi angulus C non eſt maior angulo D; erit, aut æqualis, aut minor ipſo. Sed ſi eſt æqualis, ſequitur ex doctr. 22. prop. quòd baſis quoque A B ſit æqualis



baſi F G contra pręſuppoſitum. Quia iam quoque pręſupponimus latera, quodlibet ſuo correſpondenti eſſe æqualia; tum nigri, tum albi trianguli; Quod ſi dicatur angulũ C eſſe minorem angu-

lo

lo D, tantò magis abſurdum ſequitur; Nempe, quòd & baſis A B ſit minor baſi F G. Cum aſſeramus eſſe maiorem; quia cùm preſupponamus quoque latera ſibi correſpondentia, tum albi, tum nigri trianguli eſſe æqualia, ſequitur ex propoſ. antecedenti, baſim etiam A B eſſe minorem baſi FG; ſicut angulo D minorem fingunt angulum C. Quare cùm non poſſit eſſe angulus C aut minor, aut æqualis angulo D; neceſſariò eum debebimus fateri maiorem.

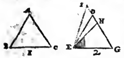
THEOR. XVII. PROPOS. XXVII. Euc.26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque quodlibet latus alteri lateri æquale; & reliqua latera reliquis, vtrumque vtriq; correſpondenti æqualia conſequuntur.

DEntur duo triangula. Primum ABC. Secundum DEG. Primum habeat angulum C æqualem angulo G, & alium quoque angulum, V.g. B æqualem alteri ſibi correſpōdenti ſeminigro DEG. Inſuper, & latus obtineat, ſiue quod æqualibus angulis adiacet, ſiue quod alicui ex eis ſubtenditur. Et ſit, quod adiacet BC æquale alteri GE adiacenti (vt priùs propoſitionem oſtendamus de hoc.) Dicit igitur, datis omnibus iſtis conditionibus fore quoque æqualia reliqua latera; quodlibet nempe ſuo correſpondenti, ſcilicet BA primi trianguli lateri DE alterius, & latus CA lateri GD exequari.

* Neget igitur aliquis, quod res ita ſe habeat; tunc iſte debebit effingere latus, V.g. GD, quòd ſit, vel maius, vel minus latere AC. Si dicat eſſe maius; detruncetur per propoſ.6. GH portio æqualis, & ducatur recta EH.

Probatur itaque propoſitio. Quoniam iam habemus ex hypotheſi angulum C æqualem angulo G, & B æqualem angulo DEG, etiam ex Cor. 2. propoſ.17. angulus reliquus A erit æqualis reliquo D. Sed BC latus ex hypotheſi æquat latus EG, & GH æquat latus AC iuxta id quod effecimus ex aduerſariorum ſententia; quare ex 4.h. cum hæc latera ſingula ſingulis correſpondentibus æqualia ſtringant angulos C, & G æquales etiam angulus H æquabitur angulo A, ſed angulus A æquatur angulo D, ergo etiam angulus H æquabitur angulo D contra prop.21. huius, nam linea EH interior facit maiorem angulum H, quam D. Quod ſi dicatur latus GD eſſe minus latere AC addatur punctata DI, vt tota GI æqualis ſit ipſi AC. Et idem abſurdum ſequetur dum totus angulus punctato latere IE, & EG clauſus eſſet æqualis angulo D, quia æquatur angulo A, vt dixi, eo quod ſit I angulus ad baſim trianguli, cuius latus IG æquatur lateri AC iuxta aduerſarios, & EG ipſi BC ex hypotheſi, & G angulus angulo C, ideoque etiam angulus I æquaretur angulo D contra prop. 21. h. At faciamus, quod latus æquale datum ſit ex illis, quæ ſubtenduntur vni ex angulis æqualibus V.g. ſit EG æquale lateri BC, & oppoſitus ei angulus A



æquetur angulo D, & C angulus angulo G, tunc etiam tertius angulus B æquabitur ex Coroll. 2. propoſ.17. angulo DEG; ſi ergo ſit latus aliquod DG maius, quam CA detruncetur GH crus æquale cruri CA, & ducatur EH. Tunc ſequetur idem abſurdum H. Quia enim EG crus æquatur cruri BC, & GH crus cruri AC ex aduerſarijs, & angulus G angulo C eſſet angulus H æqualis angulo A, & ideo ipſi æquali ex hypotheſi angulo D contr. propoſ.21. huius.

Quod ſi ex aduerſarijs ſit minus, tunc addatur ID punctata portio, ita vt latus GI æquetur cruri CA, & ducatur EI. Quia itaque G æquatur angulo C, & crus EG oppoſitū angulo vel æqualiſ D æquatur ex hypotheſi cruri BC, & IG latus ex aduerſarijs fecimus æquale lateri AC etiam angulus H ad baſim ex prop.22. huius æquabitur angulo A, & ideo ipſi A æquali ex hypotheſi angulo I contra 21. prop. huius.

Poſſet etiam probari propoſitio demonſtrando ſecuturum illud abſurdum, quòd pars HEG anguli DEG eſſet æqualis toti ipſi DEG ſi dicatur aliquod latus DG eſſe maius, quàm CA, vel anguli IEG pars DEG eſſet æqualis ipſi IEG toti. Si latus ED ab aduerſarijs dicatur minus. Nam angulus DEG eſſet æqualis angulo ABC, cui æquaretur: & angulus HEG, vel IEG ex aduerſaris ob latus BC æquale lateri EG, & latus GH, vel GI aſſertum ab ipſis æquale lateri CA, claudentia angulos C, & G æqualea.

COROLLARIVM.

SEquitur ex demonſtratione huius Theorematis, tota etiam triangula quoad areas eſſe æqualia; Nam ſi latera A C, & BC lateribus DF, & FG æqualia ſunt; continentque ex hypotheſi angulos æquales B, & F, ex propoſ. 22. huius erunt quoque tota triangula æqualia inuicem.

EXPENSIO VI.

De ſitu linearum ſe mutuò, nec ſecantium, nec tangentium.

CVm iam viſa triangulorum comparatione velit triangula ipſa parallelogrammis comparare Euclides; neceſſe eſt, vt hanc comparationum cognitionem, duæ notiones procedant; Prima eſt de parallelis lineis, quomodo ſe habeant ad inuicem, & deinde ex hac parallelogrammorum hauriat cognitionem; quibus cognitis, inde poſſit parallelogramma triangulis comparare, vel vt eorum partes dignoſcere.

THEOR. I. PROP. XXVIII. Euc. 27.

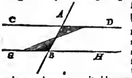
Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit, parallelæ erunt lineæ.

IN duas rectas, quę ſint in eodem plano (hoc enim libro, vt notat Clauius, agitur de planis) incidat linea; nempe eas ambas ſecet, vt fecit incidens AB in lineas CD, & GH: Et hæc faciat angulos alternos, nempe hinc, inde, vnus adiaceat parallelæ C D niger, & inde alter adiaceat alteri lineę parallelę G H, vt eſt nigerrimus, faciat

Digitized by Google

faciat inquam hos angulos ęquales ; *Dicit illas lineas eſſe parallelas, & ſemper æquidiſtantes.*

Quod, ſi aliquis hoc neget ; Igitur adinuicem ſemper fient propiquiores V. g. versùs H,& D : quare tandem cõuenient; quod ſi cõuenient; facient triãgulum , cuius vertex erit vbi conueniunt ; baſis verò erit AB, & angulus B nigerrimus erit externus; angulus verò niger oppoſitus A, & internus, qui ex hypotheſi inueniuntur æquales contra probata in Coroll.1. propoſ.17. vbi oſtendimus in omni triangulo externum angulum quolibet oppoſito, & interno eſſe maiorem.



Quare maior debebit eſſe angulus nigerrimus ad a, vtpote externus, & oppoſitus ; quam niger apud A eo caſu, quò conueniant: Cùm itaque ſint æquales anguli ; lineæ CD , & GH non conuenient. Quod autem lineæ rectæ ; quæ ſibi inuicem appropinquãt, tandem ſint coituræ in communem verticem ; inter principia poſuimus, cum Euclide, & verè principium cenſendum eſt , cùm nulla in oppoſitum hęſitatio animum pulſet , ſi de approximatione per partes æquales agatur, vt ibi declarauimus . Licet Proclus , & Clauius nimis ſcrupuloſè dubitent , & oſtenſionem aſtruant ad id probandum .

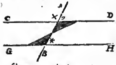
THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 26.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno , & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem efficit , aut internos, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales, Parallelæ inter ſe erunt ipſæ rectæ lineæ.

SIt angulus externus factus ab incidente AB , & linea CD cruce ſignatus ; Angulus internus , & oppoſitus, ſed ad eaſdem partes, non autẽ,vt in anteced. prop. hinc, inde, qui eſt niger apud B factus ab incidente AB , & lineâ alterâ GH . Dicit. *Quòd , ſi hi anguli ſunt æquales ; & lineas æquidiſtantes. & parallelas futuras eſſe .*

Dicit quoque . Quòd ſi eadem AB cadens ſuper rectas CD , & GH fecerit angulos internos , & ad eaſdem partes, vt eſt angulus niger, & angulus albus aſteriſmo notatus, duobus rectis æquales; adhuc illæ parallelæ erunt .

Prob. verò 1. pars . Cùm namque angulus nigerrimus apud B ſit ęqualis angulo cruce notato ex hypotheſi ; iſq; cruce notatus ſit æqualis angulo nigro,ex documentis prop.12. (Namque linea AB ſecat CD ; vnde anguli ad verticem,vt eſt niger, & cruce notatus æquales ſunt .) Internus angulus niger ad a,& niger ad B erunt æquales,qui ſunt anguli alterni : Quare ex pręced. prop. *lineæ* CD,GH *erunt parallelæ* .



Prob. 2. pars . Nempe , ſi faciat internos , & ad eaſdem partes duobus rectis æquales, incidens linea AB ſuper duas CD , & GH ; eas etiam eſſe parallelas : Sint itaq; angulus internus niger O, & alter aſteriſmo inſignitus duobus rectis æquales . Sunt quoque ex 10 propoſ. angulus niger O,& alter comprehenſus lineis AO , & DO duobus rectis æquales ; quòd linea DO inſiſtat ſuper AB . Quamobrem ablato angulo nigro communi , qui cum angulo D duos rectos æquat, & item cum angulo aſteriſmo notato(vt præſupponimus)remanebunt angulus externus AOD, internuſque, & oppoſitus aſteriſmatus, æquales . Quarę ex præcedenti propoſitione *lineæ* CD, & GH *erunt parallelæ* .

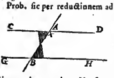
THEOR. III. PROPOS. XXX. Euc. 29.

Si in parallelas rectas lineas recta incidat linea , alternatim angulos inter ſe æquales efficit, etiã externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem .

Et internos , & ad eaſdem partes duobus rectis æquales facit .

HÆc propoſitio duas antecedentes conuertit , vt perſpicuum eſt ; treſque partes habet . Namque intendit probare primò . Quod ſi in duas parallelas CD, & GH incidat linea AB *angulos alternos nigrum apud* A, & *nigrum apud* B *æquales efficiat* .

Prob. ſic per reductionem ad impoſſibile . Si iſti duo anguli niger , & nigerrimus non ſunt æquales , maior cõſequenter erit vnus illorum . Is itaque , V. g. dicatur niger apud A . Vtriſque per imaginationem addatur angulus cruce impreſſus , eruntque niger apud A, & cruce notatus ſimul maiores nigro apud B cum eodem angulo cruce ſignato. Sed niger A, & cruce ſignatus ex 10. propoſ. ſunt æquales duobus rectis ; Quare niger apud B, & cruce ſignatus erunt minores duobus rectis . Vnde ex propoſ.28. coibunt illæ lineę ; quia tunc interni nigri æquales non eſſent duobus rectis . Quod eſt abſurdum, cùm CD , & GH ponantur parallelæ .



Secunda pars intendit oſtendere ; angulum A externum ęqualem eſſe interno,& ad eaſdẽ partes, vt eſt niger apud B , qui ſunt ad eandem partem dextram . Si lineę CD, & GH ſint parallelæ .

Probatur ex modo demonſtratis . Nam angulus niger apud A eſt æqualis angulo nigro apud a, idemque ex propoſ.12. eſt æqùalis angulo A externo : Ergo angulus A externus eſt æqualis angulo interno oppoſito , & ad eaſdem partes nigro apud a .

Tertio intendit demonſtrare angulum internum cruce notatum , & angulum nigrum a eſſe æquales duobus rectis . Si CD , & GH parallelæ conſtitutæ ſint .

Nam angulus externus A , & cruce ſignatus internus ſunt æquales , ex 10 . propoſ. duobus rectis . Quòd linea AD cadat , & inſiſtat ſuper lineam AB ; Sed iam oſtenſum eſt, angulum A externum eſſe æqualem angulo nigro apud B oppoſito, & ad eaſdem partes lineæ AB . Quare angulus cruce ſignatus , & niger apud B duobus rectis remanebunt æquales .

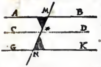
THEOR.

THEOR. IV. PROP. XXXI. Euc.30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ ſunt, & inter ſe ſunt parallelæ.

PRæſupponatur, quod lineę A B, & G K in eodem plano exiſtentes ſint alteri, vt punctatę C D, parallelę. *Dicit. Illas inter ſe debere eſſe parallelas.* Quòd, vt oſtendat, ſuper eas trahit lineam, vtcunque, quæ ſit M N.

Probatur propoſ. Nam anguli alterni niger apud M, & ſtellula notatus ſunt æquales, ſiquidem lineę A B, & C D ex conſtructione præſupponũtur parallelę, & ideò facientes angulos alternos æquales, ex propoſitione antecedenti.



Secundò angulus niger ad N eſt æqualis angulo eidem ſtellula notato: Quia C D, & G K ex conſtructione præſupponuntur parallelę. Quare ex propoſ. antecedenti angulus internus niger ad N erit æqualis ei angulo ſtellulâ notato, externo, & oppoſito, vt patet.

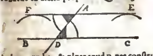
Quare concluditur, quod, cũ duo anguli nigerrimus ad M, & niger ad N ſint æquales tertio, ſint quoque inter ſe æquales: ſed ſunt quoq; alterni. Quapropter ex propoſ. 28. erunt A B, & G K lineę inuicem parallelę.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXII. Euc.31.

A dato puncto parallelam lineam ducere datæ rectæ lineæ.

A Puncto A ducenda ſit parallela lineę B C: Ducatur ex A ad B C recta A D, faciens angulum quemcunque, V. g. nigrum, huicque angulo æqualis conſtituatur alternus niger, ex documentis propoſ. 24. trahendo lineam F E: *Dicit. Lineas eſſe parallelas.* Vbi aduerte punctum A debere eſſe extra lineam B C, vt ad eam linea duci poſſit.

Probatur ex dictis prop. 28. Quia anguli alterni niger apud A, & niger apud D per conſtructionem æquales ſunt. Nota parallelas faciliùs duci. Si tracta linea B C eodem interuallo, & aperitione circini ſuper duo puncta quæcumque diſtantia, vt ſunt B, & C facto centro ducantur duę portiones circulorum æqualium, vt ſunt B, & E. Et poſtea ducatur linea, eas portiones tangens, vt linea F E. Hęc enim erit parallela; Quia puncta C, & E diſtant eodem interuallo; vt puncta B, & F ob radios circulorum ęquales.



PROB. VI. PROP. XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas ad eaſdem partes coniungunt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

SInt rectę lineę A B, & C D æquales, atque parallelę, quę coniungantur ad eaſdem partes rectis; ita vt, quę à ſiniſtrâ parte diſcedit lineę C D, coniungat ſiniſtram partem lineę A B; ſicut, & quę à dextra diſcedit lineæ C D, annectat quoque dextrâ partem alterius A B; vt faciant A C, & B D. *Dicit. Has lineas coniungentes, & eſſe æquales, & eſſe parallelas.* Quod, vt probet, oportet trahere diametrum A D ab A in D, incidetque lineis A B, C D, & A C, B D.

Probatur itaque. Nam, cùm A D incidat in parallelas A B, & C D; ex probatis in 30. propoſ. angulus niger ad A, & angulus niger ad D erunt æquales. Quoniam ſunt alterni, qui, vt ibi demonſtratum eſt, æquales ſunt. Quapropter triangula A B D, & C D A æqualia erunt. Quoniam ex 22. propoſ. ea ſunt triangula æqualia, quę habent vnum angulum alteri æqualem, vt eſt angulus niger A, & niger D, & latera eiuſdem anguli ſibi correſpondentia æqualia; vt hic euenit; nam ea hypotheſi A B, & D C ſunt æquales rectæ; diameter verò A D eſt idem latus, quod deſeruit vtriſque. Hęc inquam triangula baſim quoque baſi æqualem poſſident. *Quamobrem A C, & B D erunt æquales;* Quod erat primo probandum.



Probatur itaque. Quòd etiam ſint parallelæ ex eadem propoſ. 22. In dictis triangulis A C D, & A B D habentibus angulum angulo, & latera lateribus vtrunq; vtriq; ſuo correſpondẽti ęqualia, etiam totum triangulum eſt toti triangulo æquale. Quare angulus albus ad D, & angulus albus ad A erunt æquales. Sed hi ſunt alterni reſpectu linearum A C, & B D, ergo *hæ lineæ A C, & B D erunt quoque parallelæ*, ex propoſ. 28.

EXPENSIO VII.

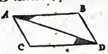
De Parallelogrammis, & Trapezijs.

HÆc Expenſio diuiditur in tres partes. Prima agit de proprietatibus parallelogrammorum, tum in ſe, tum diametro diuiſorum. Secunda comparat inuicem parallelogramma. Tertia docet quadratum conſtituere pręcipuam inter parallelogramma figuram.

THEOR. I. PROP. XXXIV.

Parallelogrammorum ſpatiorum anguli, & latera æqualia ſunt inter ſe; quæ ex aduerſò ſibi ſunt; illa verò ſpatia diameter biſariam ſecat.

SIt Parallelogrammum A B C D habens quatuor latera, quorum duo ſibi aduerſa ſint parallela, vt ſunt latera A B, & C D. Item A C, & B D. Dicit primò. Quod hęc figura poſſidet quoque *hæc latera, quæ ſibi ex aduerſò ſunt æqualia*, nempe æqualia eſſe A C, & B D; ſicut A B, & C D. Deinde dicit quoque *angulos ſibi ex aduerſò exiſtentes eſſe æquales*, nempe B, & C ſicut & A, & D albus nigerque. Poſtremò diametrum quoque, ſi ducatur, vt A D, diuidere ſpatium contentum à paral-



à parallelogrammo in duas partes æquales; & hęc vno, eodemque argumento oſtendit.

Probatur. Quoniam diameter inter parallelas A B, & D C reperitur, erunt angulus niger ad A, nigerque ad D æquales, ex prop. 30. vtpotè alterni. Et quia A D eſt etiã inter parallelas A C, & B D eodem modo angulus albus ad A; & angulus albus ad D, ex propoſ. eâdem 30., quia ſunt alterni, erunt æquales. Quapropter trianguli A B D, & A C D duos angulos æquales duobus angulis, quilibet ſuo correſpondenti; inſuper, & latus idem poſſident; nempe diametrum A D, & hinc ex demonſtratis in 27. propoſ. latera correſpondentia ad inuicem æqualia quoque erunt, nempe A B, & C D oppoſita ad inuicem; ſicut A C, & B D oppoſita inuicem. Quod eſt primum.

Probatur ſecunda pars. Nam angulus B, & angulus C oppoſiti erunt æquales, ex eadem propoſ. 27. Et quia ſupra niger apud A nigro apud D, & albus apud A albo apud D oſtenſi ſunt ęquales, ſi ſimul componãtur niger albuſque apud A erit æqualis angulo apud D nigro, & albo, quod eſt ſecundum propoſitum.

Prob. tertia pars. Nam ſequitur quoque ex Coroll. propoſ. 27. totum triangulum A B D toti A C D eſſe æquale. Quare ſpatium parallelogrammi diuiſum eſt biſariam à diametro A D; nempe in duo triangula æqualiã A B D, & A C D.

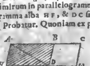
THEOR. II. PROP. XXXV. Euc. 43.

In omni Parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt inter ſe ſunt æqualia.

Vide in definit. 37. Quid ſint conſiſtentia circa diametrum, & complementa.

Dicit ergo propoſitio. Quod complementa nimirum in parallelogrammo A G M C parallelogramma alba H F, & D C ſint æqualia.

Probatur. Quoniam ex propoſ. præced. triangula A C M, & A G M, quę diuidit diameter ſunt æqualia. Eademque ratione in parallelogrãmo nigro maiori H B duo triangula A B D, & A H D



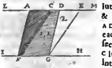
ſunt æqualia; vtpote à diametro biſecta. Sic etiam in parallelogrammo minori nigriori D M duo triangula D F M, & D E M ſunt æqualia. Deme ergo à triangulis totis maximis A C M, & A G M partes æquales, nempe huic A C M triangulum nigrum, & nigrius, & deme deinde alteri triangulum quoque nigrũ, & nigrius, quę primò demptis æquiualent, & reſidua H F, & D C complemẽta remanebunt æqualia, vt in 2. ponitur.

THEOR. III. PROP. XXXVI. Euc. 35.

Parallelogramma ſuper eadem baſi, in iiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Dicitur. Aliquod parallelogramum eſſe cum alio inter eaſdem parallelas, quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum; vt latus A D, & C E partes ſunt parallelę L M, ſicut, & F G eſt pars parallelę I H. Dicitur verò eſſe ſuper eandem baſim, cum latus alternum in parallela commune vtriſque eſt, vt F G. Dicit itaque hæc parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad latera, & angulos, ſed quoad capacitatem, & aream: Propoſitio verò habet tres caſus. Quare requirit tres probationes.

Probatur. Sint duo parallelogramma ſuper baſi F G eadem, & inter parallelas L M, & I H, nimirum A D F G, & C E F G, cadatque latus F C ſecundi ſuo extremo C inter latera primi inter puncta A, & D.

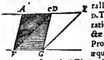


Nam cùm latus A D primi, & C E ſecundi ſint æqualia ſuę baſi communi, laterique oppoſito F G, ex præced. propoſ. fit vt ſint æqualia inter ſe. Aufer itaque mente lineam C D; quę vtriſque deſeruit, eiſque eſt communis, remanebunt adhuc æqualia A C, & D E ſegmenta.

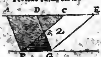
Progreſſ. 2. Similiter iam conſtat ex prop. 34. latus A F nigerrimi trianguli eſſe æquale lateri D G albi trianguli a; vtpote latera parallelogrammi ſeminigri nigerrimique.

Progr. 3. Angulus verò A nigerrimus eſt ęqualis angulo albo D ex propoſ. 30. quòd vnus ſit externus, alter internus inter parallelas A F, & D G. Cùm itaque habeamus duo latera, quodlibet ſuo ſibi correſpondenti æqualia, nimirum A C, & D E inuicem ex 1. Prog. Sicut A F, & G D ad inuicẽ, ex 2. Prog. Angulumque A nigerrimum angulo D albo æqualem, ex 3. Prog. Ex 28. propoſ. duo triangula nigerrimum A C F, & ſecundum album D E G erunt æqualia, quibus vtriſque ſi addatur commune Trapezium nigrum C D F G, cum vtriſque idem addatur; adhuc erunt æqualia. Quare triangulum nigerrimum, & trapezium integrantes parallelogrãmũ A D F G Trapezio, atq; triãgulo albo integrãtibus parallelogrammũ ſecundũ C F G E æquabũtur, quod demõſtrare oportebat.

Secundus caſus eſt. Si F C latus ſecundi parallelogrammi cadat in D. Tunc enim ex eadem ratione A D, & D E rectæ erunt (vt primo Prog. oſtenſum eſt) æquales ſicut & A F, & G D, (vt ſecundo) Et angulus A nigerrimus angulo D albo æqualis. Quare duo triangula nigerrimum D A F, & E D G album æqualia erunt. Addito itaque, tàm vni, quàm alteri commune triãgulum nigrum D F G complens, tàm cum nigerrimo, quàm cum albo triangulo parallelogramma nigrum, & ſemialbum; Ea remanebunt adhuc æqualia, nimirum A D F G, & E D F G parallelogramma.



Tertius caſus eſt ſi F C cadant extra punctum D, ita vt ſecet latus G D in X. Cùm itaque rectę A D, & C E ex ſupradicta ratione 1. Prog. æquales ſint. Si vtriſque addatur D C inter eas medians. Linea A D cum addita D C, & C E cum eâdem additâ D C erunt æquales. Sicut & F A, & G D ex prop. 34. Et etiam, ſupradicta ratione 3. Prog. angulus D



niger

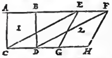
niger, ſ. CDK externua, & angulus A niger iuternus æqualea erunt. Quare triangulum B D G, & C A F erunt æqualla. Aufer itaque triangulum nigrum D G K per imaginationem commone vtriſque, remanebuntque duo trapezia primum ſubnigrum A D F K, & ſecundum album C E K G adinuicem æqualia. Vt itaque fiant parallelogramma æqualia, adde vtriſque mente commone triangulum nigerrimum F G K, & habebis ea æqualia, nempe A D F G, & C B F O; quod demonſtraodum erat.

THEOR. IV. PROP. XXXVII. Euc. 36.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelas conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

SInt duo parallelogramma. Primum A B C D. Secundum verò F E G H inter parallelas A F, & H C conſtituta, & ſuper æqualibus baſibus C D, & F E ſita. *Dicit hæc eſſe æqualia.* Quod, vt probet, coniungit baſim primi cum latere baſi oppoſito ſecundi, nimirum puncta extrema ad eandem partem, V. g. ſiniſtram, vt ſunt E, & C recta C E. Similiterque duo puncta terminatiua ad partem dextram F, & D rectâ D F.

Probat verò oſtendendo priùs, has lineas poſtremò tractas C E, & D F cum



baſi primi parallelogrammi C D, & baſi ſecundi F E facere parallelogrammum, ex 34. propoſ. Nam cum E F baſis ſecundi, & C D baſis primi ſint parallelę, & æquales ſit, vt ibi diximus. Quod C E, & F D poſtremò tractæ ſint parallelæ, & æquales, & ideò, quod C D F E ſit parallelogrammum, cùm eius definitio requirat tales prorſus conditiones. Quo poſito ſic aſtruitur inteotum. Quę eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia: Sed parallelogrammum primum A B C D, ex pręced. propoſ. eſt ęquale parallelogrãmo poſtremò facto C D E F; Eidemque eſt æquale ex eadẽ parallelogrammum ſecundum E F G H, ob baſim eãdẽ E F; ergo hęc nempe primum, & ſecundum erunt inter ſe æqualia.

COROLLARIVM.

COlligitur trapezia quoque, quorum oppoſitę baſes inter ſe æquales, ſint inter parallelas, inter ſe æqualia eſſe; nam trapeziũ A B O C eſt æquale trapezio B D F H ſiquidem duo parallelogramma 1, & 2 ſunt inuicem æqualia. Trapezium verò B D E G vtriſque commune: Vnde etiam idem dicendum erit ſi alterum latus alteri ſit idem, & oppoſita latera ſint æqualia.

PROB. V. PROP. XXXVIII. Euc. 46.

A data recta linea quadratum deſcribere.

SIt data recta linea A B, ſuper quam quadratum deſcribere neceſſè ſit.

E duobus punctis A, & B ipſi A B geminę perpendiculares erigantur, per 8. propoſ. & ſint æquales per propoſ. 6. ipſi A B, & pũcta C D connectantur, *& quadratum erit conſtitutum.*

Probatur, quia illud erit quadratum. Quod æquiangulum, & æquilaterum eſt, ſed figura ex facto



habet æqualia latera duo nempe A C, & B D ipſi A B; Tertium verò nimirũ D C, quod reperiatur inter perpendiculares A C, & B D, & ideò parallelas, ex prop. 29. quòd anguli A, & B ſint duo recti. Quamobrem D C, vtpote parallelas coniungens, & æquales erit æqualis ipſi A B, & parallela, ex propoſ. 33. Omnia itaque latera ſunt æqualia, & parallela.

Probatur ſecundò de angulis, nam iam duo A, & B ſunt recti; quare & alij duo, D, & C, vtpote oppoſiti iſtis, ex propoſ. 34. erunt recti; cùm conſtitutum, ſit quoque parallelogrammum.

EXPENSIO VIII.

De triangulorum cum parallelogrammis trapeziiſque parallelis conſtantibus comparatione.

PArallelogramma in triangula diuiduntur: Vnde iam incipit comparare triangula; cum toto, quòd primò, & immediatè componunt; Cætęrę enim figurę, licet, ex triangulis componantur; plura tamen ea componunt: Trapezia verò, & parallelogramma tantùm duo.

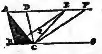
THEOR. I. PROP. XXXIX. Euc. 41.

Triangulum parallelogrammi inter eaſdem parallelas, & eãdem baſi conſtituti, dimidium eſt.

SIt Parallelogrammum ſeminigrum B A D C, & triangulum A C B inter parallelas A E, & B O & ſuper eandem baſim B C conſtitutum. *Dico eſſe triangulum 2 E C dimidium parallelogrammi ſeminigri A D B C.*

Quod vt probetur ex propoſ. 32. à dato puncto C ducatur parallela ipſi B E lateri trianguli, & erit factum parallelogrammum B C E F, cuius diameter C E. Diuidatur deinde parallelogrammum ſeminigrum bifariam ducto diametro A C. Quo poſito ſic propoſitio probatur.

Nam, cùm parallelogramma album, & ſemialbum ſint ſuper



eandem baſim, & inter eaſdem parallelas, ex prop. 36. ſunt inter ſe ęqualia; Sed illorum parallelogrammorum æqualium dimidia ſunt triãgula nigrum 1, & 2, ex prop. 34 Eo quia latera eorum A C primi, & E C ſecundi ſint parallelogrammorum diametri. Quæ verò æqualium ſunt dimidium, ex pronunc. 7. inter ſe neceſſariò æqualia ſunt. Quapropter triangula primum nigrum, & ſecundum album inter ſe æqualia erũt, Sed nigrum eſt parallelogrammi ſeminigri dimidium. Ergo etiam triangulum album 2 erit eiuſdem parallelogrammi dimidium.

Digitized by Google

COROLLARIVM I.

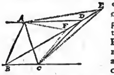
Hinc patet quod triangula ſuper eandem baſim, & inter eaſdem parallelas conſtituta ſint inuicem æqualia: Nam ſunt triangula nigrum 1, & album 2 dimidia æqualium parallelogrammorum A C ſeminigri, & alterius albi B F, vt in ſerie demonſtrationis oſtenſum eſt.

COROLLARIVM II.

Etiam eſſe veram propoſitionem conuerſam, nempe *triangula æqualia ſuper eādem baſim, & ad eaſdem partes conſtituta eſſe inter parallelas*.

Nam ſint triangula B A C, & B D C æqualia ſuper eandem baſim conſtituta B C, & ducta per eorum vertices A D linea, non ſit parallela baſi B C: Ducatur parallela; hæc cadet, vel infra, vel ſupra lineam vertices coniungentem A D.

Cadat primum ſupra, & ſit A E, & producta B D, in E coniungatur C E. Itaque triangulum B C E; quod inter parallelas ex aduerſarij a ſit, erit æquale triangulo B C A. Sed eidē ex hypotheſi eſt æquale triangulum B D C: Ergo triangulum B E C maius eſſet æquale minori B D C, vtpote quod ſint vni tertio B A C æqualia, quod eſt abſurdum.



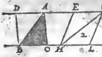
Quod ſi cadat infra ad F, vbi incidit, ducatur C F, & erit triangulum B C F æquale triangulo B A C eo quod ex aduerſarij a ſint parallelæ A F, & B C, & conſequenter, minus B F C, æquale triangulo B C D maiori; quod eſſe nequit.

THEOR. II. PROP. XXXX.

Triangulum parallelogrammi inter eaſdem parallelas, & æquali baſi conſtituti dimidium eſt.

Sit triangulum L H G notatum numero 2, & parallelogrammū ſeminigrum D B A C inter parallelas D G, & B L, & conſtituta ſuper æquales baſes B C, & H L; Dico triangulum 2 eſſe dimidium parallelogrammi ſeminigri.

Trahatur H E parallela lateri trianguli L G à puncto H, ex propoſ. 32., & erunt duo parallelogramma, ex 37. prop. æqualia, & erit H G parallelogrammi albi diameter. Trahatur quoque diameter B A in ſeminigro parallelogrammo.



Quo facto probatur propoſ. Triangula nigrū, & album 2, vtpote dimidia æqualium parallelogrammorum ſemialbi, & albi inuicem ſunt æqualia. Ergo triangulum 2 erit etiam medietas parallelogrammi ſemialbi.

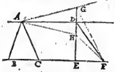
COROLLARIVM I.

Colligitur hinc, triangula ſuper æqualem baſim, & inter eaſdem parallelas eſſe inuicem æqualia. Quia ſunt dimidia æqualium parallelogrammorum ſeminigri, & albi.

COROLLARIVM II.

Eſſe quoq; veram propoſitionem conuerſam præced. Coroll. *Nempe triangula æqualia ſuper æqualem baſim ad eaſdem partes conſtituta eſſe inter parallelas*.

Nam eadem ratio militat, quæ ſuperiori 2. Coroll. præceden. propoſ. Nam ſi A D ducta per vertices triangulorum B A C, & E D F æqualium non eſt parallela lineæ B F; erit altera; quæ ſi cadet ſuper A D, vt A G, ducta F G, fiet triāgulū E F G, quod ex dictis per aduerſarios æquabitur triangulo A B C, & cōſequenter ſibi ex hypotheſi æquali E F, maius minori, quod eſſe nequit; Et ſi cadat infrà, vt A H. Efficietur triangulum E H F, quod vtpote inter parallelas A H, & B F erit æquale triangulo B A C, & ideò ſibi æquali triangulo E D F; minus maiori, Quod eſſe nequit.

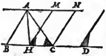


PROB. I. PROP. XXXXI. Euc. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

Datum triangulum ſit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oporteat autem facere parallelogrammum, quod ſit æquale triangulo 2 Sed quod obtineat angulum internum aliquem æqualem angulo D. Sic efficere oportebit. Trianguli dati aliquod latus, V. g. B C diuidatur per medium in H, ex propoſ. 7. & per doct. propoſ. 24. à puncto dato H fiat angulus æqualis angulo D; trahaturque H M, vt lubet, ſiue ad dextram, vt in exemplo, ſiue ad ſiniſtram, ſi commoditas poſtulet. Deinde per propoſ. 32. trahatur parallela A M ad B C à puncto dato A. Rurſuſque per eandem propoſ. 32. ducatur à puncto dato C parallela ad H M; quæ occurrat parallelæ primo tractæ A M, & prolungatæ ſi oportuerit in N. Eritque factum *parallelogrammum* M N H C *æquale triangulo* A B C; quòd vt probetur linea A H coniungatur punctum H cum vertice trianguli A.

Probatur. Nam parallelogrammum H C M N duplum eſt trianguli A H C, propoſ. 39.; ſiquidem eſt ſuper eandem baſim H C; & inter parallelas A N, & B C. Sed triangulum A H C eſt dimidium triāguli totius B A C, eo quod duo triangula, in quæ diuiſum eſt, ſint æqualia, vtpote ſuper æquales baſes B H, & H C, & inter eaſdem parallelas A N, & B C conſtituta, ergo totūm triangulum A B C erit æquale parallelogrammo M N H C, vtpote ambo eiuſdem trianguli A H C dupla.



COROLLARIVM.

COlligitur ex Pelletario; quòd eodem pacto poteſt conſtitui triangulum in dato angulo, quod ſit æquale dato alicui parallelogrammo, vt in figura huius propoſ. datum parallelogrammum ſit M N H C, ex C puncto dato fiat angulus nigerrimus; in quo poſtulatur, vt fiat triangulum. Trahendo A C, & prolungato latere parallelogrammi M N, vſque dùm occurrat in A lineæ anguli dati nigerrimi A C; aſſumatur in linea B C, B H æqualis lineæ H C, trahaturq; à puncto B linea A B, quę compleat triangulum B A C, quod eſt duplum parallelogrammi M N H C, vtpote ex probatione ſuperioris propoſitionis conſtat.

THEOR. III. PROP. XXXXII.

Triangula Trapezijs bipartitis, duobuſque lateribus parallelis clauſa inter ſe ſunt æqualia.

SInt duo triangula A B C, & I E D clauſa Trapezija bipartitis, & parallelis duobus lateribus, vt ſunt A C I D, & B C E I, & A B E D, quæ habent latera A D, & C I, & B E parallela, & bipartita linea L O. *Dico hæc triangula eſſe æqualia.*

Probatur Trapezium A C I D linea T L latera bipartiente eſt diuiſū in duas partes æquales. Nam productis lateribus I, vt conueniant in V, erit triangulum A V L triangulo V L D æquale; quòd ſit inter eaſdē



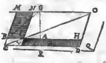
parallelas, & ſuper æqualem baſim; ſic dicas de triangulo C T V, & V T I. Ablatis ergo triangulis iſtis C T V, ab A V L, & T V I à triangulo V L D trapezium reſiduum A C T L erit æquale reſiduo T L I D. Ex idem dicendum de parte C T B O, quòd ſit æqualis parti T O E I in trapezio B I; & de parte A B O L; quòd ſit æqualis parti L O E D, in trapezio B D; Si ergo ab iſtis partibus æqualibus trapezij magni auferētur partes æquales trapeziorum C O, & C A L T, hinc ab A O; inde T E, & L T I D ab O D, remanebunt reſidua triangula æqualia A B C, & I E D, quod erat oſtendendum.

PROB. II. PROP. XXXXIII. Euc. 44.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

SIt triangulum datum punctatum B A G; angulus verò datus Q; linea verò data R. Iam noſti ex propoſ. 41. facere parallelogrammum æquale triangulo dato B A G, quod parallelogrammum angulum æqualem angulo dato obtineat. Fiat igitur, & ſit parallelogrammum nigrum M N B L, habens angulum L ęqualē dato Q; ipſum verò totum ſecundùm aream æquale ſit triangulo dato punctato B A G. Extendetur itaque B L in H, ita vt L H ſit æqualis datæ R. Deinde per punctum H extremum ducta parallela H O ad B M occurrat rectę M N parallelę B H, in O: Eritq; factum parallelogrammū album N H, quod diametro O L bifariam diuidatur, & producatur vltra L in C, donec occurrat lateri B M nigri parallelogrammi producto in C, deinde ex C ducatur parallela ad B H, vſque ad latus O H, productum in D. Poſtremò producatur latus N L parallelogr. N L nigri in V. Eritque alterum parallelogrammum nigrum longius, cuius latus L H, vel V D eſt æquale datæ R. Probandum verò eſt quod & angulus nigerrimus ad L ſit æqualis dato Q, & ipſum V H triangulo dato punctato B G A.

Probatur itaque primò de angulo. Nam ex prop. 12. angulus ad L nigerrimus ſecundi parallelogrammi nigri lōgioris eſt æqualis angulo L alterius nigri primi pa-



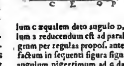
rallelogrammi, quod ſint anguli ad verticem. Sed angulus L eſt æqualis ex conſtructione angulo dato Q: Ergo & angulus L nigerrimus ſecundi V H eſt æqualis eidem Q.

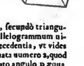
Probatur ſecundò, quod totum parallelogrāmum nigrū ſecundum V H ſit quoad aream æquale triangulo dato O B A; nam cùm ſit vnum ex complementis eorum parallelogrammorum, quę circa diametrum ſunt, ſit, quòd ex propoſ. 35. ſit æquale parallelogrāmo primo nigro A N: At illud eſt æquale ex conſtructione dato triangulo B G A. Ergo & parallelogrammum ſecundum nigrum eidem æquale erit, quod oportebat demonſtrare.

PROB. III. PROP. XXXXIV. Euc. 45.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

VVlt hîc Euclides docere modum, quo qualibet figura rectilinea etiam ſi triangularis, & inæqualis, tum angulis, tum lateribus poſſit ad figuram parallelam reuocari. Sit itaque figura quæcunque rectilinea 1, 2, 3, quę in totidem triangula reſoluenda eſt, per lineas ad vnum angulum protractas; Ex inde ſit angulus D iuxta quem parallelogrammum æquale Iis triangulis 1, 2, & 3 oporteat coſtituere: ad id verò efficiendum obſeruanda eſt primò regula, & praxis, quam in 41. propoſ. docuimus, & conſtituendum eſt parallelogrammum A B C E album habens angu-

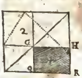




lum C æqualem dato angulo D, ſecundò triangulum 2 reducendum eſt ad parallelogrammum nigrum per regulas propoſ. antecedentis, vt vides factum in ſequenti figura ſignata numero 2, quod angulum nigerrimum ad G dato angulo D æqualem poſſideat, & latus inſuper G H æquale lateri

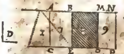
Digitized by Google

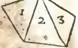
si conſequatur: Hocque transferendum eſt ad 2 figuram inter A B, & C E parallelas prolungatas, ita vt G H conueniat, & idem fiat cum latere B E; quod autem hoc effici poſſit, ex probatione conſtabit; Tertiò de 3 triangulo idem efficiendum eſt, reducendo illud ex inſtitutione præcedentis Prop. ad parallelogrammum nigrum, vt in tertia figurâ factum eſt, faciendo angulum nigrũ ad K æqualem angulo dato D, & latus K L æquale lateri B E; deinde inter parallelas A B, & C E prolungatas quantum opus ſit, conſtituendum; ita vt apud parallelogrammum ſecundum nigrum collocetur, & K L cum latere M O idem fiat. Factumque erit parallelogrammum A N C P quod conſtabit tribus parallelogrammis 7, 8, nigro, & 9 æqualibus tribus triangulis, quodque nempe ſuo rectilineo, & per cõſequens toti rectilineo 1, 2, 3.



Quod ergo hic probationem repoſcit eſt, quod parallelogrammum ſecundæ figuræ nigrum poſſit transferri inter parallelas A N, & C P, illud ſimul adaptando, vt præcepimus lateri B E. Et priùs quod latus G H parallelogrammi nigri in ſecunda figura poſſit adaptari lateri B E patet; quia huic B E per conſtructionem fecimus æquale latus G H: Quare cum eo congruet. At quia angulus G nigerrimus eſt æqualis angulo dato D, cui quoque æqualem fecimus angulum C, & per conſequens, & angulum externũ E nigrum in 1. fig ex prop. 30. angulus G niger ſecundæ figuræ capiet prorſus, & ſe æquabit cum angulo E nigro, & latus G Q incedet ſuper E O. Sic angulus H nigerrimus ſecundæ figuræ capiet adamuſſim, & conueniet prorſus cum angulo nigro B primæ figuræ, eo quia angulus B ſit complementum anguli E ad æquandos duos rectos, ſiquidem ambo ſimul, vtpote ambo interni inter parallelas, & ad eaſdem partes ſunt, ex prop. 30. æquales duobus rectis. Et hanc eandem conditionem habet reſpectu anguli nigri G, & conſequenter reſpectu anguli ſibi æqualis E in alterâ figura, angulus H nigerr. in hac figura ſecunda in parallelogrãmo G R cũ ſint inter parallelas Q O, & H R. Quare & etiam ipſe erit complementum anguli E ad duos rectos æquandos, & ideò ipſi B æqualis. Vnde angulus H conueniet, & idem ſpatium æquabit, ac angulus B, & H R incedet cum parallela B M. Quare ſi fiat E O æqualis H R tracto parallelo latere M O erit B E O parallelogrammum æquale nigro G R figuræ ſecundæ. Eademque probatio applicabitur parallelogrammo nigro 3. figuræ oſtendendo K L ex conſtructione conuenire cum M O. Angulum nigerrimum K bene collocari, & occupare idem ſpatium, ac angulus O exterior albus in prima figura, & angulum L nigerũ in fig. 3. benè conuenire, & eſſe æqualẽ angulo M albo in prima figura; Quia tàm vnus, quàm alius compleant æquales angulos, nẽpe nigrum K, & album O, ad duos rectos. Vnde euenit, quod parallelogrammo 8 nigro poſſit ſuperaddi parallelogr. 9 album inter parallelas A N, & C P, & fieri totum parallelogrãmum A N C P æquale rectilineo 1, 2, 3.







Ne mireris; nos hic primum librum finire; neceſſe enim fuit, vt Propoſitionem 47. Euclidis cum alijs eiuſdem generis poneremus in fine ſecundi Libri.

TRACTATVS V.

In ſecundum Librum Euclidis de æquipotentia linearum.

IN hoc ſecundo libro agit Euclides de linearum æquipotentium diuerſis generibus. Dicuntur autem lineæ æqualiter poſſe; Cùm ſuper ipſas poteſt fieri quadratum æquale alteri, vel quadrato, vel parallelogrammo à duobus lineis effecto. Quando autem duę linę dicuntur æqualiter poſſe, de quadratis intelligitur. Quoniam, quando non intelligitur de quadratis, tunc exprimitur, quòd poſſit æquè, ac tectangulum tale, vel tale. In quatuor verò expenſiones tantùm hunc tractatum ſecabimus. In prima agemus de principijs. Secunda potentias linearum, vt ſunt latera quadratorum oſtendet. Tertia quatenus ſunt latera triangulorum; Et tandem ducere lineas æquipotentes, vel eas ſecare docebimus. Superfluum verò eſt texere huius libri laudes, & vtilitates enumerare. Cùm experimentum demonſtratutum ſit, nihil ferè ſine hac doctrina in Mathematicis poſſe probari.

EXPENSIO I.

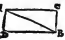
De principijs huic libro inſeruientibus.

NE laboremus in ſingulis propoſitionibus oſtendendo parallelogramma parua, quæ in rectangulo maiori à parallelis ad ipſius latera ſiunt eſſe rectangula. Hic id duximus oſtendendum ſemel; vt hęc vnica demonſtratio ſingulis demonſtrationibus infra ponendis deſeruiat. Aduerte autem parallelogrãmum rectangulũ ſolo nomine rectanguli ab Euclide appellari.

THEOR. I. PROPOS. I.

In parallelogrammo omnes anguli recti ſunt, ſi vnus ſit rectus.

PRobatur eo quod omnia latera parallelogrammi ſint parallela ex eius definit. Poſito itaq; A angulo recto; cùm A C incidat parallelis A D, & C B, ex prop. 30. l. 1. anguli interni erunt duobus rectis æquales: Sed A eſt rectus, ex hypotheſi; Ergo etiam C, Quòd ſi A, & C recti ſunt; Ergo etiam oppòſiti D, & B anguli, ex propoſ. 34. primi.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si ſit rectangulum, & intra ipſum ad latera parallelæ ducantur, quæ ſe interſecando faciunt ſunt rectangula parallelogramma.

SIt rectangulũ A B magnum contentum lateribus A C, & C B: *Dico, quod ſi ad latera hæc ducantur parallelæ* I N, & H M; & rurſus E O, & F N, *ſe interſecando efficere rectangula.*

Probatur primò, quòd habeat latera æqualia parallelogrammum quodlibet incluſum, V.g. N E. Nam latus O E, eſt æquale lateri F N, quod ſit inter parallelas O N, & E F. Sic O N, & E F ſunt æquales; quòd ſint inter parallelas E O, & F N, ex prop. 33. primi.



Erunt quoque omnes anguli recti: Dùm C angulus albus rectus eſt ex hypotheſi: Ergo etiam angulus E niger, quòd ex propoſ. 30. ſint æquales, vtpote internus, & externus. Quare ex prop. anteced. etiam omnes reliqui O, N, F. Ideircò, cùm latera omnia probata ſint æqualia, & anguli oſtenſi ſint æquales; erit O E N F parallelogrammum rectangulum. Quod autem dicitur de hoc parallelogrammo; dicatur etiam de alijs, cùm par ſit ratio.

COROLLARIVM I.

SEquitur ex hac propoſ. Duas parallelas, quæ ab æqualibus partibus laterum angulum rectum comprehendentium, hinc, inde proueniunt, ſe decuſſare in ſegmenta æqualia: quia ab æqualibus ſegmentis procedunt, & ideò efficere quadrata. Talis eſt figura ſeminigra M O, quia enim E F, & H I ſunt æquales; M N, & O N ſunt quoque æquales, & ideò eſt quadrata.

DEFINITIO.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub re⸗tis duobus lineis angulum rectum comprehendent⸗bus.

Sit parallelogrãmũ rectangulũ A C B D prop. I.

Dicitur

Dicitur hoc parallelogrāmū duobus rectis cōtineri; Namq; licet quatuor lineis verè cōprehēdatur, duę tamen ſunt, quę inæquales inuicem; Illud à quadrato diſtingunt. Sic, & vnum angulum, licet ſint quatuor, ſufficit nominare; quia per rectum angulum ſecernitur à Rhombis, & à Rhomboidibus, quę nullum angulum rectum obtinent. Patet autem definitio ex propoſ. 1. in quâ demonſtrauimus, quòd in parallelogrammo, ſi vnus angulus ſit rectus, omnes alij tres ſint recti quoque.

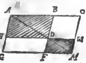
COROLLARIVM II.

SEquitur autē ex hac antecedēti definitione, & propoſitione omnia parallelogramma, à parallelis ad latera in parallelogrammo maiori illis continente facta, contineri, vel ſub ipſis ſegmentis, vel ſub æqualibus ad ipſa ſegmenta à quibus illę parallelę ductę ſunt. V. g. rectangulum ſeminigrū HE dicitur cōcludi ſub ſegmentis C H, & C E; Patet, ex definit. quia angulum C rectum concludunt; quòd verò M O ſeminigerrimum concludatur ſub æqualibus H I, & E F, patet; quia latus O N æquatur A F, cùm ſit inter parallelas; & N M latus lateri H I eàdem ratione.

DEFINITIO II.

IN omni parallelogrammo vnumquodque eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

Dicit in parallelogrammo A G C M, vnum parallelogrammum diametrum A M ambiens, V. g. nigrum cum duobus complementis albis D C, & D G vocandum eſſe *Gnomonem*; Vel alterum nigerrimum minus, cum duobus complementis iiſdem *Gnomonem* appellari. Igitur tolle mente à parallelogrammo toto A C G M vtrumlibet parallelogrammorum nigrorum diametrum ambientium, & reliqua remanens figura Gnomon vocabitur. Sic deme parallelogrammum nigrum A D, reliquum erit Gnomon H M B, vel nigerrimum D M, & reliquum erit Gnomon B A F.



EXPENSIO II.

De potentijs linearum diuerſimodè ſectarum ad æquanda ſuorum ſegmentorum rectangula.

POtentię linearum ſumuntur, vel totæ, vt eorum quadrata, & rectangula æquè poſſint, ac ſegmentorū quadrata, atq; rectangula, vel totę cū aliquo ſegmenti, vel quadrato, vel rectangulo, vel non totę; ſed partis alicuius potentia, nimirum eius quadratum, dicitur æquale, vel ſolum, vel cum aliquo rectangulo, alijs ſegmentorum rectangulis. De iſtis ergo potentijs, ideſt quadratis, quę lineę poſſunt efficere, iuxta tres aſſignatas comparationes agemus in hac expenſione.

THEOR. I. PROP. III. Euc. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera, in quotcumque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub duobus illis rectis lineis æquale eſt omnibus rectangulis, quæ ſub non ſectâ, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur.

SInt duę rectę A, & B C, quarum B C in ſegmenta aliqua diuidatur, vt libuerit, V. g. in partes B D, & D E, & E C. Dico, quòd ſi ex omnibus iſtis partibus fiant rectangula, à ſingulis, & non ſectâ lineâ A comprehenſa: Hæc omnia erunt æqualia rectangulo, quod ſub linea A non ſecta, & lineâ rectá ſectâ B C continetur.

Praxis 1. Conſtitue itaque parallelogrammum rectangulum erigēdo duas perpendiculares ęquales lineæ A ab extremis B, C, & rectarum extremitates G, & F rectâ coniūgantur. Nam, vt probatum eſt propoſ. 38. primi de quadrato, omnia latera oppoſita erunt parallela, & æqualia, & omnes anguli recti. Quare erit factum rectangulum ſub A non ſectâ, & ſectâ B C totâ comprehenſum.

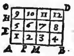


Praxis 2. Deinde ex diuiſionibus D, & E trahe parallelas alteri perpendicularium vſque ad alterum latus oppoſitum G F. Nam ex propoſ. 33. primi erunt æquales perpendicularibus, vel G B, vel C F, & conſequenter lineæ A non ſectæ: Vnde erunt conſtituta rectangula ſuper partes rectę B C, album, nigrum medium, & alterum nigrum E V, ex partibus B D, D E, E C, & lineis æqualibus datæ lineæ A.

Quare facili oſtenſione, quæ ex ipſa effectione eruitur, oſtenditur propoſitio. Rectangula album, nigrum medium, & alterū E F ſunt conſtituta ex partibus lineę ſectę B C, & linea A non ſecta, vt 2. praxi oſtenſum eſt; Sed hæc omnia integrant rectangulum à totâ rectâ B C, & non ſecta A comprehenſum, & idem ſpatium occupant. Quare ei erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc colligit Commandinus. Idem ſequi, etiam ſi altera linearum in quotcumque ſegmenta diuidatur. Nam rectangula facta à partibus, ſegmentiſque, tum vnius, tum alterius, æquatur toti rectangulo à lineis illis duabus integris conſurgente. Id verò patet. Nam diuiſa A O in quotcumque ſegmenta, & A B pariter, & à ſingulis diuiſionum partibus ductis parallelis ſe inſecabunt, & illis interſectionibus ſe diuident in partes illis ſegmentis ęquales, à quibus ducuntur, eruntq; rectangula, ex pr. 2. Quare, cū omnia ea rectangula, vt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. à rectangulo toto, lineis A B, & A O comprehēſo, cōcludantur, illi erunt æqualia.



THEO-

THEOR. II. PROPOS. IV. Euc. 2.

Si recta linea ſecta ſit vtcumque, rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt illi, quod à tota ſit, quadrato.

SIt recta A B diuiſa vtcunque in E, & ſuper eam conſtituatur quadratum A B C D. Dicit *hoc quadratum fore æquale rectangulis à tota* B A, *& parte* A E, *& à tota* B A, *& altera parte* E B *comprehenſis.*

Trahatur à diuiſione E parallela ad alterum laterum; factaque erunt duo rectangula, de quibus ſermo eſt, nigrum, & album; quæ ea 2. propoſ. 2. Coroll. continebuntur nigrum ſub ſegmento E B, & tota A B, vel æquali B D, & album ſub tota A B, vel æquali A C, & ſegmento A E.



Quapropter cum hæc rectangula album, & nigrum in quadrato C B contineantur, eiq; commenſurentur; patet eſſe æqualia. Vel prob. ex præced. quia A B ſecta eſt, vtcumque, & A C data æqualis ipſi A B, vnde rectangula nigrum, & album, ex tota, & ſegmentis A B, erunt æqualia rectangulo B C à ſecta, & non ſecta comprehenſo.

COROLLARIVM.

ELicies. Quod licet propoſitio de vnica ſectione loquatur, adhuc tamen verificatur de pluribus ſectionibus, ne dum vnius lineæ, ſed vtriuſque; eadem enim hæc prop. quæ 3, eſt, niſi quòd ambæ lineæ, quæ dantur, hic ponuntur æquales, quæ comprehendunt angulum rectum, & ideò hic faciunt quadratum, ibi verò inæquales, & faciunt rectangulum. Vnde quæ verificantur de præcedenti, etiam de hac vera ſunt.

THEOR. III. PROP. V. Euc. 3.

Si recta linea ſecta ſit, vtcumque; rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, eſt æquale rectangulo, quod ſub ambobus ſegmentis continetur, & quadrato, quod ab ipſo ſegmento efficitur.

DIuidatur linea A C vtcumque in B, & eligatur, quæ pars magis placuerit, V. g. B C; fiatque rectangulum comprehenſum à tota C A, & ſegmento B C; quod ſit 1 ſemialbum;. Deinde à puncto diuiſionis a menſurato in P M ducatur parallela B T, Nam, quia A P eſt æqualis parti B A, & P Q parti B C erit rectangulum album 1 illud ſub ſegmentis contentum, de quo loquitur propoſ. Pariter cùm B M, & M N ſint æqualia ſegmento B C, rectangulum nigrum M T erit quadratum illius ſegmenti, ſub quo, & tota, rectangulum continetur nimirum M Q. *Dico itaq; rectangulum* B Q *ex ſegmentis, & quadratū* M T *ex ſegmento, eſſe æqualia rectangulo* M Q *contento ab ipſo ſegmento* M N; *nimirum æquali* B C, *& tota* P M *æquali lineæ* C A.

Probat ex 3. propoſ. Quia linea P M ſecta eſt, vt nobis placuit, iuxta menſuram C B, & data eſt altera non ſecta æqualis, vt placet ipſi C B, nimirum M N. Vnde rectangula album; & nigrum ex non ſecta M N, & ſegmentis P B, & B M contenta æqualia erunt ex 3. hoius rectangulo ex tota ſecta P M, & non ſecta M N comprehenſo; Probatur etiam alio modo. Quia rectangulum 1 ex ſegmentis, & quadratum nigrum ex ſegmento B C ex constructione continentur in rectangulo M Q. Et idem erit, ſi eligas alterum ſegmentorum, & fiat eodem modo rectangulum M Q, quod eſt 2.



COROLLARIVM.

HInc eſt, ſi totum rectangulum 1, & rectangulum 2 componerentur; quòd facerent quadratum, dummodo ſecundùm latera longiora N Q, vel P M fieret compoſitio. Patet, quia latera longiora, V. g. P M conſtant ex duobus ſegmentis maiori A B, & minori B C. Sed minora latera ſunt duo eadem ſegmenta maius rectanguli 2, minus rectanguli 1. Quare, ſi componatur facient totum latus P M; Vnde latera erunt æqualia totius compoſiti, & ideò totum compoſitum ex duobus rectangulis 1, & 2, integratum erit quadratum.

THEOR. IV. PROP. VI. Euc. 4.

Si recta linea ſecta ſit vtcumque, Quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt illis quadratis, quæ deſcribuntur à partibus, & inſuper duobus rectangulis, quæ à partibus comprehenduntur.

SI linea A B, vt libet, diuidatur in P. Dico; quòd, ſi ex parte A P fiat quadratum, & aliud ex alia parte P B, & ex ijſdem partibus A P, & P B duo rectangula fiant; *hæc omnia fore æqualia quadrato, quod à tota deſcribitur.*

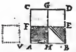
* Probatur ex præceden. propoſ. Nam ſi fiat ex tota A B, & parte P B rectangulum Q B, & in eo per parallelam H F à puncto H æquali ſegmento P B deſcribatur quadratum, habebimus quadratum nigrum ex ſegmento, & rectangulum 2 ex ſegmentis, & totum Q B ex continens. Item, ſi id fiat ex parte minori A P, habebimus quadratum nigrum, & rectangulum 1, ex ſegmentis, & hæc continens Q A. Quæ rectangula 1, 2, & quadrata nigra æquant comprehenſa ſub tota, & partibus, vt ſunt rectangula ex continentia Q B, & Q A: Sed, & Coroll. propoſ. anteced. ea ſi coniunguntur, faciunt quadratum æquale quadrato ex tota A B deſcripto; Ergo duo quadrata ex partibus deſcripta, & duo rectangula ab ijs comprehenſa æquantur quadrato ex tota A B deſcripto.



CO-

COROLLARIVM.

Hinc elicitur, lineas duplas facere quadrata ſua quadruplicia. Nam ſi detur linea V, & dupla A B, ſuper quam fiat quadratum A B C D; & diuiſis lateribus ſingulis per medium, trahãtur parallelę ad latera F E, & H G; quę ſe intercipiendo ex 2. huius propoſ. Cor. æqualia



efficient ſegmenta, quod ſint dimidia æqualium laterum quadrati magni C B. Sequitur omnia quadrata eſſe, & æqualia inuicem, & conſequenter quadrato V punctato, cui ob lateria A H, quod ſit dimidium A B, æqualitatem, ex eis vnum, V. g. nigrum quadratum æquatur; Ergo & omnia: Sed hęc quadrata ſunt quatuor. Ergo quadratum illa continens C B quadruplum eſt quadrati punctati V.

COROLLARIVM II.

Elicitur quoque è contra; quòd ſi quadratum ſit quadruplum alteri; latus maioris eſſe duplum minoris lateri: Quia, cùm quadratum nigrum in minori quadrato ſit ęquale minori pũctato V, ſequitur; vt latera quoque ſint ei æqualia: Quare A H æquale erit lineę V. Sed A H eſt æquale lineę H B; quòd quadratum eius ſeminigrum ſit æquale ex hypotheſi nigro. Ergo etiã latus H B eſt æquale lateri V. Quaderè totum latus A B erit duplum lateris V.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque manifeſtatur. Parallelogramma circa diametrum quadrati eſſe quadrata: Quia demonſtrabitur ductam diametrum in figura propoſitionis, C F, & F B in quadratis nigris eſſe vnam, & eandem lineam; ſi rectangula C P, & Q B componantur, ita vt partes ęquę commenſurentur. Nam tunc latus P F rectanguli, & Q F alterius coincident, & eandem lineam fiēt cum lateribus rectangulorum nigrorum; Vnde quadrata nigra ſe tangent in puncto F, quare, & diameter C F, & F B ſe tangent in eodem puncto. Erunt etiam in directum, quia anguli apud F recti à diametro bifariam diuiduntur, ex propoſ. 34. & latera ſubtenſa ſunt æqualia, vtpote latera quadratorũ: Cùm itaq; anguli C F Q, & H F B nigri ſint ſemirecti, & angulus F rectus; Ergo lineę C F, & F B incidentes in lineam, V. g. Q F faciunt angulos ſemirectum nigrum, & album cum altero ſemirecto ad eandem partem nigro duobus rectis æquales; Quare illi ex prop. 14. lib. 1. diametri C F, & F B in directum erunt, & erit vna linea; & ideò diameter quadrati C B maioris. Ergo parallelogramma nigra circa diametrum quadrati C B magni erunt quadrata.

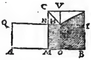


THEOR. V. PROP. VII. Euc. 5.

Si recta linea ſecetur in partes æquales, & inæquales, rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cùm quadrato, quod naſcitur ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei quadrato, quod à dimidia deſcribitur.

Diuidatur linea A B in partes æquales, vt in M, & non æquales in O: Superque medietatem M B fiat quadratum, tractoque diametro B C, ab O puncto inæqualium partium, excitetur parallela O V lateri quadrati, V. g. C M, & vbi ſecat diametrum in H ducatur Q I parallela ad A B, & ducta ab A ei perpendiculari A Q, erit rectangulum O Q ex parte nigrum ſegmentis inæqualibus A O, & O B contentum, *de quo dico; quòd cùm quadrato ex* M O *inter media ſectionum ſ. quadrato* C H, *ſit æquale quadrato à medietate deſcripto* C B.

Probatur. Nam pro Progreſſ. primò ex Coll. 3. anteced. prop. Rectangula nigrius, & album ſunt quadrata, vtpote circa diametrum C B conſiſtentia. Quadratum verò paruum album, ex prop. 2. Coroll. 1. huius



factum ſuper N H, dicitur etiam factum ſuper M O intermedia ſectionum; & latus O H rectanguli Q O ex parte nigri æquatur ipſi O B: Vnde habemus rectangulum Q O, & quadratum paruũ C H, de quibus loquitur propoſitio, & dicit eſſe æqualia quadrato à C B dimidiâ.

Progreſſ. 2. Conſiderandum deinde complementa nigrum, & ſeminigrum, ex propoſ. 35. primi inuicem eſſe æqualia, quibus vtriſque, ſi addas quadratum nigerrimum per imaginationem adhuc remanebunt æqualia.

Progreſſ. 3. Complementum autem alterum nigrum N O, cum quadrato nigro addito æquatur rectangulo albo M Q, vtpote ex propoſ. 37. primi inter parallelas, & ſuper æquales baſes A M, & M B poſita.

Progreſſ. 4. Idcircò concluditur, quod ſi complementum ſemialbum, cum quadrato nigro, ex 2. Progreſſ. æquatur complemento nigro, & eidẽ quadrato nigro: At huic tertio, ex 3. Progr. æquatur rectangulum album; quod etiam ſint æqualia inuicem rectangulum videlicet album, quadrato nigro, cùm complemento ſemialbo.

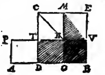
Progreſſ. 5. Adde itaque vtriſque æqualia, nempe rectangulo albo complementum nigrum, & ſit rectangulum ex ſegmentis inęqualibus O Q, & quadrato nigro, complementoque ſeminigro idem complementum nigrum, vt fiat Gnomon N B V: Eritque rectangulum ex ſegmentis inæqualibus Q O æquale Gnomoni N B V: Adde rurſus vtriſque quadratum album C H, *eritque rectangulum* Q O *cum quadrato* C H, *æquale Gnomoni* N B V *cum quadrato eodem* C H *complente quadratum, nimirùm* C B, *ex dimidia*, quod erat probandum.

THEOR. VI. PROPOS. VIII. Euc.6.

Si recta linea data biſariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehenſum à totâ datâ, & additâ, tamquam vno latere, & adiectâ ſolùm, tamquam alio, vnà cum quadrato, quod deſcribitur à dimidia; æquale eſt quadrato, quod à medietate, & adiuncta; tamquam vnâ lineâ, deſcribitur.

SI data linea A O diuiſa per medium in D, & ei alia addita ſit O B. Dicit propoſitio, quòd ſi à dimidia, & addita ſimul, nimirum D B, fiat quadratum C B, & ex tota A O data, cum adiecta tamquam vnâ lineâ A B, & adiectâ ſolùm pro alio O B; vel æquali B V, fiat rectangulum P B; *Quod hoc rectangulum erit æquale illi quadrato* C B, *non tamen ſe ſolum; ſed cum quadrato* N C, *quod fieret ex* D O *dimidia.*

Progreſſ. 1. Ductâ lineâ O M; & diametro C B per N. Rectangulum A V habet latus B V æquale adiectæ O B, ex hypotheſi; Ergo nigerrimum rectangulum, ex Coroll. 3. propoſ. 6. eſt circa dia-



metrum, & ideò quadratum: Ergo latus O B eſt æquale lateri B V: Alterum verò latus A B eſt tota data A O, cum adiecta O B, ideò eſt rectangulum, de quo loquitur propoſ.

Sic C N eſt quoque quadratum, quòd ſit circa diametrum, & ex Coroll. 2. propoſ. 2. dicitur contineri à linea D O dimidiâ; Ergo eſt quadratum, quod cum rectangulo prędicto æquale probandum eſt quadrato C B ex dimidia D O, & adiecta O B, tamquam vno latere confecto, vt vult propoſitio.

Progreſſ. 2. Nunc conſiderandum eſt complementa inuicem, ex propoſ. 35. primi eſſe æqualia nigrum T O, & ſeminigrum. Sed complemento nigro eſt æquale rectangulum album P D, vtpote in parallelis, & ſuper æquales baſes A D, & D O, ex propoſ. 37. primi. Ergo rectangulum album, erit æquale complemento ſeminigro.

Progreſſ. 3. Addamus complementum nigrum T O, & quadratum nigrum rectangulo albo, & fiet rectangulum P B de quo loquitur propoſitio: Addamus quoque eadem, nigrum complementum, & quadratum nigrum complemento ſemialbo, & fiet Gnomon T B M: Vnde additis vtrinque ijſdem, rectangulum P D æquale priùs, ex 2. Progreſſ. complemento ſeminigro, erit æquale Gnomoni T B M.

Adde rurſus quadratum C N album, ex dimidia; ipſi Gnomoni fiet quadratum C B: Adde quoque rectangulo P B etiam hoc quadratum album C N; & erit æquale, quadrato C B, quemadmodum priùs erit æquale Gnomoni; quod volebat propoſitio.

THEOR. VII. PROP. IX. Euc.7.

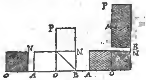
Si recta linea ſecetur vtcumque; quod à tota, quodq́; ab vno ſegmentorum vtraque ſimul quadrata fiunt æqualia ſunt illi, quod bis ſub tota, & dicto ſegmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit quadrato.

SIc data A B, quę vtcumque ſecta ſit in O. Dico, quod, ſi fiant duo quadrata, vnum minus ex ſegmento, quod eligeris, vt B O; alterum maius C B ex tota: Deinde fiant duo rectangula, vt A N, & B P ſub tota, & eodem ſegmento comprehenſa, *erunt illis quadratis æqualia addito tamen rectangulis quadrato alterius ſegmenti* A O.



Progreſſ. 1. Si rectangula A N, & P B ſuperponantur, & latus maius ponatur ſuper minus efficietur para O N quadrata, cùm O B, & B N ſint æquales parti minori O B; & ideò inter ſe, quare efficietur Gnomon A B P æquale duobus rectangulis non ſolùm tamen; ſed addito quadrato nigro O N, cùm causâ ſuperpoſitionis illud quadratum O N nigrum, quod in duplici rectangulo erat duplex, in Gnomone factum ſit vnicum.

Progreſſ. 2. Adde deinde Gnomoni A B P qua-



dratum ex reliquo ſegmento, ex prop. 2. Coroll. 2. complebit quadratum magnum C B, nam ex eo Coroll. quadratum C M eſt idem, ac quadratum ex A O: Itaque quadratum C B magnum cum quadrató nigro O N ex ſegmento eſt æquale duobus rectangulis A N, & P B nigris; ſed non ſolis; verùm addito illis ipſo quadrato C M ex A O altero ſegmento. Quod vult propoſitio.

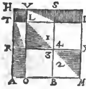
THEOR. VIII. PROP. X. Euc.8.

Si recta linea ſecetur vtcumq; rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum cùm eo, quod à reliquo ſegmento fit quadrato, æquale eſt ei, quod à tota, & dicto ſegmento, tamquam ab vna linea, deſcribitur quadrato.

SIt linea A B ſecta vtcumque in O. Dicit, quòd ſi fiant quatuor rectangula comprehenſa à tota A B, & altera portionum, quam volueris, V. g. O B; & poſtea ex reliqua portione A O fiat quadratum: hæc omnia fore æqualia quadrato ex tota A B, & portione, quæ pro rectangulis comprehendendis electa eſt. Nimirum O B,

ã lineę tnti hęc pars inſuper adderetur, & fieret A M.

Facto quadrato ſnper A M, qnod ſit M H, ab extremo datę B, & ſectionis pũcto O eceltentur perpendiculares O V, & B S; perqoe puncta 4, & L in quibns ſecant diametrum agantur parallelę R X, & T I.



Probatur modo propoſitio, ex ipſa conſtructione.

Progreſſ. 1. Itaqne inprimis rectangula R L nigrnm, & ſemialbum 1, & 2 ſunt quadrata, vtpote circa diametrum exiſtentia, ex propoſ. 6. Coroll. 3. Et ex Coroll. 2. propoſ. 2. ſnnt facta ex O B: Ergo etiam reliqua duo alba, ex defin. 1. quia eorum angulus 3, & 4, continetur æqualibus lateribns ſeminigrornm quadratorum, erunt qnadrata.

Progreſſ. 2. Rectangula quoque nigra, & ſeminigra, vt n R, & alia tria ſunt æqualia inuicē; ſiquidem æqnalibus dnobus lateribus comprebenduntnr A O, & O B, ex Coroll. 2. prop. 2. hnins, vt per ſe patet: Nam L V eſt æqualis T L, &c. Sic A R æquatur lateri V S, &c.

Progr. 3. Adde itaque rectangulum O R, qnadrato O 3 erkq; rectãgulum R A B 3 cõprehenſum ſub tota A B, & ſegmẽto n B; & ſi reliquis ſingulis quadratis addas ſingula rect angula quadratis ſemialbis ſemialba rectangula, & albis quadratis nigra rectangula, ernnt quatuor rectangula; de quibus loquitur propoſitio ſub tota A B, & ſegmento n B comprehenſa, quæ cum quadrato R L nigrn alterins ſegmenti A n integrant quadratum magnum ex tota A M confectum, & ei adæquantur, qnod erat oſtendendum.

EXPENSIO III.

De potentiâ laterum Triangulorum.

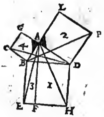
FXcerpſimns propoſitionem 47. & 48. à primo libro; & hic ſub ſuo titulo appoſuimus; vt ordo ſeruaretur materiarum, ſpretis numeris: Vnde audacię venia dabitur, qnę in melius ceſſerit. Eximiam autem hęc Expenſio conſequitur vtilitatem: quòd in ipsâ menſura triangnlornm, quoad areas fnndetur, & ferè vniuerſa Mathematica maximè in hac infixa ſit; vt vlins tractatus in ea vix reperiatur; qui multas ex hac Expenſione probationes, principiaque non deſumat.

THEOR. I. PROP. XI. Euc. 47. Primi.

In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt duobus quadratis, quæ à lateribus angulum rectum continentibus deſcribuntur.

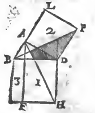
FIat rectangulum habens rectum angulum A; dno verò latera quomodocnmqne, ſeu æqnalia, ſen inæqualia A B, & A D angulnm A claudentia, baſiſque ſnbtenſa angulo rectn A ſit B D. Fiat itaque ex propoſ. 38. primi, quadratum 4 ſoper A B, & aliud 2 ſuper A D, & ex baſi B D fiat aliud quadratum 1 3. *Dicit itaque propoſitio; Qnod quadratum 1 3 baſis ſit æquale quadratis 2, & 4 laterum angulum rectum ſtipantium.*

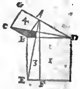
Quod, vt probet, ſecundùm documenta propoſ. 32. à pnncto datn A: nempe vertice anguli recti ducit parallelam A P lineę B E, quę diuidat quadratom 1 3 in duas partes 1, & 3. Deinde ab angulis quadratorum ad angulos trianguli oppoſitos rectæ ducuntor, vt C D, & B P, & etiam E A, & H A ab aogulis qnadrati baſis ad angulum rectum A. Quæ ductæ faciunt triangula hinc quidem C B D, & E B A: Inde verò A D H, & B D P infra conſideranda.



Probatio autem in tres conſiderationes ſecernitur. Vnde Progreſſus 1. intendit probare latera quadratorum ex cruribus, quæ angulo recto adiungnntur in vnam eandemque lineam conuenire, cum cruribus ipſis trianguli angulum rectnm clandentibos, quale eſt latus C A quadrati 4, & A L qnadrati 2; nimirnm vnicam lineam eſſe B A, & A L ſicut A D, & A G. Hoc autem ſic oſtenditur. Crus A B incidens in crus A D angulum rectnm A trianguli efficit, & latns quoque quadrati A L incidens in idem crus A D angulum rectum nigrum efficit quadrati. Ergo hæ duę lineę incidentes in eandem; & facientes duos angulos rectos in directum erunt, ex prop. 11. pr. & vnam rectam B L efficient. Et idem erit de linea G A reſpectu lineę A D, quę incidentes in lineam B A angulos rectos efficiunt quadrati nigrum, & trianguli A. Vnde G A, & A D erit vna recta linea G D.

Progreſſ. 2. Vergit ad probandum triangula





C B D, & A B E eſſe æqualia. Similiterqne B D P, & A D H: quę claritatis gratiâ in duas figuras diuiſimus: Itaque in maiori figurâ 2. habemus triangulnm A D H, & D B P, de quibus dico. Equalia eſſe. Si quidem illa triangula ſunt inuicem æqualia, ex propoſ. 22. Primi, quorum vnum crus vni, & alterum alteri eſt, & angulũ concluſum æqualem obtinent; qnod de triãgulis B D P, & A D H propoſitis verificatur. Quoniam latus D P vnius eſt æquale lateri A D alterius, cùm ſint eiuſdem qnadrati 2, & latus B D prioris lateri D H alterius poſterioris; quod ſint latera eiuſdem quadrati 1 3. Angulus quoque A D P niger, eſt alteri angulo albo B D H ęqualis, vtpote recti ambo, & ſpa-

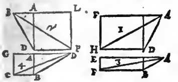
Digitized by Google

& ſpatium B A D nigrius commune vtriſque, quare totus angulus niger apud D addito ſpatio B D A æquabit totum angulum album apud O, addito illo ſpatio eodem B O A, qui ſunt anguli triangulorum æqualibus cruribus concluſi: Quare ipſa triangula erunt quoq; æqualia B D P, & A D H.

Hæc autem eadem probatio oſtendit etiam æqualitatem triangulorum C D B; & A B E in altera figura minori 4. Quoniam latera A B vnius, & B C alterius ſunt æqualia, vtpote latera eiuſdem quadrati 4. Item latera E B vnius, & B D alterius, quod ſint latera quadrati 1 3. Duo quoque anguli A B D æquales; quoniam, quidem angulus trianguli ad B nigrior communis vtriſque reliquus verò niger, in quo hic non occupat alterum album apud B angulus rectus eſt, ſicut & albus. Quare triangula C B D, & E B A erunt æqualia.

Progreſſ. 3. Comparat triangula cum quadratis; & intendit oſtendere quadrata quoad continentiam, & aream eis eſſe duplicia: Pro quo reminiſcendum eſt id, quod diximus in primo Progreſſ. nimirum G A. & D A, & ſimiliter A L, & A B eſſe lineas in directum poſitas, & vnam lineam rectam conficere. Deinde reducendum eſt ad memoriam. Quod fecerimus lineam A F parallelam lateribus B E, & D H quadrati 1 3, & ideò diuidere illud in duo parallelogramma 1, & 3.

Quo poſito conſideremus prius parallelogrammum 1 comparando illud ad triangulum H O A, & videbimus ambo ſuper baſim H D, & eſſe inter parallelas F A, & H D: Quare concludemus ex propoſ. 39 Lib. 1. parallelogrammum 1 eſſe duplum trianguli D H A. Eodemq; argumento vtemur ad probandum paruum parallelogrammum 3 eſſe duplo maius, quam ſuum triangulum F B A.



Eodemque methodo probabimus de quadratis, omitum eſſe dupla ſuorum triangulorum. Sic quadratum maius 2 eſt inter parallelas D P, & B L (B L enim eſt vna recta, vt oſtendimus Progreſſ. 1.) & ſuper eandem baſim O P. Vnde quadratum 2 erit duplo maius trianguli B D P.

Idem quoque argumentum vrgebit de quadrato 4 reſpectu ſui trianguli C B D: Nam inter parallelas G D, & C B, & ſuper eandem baſi C B collocatum, duplum erit trianguli C B D.

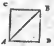
Progreſſ. 4. Quibus omnibus oſtenſis argumentum clauditur oſtendendo parallelogramma quadratis, quodlibet ſuo correſpondenti, & ad eandem partem rectanguli cōſtituto æquari. V.g. Parallelogrammum 1 cum quadrato 2, & parallelogrammum 3 quadrato 4.

Hoc verò deducitur à Progreſſ. 3. Nam, cum triangula facta ſuper baſim parallelogrammi 1, & quadrati 2, ſcilicet B D P, & A D H, ſint probata æqualia: Ergo etiam parallelogrammum 1, & quadratum 2, vtpote dupla triangulorum erunt æqualia ad inuicem. Et tale erit parallelogrammum 3, & quadratum 4, vtpote dupla ſuorum triangulorum æqualium.

Quoniam itaque quadrata 4, & 2 ſunt æqualia parallelogrammis 3, & 1, quæ integrant totum quadratum 3 1 factum ex baſi B D; Ergo *quadratum ex B D angulum rectū ſubtendente æquatur duobus quadratis factis ex lateribus B A, & A D angulum rectum concludentibus.*

COROLLARIVM I.

Ex hac propoſitione, quadratum diametri duplum quadrati lateris, arguitur. Quoniam angulus, cui diameter A B ſubtenditur, qui V.g. eſt C, rectus eſt, & triangulum A C B rectangulum eſt; Quare quadratum diametri eſt æquale quadrato duorum laterum; ſed illa laterum quadrata ſunt inuicem æqualia; Ergo quadratum diametri erit duplum vnius eorū ſeorſim ſumpti.



COROLLARIVM II.

Elicitur quoque quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale eſſe duobus quadratis laterum A C, & C B: Quia diameter A B ſubtendit angulum rectum C.



THEOR. II. PROP. XII. Euc. 48. l. 1.

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli deſcribitur æquale eſt eis, quæ à reliquis lateribus trianguli deſcribuntur, quadratis, angulus comprehenſus ſub reliquis trianguli lateribus rectus eſt.

Conuertit hæc propoſ. antecedentem ad hoc, vt oſtendat ſecurum fore argumentum ab æqualitate quadrati baſis, & laterum ad rectitudinem anguli.

Sit itaq; triangulum A B C. Dicit, quòd ſi quadratum confectum ſuper latus maius A C, ſit æquale quadratis ſimul ſumptis crurum A B, & B C, *angulum B fore rectum.*

Vt autem id oſtendat erigit ſuper vtrumlibet laterum, V.g. A B à puncto B anguli, qui maiori lateri opponitur, verſus partes exteriores perpendicularē B D æqualem reliquo lateri eiuſdem anguli B C: Poſtea coniungit extremum D cum extremo lateris B A, ſuper quod perpendicularis erecta eſt.

Prob. Progr. 1. Baſis A D trianguli nigri deſcribit quadratum æquale duobus quadratis, quę deſcribuntur à lateribus A B, & B D angulum rectum A, ex effectione, claudentibus; vt præced. propoſ. oſtenſum eſt.

Itaque quadrato eidem ex baſi erunt æqualia quadrata ex cruribus A B, & B C albi trianguli; quòd crus B C ſit ex effectione æquale cruri B D, & crus A B commune.



Idcirco etiam quadratum ex baſi C A æquale quadratis crurum albi trianguli, ex hypotheſi, conſequenter æquabitur

quadrato ex baſi nigri trianguli, vtpote æquali æqualibus quadratis crurum.

Progreſſ. 2. Cùm itaque quadrata baſium A C, & A D ſint æqualia; ipſę quoque lineę erunt ęquales A D, & A C, quòd quadrata æqualia æqualibus etiam conſtent lateribus.

Quadere ex propoſ. 13. lib. 1. angulua apud B albua erit æqualia nigro. Quia crura cruribua ſingula ſingulis, & baſis baſi oſtenſa eſt æqualis; Sed angulus niger apud B rectus eſt ex effect., ergo etiam albua B erit rectua.

THEOR. III. PROP. XIII. Euc. 12.

In Amblygonijs triangulis quadratum, quod fit à baſi angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis, quæ fiunt à cruribus eundem angulum comprehendentibus rectangulo baſis comprehenſo ſub altero ex iſtis cruribus, in quod perpendicularis à vertice cadat, & ſub adiuncta linea, quæ inter perpendicularem, & crus alterum intercipitur.

SIt triangulum Amblygonium A B C, & angulus apud B niger, obtuſus, & perpendicularis C D cadat extra triangulum in crus A B prolungatum in D; nempe ad partem anguli acuti, vt Coroll. 10. prop. 17. (poſſet etiam cadere in latus B C ab A, ſi placeret.) Dico, quod quadratum deſcriptum ab A C baſi angulo obtuſo ſubtenſâ *eſt maius, quàm duo ſimul, quæ deſcribuntur iuxta menſuram laterum* A B, & B C angulum obtuſum ambientium; *& excedit illa rectangulis duobus*, quę fiunt à crure A B, in quod productum perpendicularis ducta eſt, & à ſegmento exteriori D B, quod eſt inter C B crus alterum, & C D perpendicularem.

Progreſſ. 1. Probatur itaque, cùm enim recta A D diuiſa ſit vtcumque in B, ex propoſ. 6. erit quadratum rectę totius A D, æquale quadratis ſegmentorum 2, & 3, & rectangulis duobus 4, & 5 in ſegmentis comprehenſis: Ex pręced. verò propoſ. quadratum A Q ex baſi obtuſum angulum ſubtendente punctatum, eſt æquale duobus punctatis C M, & D N crurum perpendicularium C D, & D A; quòd angulua niger D ſit rectua. Quapropter quadratum A Q ex baſi erit æquale quadrato C M perpendicularis C D, & duobus quadratis 3, & 2 ex ſegmentis, ſimul cum rectangulis duobua 4, & 5 ſegmentorum ipſorum.

Progreſſ. 2. Quadratum verò cruria C B angulum obtuſum B ambientis (quòd tibi mente ſupplendũ eſt) erit æquale duobus quadratis C M ex perpendiculari D C, & quadrato ex B D, nimirum quadrato 2 ex eadem antecedenti



propoſitione, quòd ſit ſubtentum latus angulo nigro D recto. Pone itaque illud mente conceptum ex C B pro iſtis duobus ex D B, & C D adhuc quadratum maximum pũctatum A Q ex latere A C erit ęquale quadrato imaginato ex C B quadratoq; 3 ex B A duobuſque rectangulis 4, & 5 ex ſegmentis. Quapropter *quadratum* A Q *baſis erit maius quadratis Crurum angulum obtuſum claudentium* C B, & B A, *duobus rectangulis* 4, & 5, *quæ ſub ſegmentis* D B, & B A *continentur*, quod erat oſtẽdẽdũ.

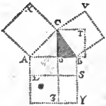
THEOR. IV. PROP. XIV. Euc. 13.

In omni triangulo Oxigonio Quadratum lateris angulum acutum ſubtendentis, minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus illum acutum comprehendentibus rectangulis duobus comprehenſis ab eo latere, in quod perpendicularis cadit, & ſegmento eiuſdem inter perpendicularem, & angulum acutum intercepto.

SIt triangulum A B C, quod crus, V. g. A C oppoſitum angulo dato acuto B nigro habeat. Dico quod hæc baſis deſcribit quadratum A X minus quadratis B V, & A Y crurum illum angulum ambientium A B, & B C; Quantitas autem, quâ inuenitur minus, ſunt duo rectangula, quę comprehenduntur pro vno latere à toto crure ex ijs, quę acutum angulum ambiunt, V. g. A B, in quod perpendicularis cadat, & pro alio latere clauduntur ab eo ſegmento, quod intercipitur inter punctum O, & verticem B; Nimirum inter punctum illud, in quod cadit perpendicularis, & acutum angulum. Itaque quadratum punctatum A X minus eſt quadratis A Y, & B V punctatis rectangulis A S, & O Y.

Progeſſ. 1. Deductâ perpendiculari ad alterum crurum ex ambientibus, puta A B: Latus A B erit ſectum vtcumque in O. Quamobrem ex propoſ. 9. huius rectangula duo punctata A S, & O Y comprehenſa à crure toto A B, & portione O B, vel æquali B S, & quadratum 3 2 ex A O ſunt ſimul æqualia quadrato toti A Y, ſed non ſoli, verùm ſimul cum quadrato O S. Quamobrem addito quadrato O T punctato ex perpendiculari O C vtrinque, adhuc hęc illis remanebunt æqualia; nempe rectangula A S, & O Y qudratum 3 2, & O T nuper additum æquabuntur eidem O T, & quadrato A Y, & quadrato O S.

Progreſſ. 2. Quadratum factum ſuper crus C B alterum ambientium angulũ nigrum acutum B, nempe B V, ex propoſ. 11. huius eſt æquale duobus; nempe ei O T, quod à perpendiculari fit, & alteri minimo O S propter angulum nigrũ rectum O, cui ſubtenditur. Quapropter B V poterit ſubſtitui loco horum duorum, quibus æquatur. Et hinc emerget quod rectangula illa duo A S, & O Y, quæ cum quadratis O T, & 2 3 erant æqualia tribus quadratis in Progr. 1. nimirum A Y, & O S, & O T ſic nunc cũ ijs ſint æqualia duobus; nimirũ quadrato B V ex crure, & quadrato A Y ex altero crure angulum acutum B ambientibus.



Pro-

Progreſſ. 3. Quadratum A X ex baſi A C ſubtenſa angulo acuto B, ex propoſ. 11. æquale eſt quadrato B 3, & quadrato O T ex perpendiculari. Quadere ſi ei adderentur rectangula A S, & O Y quadratum A X eſſet quoque equale quadrato maximo A Y ex crure, & B V quadrato ex altero crure ambientiũ angulum acutum B: Quoniam ex 2. Progreſſ. illa duo quadrata B 3, & O T cum rectangulis iſtis duobus, quadratis A Y, & B V ex cruribus erant æqualia: Vnde vice quadratum B 3, & O T poſito quadrato A X ex baſi A C cũ rectãgulis ijſdem, quadratis ex cruribus æquabitur, & propterea quadratũ A X ex A C baſi erit minus quadratis crurum A B, & B C duobus rectangulis A S, & O Y, quod erat probandum.

E X P E N S I O IV.

De reperiendis æquipotentibus lineis.

Licet ad plenam huius inquiſitionis cognitionem particularis tractatus inſtitutus ſit; vt infra. Hic tamen illius primę baſes iaciuntur, & docet Euclides dato aliquo rectilineo reperire lineam, quę poſſit efficere quadratum illi æquale; Vel etiam ita ſecare lineam, vt ſegmenta æquè poſſint. Quod fuit neceſſarium pręcognoſcere maximè ob 10. Libri plenam cognitionem.

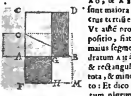
PROB. I. PROP. XV. Euc. 11.

Datam lineam rectam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altero ſegmentorum minori comprehenſum, æquale ſit quadrato, quod fit à reliquo ſegmento.

Data ſit recta A B, quam ita oporteat ſecare, vt tota cum ſegmento minori poſſit comprehendere rectangulum æquale quadrato, quod à maiori ſegmento deſcribitur.

Deſcribatur ex A B quadratum A D, & illud latus, quod cum data A B angulum rectum claudit, vt eſt C A diuidatur in duas partes æquales in O. Trahaturque recta O B ab angulo B ad illud dimidium O, Et æquale ipſi O B prolungetur latus bifariam diuiſum C A ab O medietate vſque in F. Et excedet medietatem O A portione A F: Huic ergo portioni A F detruncetur æqualis ex A B datâ portio A G, & iam id fecimus, quod poſtulat propoſitio, *ſiquidem quadratum ex* A G *maiori portione erit æquale rectangulo ex* A B *&* G B *tota, & minori portione.*

Quòd verò A C poſſit detruncari patet, quia A O, & A B duo crura ſunt maiora, quam O B crus tertiũ ex prop. 20. Vt autẽ probetur propoſitio, fiat ſuper A G maius ſegmentum quadratum A H à puncto G, & rectangulum C D, ex tota, & minori ſegmento: Et dico hoc quadratum nigrum rectangulo nigro eſſe æquale.



Progreſſ. 1 Quoniam ex 8. propoſ. huius rectangulum, quod à tota cum adiecta pro vno latere, & ab adiecta ſolùm pro alio vnà cum quadrato dimidię totius æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur à dimidia ſimul cum adiuncta: hinc eſt, quòd quadratum punctatum ex medietate A O cum rectangulo C H ex tota C A cum adiecta A F, pro vno latere, & alio latere ab adiecta A F, vel F H comprehenſo erit æquale quadrato O M ex dimidiâ O A, & adiectâ A F, vt vna, conſtituto.

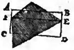
Progreſſ. 2. Quadratum verò O M eſt illud, quod fieret ſuper O B; quia latus eius O F æquatur ex conſtructione lateri O B. At quadratum ex O B ob rectum angulum apud A album, ex propoſ. 11. æquatur quadrato ex A O dimidiâ, & quadrato C B ex A B tota, ergo etiam æqualibus rectangulo C H, & ipſi quadrato A O, æquabitur ipſum A O quadratum, & C B, ex A B datâ quadratum.

Progreſſ. 3. Abijce itaque mente ab vtriſque quadratum A O nimirum à rectangulo C H, & quadrato C B, & adhuc remanebunt æqualia, vt prius erant aſſociata cum illo. Rurſus deme à rectangulo eodem C H, & quadrato eodem C B commune ſpatium album C G, *& quadratum nigrum*, ex A G ſegmento *rectangulumque nigrum*, ex tota C D, & altero ſegmento G B *reſtabunt æqualia*, quod erat oſtendendum.

PROB. II. PROP. XVI. Euc. 14.

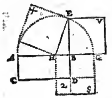
Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Sit Trapezium nigrum: quod ex documentis propoſ. 44. primi reducatur ad rectangulum A B C D. Quod facilimè efficies ſi eũ diuidas in duo triangula recta F E, quorum diuiſo bifariam latere, per eam diuiſionem agantur parallelę ad F E; nempe A B, & C D, & eas perpendicularibus cõiungas ab extremis F, E. Verùm ſi in rectilineo plura capiant triangula ea bina, & bina ad parallelogramma reduces, & inde per propoſit. 44. in vnicum parallelogrammum ea compones.



Sit ergo latus huius rectanguli A B: quod prolungetur in G; itaut B G para prolungata alteri lateri B D æqualis ſit. Deinde diuidatur per medium tota A G. Si medietas reperitur in puncto B erunt æqualia latera A B, & B G. Vnde rectangulum erit quadratum: nec aliud hoc caſu faciendum erit. Quod ſi punctum B non ſit medium, per medium diuidatur linea A G in H, & centro H fiat ſemicirculus A E G, ad interuallum medietatis. Poſtea prolungetur alterum latus B D, in quo centrum non eſt vſque ad E circuli circumferentiam, eritque linea B E perpendicularis, & hęc erit illa, quę quęritur, ex qua ſi fiat *quadratum* B V *hoc erit æquale rectangulo* A D.

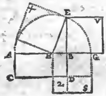
Ad quod oſtendendum à centro ad E eius extremitatem ducatur H E, eritque triangulum H E B habens angulum rectum B.



Pro-

Digitized by Google

Progreſſ. 1. Linea A G diuiſa eſt in æqualia in H, & non æqualia in B. Vnde ex propoſ. 7. huius rectaogulum comprehenſum ſub ſegmẽtis inæqualibus, vt eſt A D, cuius latus B D æquatur ipſi B C, ex effectiooe, hoc, inquam, rectangulom, & quadratum ex intermedia H B, qood eſt, ponctatum paruum 2 ſimul, eſt æquale qoadrato magnu punctato H S ex dimidia.



Progreſſ. 2. Quadratum quoque H X erectum ſuper H E baſi æquatur quadrato 2 ex intermedia, & quadrato B V ex perpendiculari, ex prop. 11. hoius: Sed hoc quadratum H X eſt æquale quadrato H S; Quia ſcilicet eorum latera H E, & H G ſunt æqoalia, vtpote radij eiuſdem circuli: Ergo quadratum H X ex baſi erit æqoale quadrato 2 ex iotermedia, & rectaogulo A D ſiquidem ex 1. Progreſſo quadrato H S ea oſtenſa ſunt æqualia.

Progreſſ. 3. Cum itaque quadratum 2 ex intermedia, & B V ex perpeodiculari ſint æqualia quadrato HX: Rurſuſque idem quadratum 2 ex rectaogulom A D ſiot æqualia quadrato H X. Ergo inter ſe eront æqualia quadratum B V cum quadratu 2, & rectaogulum A D cum quadrato item 2 Auſer itaque commune quadratum 2, *& rectangulum* AD *reſtabit æquale quadrato ex* BV, quod erat oſtendendum.

TRA-

TRACTATVS VI.

In Euclidis Librum tertium de Circulis.

EGIT in duobus primis Libris Euclides de primo genere ſuperficierum; nimirum de rectilineis, & non quidem de omnibus; ſed ſolùm de præcipuis, & quæ alias figuras planas integrant, & componunt, vt ſunt triangula, & quadrangula, nimirum, vt eas ſolùm, quæ erant elementares attingeret: In hoc verò tertio Libro agit de circulis, quæ figura eſt origo, & principium omnium linearum flexarum, puta Hyperbolæ, Parabolæ, Ellipſis, aliarumque ſimilium, vt ſicuti rectilineorum Elementa, & flexorum quoque doceat, his enim principijs ferè omnia fundantur, quæ tum de ſphæra, tum de ſectionibus conicis oſtenduntur. Obiectum verò huius Libri eſt idem, quod primi, & ſecundi, nempe de ſola circulorum æqualitate, vel actuali, vel potentiali, vel linearum in ipſo deſcriptarum, peragere.

EXPENSIO I.

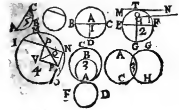
De Principijs.

Licet aliquę Definitiones ad initium primi Libri traditæ ſint ad circulum ſpectantes, vt diametri, ſemicirculi, &c. Illæ tamen tantùm exhibitę ſunt, quę ad illum Librum pertinebant: Modò ſuperadduntur alię, quę propriè huius loci ſunt.

DEFINITIO I.

Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum radij ſunt æquales.

Cùm enim ex ductu lineę, E. g. A D altero extremo A manente, tanquam clauo affixo, dùm extremum alterum ſe mouet vſque ad illud punctum, à quo diſceſſit, circulus conſurgat, & ab hoc ductu efficiatur, patet circulos fore æquales; quorum radius, vel ſemidiameter A D alteri G H fuerit æqualis, vel quorum diameter nimirum B C fuerit æqualis; ipſi E F, quod faciliter poteſt oſtendi ex ſuperpoſitione; Nam omnia puncta circumferētiarum, ſi circuli 1, 2 ſuperponerentur, itaut centrum centro conueniret, & idem fieret, ſibi inuicem inciderent, & eandem circumferentiam integrarent ob ęqualem diſtantiam ab eodem puncto medio.



DEFINITIO II.

Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat producta illum non ſecat.

Vt recta M N circulum 2. E G F T tangit in T, quia producta vltra T in alteram partem non ſecat circulum, vt eum tangit N I, quę producta vltra I in H ſecat ipſum circulum, & ideò non dicitur tangens, quia tangeret ſolùm actu in I, potentia tamen eum ſecaret in ſui productione.

DEFINITIO III.

Circuli ſe mutuò tangere dicuntur, qui ſe ſe mutuò tangentes ſe ſe mutuò non ſecant.

Vt eſt circulus 3. B A interiùs tāgens, vel D F exteriùs tangens circulum C A, qui illum non ſecat, vt facit circulus H G, qui ſecat circulum A C.

DEFINITIO IV.

In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ ad ipſas à centro ducuntur æquales, & magis diſtare illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Sic quia in duas I N, & M Q perpendiculares P V, & V Q cadentes à centro V ſunt æquales, lineę prędictę I N, & M Q ſunt æquali diſtantiâ à centro remotę: At linea O N magis diſtabit; quam Q M; quia perpendicularis V R in eam cadens maior eſt, perpendiculari V Q, vt in 4. fig.

DEFINITIO V.

Circuli ſegmentum eſt figura, quæ ſub recta linea, & parte peripheriæ comprehenditur.

DE-

DEFINITIO VI.

S*Egmenti verò angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli periphr ia comprehendatur.*

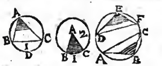
Segmĕtum itaque circuli eſt fig.5. portio circuli A B C. Angulus verò, niger eſt C: Quia tùm figura, tùm angulus circuli peripheriæ portione A B C, & linea recta A C concluduntur.

DEFINITIO VII.

I*N ſegmento anguli ſunt, cùm crura claudentia circumſerentiam, vertice attingunt, & baſim habent, rectam ſegmentum efficiens.*

Illi verò peripheriæ inſiſtere dicontur, quam crura angulum claudentia intercipiunt.

Angulus itaque niger apud A, eſt in ſegmento B A C, quòd eius vertex ſit in circumferentia in A, & pro baſi B C lineâ, quæ ſegmentū B A C facit, obtineat: At angulus idem niger inſiſtere dicitur in peripheria B D C, quam crura ſe ſe aperientia A B, & A C concludunt.



DEFINITIO VIII.

S*Ector circuli eſt figura comprehenſa à duobus radijs angulum facientibus, & peripheria ab illis comprehenſa.*

Sector itaque circuli eſt A B C duobus radijs B A, & A C, & peripheriâ B F C comprehenſua.

DEFINITIO IX.

S*imilia circuli ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli inter ſe ſunt æquales.*

Videtur aliquibus; quòd hic Euclides anticipauerit, & definitionem poſuit, quæ oſtenſione indigeret à 6. Libro dependente. Verùm, quia definitiones à Mathematicis non oſtenduntur; ſed accipiuntur tamquam nominum explicationes: hinc eſt, quòd hæc Definitio, licet quoad probationem dependeret à 6. Libro, ſi proponeretur tamquam propoſitio. Quia tamen tamquam Definitio exhibetur, à nullo dependet: niſi à ſola explicatione: Sint itaque duo circulorum ſegmenta A B C, & D E F, quæ excipiant angulos nigros æquales A, & E. Dicit quod illa ſegmenta debebunt appellari ſimilia. Nec tamen hic intendit Euclides agere de ſimilitudine, vel proportione ſiue circulorum, ſeu ſegmentorum; ſed tantùm de æqualitate, ad quam oſtendendum erat neceſſaria hæc Definitio.

EXPENSIO I.

De punctis, tum centri, tum contactuum.

PVnctum duplici modo poteſt ſumi, aut in medio circuli, aut in circumferentia. Si in medio, & ſic aut erit centrum, aut extra centrū. Si in peripheria, & tunc erit aut contactus, aut ſectionis. In hac itaque expenſione agemus de punctis, tum mediculij, tum circumferentiæ quatenus tamen referuntur ad circulos: Nam de punctis contactuum, aut ſectionum rectæ lineæ cum circulo ſequenti expenſione peragemus.

PROBL. I. PROP. I. Euc. I.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus A B C D, cuius centrum oporteat inuenire.

Ducatur linea vtcumque D C, ex prop7. lib. I. diuidatur bifariam in E, & ab eo puncto eleuetur perpendicularis, quæ extremis ſuis punctis circumferentiam attingat, & ſit B A. Poſtea hæc quoque bifariam diuidatur in X. *Nam illud punctum diuiſionis, erit centrum, quod quæritur.*

Probatur. Nam ſi punctum X centrum non eſt. Aſſignetur ab aduerſarijs. Aſſignabiturque, vel in ipſâ linea B A, vel alibi.



Non in ipſa linea B A; Quia omne aliud pūctum diuidit eam inæqualiter, & conſequenter, contra Definitionem centri, non vtrinquè à circumſerentia diſtaret æqualiter. Sed nec aſſignabitur extrà lineam prædictam. Nam ſi poteſt, aſſignetur, & ſit punctum V. Ducantur itaque ad illud ab extremis D, & C, & medio E lineæ C D primo ductæ, aliæ tres D V, & C V, & E V; Quo facto ita exordiemur probationem per reductionem ad impoſſibile.

Progreſſ. I. Trianguli E V C nigri, & D E V seminigri duo crura ex effectione ſunt inuicem æqualia, nempe medietates D E, & E C. Crus verò E V commune, & deſeruit vtrique: Reliqua verò crura D V, & V C licet verè inæqualia; Aduerſarij tamen debent ea dicere æqualia, vtpote radij ob centrum poſitum in V. Quamobrem ex propoſ. 23. primi anguli apud E niger, & ſemialbus, quæ prædictis radijs D V, & V C inſiſtunt, deberent eſſe æquales. Quare illi anguli erunt recti, ex 10. defin.

Progreſſ. 2. Cum itaque angulus ſeminiger D E V dicatur rectus: Et eiuſdem pars alba apud E ſit quoque angulus rectus ex effectione, erunt æquales anguli albus, & ſemialbus, pars & totū, quod eſſe nequit. Idem verò ſemper poteſt oſtendi de omnibus punctis, quæ alibi aſſignarentur: Quaderè, cùm non poſſit eſſe alibi, quam in medio lineæ B A; punctum X erit centrum circuli.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt; ſi in circulo aliqua recta linea bifariam ſimulque ad angulos rectos ſecet aliquam aliam rectam in ſecante eſſe centrum circuli. Nam ex eo, quod A a recta rectam D C, bifariam, & rectanguiè ſecet oſtēſum fuit punctum eius medium eſſe circuli centrum.

THEOR. I. PROP. II. Euc. 5.

Si duo circuli ſe ſe mutuo ſecant, non erit illorum idem centrum.

SEcent ſe mutuo duo circuli punctatus, & non punctatus; Dico *eos idem centrum non poſſidere*, & oſtenditur per reductionem ad impoſſibile.

Aſſi-

Aſſignetur itaque punctum aliquod ab aduerſarijs, quod ſit centrum commune vtriuſque circuli, & ſit D. Ducatur itaque ab hoc centro D ad interſectionem circulorum F linea punctata D F & ad peripheriam punctatam H D; quæ ſecet alteram in G.

Probatur itaq; propoſitio D centrum eſt commune vtrique circulo, vt mendaciter affirmatur. Ergo radius circuli nõ punctati G D erit æqualis radio F D pũctato, & ita H D eidẽ radio F D æqualis cũ punctatus ſit radius vtriuſque in F interſectionẽ circulorum pertingens. Ergo H D, & D G eſſent æquales, pars, & totum, quod eſſe nequit. Ideoque centrum D non erit vtriuſque centrum, & ſic probabis de quolibet alio puncto. *Vnde non poterit eſſe vllum punctum centrum vtriſque commune.*



THEOR. II. PROPOS. III. Euc. 6.

Si duo circuli ſe ſe mutuo interiùs tangant, non erit illorum idem centrum.

HÆc Propoſitio præcedenti ſimilis omninò eſt. Sit ergo circulus punctatus, qui tangat continuum in G. Dico quod non poſſit obtinere idem centrum; quod oſtendetur per reductionem ad impoſſibile.

Oſtendatur itaque ab aduerſarijs, quodnam centrum ſit commune vtrique circulo. Sit V. g. E. Ducaturq; ad contactum G recta E G, & ad peripheriam circuli continui punctata linea L E, quæ ſecet in H circulum punctatum; quo facto.



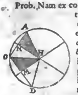
Prob. propoſ. E G eſt radius vtriuſque circuli punctati, & non punctati, vtpote pertingens ad commune punctum G in peripheria ipſorum. Quapropter H E radius punctati, ei radio communi E G erit æqualis, rurſuſque L E radius continui circuli eidem radio communi E G erit æqualis; ergo inter ſe L E, & H E eſſent æquales, pars, & totum, quod repugnat; Ergo aſſignatum E centrum non erit circulorum commune. Quod dicas de quocumque alio aſſignabili.

THEOR. III. PROP. IV. Euc. 9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & à circumferentia ad illud cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

SI punctum datum H, ad quod à circumferentiâ A O D ſint tractæ plures; quam duę rectæ lineę æquales. V. g. tres A H, & O H, & D H. Dico, quod illud erit centrum circuli.

Quod, vt demonſtret, connectit puncta rectis A O, & O D, quas medias diuidit in M, & N, ſuper punctum diuidens erigit perpendiculares punctatas M H, & N H quo præſtito.



Prob. Nam ex conſtructione. Crus A N nigri trianguli eſt æquale cruri correſpondenti N O albi, crus verò aliud N H vtriſque deſeruit. Baſes quoque H A, & H O præſupponuntur æquales. Quare angulus ad N niger huius, & albus illius trianguli erunt ęquales, nempe recti, ex propoſ. 10. primi.

Eodem modo conſtabit angulũ ad M nigrum, & album tum huius albi, tum alterius nigri eſſe æquales; Quare rectę NH, MH, quę rectangulè, & bifariã diuidunt A O, & O D tranſibunt per centrũ. *Vnde H erit centrum.* Si enim eſſet aliud punctum nõ tranſiret vtraque per centrum, vt prop. 1. vult, cùm vnicum ſolùm ſit, & duæ rectæ non niſi in puncto H conuenire poſſint.

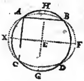
THEOR. IV. PROP. V. Euc. 10.

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus non ſecat.

SIt circumferentia punctata, quæ ſecet circulum continuum in punctis pluribus, quàm duobus A, B, G, D. *Dico eam circumferentiam, circulum eſſe non poſſe.*

Quod, vt oſtendatur tres ex ijs interſectionibus connectendæ ſunt nimirum A, & B, & C rectis A C, & A B, Quæ diuidendæ bifariam, & per diuiſiones agendæ punctatę perpendiculares, H G, & X F, quæ oſtendent centrum eſſe in E, ex propoſ. præced.

Probatur propoſitio. Quia ſi E centrum eſt, deſeruiet pro cẽtro vtrique tum punctatæ peripheriæ, tum circulo, cùm tria puncta A, B, & C ſint vtriſque communia. Sed circuli ſe ſecantes, propoſ. 3. huius non habẽt idem centrum; ergo non poſſunt eſſe ambo ſimul circuli, ſed alter eorum circulus non erit, V. g. circumferentia punctata.



THEOR. V. PROP. VI. Euc. 11.

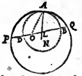
Si duo circuli intùs ſe ſe contingant, atque accepta fuerint eorum centra. Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

SI duo circuli continuum, & punctatum ſe tangant in A interiùs exiſtendo vnus intra alium, & ducta ſit linea L N, quæ connectat eorum centra L, & N. Dico, quòd ſi hæc producatur vſque ad circumferentiam in contactum terminabit.

Quod per reductionem ad impoſſibile oſtenditur. Si enim ita non eſt. Sit aliud pũctum centrũ circuli continui, quodcumque eligant aduerſarij, V. g. O, per quod tranſiens recta P Q, & per centrum L non cadat in contactum, ſed alibi,

puta in Q, vel in P ; Ducantur ergo à centro L, & à centro mendaciter ſtatutu o ad contactum A duæ rectæ, eritq; conſtitutum triangulum A O L. Quo exhibito Propoſ.

Probatur. Nam ſi o eſt centrum circuli non



punctati A O baſis, & recta O Q debebunt eſſe æquales vtpote radij à ſuo centro ad ſuam peripheriam ducti. Hoc autem eſſe non poteſt ; quòd O B, quæ eſt eius pars, deberet eſſe maior, quàm A O baſis : Quare O Q eſſet minor, quàm ſua pars O B.

Quod autem O B debeat eſſe maior, quam A O baſis punctata, patet: Nam eius pars O L eſt crus trianguli, aliud verò crus A L eſt æquale reliquę portioni L B, cum L ſit centrum circuli punctati; eò quòd ducatur à ſuo centro L, quare tota O B deberet eſſe maior baſi O A ſicut latera O L, & L A, ex 20. propoſ. 1. ſunt baſi punctatæ O A maiora. Quamobrem O B pars eſſet maior, quàm O A, & conſequenter, quàm O Q tota, eidem baſi punctatę æqualis (vt dictum eſt) Et ſemper eodem modo argumentabitur, quibuſcumque punctis aſſignatis, quæ non ſint L N. Ergo per L N ducta N A in contactum A cadit.

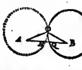
THEOR. VI. PROP. VII. Euc. 12.

Si duo circuli ſe ſe exteriùs contingant linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur per contactum tranſibit.

PRobatur hæc Propoſitio per reductionem ad impoſſibile tali modo.

Nam datis duobus circulis ſe tangentibus punctatum, & continuum, & recta A B, quæ centra prout volunt aduerſarij A, & B nectat, & tamen per contactum o non tranſeat, ſed inferiùs. Ad hoc vt oſtendatur, id eſſe falſum; ad contactum à centris præſumptis A, & B trahantur rectæ A O, & B O, & ecce tibi abſurdum, quod ſequitur.

Namque A O B triangulum eſt, & conſequẽter

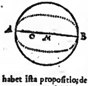


ex propoſ. 20. primi duo crura A O, & B O debent eſſe maiora, quàm baſis A B. Hæc verò ex alio capite debet eſſe maior. Nã cum B mendaciter dicatur cẽtrum, pars eius B Q vtpote à cẽtro ad peripheriam ducta eſſet æqualis cruri O B. Sicque alia pars A N, vt radius à centro A, vt falſo aſſeritur, ad ambitum ductus æqualis eſſet cruri A O. Quare nedum tota A B non eſſet dictis cruribus minor ; ſed potius maior. Quoniam portio quoque inter circumferentias intercepta N Q ſuperadderetur.

THEOR. VII. PROP. VIII. Euc. 13.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno ſiue intùs, ſiue extrà tangat.

REducitur quoque hæc propoſitio ad impoſſibile, duaſque partes poſſidet. Prima enim loquitur de contactu interiori, ſecunda de exteriori. Ponamus itaque circumferentiam punctatam tangere circulum in duobus punctis A, & B, & trahatur recta per duo centra O, & M.



Vel ergo hæc recta tranſiens per centra, tum punctati circuli, vt mendaciter preſupponitur, tum cõtinui trãſit per ambos contactus, vel per neutrum, vel per alterum eorum, & ſic tres caſus habet iſta propoſitio; de quorum ſingulis intexere oportet probationem.

Caſus 1. Itaque dicatur rectam A B contactus ipſos coniungere, & hoc non poteſt eſſe, quia ſic eadem linea diuideretur per medium in duobus punctis; quòd eſt abſurdum; cùm enim puncta contactus, quia ſunt communia, diſtent æqualiter à ſuis centris, clarum eſt, quòd quodlibet centrum aſſignatum diuideret eam æqualiter, & biſariam. Vnde duo centra in quatuor medietates eam ſecarent A O, & O B. A M, & M B.

Caſus 2. At ſi velit aduerſarius, quòd linea tranſiens per centra, vt eſt punctata in contactus non cadat, hoc eſt contra 6. propoſ. huius; quare ſaltem in vnum contactum incidet, elige itaque quod vis.

Caſus 3. Si eligis contactum A. Ad alterum contactum B duo centra copulabis, lineis C B, & B M, & eadem forma argumenti valebit ad oſtendendam impoſſibilitatem, ac vſi ſumus in 6. propoſ. huius.

Nam ſequeretur, quòd M A deberet eſſe maior,



quàm M B ; quæ tamen eſt ei æqualis, vtpote, quòd ſint radij à centro M ducti ad circumferentiam circuli nõ pũctati in A, & B ; Quod verò A M deberet eſſe maior, quàm M F patet. Quoniam C M, & C B ſimul ſunt maiores, quàm M B, ex 20. propoſ. primi ; ſed C B, & A C, vtpote radij ſpurij circuli punctati ſunt æquales ex aduerſarijs. Adde C M ipſi A C : Fietque tota A M maior ; quàm M B, vtpote, quod ſit ſecundùm ſui partem C M crus, & ſecundùm alterã partem A C ęqualis cruri C B ſimul maioribus, quã M B baſis trianguli nigri.

Quod & concluditur per idem argumentum etiam ſi duo contactus ponantur vicinius, quã in ſecunda figura punctum A, & punctum B, vt probauimus Expoſ. 2. Tractatus Præliminaris de Quantitate Continua.

2. Pars probatur. Quod ſi exteriùs ſe tangant,



non ſe tangunt in duobus punctis. Nã ſi tangunt in puncto o ex 6. huius linea recta coniungens centra M N per contactũ o tranſibit. Quod, & ſi ſe quoque tangunt in Q. Coniungatur ille contactus ad centra per rectas N Q, & M Q. Eritque triangulum M Q N, cuius duo crura ſimul, erunt radijs in baſi N O, O M ęqualia, vtpote, quia sũt radij, à cẽtris in punctum Q vtriuſque circumferentię deſinentes,

& eadem

& eadem ipſi NO, OM debebũt eſſe maiora; quia ex propoſ. 20. primi duo latera cuiuſcunque trianguli quomodocumque ſumpta reliquo maiora ſunt; Vnde implicantia admitteretur.

EXPENSIO II.

De ſegmentis Circulorum.

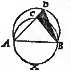
PAtebit hîc traditam fuiſſe inter principia ſegmentorum ſimilium definitionem, non ad hoc, vt eorum conſideratio circa ſimilitudinem, eorumque proportionem verſaretur, ſed tantùm, vt ea ſimilitudo mediante definitione ſatis declaratâ præberet fundamenta ad oſtendendas ſegmentorum longè diuerſas affectiones à proportione.

Fuit verò neceſſarium agere de ſegmentis, quòd poſſemus ea ſegmentis ipſos circulos agnoſcere; & angulos quoque in ſegmentia, aut efficere, aut eorum proprietates agnoſcere.

THEOR. I. PROP. IX. Euc. 23.

Super eâdem rectâ lineâ duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ad eaſdem partes.

REducit hîc Euclides demonſtrationem ad impoſſibile demonſtrando fore, & non fore ſimilia ſegmenta ſimilia, & inæqualia ſuper eâdem rectâ effecta: Quod vt oſtendat fiant (inquit) ſuper datam A B duę portiones circulorum ſimiles A C B, & A D B (ſi tamen id fieri poteſt) Manifeſtum eſt ex dicta 5. propoſ. huius, quod ſolùm ſe interſecabunt in duobus punctis, vt in A, & B; Quoniam circuli, nonniſi in duobus punctis ſe interſecant. Quare peripheria vnius erit extra peripheriam alterius. Quo poſito trahatur recta A D ſecans vtraſque circumferentias in C, & D, & ex iis punctis duæ rectæ deducantur, nimirum C B, & D B: Habemuſque triangulum nigrum cuius angulus D neceſſariò, ex propoſ. 17 Coroll. 1. primi, minor eſt externo albo C.



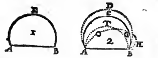
Probatur autem. Nam ſegmenta ſimilia ſunt illa, quæ capiunt angulos ęquales, ex definitione 9. huius; Sed angulus niger D internus eſt maior albo C externo. Ergo A C B, & A D B ſimilia nõ sũt; alioquin angulus D niger eſſet angulo C æqualis, vt volunt, & minor, vt eſt oſtenſum, quod eſt impoſſibile.

Quare colligit Clauius, & ſi anguli non fiant ad eaſdem partes, idem ſequi, quòd æquali ſegmento ei, V. g. A X B, quod eſt ad alteram partem, ad eandem partem conſtituto; idem abſurdum ſequatur.

THEOR. II. PROP. X. Euc. 24.

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

HÆc propoſitio oſtenditur faciliter ſuper poſitione; nempe imaginando, vel ponendo vnum ſuper aliud ſegmentum papyro deſcriptum. Sint ergo duo circuli ſegmenta ſimilia A B E primum, & A B E ſecundum.



Et ad probandum ponatur vnum ſuper aliud per imaginationem, vel propriè deſcribendo alterum eorum, & circùm reciſa charta ſuper aliud realiter ponatur, vel congruet, itaut curuitas vnius eodem loco inexiſtat, & feratur, ac curuitas alterius, vel non. Si non, vel intra curuabitur, vt punctatum ſegmentum A T B, vel ſupra, & extra, vt aliud punctatum A D B, & ſic incidemus in abſurdum propoſ. antecedentis. Quod ſimilia ſegmenta caperent angulos inæquales contra defin. 9.; Vel partim ſupra partim infra, vt facit circũferentia pũctata A O G H B, & ſic contra 5. propoſ. huius circulus ſecaret circulum in pluribus punctis; quàm duobus, nempe in A, G, B.

PROB. I. PROP. XI. Euc. 25.

Circuli ſegmento dato deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

SIt ſegmentum quodcumque B T C, vel maius, vel minus, vel æquale ſemicirculo: connectanturque puncta B C rectâ, cui diuiſæ per medium in D: in puncto D erigatur perpendicularis D T, & indefinitè prolungetur verſus A. Deinde trahatur à puncto, vel B, vel C, quæ rectâ copulauimus, ad punctum T, vbi perpẽdicularis modo ducta circumferentiam ſecat recta B T, quæ angulum faciet nigrum ad T. Huic itaque angulo nigro alius angulus ad B niger, & albus conſtituatur æqualis, ducendo lineam B A, quæ, vel cadet extra lineam B C, & adiunget partem nigram, vt hîc vbi portio data ſemicirculo eſt minor, vel intra, vt cum ſemicirculo maius eſt ſegmentum datum, & ideò portione nigra diminuit angulum B, vel ſupra ipſam B C cùm ſemicirculus eſt ſegmentum datum, & ſic nec diminuit, nec addit. Sed quomodocumque id accidat ſemper angulus B fiat æqualis angulo T, ex 24. prop. & A erit centrum poſtmodum trahatur linea A C.

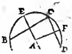
Probatur. Nam tres lineæ B A, nimirum A C, & A T ſunt æquales, quare ex propoſ. 4. huius A erit centrum circuli. Quia illud eſt centrum, vt ibi probatur in quod plures, quàm duæ lineæ æquales cadunt. Quòd verò tres lineæ dictæ B A, nempe A C, & A T ſint æquales conſtat: Nam in triangulo B T A angulus niger ad T, & angulus B ſeminiger ex cõſtructione ſunt æquales; Ergo ſubtendunt baſes æquales T A, & A B, vt ex propoſ. 15. Deinde punctata A C eſt æqualis rectæ B A quia ſunt æquales duo trianguli niger, & albus, ſiquidem anguli ad D niger, & albus recti ſunt ob perpendicularem D A: ideò æquales, & quia habent D A crus commune, & alterum crus D C, alteri D B ex conſtructione æquale; cadere, &



Digitized by Google

baſes B A, & A C erunt æquales. Vnde tres lineæ A B, ſcilicet A G, & A T radij erunt, & A centrum.

Sed expeditiùs datam circumferentiæ portionem circularem, vtcumque in B, C, D diuide, & rectis B C, & C D punctum diuiſionis cum extremis punctis, vel quibuſlibet alijs B, & D coniunge; diuiſiſque rectis bifariam trahe perpendiculares F A, & E A per puncta



diuiſionis, & in A erit centrum. Probatur, quia ex Coroll. propoſ primæ duæ perpendiculares tranſeunt neceſſariò per centrum, quòd cùm ſit vnicum neceſſariò in eo conuenire debebunt; quare punctum A, in quo conueniunt erit centrum circuli.

Sufficit quoque excitare perpendicularem ſine tractione linearum B C, & C D ſi ex punctis C, B, D trahantur portiones circulorum ſe deſcuſſantes, & per eas duæ rectæ ducantur: quia non aliter fieret: Si ſuper lineas iam tractas eſſent perpendiculares erigendæ, vtpote ex prop. 8. primi; Vnde licet non ducantur C D, & C B eadem operatio valebit.



EXPENSIO III.

De lineis intra circulum ductis.

COgnitio linearum intra circulum ductarum deſeruit tũ ad cognitionem ſinuũ, tum ad cognitionem Parallaxium, tum ad cognitionem Excẽtricitatũ, & ad multa alia, quare in Elementis aliquas primas cognitiones haurire oportet, vt facilior ad ea ſublimiora pateat aditus.

THEOR. I. PROP. XII. Euc. 2.

Si in circuli peripheriam duo quælibet puncta electa fuerint. Recta linea, quæ ad ipſa puncta adiungitur tota intra circulum cadet.

HÆc propoſitio, quaſi eſt principium, & per ſe nota. Vnde breuiùs eam probabimus. In circulo A O B ſumantur duo puncta, quæ recta copulentur, *hæc recta intra circulum cadet*. Quod ſi non cadit, cadet in ipſam, vel extra ipſam circumferentiam. Quod ſi dicatur, aut idem erit cum circumferentia A C D, aut magis flexa, quàm ipſa, vt A C D. Quod ſi adhuc obſtinatiùs aſſeratur recta, vt eos ita dicentes conuincamus, ducantur ad extrema huius lineæ A C D, rectæ à centro H A, & H D, & ducatur inter ipſas H C eis vtrique, aut æqualis, aut maior, cum vel exeat, vel terminet ad circumferentiam; ſed hæc eadem neceſſariò eſt minor, ſi A C D, vt mendaciter aſſeritur, eſt recta. Ergo recta, & non recta, quòd eſt abſurdum.



Probandum. eſt itaque, quod debeat eſſe minor. Id verò à prop. 14. primi eruitur. Nam ibi habemus angulos ad baſim Iſoſceliũ eſſe æquales, vt niger D, & albus A in triangulo æquicruri A D H, cùm baſis curua ab aduerſarijs dicatur abſurdè recta.

Secundò angulus albus ad C, vtpote externus eſt maior angulo interno, & oppoſito D nigro, ex Coroll. 1. prop. 17. primi. Quare, & erit maior angulo huic æquali ad A. Sed ex propoſ. 19. primi, maior angulus maius etiam latus ſubtendit. Ergo A H erit maior, vtpote ſubtenſa angulo maiori albo apud C, quàm H C, quæ ſubtenditur angulo minori ad A. Quare H C, eâ A H erit minor, ſed ſupra dictum eſt, quod eſſet maior, aut æqualis, quod eſt abſurdum.

THEOR. II. PROP. XIII. Euc. 3.

Si in circulo quædam recta linea per cẽtrum extenſa, quamdam non per centrum bifariam ſecet, eam quoque ad angulos rectos ſecabit, & ſi ſecet ad angulos rectos bifariam quoque eam ſecabit.

PEr centrum A circuli B C D tranſeat C E, ſecetque aliam quamcunque in circulo exiſtentem B D non tranſeuntem per centrum, per medium; Dicit propoſitio, quòd & ad angulos rectos ſecabit, & hæc eſt prima pars huius propoſitionis.

Ad quod demonſtrandum à punctis circumferentię extremiſque lineę B D, trahantur ad centrum A rectę A D, & A B punctatę; quo facto.

Probatur prop. Latus D O trianguli nigri eſt ex hypotheſi æquale albi trianguli cruri O B, baſes quoque punctatæ B A, & A D vtpote radij ſunt æquales. Crus vero O A commune: Ergo ex propoſ. 23. primi, angulus ad O niger erit æqualis albo, item ad O: Ergo erunt anguli recti.

Secunda pars eſt, quod ſi linea per centrum ducta C E alteri non per centrum ductæ, vt B D ad angulos rectos ſit; quod B D etiam ſecta erit bifariam.

Probatur. Nam crura punctata, vtpote radij ſunt æqualia. Quare totum triangulum ſemialbum B A D habebit angulos B, & D ad baſim æquales; ſunt quoque ex hypotheſi niger ad O, & albus ad O æquales; Ergo in duobus triangulis habemus duo crura punctata æqualia, & anguli D niger, & B albus æquales, & rurſus anguli ad O niger, & albus æquales; Ergo ex 27. propoſ. primi, reliqua quoque latera reliquis lateribus erunt æqualia, nempe B O, & O D.



THEOR. III. PROP. XIV. Euc. 4.

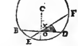
Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent non per centrum deductæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.

DVæ rectæ lineæ ſe mutuo ſecent, V.g. B D, & E F in circulo B D F, quæ per centrum non ſint deductæ; dicit numquam poſſe euenire, vt ſe in duas partes æquales diuidant. Licet enim vna ex ipſis poſſit eſſe bifariam diuiſa, altera tamen

tamen nequaquam in partes æquales remanebit diuiſa.

Probatur. Et ſi vna ex iſtis tranſeat per centrum alia non, clarum eſt, quod tranſiens per centrum bifariam non ſecatur: Eò, quia in centro ſolùm bifariam diuidatur, ex prop. I.

At ſi neutra tranſeat per centrum. Tunc ad eam ſectionem ducatur perpendicularis à centro inuento, ex prop. I. huius, quod ſi nequeat deduci; eſt clarum, ex prop. anteced, neutram ſecari bifariam, cùm ad nullam ex ipſis tranſiens per centrum perpendicularis duci queat. Quod ſi ducatur ad alteram ipſarum, vt E D. Tunc dico alteram E F bifariam non eſſe ſectam: Nam ſi ſecta E F bifariam eſt; Ergo etiam cum E F à centro cadens C O faciet angulos rectus, ex prop. anteced. Quare angulus X albus rectus erit æqualis recto ſeminigro C O D; quod eſſe nequit, cùm angulus albus X ſit pars anguli ſeminigri C O D.



THEOR. IV. PROP. XV. Euc. 7.

Si in circuli diametro ſumatur punctum, quodcumq; quod circuli centrum non ſit, & ab eo in peripheriam lineæ rectæ cadant; maxima erit ea quæ per centrum ducitur.

Minima verò reliqua, quæ in directum ad oppoſitam partem tendit.

Aliarum verò ſemper maior eſt, quæ propinquior eſt maximæ.

Et illi duæ æquè propinquæ, tantummodò æquales erunt.

QVatuor partes enumerat hæc propoſitio. Prima eſt illa, quæ ait; quòd ſi eligatur aliquod punctum in diametro, quod nõ ſit centrum, V. g. O, & ex eo ducatur per centrum F ad circumferentiam B recta O B, illam fore maximam omnium. Ad quod probandum ducatur quælibet alia, quæ placuerit, V. g. O C punctata. Et puncta C, & F rectâ iungantur. Nam oſtendetur O B eſſe maiorem, quàm O C, quam elegiſti.

Prob. In triangulo C O F duo crura C F, & F O ſunt maiora baſi punctata, ex propoſ. 20. primi, Sed hæc duo latera ſunt æqualia rectæ per centrum ductæ O B; cùm crus O F ſit eius pars, & F C ſit æquale reliquæ F B, vtpote radij. Ergo tota O B, vtpote æqualis duobus cruribus eſt maior baſi punctata O C.



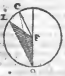
Secunda pars eſt. Quòd O H ſit omnibus alijs minor, quæ ab O in directũ maximæ O B ducitur, & ſit vna cum illâ. Ad quod oſtẽdendum ducatur O L, & coniungatur L F, & probabitur O L eſſe maiorem, quàm O H.

Prob. Nam baſis L F eſt minor cruribus L O, & F O, ex propoſ. 20. primi in triangulo nigro; ſed tota baſis L F eſt æqualis F H, vtpote radius; Et F O eſt crus parſque lineæ F H, ergo reliquum O H erit minus crure L O.

Tertia pars eſt. Quòd ex lineis ab O ductis, quæ ſunt propinquiores maximæ, reliquis remotioribus ſint maiores. Sic O C erit maior, quàm L O, quod ſit propinquior maximæ O B.

Prob. Nam duo crura F C, & F L, quæ ducuntur à centro ad circumferentiam ſunt æqualia, vtpote radij. Crus verò O F idem pro ambobus triangulis deſeruit albo, & nigro. Sed angulus ad F ſeminigar maior eſt angulo ad F nigro; cùm ſit niger eius pars. Ergo ex prop. 25. primi maior erit baſis C O, quàm O L, Quod & verificatur etiam ſi punctum O, ſit in circumferentiâ ipsâ, vtpote in figurâ appoſitâ L C O.

Dicit tandem ab eodem puncto duci poſſe tantummodo duas lineas æquales ad inuicem, hinc inde. Quod, vt demonſtret, ad idem punctum F faciendus eſt angulus albus æqualis nigro; & ſit O F M ducendo crus F M, & poſtea crus O M. Nam oſtendetur O M eſſe æqualem lineę O L.



Probatur verò ſic. Quia crura nigri trianguli, & albi ſunt æqualia vnum quidem commune F O, aliud verò L F, alteri M F, vtpote radij, æquale, angulus quoque albus ex effectione æqualis nigro eſt. Ergo ex propoſ. 28. primi, baſes quoque L O, & O M erunt æquales. Quod verò nulla alia præter iſtas poſſit eſſe iſtis ęqualis colligitur ex probatis. Nam quęlibet alia erit, vel iis maximæ propinquior, vel remotior, & ideò nulla iſtis L O, & O M erit æqualis. Cùm iſtæ ſint æquidiſtantes ob æqualem angulum nigrum, & album; qui ab ęquali circumferentia ſubtenditur L H, & H M.



THEOR. V. PROP. XVI. Euc. 14.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro, & quæ æqualiter diſtant à centro æquales ſunt inter ſe.

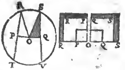
SInt intra circulũ R S T V, cuius centrum O duæ rectæ æquales T R, & S V. Dicit prima pars propoſ. æqualiter à centro diſtare.

Et ad hoc, vt aſſumptum probetur; ducantur duæ perpendiculares P O, Q O à centro O ad prędictas rectas R T, & S V, quæ ex propoſ. 3. ſecabuntur ab ipſis in duas partes æquales. Deinde à punctis peripherię, & extremis datarum rectarum R, & S rectę ad centrum ducantur, & erunt facta triangula duo album, & nigrum.

Probatur autem ex propoſ. 11. ſecundi. Nam cùm hæc duo triangula ſint rectangula, quadrata facta ſuper baſim ſubtenſam angulo recto erunt æqualia duobus quadratis factis à lateribus angulum rectum continentibus, quapropter quadratum ex O R baſi, quod ſeorſim delineauimus, erit æquale duobus in ipſis deſcriptis à cruribus P R mediocri, & minimo P O. Et idem aſſeras de alio quadrato facto ſuper baſim O S, quod eſt æquale duobus incluſis ex cruribus Q S, & O Q.

Secundò. Duo quadrata maiora inter ſe ſunt æqualia ob æqualitatem baſium à centro ad circum-

cumferentiam ductarum o s, & o r. Sed & duo quadrata mediocria ſunt æqualia inuicem, vtpote ſuper medietates p r, & s q, æqualium datarum in praxi facta. Siquidem r t, & s v præſuppoſitæ ſunt æquales.



Quamobrem, ſi quadrata minima ex p o, & o q cùm mediocribus iuncta erant æqualia maximis, & per conſequens inter ſe, ijs mediocribus ablatis per imaginationem; quę erant inuicem æqualia, adhuc quadrata minima remanebunt æqualia, & conſequenter eorum latera p o, & o q, quæ, cùm ſint perpendicularia, menſurant diſtantiam linearum datarum r t, & s v à centro, vt conſtat ex Defin. 4. huius Libri, & ideò æquales rectæ r t, & s v æqualiter diſtabunt à centro.

Dicit quoque inuertendo primam partem. Quod datis rectis, V. g. r t, & s v; quę æquidiſtent à centro; quòd hæ lineę inter ſe erunt æquales. Ad quod oſtendendum ducendę rurſus ſũt perpẽdiculares po, & o q, quę ex Def. 4. huius erunt æquales inſuper, & rectas datas r t, & s v bifariam diuident, quòd perpendiculariter ducantur à centro, vt ex 13 propoſ huius, deinde trahendę r o, & o s. Quò poſito.

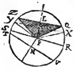
Probatur propoſ. eodem tenore, ac pars antecedens probata eſt. Nam baſes r o, & o s, vtpote æquales radij, dant quadrata ęqualia maxima quæ ſunt r o, & o s; quę etiam ſunt æqualia ijs, quę includunt mediocribus r p, & q s, & minimis o q, & o p; ſi tamen vnà mediocre, & minimum ad maximum includens referantur, & hoc, quia proueniunt à cruribus triangulorum nigri, & albi angulum rectum q, & p concludentibus, vt ex propoſ. 11. ſecundi conſtat; maxima verò à baſi. Minima autem quadrata æqualia ſunt inuicem; Quia deſcribuntur à perpendicularibus æqualibus o p, & o q. Ergo ſublatis iſtis minimis per imaginationem quadrata mediocria inter ſe æqualia remanebunt, & per conſequens latera eorum æqualia. Hæc verò ſunt crura in triangulis albo p r, & nigro s q, quæ, &, vt diximus, ſunt quoque medietates datarum r t, & s q. Vnde ſi medietates ſunt æquales; ſequitur etiam; quòd integrę lineę datę æquidiſtantes à centro r t, & s v ſint æquales, quod oportebat oſtendere.

THEOR. VI. PROP. XVII. Euc. 15.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro remotiore, ſemper maior.

SI detur circulus, in quo dentur duę protractę quomodocumq; V. g. z q, & t v, & quę tranſeat per centrum s r. Omnium maximam dicit eſſe s r, quę per centrum tranſit, reliquas, quò ei propinquiores, eò maiores. Quod vt probetur ad datas non tranſeuntes per centrum z q, & t v deducãtur perpendiculares ab ipſo centro, quæ ſint p l, & p n, quę enim remotior eſt, vt z q, ex Defin. quarta huius maiorem perpendicularem habebit. Detruncabis itaque alteri minori perpendiculari ab hac maiori æqualem portionem, quæ erit p m, & per hoc punctum m, ages aliam perpendicularem y x huic p l, & puncta, in quibus circumferentiam tangit rectis y p, & p x cum centro p connectes. Idemque fiat de remotiori data z q connectendo puncta extrema in circumferentiam deſinentia, cum centro p rectis p z, & p q.

Probatur primo, quod data per centrum tranſiens s r ſit maior quacunque aſſignetur, & ſit aſſignata z q. Crura trianguli nigri in centrum deſinentia p z, & p q ſimul ſunt æqualia, vtpote radij medietatibus s p, & p r diametri, & per centrum tranſeuntis s r, quæ, & radij ſunt.



Sed duo crura cuiuſcumque trianguli, ex propoſ. 20. primi ſunt maiora baſi; ergo, & diameter æqualis cruribus iſtis erit maior, quàm baſis z q, & ita probabitur de omni alia linea aſſignabili, quæ tamen per centrum non tranſeat, vt patet.

Probatur quoque; quod propinquiores centro ſint maiores diſtantioribus.

Duę lineę t v aſſignata eſt æqualis protractę punctatę y x; quia æqualiter diſtant à centro ob perpendiculares æquales protractas p m, & p n: & ex propoſ. anteced. quę æquidiſtant à centro æquales ſunt inuicẽ. Sed aſſignata remotior z q eſt minor, quàm punctata y x: Ergo, & minor quàm aſſignata t v. Quod verò ſit minor, patet ex propoſ. 25. primi. Nam crura trianguli nigri, & alterius y x p, vtpote, quod omnes ſint radij ſunt æqualia. Angulus verò ad centrum p niger minor ſe comprehendente y p x. Ergo, & baſis z q, quę eſt aſſignata remotior eſt minor, quàm punctata y x, & conſequenter minor, quàm altera aſſignata huic æqualis t v.

EXPENSIO IV.

De lineis circulum tangentibus exteriùs.

VIſis proprietatibus linearum intra circulum, remanent exteriorum proprietates examinandę verè mirabiles propter angulum cõtactus; qui, cũ ſit in infinitũ augumẽtabilis, non tamen minimum angulum acutum rectilineum ſuperare poteſt, nec angulus rectilineus quantumlibet diminutus, eo poteſt eſſe minor.

THEOR. I. PROP. XVIII. Euc. 16.

Quæ ab extremo cuiuſcumque diametri ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum ducetur.

Et in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum altera recta linea duci non poterit.

Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt.

Reliquus verò minor.

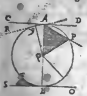
MVltas partes complectitur propoſitio, quas ſingulis declarationibus illuſtrare opus eſt prima

Digitized by Google

prims eſt, quod ſi adſit diameter A a ad cuius extremum A ducatur perpendicularis D A C. Dicit hanc extra circulum cadere. Et probatur per reductionem ad impoſſibile.

Si namque poſſibile exiſtimatur, quod intra circulum trahi queat. Trahatur A P coniungaturque eius extremum centro recta P Q.

Probatur. Nam angulus niger ad A per aduerſarios, cùm mendaciter aſſerant A P eſſe perpendicularem, eſt rectus; Sed angulus ad P eſt ei æqualis, vtpote æquicruri trianguli anguli ad baſim, ex propoſ. 14. primi propter æquales radios, cruraque Q P, & Q A. Ergo triangulum A P Q duos angulos A, & P rectos haberet, quod eſt impoſſibile, quia ex propoſ. 37. primi, omne triangulum omnes ſuos tres angulos duobus tantùm rectis æquales obtinet.



Prob. etiam hęc pars poſitiuè hoc pacto. Nam aſſumpto in perpendiculari S O quolibet puncto, V.g. O iunguntur O Q, cùm ergo huius trianguli albi angulus ad S rectus ſit erit angulus ad O minor recto, ex propoſ. 17. primi, quare erit maior Q O baſis, vtpote ſubtenſa angulo maiori recto, ex propoſ. 19. primi, quàm a Q angulo O ſubtenſa, & conſequenter punctum O extra circulum erit, & idem erit de quolibet alio puncto aſſignabili.

In ſecundâ hac parte aſſerit inter circũferentiã A P, & perpendicularem ad extremum diametri, A D, rectam aliam non poſſe trahi à puncto A, quę circumferentiam non ingrediatur ex parte. Et probatur per reductionem ad impoſſibile. Nam ſi hoc euenire poteſt ducatur, & ſit punctata A R, ad quam à puncto Q ducatur perpendicularis Q Y ad quodlibet eius punctum Y.

Probatur angulus ad Y rectus eſt, quia Q Y facta eſt perpendicularis; ergo angulus ad A erit minor, ex propoſ. 17. primi. Sed ex propoſ. 19 primi, maiori angulo maius latus ſubtenditur. Ergo recta A Q ſubtenſa angulo maiori Y erit maior quàm Y Q ſubtenſa angulo minori A. Sed illa eſt ſemidiameter; ergo Q Y minor ſemidiametro, & tamen ſi punctata A R non intra circulũ caderet, ſed extra deberet eſſe maior ſemidiametro ad hoc, vt punctum Y, quod eſſet extra, copularet; quãobrem punctum Y intra erit.

Tertia pars affirmat quoque angulum interiorem factum à circumferentia, & diametro, vt eſt angulus Q B T eſſe maiorem quolibet acuto rectilineo.

Probatur. Nam linea faciens quemlibet acutum angulum, nempe minorem recto, eſſet veluti punctata A R, vel quęlibet alia ſimilis ei, quę à puncto A inter perpendicularem, & circulum, iſti minorem angulum efficeret. Sed iam oſtenſum eſt A R, & quamlibet aliã intra circumferentiam cadere, ergo portio circumferentię remanet foras, V.g. Y A. Sed hæc portio circuli facit angulum internum dictum circumferentia diametroque concluſum. Ergo hîc angulus erit maior quàm acutus ad A à punctata diametroque concluſus.

Dicit tandem angulum contingentiæ, qui dicitur, & angulus Reliquus, qualis eſt angulus niger T A S circumferentia B T, & linea circumferentiam tangente in B comprehenſus, qui eſt reliquus anguli interni à peripheriã diametroque concluſi. Dicit inquam hunc angulum contingentiæ, & reliquum, omni acuto rectilineo eſſe minorem.

Probatur. Nam ſequitur ex dictis. Etenim angulus internus eſt maior omni acuto angulo, ſed hîc eſt reliquus eius ad complendum rectum. Ergo minor omni acuto angulo, qui poſſit vſque ad rectum, alium acutum rectilineum complere.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt rectam à diametri extremitate orthogonaliter ductam ipſum circulũ tangere. Oſtenſum enim eſt cadere extra circulum, quare in ſolo illo extremo diametri circulum attingit, & ſi prolungetur, cum & prolungata orthogonalis ſit ad diametrum, cadet extra circulum. Vnde non ſecabit. Quare tangentem ad quodcumque punctum circumferentię ducemus, ſi tracto ad illud diametro, perpendicularem ad eius extremum excitabimus.

PROB. I. PROP. XIX. Euc. 17.

A dato puncto extrinſeco rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Tangens linea ea dicitur ex 2. Def. huius, quæ circulũ tangens, etiam producta, non ſecat, quod ſcilicet exteriorem circumferentiam radat, vt in anteced. propoſ. eſſet S O; intendit ergo hic docere modum quo hęc trahatur.

Sit itaque circulus, cuius centrum R, & ſit punctum datum V, à quo hęc tangens deducenda ſit. Connectatur centrum R, cum puncto dato Y ſecante V R, & à puncto vbi ſecat P excitetur perpendicularis P Q. Deinde centro R ad interuallum R V portio ſufficiens circuli ducatur, ad cuius circumferentiam prolũgetur perpendicularis P Q vſque dum ſecet, & à puncto, vbi ſecat Q ad centrum R recta ducatur Q R. Quę ſecabit circulum datum minorem in T. A puncto igitur dato V ad hoc punctum ſectionis T, recta ducatur: & hæc erit tangens quæſita, quę tanget circulum datum in T.

Probatur angulus ad T niger rectus eſt; ergo quę ea poſcitur T V ad angulos rectos ad diametrum T R incidit. Itaque eſt tangens.



Quod verò angulus niger ad T ſit rectus probatur. Nam angulus ad P niger rectus eſt. Sed hi anguli ſunt æquales; ergo, & angulus T eſt rectus. Quod verò ſint æquales, patet ex 22. prop. 1. Nam triangula V T R, & aliud Q P R habent crus vnum minus P R æquale alteri R T, vtpote ſemidiametri circuli minoris, & aliud V R alteri R Q, vtpote ſemidiametri circuli maioris. Angulus verò niger ad centrũ R, eſt vtriſq; communis. Ergo ſecundùm eam propoſitinẽ 22. primi triangula tota erunt æqualia, & anguli quoque, qui ſibi correſpondent, æquales, vt eſt angulus niger P, & angulus niger T. Quare erunt recti, cùm niger P vnus eorũ talis ſit, ex effect. Vnde T V perpendicularis erit, & ideò tangens.

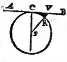
THEO-

THEOR. II. PROP. XX. Euc.18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea; à centro verò ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

TAngat recta A B circulum in C, & ab hoc puncto contactus, ducatur ad centrum, C S. Dicit eſſe perpendicularem ipſi A V. Quòd probabitur per reductionem ad impoſſibile. Nam ducatur quęlibet alia, quę ſit perpendicularis, & hęc V. g. ſit S V.

Si itaque S V, vt aduerſarij fabulantur perpendicularis eſt, erit angulos niger ad V rectus, reliqui verò ad C, & ad S oportebit, quod ſint minores recto, cũ 2. Coröll. prop. 17. primi, in omni triãgulo 3. anguli, ſolùm duobus rectis æquentur. Sed quia omnis trianguli maior angulus maiorem baſim, latuſq; ſubtendit, ex 19. primi. Erit itaque S C angulo nigro, quem rectum appellant, baſis ſubtenſa maior, quam S V minori angulo C ſubtenſa, at C S eſt, vt ſemidiameter, æqualis ſemidiametro S R, quæ eſt pars totios S V. Ergo pars eſſet totâ maior; quod eſt abſurdum.



THEOR. III. PROP. XXI. Euc.19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea: à contactu verò ad angulos rectos recta linea ipſi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.

SIt circulus, quem tangat recta B C in puncto D, & ab eo puncto erigatur perpendicularis D T. Dicit in hac centrum reperiri. Quod ſi aliquis negauerit, oſtendetur quodlibet punctum ab eo aſſignatum pro centro impoſſibilitatem inuolaere. Aſſignetor itaque, & ſit punctum A, ad quod ducatur à contactu D recta A D, quę ea eſt, quę oſtendimus in pręcedenti propoſ. erit quoque perpendicularis.

Probatur itaque facilitèr. Quia cùm D A ad centrum A fictum ducta ſit, perpendicularis erit, facietque angulos hinc inde rectos. Sed etiam D T ducta eſt ad angulos rectos. Quare, cùm omnes recti ſint æquales, angulus lineis D C, & D A clauſus albus eſſet æqualis angulo cruribus D C, & D T ſeminigro comprehenſo, Qui albo CDA parte nigrâ maior eſt. Quare totum eſſet ſuę parti æquale, quod repugnat.



THEOR. IV. PROP. XXII. Euc.8.

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, & ab eo ducantur rectæ, vna per centrum tranſiens, reliquæ aliæ in cauam peripheriam, vel conuexam.

Earum, quæ in cauam protenduntur tranſiens per centrum, maxima; cæteræ, quò viciniores ſunt lineæ tranſeunti per centrum eò, maiores.

Earum autem, quæ in conuexam terminant, minima eſt illa, quæ inter punctum exterius aſſumptum, & peripheriam conuexam interponitur tendendo ad centrũ.

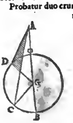
Reliquæ, quò huic viciniores, eò minores.

Duæ verò æquales ſolùm in peripheriam cadunt vtrinque maximæ, vel minimæ.

HÆc Propoſitio quinque partes habet, & in omnibus; vt 15. propoſ. eiſdem principijs innititur, excepta 4. probatione, & eodem modo argumentandi procedit, vnde ex ea facilis, & expedita euadit. Dicit primò itaque; quod ſi eligatur aliquod punctum, V.g. A extra circulum, & ex eo in concauam peripheriam cadens recta tranſeat per centrum O: Hæc erit maior omnibus, quę poſſint in dictam concauam peripheriam cadere.

Quod, ſi negetur, trahatur quęcumque linea à puncto A in cauam peripheriam, & ſit A C. De hac enim, & de qualibet alia, quę aſſignetur, probabitur eſſe minorem linea per centrum ductâ A B. Ad quod oſtendendum ducatur à puncto C peripherię, quę ab ea tangitur ad centrum recta G C.

Probatur duo crura ſant maiora reliquo nimirum baſi C A in triangulo albo A C G, ex prop. 20. primi. Sed crus à cẽtro ad circunferentiam terminans C G eſt æquale portioni G B lineę A B per cẽtrum tranſeuntis: Crus verò aliud eſt idem, ac A G alia portione eiuſdem per centrum tranſeuntis lineę. Ergo tota A B per centrum tranſiens eſt maior, quia A C, quę per centrum non tranſit, & ſic probabitur de omni aliâ, quę poſſet aſſignari.



Secunda pars eſt; quòd portio A O, quę cadit in peripheriam conuexam, & ſi protendatur, in centrum caderet, ſit omnium minima, quę in circumferentiam conuexam cadunt. Quod ſi nõ credatur, aſſignetur quęcumque, & ſit A D. Coniungaturque punctum D, vbi peripheriam tangit, ad centrum linea G D, habemuſque triangulum ſeminigrum D A G.

Probatur itaq;. In hoc triangulo baſis G A eſt minor ex propoſ. 20. cruribus ſimul ſumptis G D, & A D. Sed G D eſt æqualis portioni G O, cùm vtraque à centro ad circumferentiam pertingat. Ergo O A eſt minor, quàm A D; quod volebam oſtendere,

oſtendere, & valebit in qualibet aliâ lineâ, quæ aſſignetur, idem argumentum.

Tertia pars eſt. Quod ſi aliæ rectę preter A B tranſeuntem per centrum, in cauam peripheriam protendantur, vt A C, & A M, illam eſſe maiorem, quę magis propinquat tranſeunti per centrum A B. Quod, vt oſtendatur coniungatur C G, & G M, eruntque duo triangula ſeminigrum A G C, & totum album A G M.

Probatur autem. Nam crus trianguli ſeminigri C G eſt æquale cruri trianguli albi M G: Sunt enim ambo radij; nimirum ducti à centro ad peripheriam: Crus verò aliud A G in ambobus triangulis idem eſt. Sed angulus ad G trianguli albi, cùm ſit pars, eſt minor angulo ad G trianguli ſeminigri; quod inſuper addat portionem nigram: Ergo ex propoſ. 19. primi baſis A M erit minor, quàm A C.



Quarta pars aſſerit inſuper. Quod, quę ſunt viciniores portioni lineę tranſeuntis per centrũ extra circulum A O ſint minores remotioribus; quę à dicto puncto A in conuexam peripheriam caduot, vt ſunt A P, & A Q. Nam linea A P erit breuior, quàm A Q; quòd ſit vicinior.

Probatur. Nam ductis à centro ad circumferentiam rectis G P, & G Q ad puncta, vbi predictę A P, & A Q eam contingunt, erunt æquales. Sed intra triangulum maius A Q G ab extremis A, & G duę rectę cadũt G P, & P A, quę ex prop. 21. ſunt minores duabus A Q, & G Q cruribus trianguli A Q G. At iam duo radij G P, & G Q ſunt æquales: Si itaque auferantur, remanebit A P minor, quàm A Q. Et ſic oſtendetur de quibuſcunque alijs, quę poſſent doci.

Quinta pars eſt tandem. Quòd duę rectę lineę, hinc, & inde duci poſſint ad lineam tranſeuntem per centrum æquidiſtantes, quæ ſint æquales. Inſpice figuram Coroll. ſequen.

Quod, vt demonſtretur, fiat angulo ad centrum G albo, angulus æqualis niger, item ad G, & trahatur A Q. Et probatur ſic propoſitio.

Nam duo crura G D albi, & Q G nigri trianguli, vtpote radij, ſunt æqualia. Anguli verò ad G, tum niger, tum albus ſunt æquales, & crus G A commune; Ergo ex prop. 22. primi, baſes A Q, & A D erunt æquales.

Quòd verò nulla alia poſſit eſſe iſtis æqualis; patet ex eo, quia deberet trahi, vel remotiùs, vel propinquiùs ad lineam centralem G A, & iam probatum eſt lineas rectę tranſeunti per centrũ propinquiores eſſe minores; remotiores verò maiores.

COROLLARIVM.



COlligę, quod licet Euclides ſolùm demonſtrarit de lineis cadentibus in circumferentiam conuexam, eadem tamen demonſtratio valet in lineis cadentibus in concauam, vt patet de lineis R A, & S A.

COROLLARIVM II.

COlligitur 2. Quod licet Euclides demonſtrarit de lineis cadentibus ad vnam partem; verificatur tamen etiam de lineis cadentibus hinc, & inde; cùm ſit par argumenti ratio; dummodo vna ſit remotior alterâ.

EXPENSIO V.

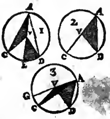
De Angulis in circulis inexiſtentibus.

DVplex eſt angulus rectilineus in circulo inexiſtens, alius eſt ad centrum, alius eſt ad circumferentiam. Comparat verò iſtos angulos, tum inter ſe, tum prout ſunt in ſegmentis, tum in peripherijs, quibus inſiſtunt, tum angulis, quos facit contingens cùm aliquâ lineâ intrinſecâ, & omnes iſtę propoſitiones verè fundamentales ſunt; cùm ex ipſis multa, multaque deducantur ad Paralla xes precipuè ſpectantia, & ad figuras deſcribendas, ad ſinus inueniendos, &c.

THEOR. I. PROP. XXIII. Euc. 20.

In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad circumferentiam, cùm fuerit eadem circuli circumferentia baſis angulorum.

TRibus modis poteſt accidere; quòd eadem circumferentia ſit baſis angulorum duorum, quorum vertex vnius ad centrum terminet, alius verò vſq; ad circumferentiam extendatur. Nam poteſt euenire, quòd crura incipientia ab iiſdem punctis peripherię, V.g. C D exterius, ferantur, vt in prima figura crura A C, & A D anguli ad peripheriam C A D cadunt extra angulum ad centrum C V D. Vel poteſt euenire, quòd vnum crus feratur ſuper aliud, vt in ſecunda figura C A ducitur ſuper C V, eãdemque lineam facit. Vel tandem poteſt euenire; quòd vnum crus anguli ad circumferentiam ſecet aliud anguli ad centrum, vt in tertia figura C A ſecat crus V D. Sed quomodocumque id eueniat, affirmat Euclides; quod ſemper angulus ad centrum: nempe C V D eſt duplus anguli ad circumferentiam C A D.



Probatur primò quoad primum caſum trahendo lineam A E, quę per vtrumque verticem V, & A tranſeat, & diuidat vtruſque in duas partes: Et primò probabimus de vna parte.

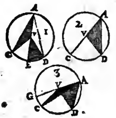
Triangulum itaq; nigrum A V C habet ex prop. 14. primi angulos ad A, & C inuicē æquales, cùm

ſit triangulum Iſoſceles ob crura duo v a, & v c, quæ ſunt ſemidiametri. Sed ipſi ijſdem anguli c, & a ex propoſ. 17 primi ſunt æquales externo albo ad centrum v: Ergo angulus v albus ad cẽtrum eſt duplus angulo nigro a; qui eſt ad circumferentiam.

Deinde idem quoque oſtẽdetur de aliâ parte ſimili prorſus argumentatione. Triangulum album a v d Iſoſceles ob crura, & radios æquales a v, & v d habet angulos a, & d æquales. Sed angulus externus ad v niger eſt æqualis iſtis duobus: Ergo eſt duplus vni eorum, V. g. angulo albo a: Sed angulus niger, & albus ad a angulum totum integrant ad peripheriam; ſicut angulus niger, & albus ad v integrãt angulum ad centrum: igitur ſi partes anguli v erant duplæ partibus anguli a; & totum erit duplum tuti.

Probatur in ſecundo caſu eodem prorſus argumento. Nam triangulum nigrum a v d in 2. figura eſt Iſoſceles. Quare anguli ad baſim æquales ſunt; ſed angulus v albus ad centrum, vtpote externus eſt æqualis illis duobus, ex propoſ. 17. primi. Ergo eſt duplus vni eorum; nimirum angulo a.

Progr ſſ. 1. Probatur quoque in tertio caſu. Nam tracta à puncto a per centrum v recta a g. Fient duo anguli, vnus ad centrum g v d, alius ad peripheriam g a d, ſuper eandem circumferentiam g d. Et eadem prorſus, quæ in ſecundâ figurâ de hac dicemus. Nam crus g a deſeruit pro vtriſque. Vnde idem argumentum valebit, & angulo nigro ad d, ſeminigerrimoq; ad a erit æqualis angulus ad centrum ſemialbus g v d, & ideo duplus ipſi a.



Progreſſ. 2. Trianguli quoque, partes dictorum maiorum ſunt eiuſdem rationis, ac in ſecundo caſu, nempe albus g v c, & nigerrimus v a c. Nam crus g a deſeruit vtriſque; Quare albus ad centrum v eſt duplus nigerrimi ad peripheriã a.

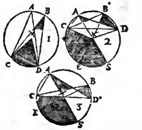
Cum itaque hæc pars alba externa apud v ſit dupla parti nigerrimę apud a internę in triangulo c v a, & ex Progr. 1. totus quoq; angulus g v d externus ſit duplus angulo toti interno g a d in triangulo v a d; ſi auferatur, tum ab angulo toto ad centrum g v d externo pars alba, tum ab angulo toto ad circumferentiam interno nigro apud a nigerrima pars: quod reſiduum erit angulus niger c v d ad centrum erit, & reſtabit duplus quoque anguli nigri c a d ad circumferentiam.

THEOR. II. PROP. XXIV. Euc. 21.

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli, ſunt inuicem æquales.

HÆc propoſitio tres caſus poteſt habere. Segmentũ enim circumferentiæ, vel poteſt eſſe maius ſemicirculo, vt in prima figura ſegmentum c a b d. Vel minus. vt in ſecunda c a b d. Vel ei æquale, vt in tertia figura ſegmentũ e a b d.

Sit itaque hoc ſegmentum ſemicirculo maius vt in prima, in quo ſint duo anguli a albus, & b niger ad circumferentiam. Superque eam circumferentiam, ſuper quam inexiſtunt, vt c d iuxta propoſ. antecedentem fiat angulus x ad centrum totus niger trahendo crura c x & x d.



Probaturque propoſitio. Angulus a albus ad circumferentiam iuxta pręced. propoſ. eſt ſemiſſis anguli nigri x ad centrum: Sed eiuſdem nigri x ad centrum eſt quoque ſemiſſis angulus b niger ad circumferentiam. Ergo cùm b niger, & albus a ſint medietas eiuſdẽ, inter ſe erunt ęquales.

Ad probandam ſecundam, & tertiam partem ſimul neceſſe eſt diuidere angulos a, & b per lineas tranſeuntes per centrum a s, & b e quemlibet in duas partes nigram, & albam. Inſuper & trahere ſemidiametros c x, & x d, & iam vides angulum partialem ad a album, tàm ſecundę, quàm tertię figurę habere angulum ad centrum ex nigro, nigerrimoque integratum c x s. Sed eundem nigerrimum, & album e x d obtinere quoq; alteram portionem nigram anguli b. Portionem verò albam anguli b in vtraque figura habere pro angulo ad centrum angulum nigrum c x e: Sicut & anguli a portio nigra obtinet pro angulo ad centrum angulum album d x s. His perceptis.

Probatur ſic. Duo anguli ad centrum niger, & nigerrimus c x s ſunt dupli, ex pręced. propoſitione portioni albę anguli a. Angulus verò albus ad centrum d x s eſt portioni nigrę ad a duplus. Ergo niger nigerrimus, & albus ſimul eſt duplus toti angulo nigro alboque ad circumferentiam a. Sed hi tres albus niger nigerrimuſque ad centrum ſunt dupli quoque totius anguli b ad circumferentiam: Siquidem niger eſt duplus eiuſdem b portionis albę; nigerrimus, & albus e x d ad cẽtrum portionis nigrę ad a. Quare angulus b niger albuſque totus, & angulus a albus nigerque totus ſunt ſemiſſis anguli totius portionibus alba, nigerrima, nigraque conſtantis ad centrum. Quare inter ſe erunt æquales.

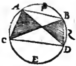
THEO-

THEOR. III. PROP. XXV. Euc. 22.

Quadrilaterorum in circulis deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales.

DIcit: quod ſi quadrilaterum quodcumque circulo inſcribatur C A B D illius anguli oppoſiti, quales ſunt A, & C, aut A, & D ſunt duobus rectis æquales. Quod, vt probet, trahit duas diagonales lineas A D, & C B, quę angulos in duas portiones diuidunt.

Probatur. Nam anguli A pars nigra eſt æqualis parti nigrę anguli B, ex pręc. propoſ. quòd ſint in eodẽ ſegmento C A B D. Similiter etiam pars alba anguli A, quòd ſit in eodem ſegmento B A C E D, erit æqualis parti albę anguli C. Igitur totus

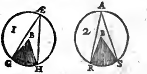


angulus A ſeminiger æquatur duabus portionibus nigrę B, & albę C. Sed addamus iſtis portionibus albę C, & nigrę B angulum D ſeminigrum totum erunt iſti, ex propoſ. 17. primi duobus rectis æquales; Siquidẽ ſunt interni triangulo C B D. Quamobrem angulus totus A niger, albuſque vice harum portionum, quibus æquatur, nigræ B, & albę C ſubſtitutus, cum angulo D ſeminigro. Faciet duos angulos duobus rectis æquales: Eodem modo procedet demonſtratio in oppoſitis B, & C. Quare patet propoſitio.

THEOR. IV. PROP. XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

SI ſint duo circuli æquales, quibus ſint duo anguli ęqui, vel ad centra, vt ſunt nigri, vel ad circumferentias, vt albi. Dico illos angulos ſubtendere portiones circulorum æquales, vel eis inſiſtere. Quod eſt idem.



Probatur primò de angulis æqualibus ad centrum. Nam ſegmentum primi G Æ H æquale eſt ſegmento ſecundi R A S; & toti circuli pręſupponuntur æquales. Ablatis ergo à circulis æqualibus ſegmentis æqualibus portiones æquales remanebunt; nimirum G H, & R S.

Quod verò ſegmenta G Æ H, & R A S ſint æqualia probatur. Quia ex defin. 9. ea ſegmenta ſunt æqualia, quæ angulos æquales includunt: Sed Æ, & A ſunt æquales. Siquidem dimidij ſunt, ex propoſ. 23. huius æqualium angulorum nigrorum ad centrum. Quamobrem circulorum portiones G Æ H, & R A S, in quibus inſunt, erunt æquales.

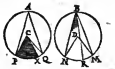
Quare ſequitur quoque ſecunda pars. Nam ſi ſiant anguli ad peripherias æquales Æ, & A inſiſtent ęqualibus ſegmentis ex eadem defin. 10. Quare ijs ſegmentis à circulis æqualibus ablatis portiones circulorum G H, & R S remanebunt æquales.

THEOR. V. PROPOS. XXVII.

In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant.

HÆc propoſitio conuertit antecedentem. Sed alio pacto oſtenditur. Nempe per reductionem ad impoſſibile. Dẽtur itaque duo circuli æquales, & anguli in illis A, & B, vel ad centrum C, & D, qui inſiſtant peripherijs æqualibus P Q, & M N. Dicit *eos angulos fore æquales*.

Nam ſi non ſunt, ducatur punctata C X, quę faciat angulum nigrum ad centrum C primi circuli æqualem angulo albo ad D centrum ſecundi circuli, prout volunt aduerſarij.



Tunc probatur angulus niger ad C centrum, vt falſo mentiuntur aduerſarij eſt æqualis angulo D albo ſecundi circuli. Ergo inſiſtant peripherijs æqualibus, ex propoſ. anteced. Quare portio peripherię P X eſt æqualis portioni M N ſecundi circuli. Sed eidem ex ſuppoſitione eſt æqualis portio P Q. Ergo portio P Q erit æqualis ſuę parti P X. Quod eſt impoſſibile.

Eodem modo probatur de angulis ad peripheriam A, & B. Nam, ſi non ſunt æquales. Aduerſarius faciat eos æquales tracta linea B R: Eritque angulus niger ad B, ęqualis angulo albo ad A. Quare peripherię portiones, quibus inſiſtunt, N R, & P Q erunt æquales. Sed quoque portio M N eſt æqualis eidem P Q. Ergo portio minor N R eſſet æqualis maiori N M. Quod eſt abſurdum.

COROLLARIVM I.

COlligitur hinc primo. Quod ſi duę lineę in circulo, vt A B, & C D intercipiant duas æquales portiones circuli, vt C A, & B D fore inuicem parallelas, quia tracta A D incidente anguli nigri alterni ſunt æquales ob portiones æquales, quibus inſiſtunt ex pręmiſſa: Quando verò anguli alterni ſiunt ab incidente, vt eſt A D æquales, duæ ſuper quas cadit, parallelę ſunt, ex propoſ. 28. primi.



COROLLARIVM II.

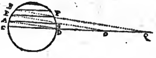
ELicitur rurſus duarum linearum ſe rectangulè decuſſantium, & per centrum tranſeuntium. Angulos ad centrum quartę circuli inſiſtere. Nam, cùm faciant quatuor rectos A B C D,

& omnes recti æquales ſint, oportebit, etiam circumferentias, quibus inſiſtunt eſſe æquales: Et ideò circumferentiam in quatuor portiones eſſe diuiſam, quę dicuntur quadrantes. Quare quoq; euidens eſt; omnem angulum acutum inſiſtere minori portioni quadrantis; quia eſt minor recto: Obtuſum verò maiori circumferentię, quàm quadrans ſit; quia eſt maior recto.



COROLLARIVM III.

COlligitur item. Quod illę, quę in circulo coniungunt parallelas æquales arcus intercipiētes ad partes oppoſitas, vt ſunt AD. BG, & BF punctatę coniungentes parallelas arcus ęquos intercipientes CD ad AG, & AG ad BF, adhuc eſſe parallelas. Ratio eſt, quia, cùm AC ſit incidens in punctatas, & anguli alterni ſint æquales ob æqualitatem portionum circuli GD, & AC, quibus inſiſtunt, ex propoſ. 30. primi, punctatæ quoque æquidiſtantes erunt.



COROLLARIVM IV.

DEducitur etiam. Quod ſi EC punctata protendatur, & ſimiliter diameter vſque dum occurrant in O, æqualem futurā diametri portionem, quę extra circulum prolungatur, vt eſt DO, & lineam AG in circulo ei æquidiſtantem. Ratio eſt, quia BO, & AD punctatę ſunt parallelę ſimiliter, & OD, & AG. Quare AOGD erit parallelogrammum, ex def. 35. primi. Quare ex propoſ. 34. primi, latera aduerſa erunt inter ſe æqualia. Vnde OD erit æqualis rectę AO, & ſi alias protendas eodem modo idem ſequetur. Quare diameter productum extra circulum æquabitur omnibus in circulo exiſtentibus ſibi parallelis, vt eſt CQ, quę æquatur tribus in circulo exiſtentibus, & ſibi parallelis CD, & AG, & BF.

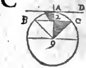
COROLLARIVM V.

COlligitur quoque rectę BC portionē circuli ſubtendenti eſſe parallelam lineam AD tāgentem punctum medium peripherię ſubtenſę BAC, quale eſt A. Quia illę ſunt parallelę, ſuper quas recta cadens angulum facit externum, & internum oppoſitum, & ad eaſdem partes æqualem. Sed angulus A niger, & B 29. albus ſunt æquales, cùm recti ſint, vt dictum eſt.

Ergo ſunt tangens AD, & ſubtendens BC parallelę; vt figura ſequenti.

COROLLARIVM VI.

COlligitur tandem. Quod ſi BC ſecetur per medium per aliquam lineam à centro prouenientem, & portionem circuli, quam ſubtendit ſecari per medium, & viceuerſa.



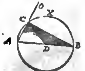
Nam anguli ad centrum æquales æqualium triangulorum, qualis ſunt oſtenſa album, & nigrum ad 9 habent etiam baſes æquales, ex 21. primi 9 B, & 2 C, & æqualibus peripherijs inſiſtunt, vt AC, & AB, ex pręced. & ideò erunt æquales portiones BA, & CA.

THEOR. VI. PROP. XXVIII. Euc. 31.

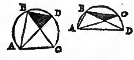
In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui autem in minore maior eſt recto. Inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt, minoris verò ſegmenti angulus minor eſt recto.

HÆc propoſitio quinque partes habet. Sed quę, primā oſtenſā cęterę faciles euadant. Primam itaque partem primò declarabimus. Dicit itaque, quod angulus in ſemicirculo, vt eſt C, niger nigerrimuſque ſimul, cuius vertex in circumferentia eſt, baſis verò illum ſubtendens totus diameter AB, rectus eſt. Quod, vt oſtendatur, ducenda eſt recta CD, & prolungandum latus CA in O.

Probatur angulus externus albus C eſt æqualis angulis internis, & oppoſitis A, & B totius trianguli ACB, ex propoſ. 17. primi. Ergo eſt etiam ęqualis angulo interno ad C, qui nigerrimus nigerque ſimul.



Probatur. Nam angulus A, & angulus B ſunt æquales eius duobus portionibus, & A quidem nigrę, angulus verò B portioni nigerrimę: Ergo & eędem portiones sūt æquales angulo externo albo C. Quod verò angulus A ſit æqualis portioni nigrę, patet ex propoſ. 14 primi. Nam ſunt anguli ad baſim in triangulo Iſoſcele ACD, cùm duo crura ſint ſemidiametri AD, & CD. Quod verò B ſit æqualis portioni, & angulo nigerrimo C, eodem argumento probatur. Nam triangulum totum nigrum ob crura, quę ſunt ſemidiametri eſt Iſoſceles, vnde B, & C nigriores, vt anguli ad baſim ſunt æquales.



Dicit quoque. Quod ſi in maiori ſegmento ſit ABC angulus erit minor recto, & ſi angulus ABO, ſit in minori ſegmento erit recto maior. Quod, vt probetur, trahatur à puncto A diameter in vtriſque ſegmentis AD. Trahaturque crus BD faciens, ex pręced. probat angulum rectum BAD. Nam angulo in maiori ſegmento ABC, addit partem nigrā; vnde ABC minor erit recto, at angulo in minori ABO parte nigra minor eſt idem rectus, quare ABO maior erit recto.

Dicit tandem circumferentiam maioris ſegmenti facere cùm recta ſubtenſa, angulū recto maiorem: At minoris ſegmenti recto minorem,

ad

Ad quod oſtendendum inſpiciatur prima figura. Nam C B erit ſubtenſa, & peripheria ſegmenti maioris C R B, minoris verò C X B, cùm ergo angulus C rectus ſit, & recta C A intra circulum cadat: Patet; quòd circumferentia extra cadens C A faciat ſuum angulum, cùm recta C B maiorem recto. At in minori ſegmento peripheria C B lineam C O foras relinquit: Quare facit cum C A angulum recto minorem; quia angulus O C A maior rectus eſt, vt prima parte huius propoſ. eſt oſtenſum.

COROLLARIVM.

Colligitur hinc. Quod ſi fiat triangulum rectangulum quodcumque, & maior eius baſis bifariam diuiſa aſſumatur pro centro interuallū medietate eius præbente, circulum neceſſariò per tres vertices extremos angulorum rectanguli eſſe tranſiturum. Quoniam, ſi non tranſiret, vel ſecaret, vel ſupra, ſe fleteret: Si ſecaret, ergo iam intra illud rectangulum triangulum ęquale ei poſſet conſtitui contrà propoſ. 21. primi: Si ſuper tranſiret, poſſet conſtitui triangulum angulum rectum comprehendens, & tunc angulus rectus rectanguli, vtpote comprehenſus, ex propoſ. 21. primi eſſet maior.

THEOR. VII. PROP. XXIX. Euc.32.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea. A contactu verò producatur aliqua recta linea circulum ſecans; Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt illis angulis, qui in alterni circuli ſegmentis conſiſtunt.

Sit tangens circulum C L in puncto A, à quo recta educatur, quę ſecet circulum in duo ſegmenta, vt eſt A D, Hęc vel per centrum tranſibit, vel non. Si tranſibit per centrum, erit primus caſus, de quo primò demonſtratio erit.

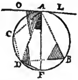
Caſus 1. Aſſerit itaque, quòd hęc tranſiens per centrum A D faciet angulum, cum tangente æqualem angolo, qui comprehenditur ab alterno ſegmento; nempe angulum nigrum ad A dextrū angulo C nigro ſiniſtri ſegmenti: Angulum verò ſiniſtrum ad A album angulo ſegmenti dextri B albo.

Probatur verò, Omnes recti anguli ſunt ęquales. Sed anguli ſegmentorum C, & B recti ſunt, ex pręced. & anguli G A D, & L A D, quos perpendicularis per centrum tranſiens facit, cum tangente ſunt, ex propoſ. 20. huius recti: Ergo omnes ſunt æquales.



Caſus 2. Dicit quoque idem eſſe, & euenire. Si linea à puncto A egrediens non tranſeat per centrum, vt in hac ſecnoda figura. Nam angulus dexter albus nigerrimuſque ad A à ſecante A D tangenteque O L factus eſt æqualis angulo C ſegmenti ſiniſtro, ſicut & alius niger ad A eſt æqualis alteri nigro B. Quod, vt probetur trahenda eſt A F, quę tranſeat per centrum, & tracto crure D F conſtituendum eſt rectangulum triangulum A D F.

Probatur propoſ. Angulus niger O A D eſt æqualis angulo apud F in triangulo A D F. Sed iſte angulus F eſt æqualis angulo nigro B. Ergo angulus B niger, & niger apud A ſunt inuicem æquales. Probatur ex propoſ. 24. huius, quòd angulus F in triāgulo A D F ſit æqualis nigro B: Quia eſt in eodem ſegmento A B F D, Probatur quoq; quod idem angulus F, ſit æqualis nigro A: Quia niger D ex anteced. rectus eſt, quare ex propoſ. 17. primi, reliqui nigerrimus apud A, & apud F vni recto erunt æquales: Sed angulus niger, nigerrimuſque apud A rectus eſt: Ergo ablato angulo nigerrimo, cum quo angulus apud F, & niger apud A æquantur vni recto, reſtabunt inuicem anguli F, & A niger æquales. Quamobrem angulus B angulo F æqualis, æquabit quoque angulum nigrum apud A.



Sic probatur de angulo dextro L A D, quod ſit æqualis angulo ſiniſtro A C D in ſegmento: Nam B niger, & C albus in quadrilatero C A D B, ex propoſ. 25. huius æquantur duobus rectis, & ſimiliter anguli niger, & L A D apud A æquantur duobus rectis; Sed iam oſtenſum eſt angulum B nigrum eſſe æqualem angulo A nigro. Ergo reliquum nigerrimum, & album ipſius erit æquale angulo albo C in triangulo A C D ſegmenti.

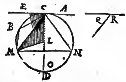
PROB. V. PROP. XXX. Euc.33.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli; quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Docet hic conſtituere quodlibet ſegmentum ſuper quamlibet rectam, quodcapiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Et quidem ſi angulus rectus datus ſit, non oportebit, niſi diuidere lineam, V. g C D bifariam, & ibi centro poſito in L deſcribere ſemicirculum. Nam ex dictis propoſ. 28. capiet angulum rectum, qui erit ęqualis dato; cùm omnes recti ſint ęquales, Sed ſi non ſit rectus, at acutus, vt Q, tunc magis opera requiritur.

Sit itaque angulus datus Q acutus, cui æqualis capax ſuper lineā C M facere oporteat aliquòd ſegmentum circuli. Ducatur ad initium eius C linea E A, quę faciat angulum acutum nigrum ęqualem angulo dato Q, & ad eam erigatur perpendicularis, exiens à puncto C, quę ſit O C, & portione nigerrima compleat angulum rectum, & ab altero extremo M punctata alia ducatur



verſus perpendicularem, quæ faciat angulum ad M nigrum ęqualem angulo nigerrimo ad C. Hę namque punctatę C L, & L M, vt ſubtenſę angulis ęqualibus

æqualibus, ex propoſ.15. primi erunt æquales. Quare facto centro in L interuallo L C deſcribi poterit circulus, qui tranſibit per M, vtpote per ſemidiametrũ æqualem. Si itaque in hoc ſegmento C N M ſuper lineam C M conſtituatur angulus N. *Iſte erit æqualis angulo acuto nigro ad* C. Qui eſt æqualis angulo Q dato.

Probatur autem ex præmiſſa propoſitione facilius. Nam angulus ad C niger B C M eſt angulus ad contingentem. Ergo erit æqualis angulo alterni ſegmenti, qui eſt angulus N.

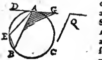
Quòd ſi velimus facere angulum obtuſum, V. g. R. Fiat angulus eodem pacto, qui ſupra A C M ei angulo R æqualis, & facto circulo è centro L in ſegmento C B M fiat angulus a. Nam, cùm ſit ex præcedenti propoſ. in ſegmento alterno C B M erit aqualis angulo obtuſo A C M, & R.

PROB. VIII. PROP. XXXI. Euc.34.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Sit datus angulus Q, & oporteat à circulo dato A B C abſcindere portionem, quæ capiat angulum æqualem dato angulo Q. Ducatur recta D C tangens circulum in puncto A, & à puncto A ducatur recta A B, quæ faciat cum tangente D C angulum æqualem angulo Q, prout docet propoſ. 24. primi, & ſegmentum alternum A E à capiet angulum E æqualem angulo Q.

Probatur. Nam ex 29. propoſ. huius angulus in ſegmẽto alterno A E à capiens, eſt æqualis angulo nigro ad A. Sed angulus niger ad A factus eſt æqualis angulo dato Q: Ergo ſegmentum A E B capit angulum æqualem dato angulo Q.



EXPENSIO VI.

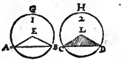
De Peripherijs.

Hic agimus de Peripherijs eas comparando ad inuicem, & oſtendendo quales ſint æquales, qualeſque non ſubeant æqualitatem. Docemus etiam peripheriam, atque adeò circulũ bifariam ſecare. Et, licet hæc expenſio ſit facilior præcedenti, oportuit tamen poſponere, cùm dependeat in aliquibus à demonſtrationibus angulorum præhabitis.

THEOR. I. PROP. XXXII. Euc.28.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt maiorem quidem peripheriam æqualem maiori alterius, minorem verò vnius æqualem minori alterius.

Dicit lineas æquales in circulis æqualibus (quòd etiam intelligitur de eodem, vt notat Clauius,) vt ſunt A B, & C D in æqualibus circulis primò, & ſecundò auferre ſegmenta æqualia ſcilicet diuidere quslibet ſuum circulũ in duas portiones, quæ & ſi non ſint æquales, inuicẽ illæ, quæ ſunt eiuſdem circuli, comparanda eſt maior primi circuli, cum maiore ſecundi, & hæ circuli portiones erunt inuicem æquales; ſicut & minor primi comparata minori ſecundi.



Probatur. Nam anguli ad centrum E, & L triangulorum albi, & nigri ſunt æquales. Ergo inſiſtunt ſegmentis, & peripherijs æqualibus minoribus A B, & C D, ex propoſ. 26. huius, quæ albatæ ab æqualibus circulis per imaginationem relinquent portiones peripheriæ maiores A G B, & C H D æquales.

Probatur verò quod anguli E albus, & L niger ad centrum ſunt æquales, quoniam baſes A B, & C D, ex præſuppoſitione ſint æquales: Latera verò, vt ſemidiametri æqualium circulorum æquales ſunt, totum igitur triangulum nigrum, toti albo æquale eſt. Quare & angulus ad centrum, ex prop.23. primi E albus erit æqualis nigro L.

THEOR. II. PROP. XXXIII. Euc.29.

In æqualibus circulis rectæ lineæ, quæ æquales peripherias ſubtendunt, ſunt æquales.

Eſt conuerſa præcedentis, & ſequitur à 27. huius, quæ & ipſa conuertit 26. Sint itaque peripheriæ æquales A B, & C D, quæ rectis ſubtendantur, fiantque anguli ad centrum E, & G rectis ſemidiametris A B, & E à conficientibus triãgulum album, & alijs G C, & G D nigrum delineantibus.



Probatur. Quia peripheriæ C D, & A B, V. g. minores præſupponũtur æquales, anguli E albus, & G niger ad centrum, ex 27. propoſ. huius ſunt æquales; Sed & crura ſunt æqualia; Quia omnia ſunt ſemidiametri. Ergo ex propoſ.23. primi, & baſes æquales erunt quales ſunt A B, & C D.

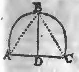
THEOR. III. PROP. XXXIV. Euc.30.

Datam peripheriam biſariam ſecare.

Ad hoc vt peripheria A B C biſariam ſecetur. Ducatur recta ſubtendens A C, & diuidatur biſariam in D, & ab ea diuiſione D erigatur perpendicularis D a vſq; ad peripheriã protenſa; hæc namque diuidet eam in duas partes æquales, ad quod probandum ducendæ ſunt duæ lineæ nimirum A B, & B C.

Probatur

Probatur lineę modò tractę ſunt æquales. Ergu ex prop. 32 huius, & peripherię, quas ſubtenduot A B, & B C æquales ſunt.



Probatur, quòd ſubtenſę ſint æquales. Nam baſes ſunt triangulurum æqualium A B D, & B D C. Hęc verò triangula prohantur æqualia, ex prop. 32. primi: Quia crus B D eſt cummune: alterum verò crus D C ex conſtructiooe fecimus æquale D A alteri cruri: At anguli ad D, A D B, & B D C recti ſuut. Quare & haſes A B, & B C æquales.

EXPENSIO VII.

De Rectis circulo inſcriptis, & circumſcriptis.

QVemadmodum egit Euclides Libro ſecundo de potentijs laterum trianguli, tum rectanguli, tum nhtuſanguli ad æqualia quadrata, & rectangula cunſtitueuda.

Sic hic agit de potentijs linearum, ant in circulo ſe ſecantium, aut circulum tangentium ad æqualia quadrata, rectangulaque deſcribenda. Vtiliſſima omnium cognitio; quippe quì conicis maximè deſeruiat, tangentihuſque reperiendis, & ſecaotibus maximè pruſit, & ſulidis ipſis ſphęricis, conicisque ad inueniendam eorum ſoliditatem aditum ſternat.

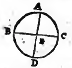
THEOR. I. PROP. XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecuerint rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur.

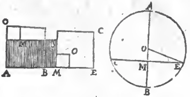
QVatuor caſus propoſitio hęc enumerat. Nam vel ambę lineę, quę ſe in circulo ſecant ſunt diametri, & eſt primus caſus. Vel vna earum; ſed ſe inuicem ſecant ad angulos rectos; & ecce ſecundus. Vel vna earum diameter eſt; ſed noo ſe ſecant ad angulos rectos; & erit tertius. Vel tandem neutra earum tranſit per centrum, ſiue ad aogulos rectos, ſeu ad non rectos ſecet, & erit quartua caſus: Qui ſinguli diuerſas prohationea expoſcunt.

Primus caſus. Sit igitur circnlus A B C D, in quo duo diametri A D, & B C ſe ſeceut in E dicit rectangula, ex ſegmentis B E & E C vnius, & ex ſegmentis alterius A E, & D E facta inuicem eſſe æqualia.

Patet, quia cùm ſegmenta ſint ſemidiametri ſunt omnia æqualia. Vnde & æqualia rectangula conſtituent.



Caſus 2. Sit in circulo C E B, linea, quę rectè ſecet diametrũ in M. Dicit, quòd *quadratum* factum ex M E, & M C, *eſt æquale rectangulo* facto, ex A M portionę diametri, & M B alia diametri portione. Quod vt demonſtretur trahendus eſt ſemidiametter O E.



Probatur verò ex propoſ. 7. ſecundi rectangulum nigrum factum ex A M, & M B vna cum quadrato paruo O M ex iotermedia O M eſt æquale qnadrato ex dimidia, quale eſt puuctatum B O; quòd diameter A B ſectus ſit iu æqualia in O, & noo æqualia in M. Sed huic eidem quadrato ex dimidiâ æquale eſt qoadratum ex dimidia M E; quale eſt M C iuncto tamen eidem quadrato M O. Ergo ſi hoc quadratum M O, tum à rectaugulo nigro, tum à quadrato M C auferatur rêmauebunt qnadratum rectaugulumque nigrum inter ſe æqualia. Remanet probanda minor, quod duo quadrata M C, & M O parnum æquentur quadrato punctato B O, hoc autem patet. Nam quadratum O B eſt æquale quadrato O E cùm ſint ſemidiametri, & lineę æquales, ſed quadratum ex O E cùm ſit haſis ſuhtenſa angulu rectu M, ex propoſ. 11. ſecundi eſt æquale quadratis ex M E, quod eſt M C, & M O paruo. Ergo eiſdem quuque eſt æquale quadratum ponctatum ex O B. *Quare rectangulum nigrum erit æquale quadrato* M C, qood probandum erat.

Caſns 3. Dicit tertiò. Quòd ſi linea C E ſecuerit A B diametrum, & nnn ad angulos rectos, adhuc vera erit propoſitio; Et quod rectangulum compreheoſum ſuh ſegmentis vnius, V. g. ſub C M, & M B erit æquale rectangulo compreheuſo ſub ſegmentis alterius, nẽpe diametri M B, & M A. Quod, vt probet, trahit perpeodicularem à medietate lineę C E; nempe à puncto R, quę cadet ex propoſ. 1. huius Corall. in centrum O. Deinde coniungit centrum cum extremo E rectâ O E.



Probatur pauiò operoſiùs, quam pręcedens propoſitiunis pars. Diameter A B eſt ſectus in O, in æqualia, & io M in non æqualia: Quapropter rectangulum ſnb partibus ioęqualibus A M, & M B contentum, quale eſt nigrum M A B, & quadratũ A Q E B intermedia M O ſeminigrum ſimul ſunt æqualia quadrato ea medietate diametri O B, ex propoſ. 7. ſecundi, quale eſt O B, & quod idem eſt propter æqualitatẽ linearum quadrato ex O E. Sed hoc quadratum ex O E, vel O B eſt quuque æquale propter propoſ. 11 ſecundi quadratis C R ea ... hoc eſt ſeminigro, & ea R E puoctato F R. ... quadratum h ... R F pu... ctum vna cum qu... nigrum annexo erit ęquale rectágulo nigro

æqualibus, ex propoſ.15. primi erunt æquales. Quare facto centro in L interuallo L C deſcribi poterit circulus, qui tranſibit per M, vtpote per ſemidiametrũ æqualem. Si itaque in hoc ſegmento C N M ſuper lineam C M conſtituatur angulus N. *Iſte erit æqualis angulo acuto nigro* ad C. Qui eſt æqualis angulo Q dato.

Probatur autem ex præmiſſa propoſitione faciliter. Nam angulus ad C niger B C M eſt angulus ad contingentem. Ergo erit æqualis angulo alterni ſegmenti, qui eſt angulus N.

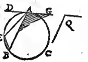
Quod ſi velimus facere angulum obtuſum, V g. R. Fiat angulus eodem pacto, quo ſupra A C M ei angulo B æqualis, & facto circulo è centro L in ſegmento C B M fiat angulus B. Nam, cùm ſit ex præcedenti propoſ. in ſegmento alterno C B M erit æqualis angulo obtuſo A C M, & R.

PROB. VIII. PROP. XXXI. Euc.34.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SIt datus angulus Q, & oporteat à circulo dato A B C abſcindere portionem, quæ capiat angulum æqualem dato angulo Q. Ducatur recta D G tangens circulum in puncto A, & à puncto A ducatur recta A B, quæ faciat cum tangente D G angulum æqualem angulo Q, prout docet propoſ. 24. primi, & ſegmentum alternum A E B capiet angulum E æqualem angulo Q.

Probatur. Nam ex 29. propoſ. huius angulus in ſegmẽto alterno A E B capiens eſt æqualis angulo nigro ad A. Sed angulus niger ad A factus eſt æqualis angulo dato Q. Ergo ſegmentum A E B capit angulum æqualem dato angulo Q.



EXPENSIO VI.

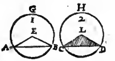
De Peripherijs.

HIc agimus de Peripherijs eas comparando ad inuicem, & oſtendendo quales ſint ęquales, qualeſque non ſubeant æqualitatem. Docemus etiam peripheriam, atque adeò circulũ bifariam ſecare. Et, licet hæc expenſio ſit facilior præcedenti, oportuit tamen poſponere, cùm dependeat in aliquibus à demonſtrationibus angulorum præhabitis.

THEOR. I. PROP. XXXII. Euc.28.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt maiorem quidem peripheriam æqualem maiori alterius, minorem verò vnius æqualem minori alterius.

DIcit lineas æquales in circulis æqualibus (quòd etiam intelligitur de eodem, vt notat Clauius,) vt ſunt A B, & C D in æqualibus circulis primò, & ſecundò auferre ſegmenta ęqualia ſcilicet diuidere qualibet ſuum circulũ in duas portiones, quæ & ſi non ſint æquales, inuicẽ illæ, quæ ſunt eiuſdem circuli, comparanda eſt maior primi circuli, cum maiore ſecundi, & hæ circuli portiones erunt inuicem æquales; ſicut & minor primi comparata minori ſecundi.



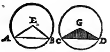
Probatur. Nam anguli ad centrum E, & L triangulorum albi, & nigri ſunt æquales. Ergo inſiſtunt ſegmentis, & peripherijs æqualibus minoribus A B, & C D, ex propoſ. 26. huius, quæ ablatæ ab æqualibus circulis per imaginationem relinquent portiones peripherię maiores A G B, & C H D æquales.

Probatur verò quod anguli E albus, & L niger ad centrum ſunt æquales, quoniam baſes A B, & C D, ex præſuppoſitione ſint æquales: Latera verò, vt ſemidiametri æqualium circulorum æqualea ſunt, totum igitur triangulum nigrum, toti albo æquale eſt. Quare & angulus ad centrum, ex prop. 23. primi E albus erit æqualis nigro L.

THEOR. II. PROP. XXXIII. Euc.29.

In æqualibus circulis rectæ lineæ, quæ æquales peripherias ſubtendunt, ſunt æquales.

ESt conuerſa pręcedentis, & ſequitur à 27. huius, quę & ipſa conuertit 26. Sint itaque peripherię æquales A B, & C D, quę rectis ſubtendantur, fiantque anguli ad centrum E, & G tractis ſemidiametris A E, & E B conficientibus triãgulum album, & alijs G C, & G D nigrum delineantibus.



Probatur. Quia peripheriæ C D, & A B, V. g. minores prę ſupponitur ęquales, anguli E albus, & G niger ad centrum, ex 27. propoſ. huius ſunt æquales; Sed & crura ſunt æqualia; Quia omnia ſunt ſemidiametri. Ergo ex propoſ. 22. primi, & baſes æquales erunt quales ſunt A B, & C D.

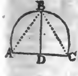
THEOR. III. PROP. XXXIV. Euc.30.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

AD hoc vt peripheria A B C bifariam ſecetur. Ducatur recta ſubtendens A C, & diuidatur bifariam in D, & ab ea diuiſione D erigatur perpendicularis D B vſq; ad peripheriã protenſa; hæc namque diuidet eam in duas partes æquales, ad quod probandum ducendæ ſunt duæ lineæ nimirum A B, & B C.

Probatur

Probatur lineę modò ractę ſunt æquales. Ergo ex prop. 32 huius, & peripherię, quas ſubtendunt A B, & B C æquales ſunt.



Probatur, quòd ſubtenſę ſint æquales. Nam baſes ſunt triangulorum æqualium A B D, & B D C. Hęc verò triangula probantur æqualia, ex prop. 32. primi: Quia crus B D eſt commune: alterum verò crus D C ex conſtructione fecimus æquale D A alteri cruri: At anguli ad D, A D B, & B D C recti ſunt. Quare & baſes A B, & B C æquales.

EXPENSIO VII.

De Rectis circulo inſcriptis, & circumſcriptis.

QVemadmodum egit Euclides Libro ſecundo de potentijs laterum trianguli, tum rectanguli, tum obtuſanguli ad æqualia quadrata, & rectangula conſtituenda.

Sic hic agit de potentijs linearum, aut in circulo ſe ſecantium, aut circulum tangentium ad æqualia quadrata, rectangulaque deſcribenda. Vtiliſſima omnium cognitio; quippe qui conicis maximè deſeruiat, tangentibuſque reperiendis, & ſecantibus maximè proſit, & ſolidis ipſis ſphęricis, coniciſque ad inueniendam eorum ſoliditatem aditum ſternat.

THEOR. I. PROP. XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecuerint rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur.

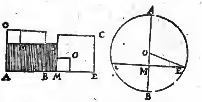
QVatuor caſus propoſitio hęc enumerat. Nam vel ambę lineę, quę ſe in circulo ſecant ſunt diametri, & eſt primus caſus. Vel vna earum; ſed ſe inuicem ſecant ad angulos rectos; & ecce ſecundus. Vel vna earum diameter eſt; ſed non ſe ſecant ad angulos rectos; & erit tertius. Vel tandem neutra earum tranſit per centrum, ſiue ad angulos rectos, ſeu ad non rectos ſecet, & erit quartus caſus: Qui ſinguli diuerſas probationes expoſcunt.

Primus caſus. Sit igitur circulus A B C D, in quo duo diametri A D, & B C ſe ſecent in E dicit rectangula, ex ſegmentis B E & E C vnius, & ex ſegmentis alterius A E, & D E facta inuicem eſſe æqualia.

Patet, quia cùm ſegmenta ſint ſemidiametri ſunt omnia æqualia. Vnde & æqualia rectangula conſtituent.

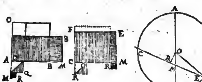


Caſus 2. Sit in circulo C E B, linea, quę rectè ſecet diametrũ in M. Dicit, quòd *quadratum* factum ex M E, & M C, *eſt æquale rectangulo* facto, ex A M portione diametri, & M B alia diametri portione. Quod vt demonſtretur trahendus eſt ſemidiameter O E.



Probatur verò ex propoſ. 7. ſecundi rectangulum nigrum factum ex A M, & M B vna cum quadrato paruo O M ex intermedia O M eſt æquale quadrato ex dimidia, quale eſt punctatum B O; quòd diameter A B ſecta ſit in æqualia in O, & non æqualia in M. Sed huic eidem quadrato ex dimidiâ æquale eſt quadratum ex dimidia M B; quale eſt M C iuncto tamen eidem quadrato M O. Ergo ſi hoc quadratum M O, tum à rectangulo nigro, tum à quadrato M C auferatur remanebunt quadratum rectangulumque nigrum inter ſe æqualia. Remanet probanda minor, quod duo quadrata M C, & M O paruum æquentur quadrato punctato B O, hoc autem patet. Nam quadratum O B eſt æquale quadrato O E cùm ſint ſemidiametri, & lineę æquales, ſed quadratum ex O E cùm ſit baſis ſubtenſa angulo recto M, ex propoſ. 11. ſecundi eſt æquale quadratis ex M E, quod eſt M C, & M O paruo. Ergo eiſdem quoque eſt æquale quadratum punctatum ex O B. *Quare rectangulum nigrum erit æquale quadrato* M C, quod probandum erat.

Caſus 3. Dicit tertiò. Quòd ſi linea C E ſecuerit A B diametrum, & non ad angulos rectos, adhuc vera erit propoſitio; Et quod rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, V. g. ſub C M, & M E erit æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis alterius, nẽpe diametri M B, & M A. Quod, vt probet, trahit perpendicularem à medietate lineę C E; nempe à puncto R, quę cadet ex propoſ. 1. huius Coroll. in centrum O. Deinde coniungit centrum cum extremo E rectâ O E.

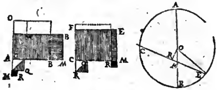


Probatur paulò operoſiùs, quam præcedens propoſitionis pars. Diameter A B eſt ſectus in O, in æqualia, & in M in non æqualia: Quapropter rectangulum ſub partibus inęqualibus A M, & M B contentum, quale eſt nigrum M A B, & quadratũ A Q ex intermedia M O ſeminigrum ſimul ſunt æqualia quadrato ex medietate diametri O B, ex propoſ. 7. ſecundi, quale eſt O B, & quod idem eſt propter æqualitatẽ linearum quadrato ex O E. Sed hoc quadratum ex O E, vel O B eſt quoque æquale propter propoſ. 11 ſecundi quadratis C R ex [illegible] hoc eſt ſeminigro, & ex R E punctato F R. [illegible] quadratum [illegible] R F punctatum vna cum qua[illegible] nigro annexo erit æquale rectãgulo nigro

nigro A M B ex ſegmentis diametris iondo com quadrato Q A ex O M.

Sed modò hoc quadrstum Q A, ex propoſ. II. ſecundi eſt æquale duobus O R ſeminigro, & M R minimo oigerrimo ob aogulum rectum R.

Quspropter poterimus ſubſtitoere loco illius Q A hęc duo, ſeminigrum ex O R, & M R minimũ oigerrimum. Qoare quadrstum punctatum R F, vt diximus, cum quadrato ſeminigro erit æqusle hoic rectangulo nigro A M A aſſociato eum quadrato eodem ſeminigro O R, & mioimo nigerrimo M B.

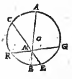


Abijciatur itaque sb vtriſque comes iſte ſeminiger O R, & remsnebũt adhue æqualia rectangulum nigrum A M B com minimo nigerrimo quadrato, quod remanſit, & quadratum puoctatum R F factum ex dimidia R B.

Sed huic quadrato punctato R F facto ex dimidis R A eſt æqoale rectangulum nigrum factum ex ſegmentis inęqualibos C M, & M E linęę C A, nimirum C A voã, cum quadrato ex iotermedia R M facto, quod eſt minimum nigerrimum R M, ex propoſ. 7. ſecundi; Siquidem linea C E eſt diuiſs in æqoalia in R, & non æqualia io M Quare duo rectsngula nigra A B M nimirum ex ſegmentis diametri, & C A ex ſegmentis alterius aſſociata duobus qoadratis minimis nigerrimis ſunt æqualia vni tertio; oempe quadrato R F ex B E. Vnde erunt æqualia iooicem. Tolle itaque illa quadrsta minima nigerrima, cùm ſint eiuſdem quantitatis, vtpote eiuſdem iotermediæ R M, & *remanebunt æqualia rectangulum nigrum, ex ſegmentis diametri* A M B; & ex *ſegmentis alterius nigrum rectangulum* C E.

Caſus 4. Sint tandem duę rectę, quę in eirculo quomodocumque ſe ſeceot C E, & N R in M. Ducaturque per punctom M ad centrum diameter A R. Dieit; qoòd *rectangulum* ex ſegmentis linęę C E *æquale* eſt *rectangulo* ex ſegmentis linęę R G.

Probatur. Nam ex pręcedenti tertia parte rectaogulom ex ſegmentis C M, & M A linęę C E eſt æquale rectangulo ex ſegmentis diametri A M, & M B. Sed ex eãdem rectangulum ex ſegmentis G M, & M R lioeę G R eſt eidem rectangulo ex ſegmentis diametri A M, & M B æquale. Ergo rectangulum ex ſegmentis lineę C B, & rectangulum ex ſegmentis lineę R G ſunt æqualia inuicem.



COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Qoomodo datis duobus lineis inæqualibus poterimus eas ita ſecare, vt ex earum ſegmentis rectanguls componantur æqualia. Nam ſi eas in eirculo accomodamus, ita ut ſe inuicem ſeceot; certum erit, quòd rectangula ex ſegmentis ija confecta æquabuntur ad inuicem.

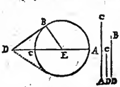
THEOR. II. PROP. XXXVI.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum tangat, altera ſecet. Rectangulum, quod ſub tota ſecante, & portione exterius inter punctum aſſumptum, & conuexam peripheriam intercepta comprehenditur, æquale eſt ei quadrato, quod deſcribitur à tangente.

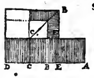
DVos caſus hæc propoſitio eoumerat. Nam ſecans, vel per centrum tranſit, vel non. Si per eentrum tranſest, vt eſt in appoſita figura D A

Primus caſus erit, & intendit demonſtrare rectangulum ſub tota D A, & ſub portione D C, quę inter peripheriam coonexam, & punctum aſſumptum mediat, comprehenſum nigrum eſſe æquale quadrato rectę tangenti D A; Quod, vt perficiat, à puncto coontactus ad centrum ducit B E, quæ ex 20. tertij perpeodicularis erit.

Ex propoſ. 8. ſecuodi cùm diameter ſectus ſit



IO E in partes æquales, & ei adiecta fuerit recta exteriùs D C, rectangulũ, quod eſt nigrũ D A comprehenſum à tota D A, & adiecta D C, com quadrato ex dimidia C E nimirum radio, quod eſt C A, cuius Gnomon niger eſt æquale qnadrato ex D B dimidis, & adiecta coofecto, nimirum maximo D B.



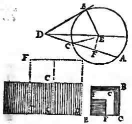
Sed huic quoque maximo D B, ex propoſ. II. ſecondi ſunt ęqualia duo quadrata pooctatũ ex D B, & alterum ex radio B E, quod eſt idem, ac illud, coius Gnomon niger C E B.

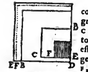
Ergo rectangulom nigrum D A iuncto eodem qnadrato C E A, cuios Gnomon oiger eſt, æquale inueoitur iſtis duobus, punctato nimirum iuncto eodem C A B. Quare, ſi hoc C E B auferatur ab vtriſque *remanebunt rectangulum nigrum* D A, & *quadratum punctatum* ex D B *tangente æqualia*.

Dicit quoq; hanc propoſitionem verificari quãuis *recta ſecans per centrum non traſeat*, vt eſt in ſeq. figura D A. Nam tota D A, & portio D C exterius intercepta ſaciet rectangulum æquale quadrato tangentis B D. Vt verò probet. In primis trahit à puncto cootactus ad centrum perpendicularem A E, ex 20 huius. Rurſuſque diuiſâ C A biſariam in F, ab eo ducit perpendiculsrem ad centrum E, ex 13. huius. Deiode ducit radium C E.

Prob. Quadratum punctatum ex D F dimidiâ, & adie-

& adiectâ eſt ęquale rectangulo nigro ex tota AD, & adiecta DC, comite quadrato ex dimidia CF ex propoſ. 8. ſecundi, & addito vtrinque quadrato minimo EF, quadratum EF cum punctato FD, & rectangulum nigrum cum eodem EF, & alio quadrato CF iam ſibi comite remanebunt æqualia.



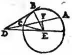


Hęc autem duo quadrata comitantia rectangulum nigrum, vtpote ex cruribus CF, & FE æquantur quadrato ex ſemidiametro quale eſt CEB, cuius Gnomon niger, ob rectum angulum F, ex propoſ. 11. ſecundi. Ergo poſſumus ſubſtituere hoc pro illis, & ſic rectangulum nigrum quadrato hoc ECB comite æquatur quadrato DF punctato, & addito minimo nigro FE.

At hęc duo punctatum, & nigrum minimum æqualia ſunt maximo quadrato DE, vtpote facto ex baſi, & ſubtenſa angulo recto F, ex prop. 11. ſecundi. Quamobrem, & rectangulum nigrum comite quadrato ECB ex radio EC nuper ſubſtituto æquabitur ipſi maximo ED. Sed & huic idē eſt æquale quadratum ex tangante DB, & quadratum ECB ex radio EB, ex propoſ. 11. ob rectum angolum B. Ergo & rectangulo nigro vna cum quadrato ECB erunt æqualia.

Tolle itaque ab vtriſque quadratum ECB ex radio BE, aut EC, quod idem eſt; *remanebuntque æqualia quadratum* DB, *& rectangulum nigrum ex* DA, *&* DC.

Quod & verificabitur ſi linea DA non cadat ad alteram partem, ſed ad eaſdem partes, vt in figura ſecunda videre licet.



COROLLARIVM I.

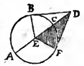
HInc manifeſtatur; Quod ſi plurimę lineę cadant ſecantes circulum, omnia rectangula à totis ijs lineis, & earum partibus extra circulum remanentibus inter ſe eſſe æqualia; quoniam ſunt æqualia omnia vni tangentis alicuius ab eodem puncto exeuntis quadrato.

COROLLARIVM II.

MAnifeſtum quoq; eſt tangentes ab eodem puncto ductas inuicem æquales exiſtere. Ratio eſt; quia omnes lineę, quæ tangunt, faciunt ſuum quadratum rectangulo alicui ſecantis æquale; Propterea, & quadrata debebunt eſſe æqualia. Quare & latera eorum quadratorum æqualia eſſe debebunt.

COROLLARIVM III.

COnſtat quoque ab eodem puncto extra circulum aſſumpto non; niſi duas, tangentes duci poſſe: Alioquin; ſi alia duceretur, aut infra BD, aut ſupra caderet, & ſic ducta BE



eius contactum coniungente eſſet maior, vel minor, quòd eſſe nequit, & angulus ad B eſſet maior, vel minor recto, quod, nec eſſe poteſt.

COROLLARIVM IV.

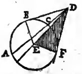
COnſtat quoque, quòd ſi duę rectę æquales à quolibet puncto exteriùs aſſumpto in conuexam peripheriam incidant, & vna earum ſit tangens, alteram quoque tangere; Quia ſi non tangeret, ſecaret. Quare ad alteram partem punctata tangens duci poſſet, quę, & eſſet æqualis tangenti alteri, V. g. DB. Quare in circomferentiam ab eodem puncto inciderent tres æquales contra documenta propoſ. 22. huius.

THEOR. III. PROP. XXXVII.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat. Sit autem, quod ſub totâ ſecante, & exteriùs inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato, incidens ipſa circulum tanget.

EXtra circulum datum ſumatur punctum D, & ex puncto duæ rectæ in circulum cadant, quarū vna ſecet, & faciat rectangulū ſub ſuo ſegmento DC, & totá AD comprehenſum æquale quadrato ex tota alterius incidentis, V.g. ex BD. Dicit *eam* BD *circulam tangere in* B. Quod, vt demonſtretur, ducenda eſt tangens aliqua, V.g. DF, & coniungenda ſunt cum centro punctum contactus huius recta EF, & punctum B incidentię alterius lineę rectâ BE; Et ſi non tranſeat ſecans DA per centrum, ducenda eſt altera ſecans, quę per centrum tranſeat, quę ſit DE.

Probatur. Nam triangula album, & nigrū ęqualia ſunt lateribus ſibi correſpondentibus: Quare ex 23. primi anguli F, & B erunt ęquales; Sed angulus F rectus eſt, ex propoſ. 20. quod DF circulum tangat. Ergo & angulus B rectus erit, & cōſequēter ex Coroll prop. 18. DB *circulum tanget.*



Remanet probandum. Quòd triangula latera habeant correſpondentia ęqualia. Nam baſis DB commu-

communis eſt, erus B E; & E F radius eſt: Quare remanet probandum de altero crure D E, & D F, id verò oſtenditur. Nam quadratum factum ex D F eſt ęquale rectangulo facto ex tota A D, & ſegmento exterius inter peripheriam, punctumque aſſumptum intercepto D C. Sed & huic eidem rectangulo ponitur in propoſ. hac ex ſuppoſitione ęquale quadratum ex B D: Sed quadrata ęqualia facta ſunt ex ęqualibus lateribus. Ergo, & latus, cruſque D B eſt ęquale cruri D F.

Collige hinc lineam à puncto exterius aſſumpto per centrum ductam diuidere angulum F D F comprehenſum à tangentibus ab eodem puncto naſcentibus bifariam. Ratio eſt, quia probata ſunt duo triangula hinc, inde ęqualia. Quare, & è conuerſò recta diuidens bifariam angulum D B F neceſſariò per centrum tranſibit; Quòd ſi non tranſiret per centrum alibi tranſiret. Vnde ducta, quę tranſiret per centrum, D E, angulum D B F bifariam diuideret: Eſt autem impoſſibile, quòd angulus in duobus locis bifariam diuidatur.



TRA-

TRACTATVS VII.

In Librum quartum Elementorum. De inſcriptione, & circumſcriptione figurarum in circulo.

LIBER quartus agit de deſcriptione figurarum reſpectiuè ad circulum; licet enim triangula, & quadrata poſſint ſine circulo deſcribi, commodiùs tamen cum reliquis figuris, aut intra circulum, aut circa circulum deſcribuntur. Vſus verò huius Libri pernecceſſarius eſt, tum ſolidis in ſphæra inſcribendis, & circumſcribendis, tum ad comparationem externæ figuræ ſolidæ, cum interna, ex qua Archimedes ſoliditatem ſphæræ adinuenit, tum ad lineas, chordaſque arcuum inueniendas, & tandem ad Militares delineationes fortalitiorum.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam propoſitiones ipſas aggrediamur aliqua principia, definitioneſque ad hunc librum, ſpetialiter ſpectantes oportet agnoſcere; iſtæ verò ſunt.

DEFINITIO I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur; cùm ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur anguli ſingula latera eius, in qua inſcribitur tangunt.

Cùm debeat agere Euclides de figurarum inſcriptionibus, & circumſcriptionibus paucis declarat, quid ſit figuram inſcribi, & circumſcribi: Quare dicit; quòd, ſi ſit triangulum A B C, cuius vertices omnes angulorum tangant latera alterius, vt tangit triangulum prædictum latera figuræ E F G in punctis A, B, & C; quòd figura tangens in verticibus ſuis erit inſcripta, altera tacta in lateribus vocabitur circumſcripta.

DEFINITIO II.

Similiter etiam figura circumſcribi figuræ dicitur cum circumſcriptæ latera ſingula tangunt angulos ſingulos inſcriptæ.

Hæc Definitio eſt oppoſita præcedenti; definitque circumſcriptam E F G, quæ dicitur talis eò quod latera eius tangant angulos A, B, & C alterius inſcriptæ.

DEFINITIO III.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum figuræ inſcriptæ ſinguli anguli tangunt circuli peripheriam.

Sic triangulum A B C circulo inſcribi dicetur; quia extremi apices angulorum C B A eũ tangunt.

DEFINITIO IV.

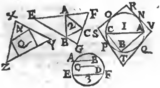
Figura verò rectilinea circulo circumſcribi dicitur; cùm ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera tangunt circuli peripheriam.

Sic quadrilaterum R V S T circumſcribitur circulo; quia eius latera circulum tangunt in punctis N O P Q, vt fig. 1.

Quare patet; quòd quadratum in triangulo, nec quælibet figura poſſit inſcribi in alia; cùm aliquod latus inſcriptæ, eſt idem cum circumſcribentis latere, vt quadratum Q tangit circumſcriptam figuram X Z Y: Hanc tamen inſcriptionem licet impropriam admittit Clauius in fine Lib. 6. num 16.

DEFINITIO V.

Similiter circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera figuræ circumſcriptæ contingit.



DEFINITIO VI.

Circulus autem circa figuram rectilineam deſcribi cum circuli peripheria tangit ſingulos angulos figuræ inſcriptæ.

Sic circulus N O P Q erit circumſcriptus triangulo; quòd apices eius tangat in A B C: At inſcriptus quadrilatero R V S T; quòd eius latera tangat in punctis N O P Q.

DEFINITIO VII.

Recta linea circulo accomodari, ſeu coaptari dicitur; cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Ita nec recta A B, nec C D eſt coaptata circulo; quòd eius duo extrema non tangant circu-

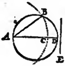
lum;

lum ; ſed ſolùm E F ; quòd eius duo extrema circulum tangant, & in circulo ſint vt fig. 3.

LEMMA PROBLEMATICVM PROP. I.

In dato circulo rectam lineam accomodare, quæ circuli diametro non ſit maior.

COaptanda ſit in circulo A E D recta æqualis rectę E, quæ eſſe debet nō maior diametro; quia diameter eſt maxima linearum, quæ in circulo capere poſſunt, vt docuit 17. propoſ. tertij. Ducatur itaque diameter A C D. Et ſi fuerit diametro æqualis data E, factum erit quod quæritur. Nam coaptatus, & accomodatus diameter ęqualis rectæ eſt. Si verò E minor fuerit ; Ex diametro abſcindatur ei æqualis, vt A C, & centro A, interuallo verò C, circulus punctatus deſcribatur ſecans circulum priorem B : *Nam ducta recta* A B *accomodata circulo* A B D *æqualis erit datæ* B.



Probatur, quia eſt ęqualis, ipſi portioni diametri A C, quàm detruncauimus; ſunt enim & A C, & A B radij, & ſemidiametri.

EXPENSIO II.

De mutua circuli, & trianguli inſcriptione, & circumſcriptione.

HÆc Expenſio vtilis admodum eſt precipuè quod 5. propoſ. aperuerit ianuam, datis tribus punctis peripheriam, quæ tranſit per illa, inueniendi; & data portione circuli centrum reperiendi, quæ inuentio immenſos vſus habet.

PROBL. I. PROP. II.

In dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

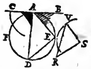
SIt deſcribendum in circulo A D E triangulum A E D æquiangulum dato triangulo cuicumq; V. g. V S R.

Ducatur recta tangens circulum in A, quę ſit C B, & à puncto A contactus recta ducatur A D faciens angulum nigerrimum apud A cum tangēte æqualem angulo S; ducatur quoque alia ab eodem puncto contactus, quę ſit A E, quę faciat cum tangente angulum nigrum æqualem angulo R, coniungaturque E D: *Eritque triangulum constitutum æquiangulum triangulo* V S R.

Dices. Lineas A E, & A D poſſe cadere vnā ſuper aliam, aut vnā vltra aliam; itant non cadat in E; ſed ad alteram partem, V. g. F. Reſpondetur enim id non poſſe euenire. Quia duo anguli nigerrimus, & niger ſunt minores duobus rectis, quod ſint æquales duobus angulis R, & S, qui in quocumque triangulo ſunt minores duobus rectis, cum omnes tres anguli ſint æquales duobus rectis, ex propoſ. 17. primi. Deberent autem eſſe duobus rectis æquales, ſi vna linea caderet ſuper aliam, ex propoſ. 10. primi, quia tunc inſiſteret tangenti C E, quamobrem maiores eſſe quoque deberent, ſi altera, V. g. A E in alterius partem tranſiret, puta inter A C, & A D in F. Soluto hoc ſcrupulo, propoſitio

Probatur. Quę ſunt æqualia vni tertio, ſunt æqualia inuicem. Sed angulus S ex conſtructione eſt æqualis angulo nigerrimo apud A, & eidem nigerrimo eſt quoque æqualis angulus albus E in alterno ſegmento A E D, ex prop. 29. Lib. 3. Ergo inter ſe angulus S, & E erunt æquales.

Eodem modo angulo nigro apud A eſt æqualis ex conſtructione angulus R, eidemque nigro apud A eſt æqualis angulus apud D in ſegmēto A F D E alterno, ergo R, & D anguli inter ſe erunt æquales.



Sed inſuper anguli trianguli cuiuſcumq; ſunt æquales duobus rectis. Quare etiam horum duorum triangulorum A E D, & V S R anguli duobus rectis æquabuntur. Ablatis itaque à quolibet duobus æqualibus, à dato V R S angulis R, & S, & ab inſcripto A E D angulis E, & D correſpondenter æqualibus, reliqui albus apud A, & V erunt inuicem æquales. Quamobrem omnes anguli A, E, & D trianguli inſcripti erunt æquales omnibus angulis V, S, & R trianguli dati, prout oportebat oſtendere.

PROBL. II. PROP. III.

Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

SIt datum triangulum nigrum, & circulus E A E; oporteatque circa hunc circulum deſcribere triangulum æquiangulum triangulo nigro dato.

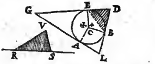
Prolungetur baſis R S, vt eueniant duo anguli exteriores albi B, & S. Repertoque iuxta 1. prop. tertij centro C, ducatur vtcumque recta E C; Et deinde alia, nempe A C è centro C educatur, quæ cùm primo ducta capiat angulum ad cētrum cruce notatum æqualem angulo externo albo R dati trianguli nigri. Rurſuſque alia ducta C B cum hac alium angulum C efficiat ad centrum æqualem alteri angulo exteriori albo dati trianguli nigri ad S. Quibus tribus ſemidiametris ducantur perpendiculares, quę ex Coroll. propoſ. 18 tertij erunt quoque tangentes, quę productę conuenient inuicem in punctis G. D. L. & *conſtituent triangulum* G D L *circumſcriptum dato triangulo nigro* æquiangulum.

Dices Lineas G B, & L B non coituras in D.

Reſpondetur enim ſpatium ad centrum clauſum rectis C B, & C E ſtellula notatum eſſe angulum, & conſequenter tractam rectam punctatam F B. (Debet enim, ſi ſic videbitur, trahi) incidentem in dictas rectas G B, & E D facere angulos ad B, & E nigros minores duobus rectis; cū radij C B, & C E angulos rectos conſtituant ijs maiores, vt vides: Quare ex def. 18. primi neceſſariò conuenient in D lineę G B, & B L; quod idem poterit oſtendi de linea G A, & E D. Quæ conuenient in L, propter quod ſpatium C ad centrum ſit angulus ex conſtructione, & de linea L A, & D E; quę conueniet in G; quòd ſpatiū cruce ſignatū ex coſtructione angulus factus fuerit.

Quod

Quod verò etiam ſpatium ſtellula notatum angulus ſit, quod præſuppoſui, ſic oſtenditur. Nam Coroll. 1. propoſ. 32. primi, totum ſpatium circa centrum, quod litera c, cruce, ſtellula notatum eſt, quatuor rectis æquale eſt. Item anguli ad R albus externus, nigerque internus ſunt æquales duobus rectis, ex propoſ. 10. ſicut & anguli ad s externus albus, & internus niger ſunt æquales duobus rectis, qui duo, & duo ſimul ſunt quatuor. Quamobrem, cùm angulus ad centrum cruce ſignatus, & alius litera c notatus facti ſint æquales albis, & externis ad s, & R; ſpatium ſtellula notatum erit æquale duobus nigris internis ad s, & R. Sed illi duo interni ſunt minores, ex prop. 17. duobus rectis; Ergo & ſpatium ſtellula notatum minus erit duobus rectis. Quare lineę E c, & c B à puncto centri ductę non erunt in directum, ex propoſ. 11. primi; Sed facient angulum, & quidem non verſus crucem. vel c illi enim anguli maiores ſunt duobus rectis. Quare angulum efficient verſus ſtellulam lineis E c, & c B concluſum.



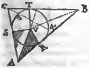
Probatur modò. Quòd hoc triangulum ſit æquiangulum. Nam quadrilineum GEAC, quatuor angulos habet æquales 4. rectis vt 17. pr.. Quare ablatis duobus rectis A; & E per imaginationem, reliqui duo remanebunt duobus rectis æquales. Sed & anguli dati trianguli ad R externus albus. Internus niger ſunt duobus rectis æquales; Ergo erunt æquales inuicem ſimul ſumpti. Sed angulus cruce notatus eſt æqualis, quòd ita fecerimus angulo externo ad R dati trianguli; Ergo oppoſitus G erit æqualis nigro ad R interno. Eodem modo probabitur de angulo L; quòd ſit æqualis angulo nigro ad s.

Sed omnes anguli cuiuſcumque trianguli ſunt duobus rectis æquales. Ergo, cùm duo interni s, & R ſint æquales duobus G, & L; *Reliquus* D. *circumſcripti* angulo reliquo v dati trianguli remanebit æqualis. *Quare anguli* G L D *æquabuntur angulis* R V S. Quod, &c.

PROBL. III. PROP. IV.

In dato triangulo Circulum deſcribere.

Sit deſcribendus Circulus in dato triangulo A B C. Diuidantur per punctatas AV, VB duo quilibet anguli biſariam angulus A, & angulus B, & à puncto V, in quo ſe interſecant punctatæ ducantur rectæ lateribus perpendiculares, quæ ſint V T, & V S, V R. Quæ probabuntur æquales. Vnde per earū extrema tamquam ſemidiametrorum poterit peripheria tranſire S T R.



Probatur itaque lineas perpendiculares ad latera V R & V S, primò eſſe æquales. Anguli ad A albus, & niger per diuiſionem, quam linea punctata facit, ſunt æquales, angulus quoque niger R, & niger S ſunt æquales; cum recti ſint, baſis vero A V eadem in vtriſque triangulis nigro, & ſemialbo.

Sed ſi duo triangula habent duos angulos æquales inſuper, & alios duos item æquales, latusq; aliquod æquale, æqualia quoque eſſe, quoad reliquos angulos, & latera ex propoſ. 27. primi conſtat.

Ergo latera V R, & V S ęqualia erunt inuicem. Idemque demonſtrabitur de V R, & V T. Quare tres lineæ S V, & T V, & R V erunt æquales; poteruntq; deſeruire pro ſemidiametris, & V in quo conueniunt pro centro. Quare deſcriptus ea V circulus tanget puncta S T R laterum trianguli. Vnde triangulo erit inſcriptus.

COROLLARIVM I.

Collige ex Io. Baptiſta Benedicto duo latera ſuperare reliquum lineis, & ſegmentis ſuis tangentibus circulum v. g. duo latera C B, & A C, alterum A B ſuperare ſegmentis tangentibus C T, & C S. Nam demonſtratum eſt baſim A R eſſe æqualem baſi A S ob æqualitatem ſuorum triangulorū, & quia ſunt tangentes, vt ex Corol 1. prop. 36. tertij, & idem dicas de baſi T B, & B R. Quare hæc duo ſegmēta A S, & B T reliquum crus A B integrabunt, & reſidua remanebunt, quibus excedunt S C, & C T, quæ etiam ſunt tangentes, & conſequenter æquales, & ſi angulus C rectus eſſet, quod hic non eſt, ęquales etiam ſemidiametris S V, & V T.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoque quòd, cùm ſegmenta exceſſus huius C S, & C T ſint tangentes; eorum quadratum, ſi quodlibet ſegmentum ſumatur ſeorſim, erit æquale ex propoſ. 36. tertij rectangulo facto, & tota ſecante C 4. & ſegmento extra circulum remanente C 3. etiamſi C 4. tranſiret per centrum. Quare ſequitur quoque ſi ſuper duo ſegmenta exceſſus, tamquam vna linea fiat quadratum. Illud ſit eidem rectangulo quadruplum: Quoniam eſt quadruplum quadrati ex vnico ſegmento facti vt colleg. ad propoſ. 6. ſecundi. Quod ſi angulus C rectus ſit, erit hoc quadratum ex duobus ſegmentis factum æquale quadrato ex diametro deſcripto. Quoniam hæc duo ſegmenta ei diametro æquantur ea ratione, vt dixi in primo Corol. quod ęquantur duobus ſemidiametris.

PROBL. IV. PROPOS. V.

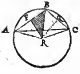
Circa datum triangulum circulum deſcribere.

Sit triangulum A B, & B C, circa quod debeat circulus duci. Diuidantur biſariam quæli-bet duo eius latera, & (non quod ſit neceſſarium, ſed facilitatis gratia) aſſumantur duo latera, quæ maiorem angulum claudant, vt A B, & B C, à punctiſque diuiſionis duæ perpendiculares excitentur F R, & H Q, quæ conuenient in R; vt patet, ſi duceretur recta ab F in Q. Nam faceret, cum punctatis perpendicularibus angulos minores rectis. Quare ex prop. 18. pr. conuenient Coniungantur itaque vertices trianguli rectis A R, &

B R, &

BR, & CR. *Nam cum hæ ſint omnes æquales poterunt deſeruire p o ſemidiametris peripheria* ASC, *& punctum* R *pro centro Pro circulo circa vertices extremos trianguli* ABC *tranſeunte.*

Probandum itaque primò eſt; quod rectæ AR, & RB ſint æquales.



Triangula nigrum, & album ſunt æqualia. Quare, & baſes AR, & BR erunt æquales. Quòd vero triangula ſint æqualia, probatur. Nam vnum crus AF nempe albi eſt æquale alteri FB nigro ſibi correſpondenti. Crus antem FR punctatum commune. Anguli quoq; ad F niger & albus æquales, eo quod recti. Ergo ex propoſ. 22. primi tota triangula nigrum nempe, & album erunt æqualia.

Probatur deinde, quòd etiam linea RC ſit æqualis lineæ RB, & ideo æqualis quoque lineæ RA Quoniã triangula RBQ, & RQC habent crus BQ, & QC; æqualia; crus verò RQ commune angulosque ad Q rectos. Vnde baſes ſubtenſæ RB, & RC erunt æquales. *Et ſic circulus centro* R *per* ABC *tranſibit*, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc elicitur, Quod ſi cẽtrũ intra triangulũ cadat, omnes anguli triãguli dati ſint acuti. Quia ſunt in maiori circuli ſegmento. Si verò centrum cadat in aliquo laterum angulum oppoſitum huic lateri eſſe rectum. Quod ſit in ſemicirculo, & latus in quo centrũ ſit diameter. Si verò cadat intra triãgulũ, angulũ lateri, cui cẽtrũ prope, eſt oppoſitũ, eſſe obtusũ: quia eſt in minori ſegmento, quæ omnia patent ex propoſ. 28, l. 3.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque ſequitur, id quod ſupra diximus propoſ. 11. l. 3. quomodo datis tribus punctis non in directum poſitis inueniatur circumferentia, quæ tranſeat per ea puncta: nam ſi ceg tes apices trianguli ASC eſſe tria puncta data, & ea iungas lateribus BC, & BA, & cætera præſtes vt in propoſ. propoſitum exequeris, & eadem probatio militabit. Vide quæ citata prop. 11. l. 3. diximus.

EXPENSIO III.

De mutua quadrati, & circuli inſcriptione, & circumſcriptione.

Sicut facilis eſt hæc quæſtio; ita non admodum vtilitatibus abundat: vnde in illa immorandum non eſt.

PROBL. I. PROPOS. VI.

In dato circulo quadratum deſcribere.

Sit datus circulus ABCD, cuius centrum T, in quo deſcribendum ſit quadratum. Ducantur duo diametri ſecantes ſe ad angulos rectos AC, & BD Iunganturque extrema eorum quatuor lineis, vt AB, & BC, & CD, & DA. *faciatque quadratum in dicto circulo inſcriptum.*

Probatur triangula alba, & nigra ſunt æqualia ex 14. propoſ. primi propter æqualitatem laterũ, qui ſunt ſemidiametri, & angulorum ad centrum T albi, & nigri æqualitatem cum omnes fecerimus rectos; quare, & baſes BA, & AD, ſic BC, & CD erunt æquales.



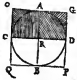
Aut breuiùs anguli ad centrum ſunt omnes æquales. Quare ex 26. tertij arcus quibus inſiſtunt, & ſubtentæ ijs erunt æqualia. Inſuper, & anguli omnes A, & B, & C, & D ſunt æquales; cum ſint in ſemicirculis. Ergo figura ABCD erit quadratum.

PROB. II. PROPOS. VII.

Circa datum circulum quadratum deſcribere.

In circulo ducantur duo diametri ad rectos angulos AB, & CD; ad quorum extrema ducantur perpendiculares OG, & GP, & PQ, & QO, quæ conuenient in quatuor punctis, *& continent quadratum* OGQP *circumſcriptũ circulo* ACBD.

Probatur latera poſtremò tracta ſunt lineæ perpendiculares diametris, pro vt fecimus, ſicuti, & illi ſibi inuicem ſunt perpendiculares.



Quare latera erunt diametris parallela ex 28. primi, cum anguli interni v. g. nigri R, & D ſint recti. Propterea ex prop. 31 inuicem quoq; erunt parallela hæc latera, & ſpatium nigrum) erit parallelogramum ſicut, & album.

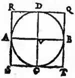
Sed omne parallelogramum ex propoſ. 34. primi habet angulos oppoſitos æquales: Ergo anguli O, & G nigri Q, & P albi ſunt recti: Quoniam anguli oppoſiti nigri ad C, & D, ac albi ad D, & C eis oppoſiti ſunt recti. Inſuper ex eadem propoſ. & latera oppoſita æqualia. Quare latera OG, & QP, ſicut vt OQ, & GP æqualia erunt diametris, & ideo inter ſe. Vnde figura OGQP erit quadratum circulo circumſcriptum.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit quadratum RQST, in quo neceſſe ſit deſcribere circulum. Diuidantur ſingula latera bifariam in ADCB, rectæque ducantur AB, & CD. Et vbi ſe decuſſant in V fiat centrum Interuallo, vt placet v. g. VB. *Nam circulus tranſibit per omnia alia puncta* D, A, C *ea lambendo.*

Probatur quoniam VB lineæ VA, VC, & VD, ſunt æquales: Ergo pro diametris deſeruire poſſunt. Quod verò ſint æquales, patet, ſunt enim inter parallelas æquales, & ſimul ſunt parallelæ æqualium, cùm de medietate in medietatem ductæ ſint

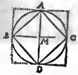


ſint: Quapropter ſicut ſunt æquales dimidio laterum, ita erunt æquales inter ſe. Nam ex propoſ. 33. primi, quæ pararellas, & æquales ad eaſdem partes coniungunt, inter ſe æquales, & parallelæ ſunt.

PROB. IV. PROPOS. IX.

Circa datum quadratum circulum deſcribere

TRahantur in quadrato dato A B C D duo diametri ad angulos rectos, A D, & B C: Et puncto M, in quo ſe ſecant, facto *centro* interuallo M C ducatur circulus. Iſte enim per vertices B, & A, & D tranſibit, & ideo erit circa datum quadratum, circulus circumſcriptus.



Probatur Angulus B A C rectus, & laters B A & A C æqualia. Ergo anguli ad baſim B, & C æquales in triangulo B A C. Ideo ſemirecti ex propoſ. 17 Cor. 3. primi. Idem oſtenderur de alija angulis B A M, &c. Quaderè lineæ B M, & M C, ſicut, & A M, & M D erunt æquales, vtpote baſes æqualium angulorum habentium angulos æquales, nimirum ſemirectos: Ergo centro M circulus ductus per A B C D vertices tranſibit: Vnde erit circumſcriptus circulus quadrato B A C D.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quadratum circumſcriptũ eſſe duplum quadrati inſcripti; Eo quod latera inſcripti ſint diagonales quatuor quadratorum, in quæ diuiſum eſt circumſcriptum punctatum. Vnde illa ex prop. 34. lib. 1. diuidunt bifariam. Cum ergo quadratum inſcriptum occupet quatuor medietates circumſcripti ſolummodo: Circumſcriptum erit quatuor medietatibus maius, Propterea erit duplum.

EXPENSIO IV.

De Pentagoni, circuliq; mutua inſcriptione, & circumſcriptione.

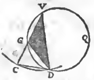
DIfficilior eſt hæc quæſtio, quam præcedens: ſed cum maiori vtilitate coniuncta eſt, ſi quidem fundamentum eſt Icoſaedri ſphæra inſcribendi, & inueniendi chordas, quamplurimas, vt ſuo loco docebimus, in trigonometria neceſſarias.

LEMMA. PROPOS. X.

Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrumque eorum, quæ ad baſim ſunt, angulorum duplum reliqui.

LInea quæcumque mediâ, & extremâ ratione ſecetur, vt docet 15. prop. ſecundi; ita vt rectangulum ſub ſegmento, & tota cõprehenſum C G, & C V æquale ſit quadrato ex maiori ſegmento facto, nimirum G V, In hoc itaque extremo maioris ſegmenti V facto centro deſcribatur circulus ad interuallum totius V C; & ab extremo C accomodetur in hoc circulo æqualis linea maiori ſegmento V G, quæ ſit C D coniunganturq; extrema V, & D crure V D. Factumque erit *triãgulũ, cuius duo anguli ad baſim* C, *&* D *reliquo* V *ei inſiſtenti erunt duplicia*. Quod repoſcit propoſitio.

Quod vt oſtendatur ducenda eſt D G punctata, & per tria puncta V nimirum G, & D ducendus eſt circulus, ex 5. propoſ. huius.



Probatur anguli ad baſim C, & D in omni triangulo æquicruro ſunt æquales ex 14. propoſ. primi, Sed vnus ex iſtis, nimirum D eſt duplus anguli V. Ergo, & alter.

Probatur minor. Quod D ſit duplus anguli V. Siquidem angulus V eſt æqualis parti albæ anguli D. Sed pars alba eſt medietas anguli totius D: Ergo angulus V eſt minor dimidiò angulo toto, vtpote eius medietati æqualis.

Si neges maiorem propoſitionem. Nempe angulũ V eſſe ęqualem parti albę D anguli ita oſtendetur.

Linea C D tangens eſt. Quare angulus albus ad D à tangente C D, & ſecante G D factus ex propoſ. 29. tertij ęquabitur angulo V. alterni ſegmenti G V Q D (ſiquidem D G peripheria remanet pro alio ſegmento) Quare erit ęqualis ei. Quod verò C D tangens ſit, non eſt dubitandum ex propoſ. 37. tertij. Quoniam rectangulum ſub tota ſecante V C, & ſegmento exterius aſſumpto G C eſt ęquale quadrato facto, ex C D. Nam D C fecimus ęqualem lineę G V, quę talis eſt, vt eius quadratum ſit ęquale rectangulo ſub tota V C, & portione C G comprehenſum.

Si vero neges minorem; nimirum albam partem eſſe medietatem totius anguli D.

Probatur. Triangulum nigrum eſt ęquicrurum; Ergo anguli nigri V, & D ad baſim ſunt ęquales. Sed angulus ad D albus eſt ęqualis angulo V, vt diximus. Ergo eſt medietas totius anguli D, & pars nigra alia medietas: Cùm tum pars alba, tum nigra anguli D ipſi angulo V ęquentur, & ideo inter ſe.

Quod verò triangulum nigrum ſit ęquicrurum; probatur. Angulus C eſt ęqualis angulo D, vt diximus, ãgulus D eſt ęqualis ſuę parti nigrę & angulo nigro V, vt probauimus. Sed angulus albus G vtpote exterior, eſt ęqualis ex propoſ. 17. primi iſtis duobus nigris interioribus, & oppoſitis ad V, & ad D, Ergo eſt etiam ęqualis angulo C quamobrem, ex prop. 15. primi, angulus C, & angulus G, tanquam ęquales, habebunt baſes ęquales C D, & G D. Sed C D eſt ęqualis cruri V G ex effectione; Ergo, & G D erit crus eidem ęquale.

COROLLARIVM

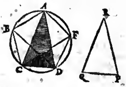
QVare ſi partiamur duos rectos angulos in 10. partes angulus v duas partes ſibi vſurpabit. Reliqui verò ad baſim quilibet ex eis continebit quatuor partes. Quia omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales, ex prop. 17 primi. Quare cum c, & d ad baſim contineant duplum, vt oſtenſum eſt; ſi angulus ad a aſſumat duas partes; reliqui, vt 10. partes duorum rectorum compleant, quilibet quatuor partes ſibi vſurpare debebit.

PROB. I. PROP. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

AD deſcribendum in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtruatur triangulum Iſoſceles r q p habens duos angulos ad baſim duplos reliqui iuxta præcedentem propoſ. & in circulo a b c d f dato triangulum fiat habens angulos omnes ei æquales, vt ex propoſ. 2. huius efficere potes, & ſecundum documenta propoſ 4. primi diuide angulos c, & d biſariā rectis cf, & db coniungeque puncta rectis a b, & b c, & rurſus alia rectis a f, & f d. Eritq; hac figura pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.

Pars I. Probatur, nempe quod ſit æquilaterum. Duæ partes anguli d nigra, & nigerrima, ſicut, & aliæ duæ anguli c nigra, & nigerrima ſunt æquales nigro angulo ad a: Siquidem ambæ ſumptæ ſimul duplæ ei ſunt. Ergo ex propoſ. 26. tertij, & arcus, ſuper quos inſiſtunt. Vnde, & rectæ hos arcus ſubtendentes, nempe latera pentagoni a b, & b c & ext. ſunt inuicem æquales.



Probatur 2. Pars de angulis. Nam æqualibus quoque periſpherijs inſiſtunt. Ergo ex propoſ. 27. tertij inter ſe ſunt æquales. v. g. angulus pentagoni a clauſus lateribus a b, & a f inſiſtit periſpheriæ conſtanti tribus partibus f d, & b c, & c d; quæ eſt æqualis periſpheriæ abcd; cui inſiſtit angulus pentagoni f quoniam æqualibus circuli portionibus a b, bc, dc, vt dictum eſt in prob. primæ partis inſiſtit.

COROLLARIVM I.

COlligitur angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti ſex partes ex decem, in quas duo anguli recti diuiderentur. Nam tres anguli ad d niger nigerrimus, & albus æquales ſunt inuicem, vt æqualibus arcubus inſiſtentes. Quare cum ex coroll. propoſ. præced. duo nigerrimus, & niger quatuor ex decem partibus occupent, albus additus duas ſuperaddet, vt fiant ſex: vnde totus ſex partes occupabit, in quas anguli duo recti diuiderentur.

COROLLARIVM II.

SI quis tamen velit conſtruere pentagonum facilius ſuper datam rectam ab; diuidatur, vt ſuperius in c iuxta documenta propoſ. 15. ſecundi, deinde prolungetur, & ſit iſta additio æqualis maiori ſegmento a c, ita vt punctatæ additæ ei ſint æquales; Interuallo denique datæ ab facto centro in punctis extremis q, & b, duo arcus deſcribantur; qui ſe interſecent in r, ſic eodem interuallo facto centro in a, & p duo alij arcus ſe interſecent in s; factoque centro in ijs interſectionibus r, & s eodem interuallo manente deſcribantur duo alij arcus, qui ſe interſecent in t; coniunganturque rectis puncta interſectionum t, s, r, b, & a. Eritque conſtitutum pentagonum.



Quod erit quidem æquilaterum, eo quod omnia latera ſint protracta eodem interuallo b a, Inſuper, cum duo triangula a p s, & q r b ſint æquicrura, & a p, vel q b baſis ſit maius ſegmentum iuxta 10. propoſ. huius angulus p, V. g. continebit duplum, quam angulus s. Quare angulus exterior a, albus, qui eſt pentagoni continebit ex propoſ. 17. primi duos internos, & oppoſitos s p. Propterea continebit 6. partes ex decem, in quas duo recti diuiſi eſſent, quibus 6. partibus æquantur, vt in corolli dictum eſt, duo anguli p, & s. Quare a angulus erit angulus pentagoni. Et ſi hic eſt, reliqui quoq; erunt, quod debeant iſtis æquales eſſe. Nam ſi non eſſent, poſſent fieri; Et ſi fierent, latera eorum, vel caderent ſupra, vel infra lineas r t, & t s. Quamobrem, ex propoſ. 21. primi, eſſent maiora, vel minora lineis r t, & t s: Vnde deinde pentagonum non eſſet æquilaterum.

PROB. II. PROPOS. XII.

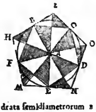
Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

NOn poteſt circumſcribi circulo pentagonum; Niſi priùs in eo inſcribatur: Quare dato circulo c e b d, in quo ſit, ex antecedenti propoſ. inſcriptum pentagonum, poterit deinde circa illum ita pentagonum circumſcribi.

Reperto eius centro a ad angulos pentagoni ducantur ſemidiametri ab, ac, ae, ad &c, a f, & eis ducantur perpendiculares circulum tangentes. Nam hæ productæ hinc inde ſe mutuò occurrent ex defin. 12. primi, cum anguli albus f & niger e, &c. ſint rectis minores, quos facit linea V. g. f b incidens in duas h l, & h m, & ſic de cæteris. *Quæ dc re conſtituent pentagonum requiſitum æquilaterum, & æquiangulum*; vt autem id probetur ducendæ ſunt rectæ à centro ad puncta h, & l, &c. in quæ poſtremò ductæ conueniunt.

Pro-

Probatur itaq; prima pars, quòd ſit æquilate- rum. Nam quadratum factum ſuper AH eſt ex prop. 11.l.2. æquale duobus quadratis factis ex FA, & FH; ſimiliter quadratis AB, & HB propter angulos rectos nimirum B, & F ſemialbos. Sed quadrata ſemidiametrorum BA, & FA ſunt æqualia inuicem. Ergo, & quadrata ex HB, & HF, & conſequenter ipſę quoque lineæ BH, & HF. Et hoc pro prima parte probationis.



Nam modo oſtendendum eſt, has lineas BH, & HF eſſe medietates laterum, quorum portiones ſunt, & conſequenter omnia latera HL, & HM, & cętera eſſe æqualia, vtpote ex medietatibus æqualibus confecta.

Triangula tota ſeminigra HBA, & HFA habent æqualia latera, quæ ſibi correſpondent, ergo ex prop. 8. primi, & anguli correſpondentes ęquales ſunt. Ideo anguli in eis albus, & niger ad centrum A erunt æquales, ſicut, & anguli albus, & niger ad H, & ſic in omnibus alijs. Angulus autem ad centrum A totus albâ, nigrâque portione integratus eſt ex propoſ.27.l.3. ęqualis omnibus quatuor alijs ad centrum; cum inſiſtant æqualibus baſibus, & peripherijs FB, & BC, & cæt. pentagoni Inſcripti. Quare, & eorum portiones inuicem ęquales tum nigræ, tum albæ erunt. Proptereaque angulus V. g. ad centrum HAF niger, qui probatus eſt æqualis angulo albo ad centrum HAB, eſt ęqualis etiam angulo albo ad centrum FAM. Sed anguli quoque ad F in triangulis HFA, & MFA, vtpote recti à radio tangente quæ effecti ſunt ęquales; radiuſque AF eſt crus commune ambobus triangulis adiacens. Ergo ex propoſ. 27. primi, etiam latus MF erit ęquale lateri FH.

Idem quoq; argumentum valebit in triangulo BLA, cuius latus BL erit ęquale lateri BH. Quare totum latus HL erit ęquale toti HM; Sicq; probabitur de alijs ſucceſſiuè. quapropter pentagonum circumſcriptum erit ęquilaterum.

Probatur quoq; eſſe ęquales angulos. Ablatis ęqualibus, quę remanẽt, ſunt ęqualia: ſed in triãgulis quibuſcunque HFA, & FAM, & cęt. omnes anguli ad centrum A tum albi, tum nigri oſtenſi ſunt ęquales in probatione primę partis. Anguli quoque F, & B, & C facti à radio AF tangenteque FH, & cęt. ſunt recti, & ideo æquales: ergo ablatis iſtis, reliqui ad M, H, &c. tum albi, tum nigri ſunt ęquales. Quoniam omnes trianguli tres anguli ſunt inuicem ęquales, cùm omnes ex prop.17.pr. ſint duobus rectis ęquales. Et ideo cum omnes anguli H, & L, & O, &c. ſint compoſiti ex medietatibus albis, nigriſque ęqualibus, omnes inuicem erunt ęquales.

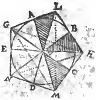
COROLLARIVM.

SEquitur hinc illud. Si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula deſcripta ſit, & ſemidiametri de centro ad angulos ſingulos protrahantur, hiſque perpendiculares ducantur circulum tangentes deſcribi figuram ſimilem inſcriptæ æquilateram, & ęquiangulam. Siquidem probabitur ductis ad earum mutuum concurſum à centro rectis, vt in pentagono factum eſt eius angulos, & latera inter ſe eſſe æqualia.

PROB. III. PROPOS. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum deſcribere.

* PEntagoni dati duo latera bifariam diuidantur in A, & B, & à punctis perpendiculares rectę trahantur, quæ ſe mutuo interſecabunt in V. Ibi ergo facto centro, ſi vſque ad intercapedinẽ perpẽdicularium V. g. VB, extendatur interuallum, & deſcribatur eo interuallo circulus: Is circulus erit inſcriptus, & tanget latera in punctis ABCDE.



Quod vt probetur cæteræ quoq; à dimidijs lateribus C, D, E ducendæ ad centrum, vt CV, DV, & deinde ad angulos OV, & VL, &c. Et rurſus punctatæ GH, & LM, &c.

Pro probatione obſeruandum eſt, nos hic adibuiſſe eandem regulam: quam ſupra dedimus propoſ. 5. huius ad circumſcribendum circulum triangulo, velut triangulo GLH. Ideoque tres ductę GV, & VL, & VH erunt ex probatione propoſ.5. æquales. Latera quoque AL, & BH ſunt æqualia, vtpote dimidia æqualium laterum pentagoni, anguli vero adiacentes nigri A, & B æquales, quòd recti ſint: Ergo triangula nigra ALV, & VHB erunt æqualia ex propoſ 22.lib. I. & crus VA cruri VB.

Idem argumentum valebit in triangulo LHM. Quare VC erit æqualis lineæ VB, & conſequenter æqualis, vt oſtenſum eſt lineæ VA, Idem quæ argumentum in alijs vrgebit. Cum ergo omnes lineę, quas fecimus perpendiculares, nimirum VD, & VE, & prædictæ inuicem ſint æquales poterit fieri centrum in V, & interuallo vna earum V. g. VE circulus circumduci, qui lambat puncta ABCDE.

COROLLARIVM I.

* COllige primò: quomodo etiam circulus poſſit circũſcribi. Nam cum ex 5.prop. lineę VG, & VL, & VH ſint æquales ad apices trianguli GLH ductę, & eadem ratione MV, & HV, & VL ductę ad apices trianguli LHM, ſequitur; vt omnes ſint æquales, & conſequenter; quòd facto centro in V interuallo vna earum V. g. VH tranſeat circulus ductus per vertices L, H, & alios.

COROLLARIVM II.

* COlligitur ſecundo hoc valere, ne dum in pentagono; ſed etiam in qualibet alia figurâ ęquilaterâ, & ęquiangulâ; quod valeat idem argumentum in omnibus facta eadem operatione ob latera ęqualia, & angulos ęquales, quę

conſtituunt omnia triangula, in quę per operationem diuiditur, ęqualia.

PROB. IV. PROPOS. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum deſcribere.

INſpice figuram præcedentis propoſitionis. Si reperiatur pentagonum, circa quod neceſſe ſit deſcribere circulum. Diuidemus omnes eius angulos bifariam rectis H V, & M V, &c. quas dicimus futuras eſſe æquales. *Quare facto centro in* V *interuallo* V H *poterit deſcribi circulus, qui tranſiens per apices* H, L, G, N, M, *pentagonum circumſcribet.*

Probatur vero, quod G V, & cæteræ ductæ debeant eſſe æquales alio modo, ac in coroll. præcedenti. Nam anguli niger ad L eſt æqualis nigro ad H; cùm ſit dimidium æqualium angulorum pentagoni, angulus verò A, & B ſunt recti; Crus autem A L cruri B H æquale cum ſint dimidium æqualium laterum: Ergo ex propoſ. 27. lib. 1. triangula ad A, & a nigra æqualia erunt, & erit L V æquale crus cruri V H. Idem dicetur de triangulo nigro V M C, quod erit æquale eadem ratione triangulo V B H, & crus V M cruri V H, & ideo cruri V L, & ſic de alijs N V, & G V: cum ergo ſint omnes æquales V L, &c. ad angulos pentagoni pertingentes, circulus per earum extrema duci poterit.

COROLLARIVM

HInc elicies idem valere in qualibet alia figura æquilatera, & æquiangula. Vnde eadem arte circa eam circulus deſcribetur.

EXPENSIO V.

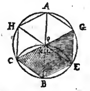
De Exagoni, & Quindecagoni in circulo inſcriptione.

CIrcumſcriptionem exagoni circulo, & circuli inſcriptionem, & circumſcriptionem prętermitit Euclides, & per accidens agit de quindecigono, vtpote de figura conſurgente, ex triangulo æquilatero, & Pētagono: de alijs autem figuris plurium laterum non agit: Nam quæ vtiles ſunt, ex prædictis facile colliguntur; quæ vero difficiles, aut fortè inuentu impoſſibiles, aut inutiles, vt figura ſeptem laterum, prætermittuntur; ſed de iſtis cum de ſinubus ampliora agemus: ſuffecit Euclidi rudimenta primarum figurarum tradere.

PROB. I. PROPOS. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

OPorteat in dato circulo hexagonum deſcribere. Ducto diametro A B eodem interuallo, quo deſcriptus eſt circulus facto centro in circumferentia in B portio circuli ducatur, quæ in C, & E circumſcrentiam ſecet, à quibus punctis per centrum tranſeuntes duo diametri ducantur. *Si ergo extrema horum diametrorum rectis coniungas, vt ſunt* B E, *&* B C, *&c. erit hexagonum inſcriptum æquiangulum, & æquilaterum.*



Prob. Primo, quod omnia latera ſint æqualia. Tres anguli nigri ad Q centrum, ab inſiſtentibus Q E, & Q B ſuper diametrum C G effecti, ſunt inuicem æquales. Ergo ex propoſ. 26. tertij circumferentię, quibus inſiſtunt ſunt inuicem æquales: Vnde ex propoſ. 33. tertij ſubtentæ C B, & B E, & E G ſunt inuicem æquales. Sed iſtis, quælibet ſuæ oppoſitæ, lineæ A G, & A H, & H C ſunt æquales. Ergo omnes æquales, & æquilaterum eſt hexagonum. Id autem oſtenditur, quia inſiſtunt arcubus æqualibus. Et arcus ęquales ſunt. Quia ſuper eos aſcendunt anguli tres albi ad centrum Q æquales, Sunt autem æquales: Quia ęqualibus nigris æquantur, quilibet ſuo, cui eſt ad verticem ex prop. 15. primi. Remanet itaque oſtendendum, quod tres anguli nigri ęquales ſint. Id autem

Probatur. Nam ſunt facti ſuper diametrum C G ab inſiſtentibus Q B, & Q E, & ideo ex propoſ. 13. primi æquantur omnes duobus rectis, ſed duo ex iſtis nimirum ✠ notati quilibet occupat tertiam partem duorum rectorum, ergo tertius reliquus tertiam partem reliquam, quare omnes æquales erunt.

Quod verò duo cruce inſigniti tertiam partem duorum rectorum occupent oſtenditur. Quia quodlibet triangulum C Q B, nempe, & B Q E eſt æquilaterum, vtpote quorum latera ſunt ſemidiametri. Ideoque ex propoſ. 14. primi, & æquiangulum. Sed omnes tres anguli cuiuſcunq; trianguli ſunt duobus rectis æquales; Ergo quilibet angulus tertiam partem duorum rectorum occupabit, & ſic anguli cruce notati quilibet erit tertia pars duorum rectorum.

COROLLARIVM I.

HInc manifeſtum eſt hexagoni latus æquale eſſe ſemidiametro. Nam C B latus eſt ſemidiameter circuli C Q E; & ideo æquale ſemidiametro Q B.

COROLLARIVM II.

COllige quomodo poſſit inſcribi triangulum æquilaterum, & æquiangulum in dato circulo. Nam ſi coniungas vertices C, A, E, id erit factum; erit enim æqualis quilibet angulus, & latus. Quia circunferentijs æqualibus ille inſiſtit, hoc ſubtenditur, vt ſunt C A E, & E G A, &c.

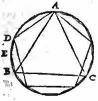
PROB.

PROB. II. PROPOS. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

DEſcribatur in circulo triangulum æquilaterum, & æquiangulum ABC, vel ex Coroll. præcedenti, vel ex 2. huius propoſ.

Rurſuſque deſcribatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex propoſ. 11. huius applicando eius angulum aliquem vertici trianguli cui placuerit, V. g. A. Deinde arcus interceptus inter primum latus pentagoni incipiendo ab A, & primum latus trianguli, nempe inter AD, & AB, qui eſt arcus BD, diuidatur in duas partes æquales. Ducanturque rectę DE, & EB, & *duo latera quindecagoni habebimus; quorum alios 13. capies circumferentia, vt 15. latera compleantur.*



Probatur tres arcus, quibus anguli trianguli inſiſtunt, vel quibus latera ęqualia ſubtenduntur, ex propoſ. 26. vel 32. tertij ſunt ęquales. Ergo ſi circumferentia tota ſit diuiſa in quindecim partes quilibet arcus, vt AB quinque earum comprehendet, vtpote eius tertia pars.

Sed, & arcus quibus quinque latera pentagoni ſubtenduntur ſunt ęquales, ergo ex iiſdem partibus 15. tres quilibet arcus comprehender, vtpote quinta pars totius circuli; quapropter arcus AD tres partes totius peripheriæ continebit, at AE quinque. Vnde arcus AE intermedius duas continebit. Quare eius medietas vna ex quindecim partibus erit. Recta, itaque DE ſubtendet decimam quintam partem totius circumferentię. Proptereaque cęterę quoque applicatę quęlibet decimam partem ſubtēdet, & anguli omnes erunt ęquales, vtpote in ęquali ſegmento, inſiſtentes, nempe in ſegmento DEB, qui duas totius peripherię partes ęquales comprehendit.

COROLLARIVM.

COllige hic cum Clauio: Quod tali modo poſſumus reperire figuras multilateras, æquilateras, & ęquiangulas; Quia enim AB denominatur à ternario, quod ſit latus trianguli, & AD à quinario, quod ſit latus pentagoni poſſumus deſcribere figuram 15. laterum; nimirum conſurgentem ex multiplicatione ternarij cum quinario; Et quia ternarius exceditur à quinario duabus vnitatibus, ideo arcus interceptus inter extremum lateris trianguli dat duo latera quindecagoni. Tali quoque ratione in alijs lateribus aliarum figurarum idem eueniet.

Nam latera pentagoni, & hexagoni facient figuram 30. laterum; nimirum conſurgentem, ex multiplicatione 5. cum 6. & quia ſexagonus excedit quinarium vnitate, ideo arcus interceptus inter extremum lateris pentagoni, & hexagoni ſubtendet lineā, quę erit latus figurę laterum 30.

Sic latus quadrati, & ſexagoni reliquet arcum, qui ſubtendet duo latera figurę 24. Quoniam 4. multiplicatus cum 6. reddit 24. & differentia inter 4. & 6. eſt 2. Sic latus quadrati, & pentagoni relinquet inter ſua extrema arcum, cui ſubtendetur vnicum latus figurę 20. laterum, & ſic de cęteris.

TRACTATVS VIII.

ARITHMETICA SIMPLEX,

& Generalis integrorum numerorum.

CVM iam de quantitatis continuæ æqualitate ſatis cognitionis, quæ ad elementum ſufficere poſſit, ediderit Euclides in 1.2. & 3. libro, & Lineas æquales, Angulos æquales, Triangula æqualia, Parallelogramma æqualia, Linearum quoque potentias æquales, tum laterum parallelogrammorum, tum triangulorum tradiderit; Inſuper ex quarto libro docuerit figurarum inſcriptionem, quæ pluribus, quàm duobus triangulis conſtabant. Iam aliam prouinciam aggreditur, & *Proportionem Inæqualitatis* præcipuè conſiderare, vel ſaltem iam ab æqualitate præſcindere incipit.

Verùm; quia Arithmetica ita miſcetur Geometriæ, vt altera ſine altera claudicet, & manca euadat; ideo antequam ad vlteriora progrediamur, Arithmeticam generalem tradere oportuit, quòd proportiones inæqualitatis rationales meliùs explicentur numeris, quàm quantitate continua: Vnde; quia adhibendi erant numeri in proportionibus declarandis; proinde hic de Arithmetica generali primùm agere oportuit, tanquam primus aditus ad proportiones quaſcumque benè cognoſcendas; cum ipſa faciliùs proportiones explicer, & maximè ſi de numeris integris agitur.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVod ſit numerus vidimus, & ipſius eſſentiam iam ſpeculati ſumus Tract. 2. præliminari. Vnde hic ſolùm numerorum Definitiones ſunt explicandæ, & illæ ſunt, quas Euclides 7. libro exponit; ſiquidem, cum ad præſentem tractatum deſeruiant, hìc tranſcribere oportuit.

DEFINITIO I.

VNitas eſt, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

In qua aduertendum, quòd, ſicut punctum abſtractum eſt indiuiſible, ſic vnitas abſtractiuè ſumpta vnum eſt. Nam quodlibet, quod dicitur vnum, ſemper conſideratur abſtractè, vt vnum in ſe, & diuiſum à quocumque alio: alioquid, ſi acciperetur, vt à parte rei, iam, cùm nihil ſit plures, ſeu partes, ſeu rationes non obtinens, plurificatum eſſet.

DEFINITIO II.

NVmerus eſt ex vnitatibus compoſita multitudo.

Hinc euenit; quòd omnis numerus ſit commenſurabilis; cùm habeat partes aſſignabiles, ſecundùm quas vnumquodq; numerus dicitur; V. g. 8. componitur ex octo vnitatibus, & 7. ex ſeptem. Vnde vnitas omniū numerorum erit communis menſura, quâ omnes menſurari poterunt.

DEFINITIO III.

PArs eſt numerus minor ipſius maioris numeri, qui metitur ipſum maiorem.

Significat, quòd minor numerus ſit appellandus pars numeri maioris, qui multiplicatus totum metitur; Ita vt nihil ſuperſit, neque deficiat. Sed ex æquo illi commenſuretur. Sic 6. metitur numerum 18. quia multiplicatus per 3. euadit in numerū eundem, nihil addendo, vel diminuendo. Omnis verò pars aſſumit nomen ab eo numero, per quem multiplicata metitur maiorem, vt 6. dicitur tertia pars numeri 18. quia 6. multiplicatus per 3. metitur numerum 18.

DE-

DEFINITIO IV.

P*Artes autem; cùm non metitur.*

Numerus, qui alium maiurem adamuſsim nun metitur; ſed aliquid remanet, dieitur non pars, ſed partes; quia ſeilicet ſaltem comprehendit tot vuitates ipſius, quæ ſunt omnium numerorum communes partea, V. g. 5. erit non pars, ſed partes numeri 18. quia comprehendic quinque vnitates, quarum quęlibet eſt deeima octaua pars numeri 18. Partes verò numen accipiunt ab eis numeris, qui, & partes, & totum adamuſsim metiuntur per eundē numerum, V.g. 6. eſt partes numeri 10. &, quia 2. metitur 6. per 3. & totum per 5. indè 6. dicetur eſſe tres quintas partes numeri 10. quia tres metiuntur 6. numerum, & quiuque numerum 10. per eandem menſuram, quæ eſt 2.

DEFINITIO V.

M*Vltiplex autem maior minoris, cum minor metitur maiorem.*

Sieut uumerus minor dieitur pars maioris; ſic maior dicitur multipiex minoris. Sed tantùm, cùm minur fuerit maiuris pars, nun verò partes. Sic 18. dicitur multipiex numeri 6. quòd ex ęquo menſuretur ab co: Nun autem numeri 5. quia, licet illius vnitates, quæ numeri 5. partes ſunt contineat, uun tamen à numerò 5. adamuſsim menſuratur.

DEFINITIO VI.

N*Vmerus par eſt, qui biſariam diuidi poteſt.*

Vt numerus 2. 4. 6. 8. ſunt pares, quia in duas partea æquales diuidi queunt.

DEFINITIO VII.

I*Mpar verò, qui biſariam non diuiditur, vel qui vnitate differt à pari.*

Vt numeri 11. 13. 17. 7. quia non poſſunt diuidi biſariam, vel quia differunt à paribus 10. 12. 18. 6. ſolâ vnitate, dicuntur impares.

DEFINITIO VIII.

P*Ariter par numerus eſt, quem par numerus metitur per numerum parem.*

V. G. 8. quia 2. & 4. metiantur, ipſum 8. dicitur pariter par: Nam 4. eſt par, qui paribus vicibus aceeptus, nempe duabus, facit 8, ideoq; dicitur numerus 8. pariter par.

DEFINITIO IX.

P*Ariter impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum parem.*

Numerus 30. quem 15. impar numerus metitur, multiplicatus per 2. numerum parem dicetur pariter impar. Aduertendum eſt autem, quòd idem numerus poteſt eſſe pariter par, & pariter impar, vt 12. Nam metitur, & numero 6. multiplicatus per 2. & ſic eſt pariter par, & nũmeru 3. multiplicatus per 4. & ſic eſt pariter impar.

DEFINITIO X.

I*Mpariter autem numerus impar eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.*

Vt numerus 15. quem metitur 3. & 5. ambo impares numeri dicitur impariter impar.

DEFINITIO XI.

P*Rimus numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.*

Si detur namque numerus, qui neque à pari, neque ab impari patiatur dimenſionem, ſed à ſola vnitate ille numerus dicetur primus, vt 2. 3. 7. 11.

DEFINITIO XII.

P*Rimi numeri inter ſe ſunt, quos vnitas ſola metitur.*

Licet enim quilibet puſſit dimetiri per parem, ſeu imparem, niſi ille numerus menſurans ſic communis dimenſor vtriuſque, dicentur illi numeri inter ſe primi, V. g. 8. & 9 Quamuis etenim 2. multiplicans 4 numerum 8. menſuret, & 3. multiplicans 3. menſuret 9. quia tamen, nec 4. nec 2. menſurat alterum 9. nec 3. huius numeri 9. menſura, illum numerum 8. menſuret; ideo illi numeri primi inter ſe dicendi.

DEFINITO XIII.

C*Ompoſitus numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.*

Silicet exceptâ vnitate, quam Euclides non vocat numerum. Perſpicuum autem eſt omnes numeros pares præter binarium eſſe compoſitos; quia ſaltem binarius eos metitur, ex quò etiam euenit omnes numeros primos, excepto binario, eſſe impares. Nam ex paribus binarius ſolus eſt primus.

DEFINITIO XIV.

C*Ompoſiti numeri inter ſe ſunt, quos numerus aliquis communis menſura metitur.*

Igitur ſunt compoſiti inter ſe illi numeri, qui ad differentiam primorum inter ſe, aliquam habent communem menſuram, vt 24. & 18. pro communi menſura ſortiuntur numerum 6.

DEFINITIO XV.

N*Vmerus numerum multiplicare dicitur; cùm toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis alius.*

Vt

Vt numerus 5. dicetur multiplicare numerum 6. cum toties ſumitur numerus 6. quot ſunt vnitates in numero 5. & 6. quinquies acceptus producet alium, nempe 30.

DEFINITIO XVI.

NVmerus numerum diuidere dicitur, cùm numerus alius acceptus fuerit, indicans ſuis vnitatibus vices, penes quas diuidens numerus in diuiſo continetur.

Vt Numerus 6. dicetur diuidere numerum 18. cum accipitur alius numerus, V. g. 3. indicans ſuis vnitatibus vices iuxta, quas 6. continetur in 18. nempe tribus vicibus.

DEFINITIO XVII.

RAtio eſt duorum numerorum mutua in ratione menſurantis, & menſurati relatio.

V. g. quia 4. metitur 4. vnica vice acceptus, & 2. metitur 4. gemina vice, & 3. vnica vice, & $\frac{4}{2}$, ideo dicuntur numeri iſti Rationem habere. Omnis autem numerus obtinet Rationem cum quocunque alio, etiam rationalem; quia, vt diximus, alium ſaltem per vnitates, quæ in ipſo ſunt, metitur.

DEFINITIO XVIII.

PRoportio ſimilis, ſeu ratio inter numeros eſt, cum primus ad ſecundum in ſimili menſura ſunt, ac tertius reſpectu quarti.

Proportio ſimilis, & Ratio eſt quædam ſimilitudo, non numerorum; ſed ipſarum Rationum in ratione continentis, & contenti, ſeu metiti, & menſurantis. Si ergo duo numeri ſint; qui ſe continent, vel menſurentur, vt duo alij. Eg. 2. metiatur 4. vt numerus 3. metitur 6. dicetur ita 3. ad 6. in proportione, ac 2. ad 4. quia ſicuti 4. dualitatem gemina vice continet, ſic, & 6. ternarium gemina vice complectitur.

Vnde hinc colligas; quòd numerus multiplicans habet eam proportionem ad vnitatem; quã genitus habet ad multiplicatum, V. g. multiplicati 2. per 4. faciunt 8. numerus itaque multiplicans 2 ita ſe habet ad vnitatem, vt 8. genitus ad 4. multiplicatum; quia ex def 15. tot vicibus genitus continet multiplicatum, quod multiplicans vnitatem.

Secundo, quod numerus diuiſus habet ad diuidentem eam proportionem, quam quotiens, ſeu diuidens habet ad vnitatem, quia quot vicibus diuidens continet vnitatem, tot quoque diuiſus diuidentem complectitur ex definitione 16.

DEFINITIO XIX.

NVmerus numerum metiri dicetur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum metitum producit.

Poſtponitur iſta definitio prædictis; cùm debuiſſet anteponi, quia definiuimus multa per mutuam commenſurabilitatem; ſed quia, & hæc illas ſupponebat; nempe definitionem multiplicationis ſaltem, ideo poſtpoſita eſt, cùm hoc liceat in Mathematicis definitionibus, quæ non probantur.

POSTVLATA.

Poſtuletur cuilibet numero, quoslibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

Secundò quolibet numero poſſe ſumi maiorem.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri, vel æqualium numerorum, vel eiuſdem æquè multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex eſt, vel quorum duo multiplices ſunt æquales, illi inter ſe quoque ſunt æquales.

III.

Qui numeri, æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, inter ſe ſunt æquales.

IIII.

Quorum idem numerus, vel numeri æquales fuerint pars, vel partes eædem, illi inter ſe æquales ſunt.

V. g. quia 5. eſt eadem pars numeri 10. ac numeri cuiuſdam Equorum, numerus Equorum erit æqualis numero 10. Quod ſi 5. numerus ſit dimidia pars, tum numeri 10. tum numeri Equorum, numeri Equorum, & 10. erunt æquales. Sic ſi 5. & numerus quidam Ouium, ſit tertia pars numeri 15. numerus Ouium, & 5. ſunt æquales numeri. Et ſi numerus 10. & numerus Ouium ſint eædem partes nempe 2. ex tribus partibus numeri 15. numerus Ouium, & 10. erunt æquales.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipſo numero ſunt metitur.

VI.

Omnis numerus ſeipſum metitur per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum; multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Si namque 4. multiplicet 3. producet 12. & 4. per 3. nempe tribus vicibus acceptus, & 3. ſi-

3. ſimiliter per 4. ideſt quatuor vicibus acceptus producet 12.

VIII.

Si numerus numerum metiatur, numerus vices numerans, eundem quoque menſuratum numerum metietur, & numerus metiens, vices huius numerabit per ſuas vnitates.

SIc ſi 4. menſuret 20. vices numerabit numerus 5. quinquies enim numerus 4. continetur in numero 20. & hoc per ſuas vnitates nempe per 5. vnitates. Et iſte numerus 5. vices numerans menſurabit quoque ipſum 20. ſed alter primo metiens nempe 4. numerabit vices huius, iuxta quas continetur in 20. quia quater capit 5. in numero 20; Et hoc per ſuas vnitates, quæ in numero 4. quatuor ſunt.

IX.

Numerus numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metietur.

V. g. ſi 2. menſuret 4. & 6. menſurabit quoq; 10. qui componitur ex 4 & 6.

X.

Numerus numerum metiens metitur, quoque omnem numerum, quem ille metitur.

V. g. ſi 2. menſuret 4. menſurabit quoque numerum 12. 16. & 20. quos 4. metitur.

XI.

Si numerus numerum metiens, eum per quem metitur multiplicet, vel ab eo multiplicetur, producet eum, quem menſurat.

Sit Eg. 4. qui menſuret 24. per 6. dicit, quod ſi 4. multiplicet 6. vel à numero 6. multiplicetur, producet 24. quem menſurat per numerum 6.

EXPENSIO I.

De integrorum numeratione.

EXprimere quantitatem numerorum multorum, non quilibet ſine aliqua regula facilè poteſt: Vnde de hoc primo agendum.

THEOR. I. PROP. I.

Omnes numeri procedunt, & continuantur per proportionem decuplam.

PRobatur ea eſt proportio numeri; quando tot vicibus ſumitur, quot in numero proportionem denominante ſunt vnitates, V. g. illa eſt proportio; quam habet 3. ad 1., quæ aſſumit alium numerum, V. g. 4. toties, quot in 3. ſunt vnitates, vt eſt numerus 12. vt ex 18. definit. collegimus: ſed in diſpoſitione numerorum aſſumitur toties 1. quot vnitates ſunt in 10. & faciunt 10. Iterũ aſſumitur 10. toties quot vnitates ſunt in 10. & faciunt 100. Iterumque aſſumitur 100. toties, quot vnitates ſunt in 10. & fiunt 1000. Iterum aſſumitur tot vicibus 1000. quot vnitates reperiuntur in 10. & faciunt decem millia: Ergo creſcit, & propagatur per proportionem decuplam omnis numerus naturalis.

PROBL. I. PROP. II.

Cognitis vicibus proportionum, & nominibus earum, facilè quilibet numerus exprimi poteſt.

PRæſuponendum eſt *locum*, in quo numerus eſt, vices proportionum ex inſtituto hominum ſignificare, V. g. ſi ſint 124. numerus 4. primo loco exiſtens (dexter enim apud Arithmeticos primus locus eſt) ſignificat vices vnitatum, quę acceptæ ſunt. Nempe vnitates quatuor eſſe acceptas. Secundus locus n. 2 ſignificat vices decimarum; nempe pro vnitatibus acceptas fuiſſe decimas vnitatum, ita vt 2; quis eſt ſecundo loco non duas vnitates, ſed duas decimas vnitatum exprimat. Tertius verò locus numeri 1. eſt centũ multiplicati per 10. ideſt ſignificat, non iam acceptas fuiſſe pro vnitatibus decimas; ſed centeſimas vnitatum; ita vt 100. vnitates pro vna vnitate accipiantur. Numerus autem ipſe ſignificat vices, quo vnitates, vel decimæ, vel decimæ decimarum, ideſt centeſimæ acceptæ fuerint, Quod ſi ſola zifra adſit, ſignificat nullas proportionum vices illi loco cõueniętes exprimẽdas reperiri, ſic ſi adſit numerus 200. nihil erit vnitatum, nec decimarum; ſed ſolum numerus erit centeſimarum, & quia eſt 2. duæ erunt centeſimæ.

Secundò nomina proportionum cognoſcere neceſſe eſt; hoc autem ea hac ſerie cognoſcetur.

Si vnitas accipiatur decies, decem vocatur.

Si decem accipiatur decies, centum vocatur.

Si centum accipiatur decies mille vocatur.

Si mille decies aſſumantur, decẽ millia dicitur.

Si mille centies ſumatur, centũ millia dicitur.

Si mille millies ſumatur, millio vocatur.

Deinde aſſumuntur iterum milliones, tanquã vnitates, & incipimus iterum à capite.

Si millio decies ſumatur, decẽ milliones dicunt

Si millio centies ſumatur, centum milliones.

Si millies aſſumatur, mille milliones.

Si millio ſumatur decem vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio centum vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio ſumatur mille vicibus millies, duclio vocatur, & ita dueliones, triliones, quadriliones incipiẽdo rurſus ab vnitate in infinitum.

Ita ergo legendus eſt numerus 10000. quia 1. eſt in quinto loco, & cęteri omnes non ſunt numeri, ſed zifrę; ideo non ſignificant, niſi locum numeri; & hoc deſeruit, vt numerus ſuo loco poſitus ſignificet vices proportionum, quæ illi loco conueniunt. Igitur 1. quinto loco poſitus ſignificat 4. ordines proportionum præcedere primus numerorum ſimplicium in primo 0. ſecundus decimarum in ſecunda ziſra, tertius centeſimarum in tertia ziſra, quartus decimarum cẽteſimarum nempe milliarum in quarta ziſra quibus locis licet numeri non adſint, adeſt tamen ziſra; quę locum ſeruat, & operatur, quòd 1. vim quinti loci obtineat, & ideo, quòd 1. ſignificet decimas milliariorũ, nempe decẽ millia, quòd ſi eſſet 2. eſſent viginti millia, ſi 3. triginta millia.

Et quia, vt dictum eſt, primus locus in quo numerus exiſtit, ſignificat vnitates ad decimas aſcendentes. Secundus verò numerus ſignificat decimas vnitatum acceptas tanquam, ſi eſſent vnitates

vnitates aſcendentes ad centeſimas, & quia, vt poteſt videri à ſerie ſoperpoſita, placuit hominibus ad quamlibet proportionē tricies accepram, mutare nomina proportionum; ideo faciliorem regulam ad legendum reddere poſſumus, diſpoſitia per ordinem numeria, primo incipiendo ad dextram, & ad omnea tertios duobus intermiſſis, applicare punctum, vt vides in hoc exemplo

2 1

345648010490071 2. & deinde ſuper quodlibet ſecundum punctum incipiendo ab vnitate applicare numerum tali ratione, vt primo nihil apponatur, neque ſecundo puncto, tertio apponatur vnitas, & vno intermiſſo puncto, quinto apponatur 2 & ſic conſequenter. Nam hoc modo ſciemua, vbi primum punctum reperitur eſſe numerum ſimplicem. Vbi ſecundum eſſe milliaria, accepta tanquam vnitates. Vbi numerus eſſe milliouea accepti tanquam vnitates, & vbi duo eſſe ducliones, & ſic conſequenter augendo in infinitum. Et ita numerua ſuperpoſitus pronuntiabitur. Nimirum

3 4 5 6
Tria millia, & quatere ntum quinquaginta ſex duel-
4 80 10
lionesquatercentum octuaginta millia, & centum
4 900 7
quatuor milliones, nungenta millia, & ſeptingenta
12
duodecim vnitates.

Vbi iterum aduertendum, quòd nullum nomen ziſris attribuitur; quia non ſignificant; niſi locū numeri, vt numerus ſuo loco poſitua vices proportionū ſignificet, quibus vnitas eſt aſſumpta. Vt in hoc numero 100. duæ zifræ, quæ vnitatem præcedunt, ſolùm demonſtrant illam vnitatem non ſignificare vnitatem ſimplicem; ſed neque ſignificare vnitatem decimarum, ſed vnitatem centeſimarum expromere, nempe proportionem 10. gemina vice acceptam. Nam ſi vnitatem multiplico per 10 facit 10. quam decimam, ſi adhuc multiplico per 10. facit centum. Ecce gemina vice aſſumpta proportio. Quare, ſi omnea numeri præcedentes eſſent o nihil ſignificarent, at ſi ante ſequeretur eoa ſola vnitas ad ſiniſtram ſignificaret iuxta locum, in quo reperitur. V. g.

2 1

1000000000000. Iſte numerus ſignificat duellionem, quia nimirum ziſræ antecedentes reiiciunt illam vnitatem ad decimum tertium locum, qui eſt locus duellionis: & hæc de numeratione.

EXPENSIO II.

De integrorum collectione;

QVatuor præcipuæ operationes, & vniuerſaliſſimæ circa numeros integros, & naturales exercentur, quæ omnes ſub vno nomine *Algorbythmi* cōprehenduntur; atque iſtæ ſunt *additio, ſubtractio, multiplicatio*, & *diuiſio*. Hic agimus de additione, quæ datis pluribus numeris eos in vnam ſummam redigit, atque aliás appellatur *collectum*, & *totum*.

THEOR. I. PROP. III.

Cuilibet numero quilibet alius numerus competens addi poteſt.

* PRob. Nam iam conceſſum eſt in poſtulato ſecundo numerum poſſe ſumi alio numero maiorem ſint ergo numeri ſimul addendi 3. & 4. ſummo ergo numerum æqualem iſtis duobus ſimul nimirum 7. & iam facta eſt additio, namque 7. continet 4. & 3. Probator vero, me duobua numeris poſſe ſumere æqualē, nā ex 2. Poſt poſsū ſomere vni illorū vtlibet maiorem, & ex 1. Poſt cuilibet æqualem, ergo poſſom ſumere maiorem tribus vnitatibua, ita vt hæc maioritaa ſit æqualis numero 3. & iam duobus numeris 3. & 4. ſumpſi æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Numeri diſſimiles diſſimilibus nō addendi.

* SInt numeri decimas ſignificantea 40. & ſint ſignificantes numeros ſimplices 5. Dico 5. numero 40. addi non poſſe; Nam ſi fieri poteſt, addatur: Erit ergo val 9. vel 90. zifra appoſita, ſed nec 9. nec 90. eſſe poteſt; ergo neque addi poteſt, quod verò neque 90. neque 9. eſſe poſſit probatur. Nam non 90. quia quinque vnitates ſuper quadraginta vnitates non addunt, niſi id quod ſunt; nempe quinque, ergo erit 45. & non 90. Sed nec 9. quia quatuor decimæ ſunt magis, quam quatuor numeri ſimplices, ſed quatuor ſimplices additi 5. ſimplicibua faciunt nouem; ergo quatuor decimæ magis, quam nouem.

PROB. I. PROPOS. V.

Si ſimiles numeri, & eandem proportionem ſignificantes addantur ſimilibus numeris, eandem proportionem ſignificantibus erit optimè facta additio.

CVm ergo certum ſit ex præced. addendos numeros accipiendos eſſe eiuſdem proportionia; iuxta eorum proportionem ita diſponendi ſunt, vt ſingulæ proportiones addendæ loco correſpondeant, & dignitate vt videre eſt in hoc exemplo.

1945
7329
405
9679

Nam omnes, qui ſunt in primo loco ad inuicem ſibi, & per rectam lineam reſpondent, & ita, qui in cæteris locis. Quo facto lineola ſubducta diſtinguendi ſunt numeri addendi à numeris additis ſupponendis. Poſtea addantur ſimul tres primi ordinis 5. 9. & 5. incipiendo ab inferiori, & faciunt 19. & quia habea duos numeros, quorum primus 9. eſt eiuſdem ſpeciei, cum illis, qui erant addendi; ideo ſub ipſis rectà pono 9. tanquam ad primum collectum ordinem pertinens; & transfero 1. qui eſt decimarum, tanquam ad ſecundum ordinem ſpectans; & addo ſimul hoc 1. & deinde cæteri ſecundi ordinia 0. 2. 4. & faciunt 7. (nam 0. nihil addit,) & quia eſt numerus ſimplex decimarum, pono ſub hoc ſecundo ordine, ſpectans

ad

ad decimas. Deinde aſſumo 4. 3 9. tertij ordinis qu ſimul additi faciunt 16. & quia obtinui duos numeros, primum 6. eiuſdem ordinis, quare illum pono apud 7. ſub tertio, ad quem ſpectat, ordine; & eraſſero ſecundum 1. ad ordinem altiorem, & ſequentem: addo igitur ſimul 171. & faciunt 9. apud 6. ponendum. Habeoque numerum collectum 9679. æquiualentem illis tribus ordine poſitis. Quod promiſſum eſt in problemate, & ex antecedentibus Theorematibus ſequitur.

EXPENSIO III.

De ſubductione numerorum integrorum.

SVbductio, aut ſubtractio eſt, cùm duobus numeris datis minor aufertur à maiore ad obtinendum reſiduum, qui numerus etiam appellatur *Quæſitus*, & *Reliquus*.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Quilibet numerus minor à quolibet maiori correſpondenti extrahi poteſt.

CVm namq; ex deſin. omnẽ numerũ vnitates menſurent; in numero maiori erunt tot vnitates, quot in numero minori, & ampliùs. Sed ex 1. poſt. cuilibet numero licet accipere ęqualem. Sumam igitur ex numero maiori æqualem alicui numero minori, V. g. à 5. poſſum ſumere numerum æqualem numero 4. quo ablatô, quod reſiduum erit, numerus à ſubtractione reſiduus erit, qui exquiritur.

COROLLARIVM I.

QVòd, ſi ſimul addantur 4. & 1. efficent, quod erat; cum ſint partes ipſius 5.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Numerus à numero ſimilis proportionis ſubducendus eſt.

PRobatur. Nam ſi poſſunt diuerſę proportionis numeri auferri; minor à maiori auferantur, V. g. 5. à 70. Quia ergo abſtuli à 70. reſiduus erit numerus 20. Sed addantur ſimul rurſus iuxta dicta prop. 5. anteced. 20. & 5. faciũt 25. Sed debebant efficere, quod priùs erat, nempe numerum 70. ex Coroll. præced. Ergo non poteſt fieri ſubductio numerorum: niſi ſint eiuſdem dignitatis.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Si à numeris maioribus, & eandem proportionem habentibus numeri minores, & eandem proportionem habentes, ac ipſi, demantur, fiet optimè ſubtractio.

SIt ſubtrahendus numerus æqualis huic 678. à numero 1257. Quia proportionales à proportionalibus ſunt auferendi, ita collocandi ſunt vt loco, ideoque proportione reſpondeant, vt in hoc exemplo. Et ſubducta lineola diſtinctionis gratiâ, deinde aſſumatur à ſuperiore numerus æqualis numero primo 8. & ſi non poſſit id fieri, quòd 7. minor ſit à numero ſecundo proximo accipiatur vnitas decimarum, & ſint 17. deducaturq; ab eo numero 8 æqualis, & reſiduus erit 9. Qui, vt numerus vnitatum, ſub vnitatibus ſcribendus. Iamque accedimus ad ſecundum numerum ſubducendum, & quia ſubſtulimus à 5. vnitatem decimarum; ideo euaſit 4. Videatur ergo; an 7. ſecundus ſubducendus à numero 4. auferri queat, & cum non poſſit, iterum à præcedenti aſſumatur vnitas decimarum, & ſint 14. ex quibus 7. ablatus relinquit 7. igitur ſubſcribo 7. numeris ſecundi ordinis apud 9.

1257
678
———
579

Et quia à præcedenti 2. abſtuli 1. ideo remanſere 1. à quo 6. auferri nequeunt; igitur vnitas præcedens, quæ eſt centeſimarum addatur, & fiunt 11. ablatus 6. reſtituit 5. itaque reſiduus erit 579. ſubducto 678. à maiore numero 1257.

Quòd ſi in præcedenti non reperiretur, nec quidem vnitas, ſed ziffra tunc accipienda eſt adhuc vnitas, non quidem ab illo loco, ſed à ſuperiori ſaltem virtualiter, vt in iſtis terminis.

Si enim volo ſubducere 8. à primo 0. nequeo; quia numerus non eſt, accipio itaque vnitatem decimarum ab antecedenti; ſed nequeo; quia eſt 0. Accipio ergo ab antecedenti; qui licet ſit 1. eſt tamen numerus vnius decimæ decimarum, ideſt centeſimarum; ideoque ſubduco 8. à 10. reſiduus erit 2. at verò 10. iam non erit 10. ſed 9. quod vna decima ablata ſit; Ideoque reſiduus erit 92.

100
8
———
92

Poterit quoque facilitatis gratia vnitas ablata numero ſequenti reſtitui, V. g. ſi ſic fiat 2. à 0. nequit fieri, ſed mutuo accepta vnitate à maiori fiet 10. à quo ſubductus 2. reſiduus erit 8. ſed quia ab antecedenti abſtuli vnitatem, ideo ſecundo 7. ei addo, & fient 8. demo itaque 8. à 10. eodem modo, & fiunt 2. & quia abſtuli vnitatem, ideo eam ſubduco à reſiduo 10. & fiunt 9. & ſic habetur reſiduus 928. Illud enim augmentum, quod ſubtrahendo numero fit, æquiualet diminutioni factæ in numero, à quo aufertur. Nam ita eſt, ſi auferantur 8. à 10. quam ſi auferantur 7. à 9. in prima verò regula cogitauimus numerum, à quo ſubducitur diminutum: hic verò numerum ſubtrahendum augemus vnitate; vt idem relinquat; ibi cogitatur iam ablata vnitas; hic tanquam ſi non eſſet ablata, cum numero ſubducendo aufertur.

1000
72
———
928

Poteſt etiam fieri alio modo, vt ſi auferendi ſint à numero 2081. numeri 479. diſpono, vt ſuprà, & quia 9. ex 1. auferri nequit, ideo differentiam, quæ eſt inter 9. & 10.; nimirum 1. aſſumo, & eam addo numero ſuperiori ſilicet numero 1. & fiunt 2. quos ſubſcribo. Ita 7. ſecundum aufero à 7. & numero ſuperiori (eſt enim 7. non 8. ob vnitatem ablatam) & nihil remanet: Vnde ſcribo 0 ad hoc, vt ſeruetur locus. Deinde quia 4. nequit deduci à 0. aſſumo differentiam inter 4. & 10. remanent 6. quam numero ſuperiori non addo, cùm ziffræ non poſſit fieri additio, & ideo ſcribo 6. & deinde ſcribo 1. ita enim remanſit, quòd vnitas ablata ſit à numero 2. propter 10. mutuò aſſumptos priùs. Qui omnes modi in idem recidunt.

2081
479
———
1602

EXPENSIO IV.

De numeris multiplicandis.

MVltiplicatio eſt duplex, alia ſimplex, alia compoſita. Simplex eſt, cùm vnus ſimplex numerus per alium multiplicatur, compoſita verò, cùm vel plures numeri per vnum multiplicantur, vel plures per plures. Agemus priùs de prima, vtpote de faciliori.

THEOR. I. PROP. VIIII.

Quilibet numerus poteſt multiplicari:

PRobatur multiplicare eſt ſumere toties alium numerum, quot numerus multiplicans habet vnitates; cumque liceat alteri numero addere quantum quiſque vult ex poſt 1: ſi V. g. aſſumam 4. licebit mihi addere, quantum volo. Addam ergo ei rurſus 4. & rurſus 4. toties quot vnitates ſunt in 3. & ſic habebo 4. ter acceptos. Quod eſt multiplicare ex definit. 15.

THEOR. II. PROPOS. X.

Si ſit numerus, vel medietas decimæ, vel medietatem decimæ excedens, multiplicetur q; per alium excedentem vnitatem, cum fuerit multiplicatus, vel æquabit decimam, vel decimam ſuperabit:

PRobatur facilè; quia minus, quàm 2. aſſumi nequit; nec minus 5. pro numero multiplicando, quæ faciunt 10. Quare, ſi alij aſſumantur, patet decimam ſuperaturos.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Si ſint duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes; quorum vnius medietas ſimùl cum toto alio poſita ſit magis, quam medietas decimæ, illi numeri multiplicati decimam ſuperabunt.

PRobatur facilè. Nam, iſte numerus 4. adiunctus numeri multiplicantis 3. medietati quę ſit 1. $\frac{1}{2}$ facit 5. $\frac{1}{2}$. Quare ſi tantùm addatur iterum 4. & 1. $\frac{1}{2}$ multiplicando per 2. facient magis, quam 10. Quia gemina vice accipientur. Ergo tanto magis ſi multiplicatur 4. per 3. aut quemlibet alium maiorem.

COROLLARIVM

HInc habes numeros tales generare numerus ad duas proportiones pertinentes, vel ad vnam tantùm; ſed ſemper ſuperiorem. Sic 3. & 4. generant duos numeros 12. quorum primus 2. eſt eiuſdem proportionis, ac multiplicati, ſecundus verò 1. proportionis immediatè ſequentis decimarum. Sic ſi, 5. multiplicentur per 6. generabunt numerum 30. qui ternarius non erit numerus ſimplex: ſed ternarius decimarum, nempe ordinis immediatè ſequentis.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

Numerus ſimplex multiplicans numerum ſimplicem non poteſt generare numerum; niſi proportionis altioris immediatè ſequentis.

PRob. Quia numerus maximus ſimplicium eſt 9. qui multiplicatus per 9. maximum item ſimplicium producet numerum, nouies numerum 9. continentem; ſed proportio altioris ordinis, quã proportionis immediatè ſequentis numeros ſimplices continet decimas decies. Maior autem eſt numerus continens partes plures, & maiores, quàm qui continet pauciores, & minores. Ergo erit minor numerus continens nouies nouem; quàm decies decem. Ergo non poterit efficere proportionem iſtã tertiam. Quod ſi maximus ſimplicium id nequit. Ergo nec cæteri.

COROLLARIVM

HInc eſt, quòd, etiam ſi numerus multiplicans alium ſignificet decimas, vel decimas decimarum; quòd eadem ratio erit, & producere nequibunt numerum pertinentem; niſi ad proportionẽ immediatè ſequentem, vt patet, quià eadem ratio ſit de numeris, vel ſumptis, vt vnitates ſimplices, ſeu, vt vnitates decimarum, ſeu vt centeſimarum, &c.

THOR. V. PROPOS. XIII.

Omnes numeri ſe ſe multiplicantes faciunt numerum, qui comprehendit, tum vnius, tum alterius partes.

PRobatur. Quia id vnumquodque continet, ex quo componitur: Ergo cùm numerus ſit compoſitus ex multiplicatione, tum vnius, tum alterius, debet eorum partes in ſe habere.

THEOR. VI. PROPOS. XIV.

Si numerus ſimplex multiplicet non ſimplicem, numeri geniti ſimplices non erunt: ſed eius proportionis, cuius eſt multiplicatus, vel immediatè ſequentis.

SIt 3. numerus, qui multiplicet 5. numeri 250. Dico, quòd in genito 15. numerus 5. non eſt ſimplex; ſed eius proportionis, cuius eſt 5. in numero 250.

Prob. Nam in numero 150. numerus 5. quilibet vnitate decimam ſignificat. Ergo quælibet eius vnitas tricies accepta decimarum erit. Igitur etiam, ſi toties 5. ſimul ſumatur genitus decimarum erit ex propoſ. 12. Coroll. numerus vero 1. in genito 15. ex propoſ. 11. Coroll. ſignificabit proportionem immediatè ſequentem.

THEOR. VII. PROPOS. XV.

Si numerus non ſimplex multiplicet non ſimplicem producet eam proportionem, quæ tum vnius, tum alterius ab vnitate diſtantiâ conficitur.

SIt numerus 7. in numero 70. & numerus 5. in numero 50. qui ſe inuicem multiplicent. Dico quod numerus genitus erit eius proportionis, quæ ex diſtantiâ, tum unius, tum alterius à primo numero uersùs ſiniſtram recedit; & quia loca per zifras notata ſunt. Ideo dico recedere zifris, tum huius, tum alterius numeri nimirum duabus zifris, eritque 3500.

Probatur. Quia ex antecedenti numerus ſimplex primus multiplicans ſecundum generat numerum ſecundo loco ponendum. Ergo ſecundus multiplicans ſecundum generabit numerum tertio loco ponendum, & ideo ſecundus multiplicans tertium generabit numerum quarto loco ponendum, & hinc tertius multiplicans tertium generabit numerum quinto loco ponendum, & ſic de cæt.

Quod, ut magis pateat, ſit numerus ABC 323. & DEF 222. Quia 3. A eſt tertio loco, ſi illum multiplicet F 2. erit genitus ex 2. tertio loco ponendus ex propoſ. anteced. & oſtendet tres centeſimas, ut unitates fuiſſe acceptas. Quod ſi multiplicet 2. E numerum A 3. eundem, ſignificabit tres centeſimas non iam bis acceptas, ſed dualitate decimarum, ideſt uigeſies acceptas. Ergo genitus non iam ſignificat unitates centeſimarum; ſed decimas centeſimarum. Ideo ſecundo loco poſt primum collocandus, ideſt quarto loco ponendus; Et ſi illum D 2. multiplicet; iam non erunt decimæ centeſimarū. Sed centeſimæ centeſimarum, ideo numerus genitus tertio loco ponendus poſt primum, ideſt quinto loco collocandus; & ſic, ſi alij adſint argumentabitur.

PROB. I. PROPOS. XVI.

Si omnes numeri ſimplices in quadratam ſeriem ita diſponantur, vt prima ſeries ſit continua additio vnitatum, ſecunda dualitatum, & ſic conſequenter vſque ad 10. Tabula talis ordinata erit, quæ numerorum ſimplicium multiplicationem exhibebit.

DVcantur lineæ æquidiſtantes undecim, & iſtas decuſſantes aliæ undecim. Deinde aſcribantur numeri in prima ſerie ponendo unitates ſibi inuicem additas; in ſecunda dualitates ſibi ſuperadiunctas; in tertia triadas, & ſic de cæteris. Nam tabula erit confecta, quæ à Pythagora primò inuenta eſt, & ab eius nomine Pythagorica uocatur: Quam dico numerorum ſimplicium exhibere multiplicationem.

Probatur multiplicare eſt ſumere numeros multiplicandos tot uicibus, quot ſunt in numero multiplicante unitates: cum ergo quilibet numerus ſimplex additus ſit alteri tot uicibus, quot numeros habet ipſa decima, V. g. unitas unitati 10. uicibus addita eſt, dualitaſque dualitati, trias triadi, &c hæc erit numerorum ſimplicium multiplicatio.

							A		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
			D				C		
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Vſus etiam clarus eſt. Nam, ſi reperio à latere ſiniſtro numerum multiplicantem, & in ſuperiore parte multiplicatum in eo quadrangulo, ubi ſeries inuicem concurrunt, erit numerus genitus. Sic 8. per 3. multiplicatus erit 24. ubi ſeries A, & B occurrunt in C. Obſeruaque ex propoſ. 11. numerum tabulæ D excedere ſimplices numeros, & proportionem ſequentem inducere.

* Verum quia non ſemper hæc tabula in promptu eſt, & quandoque in multiplicationibus numerorũ maiorum poteſt ſuboriri difficultas; ideo hæc regula poterit obſeruari ad facilitatem ſectandam.

Volo Eg. cognoſcere 8. multiplicatum per 9. quem numerum gignat: Video, quot numeris diſtet minor numerus 8. à 10. & video eſſe 2. differentiam. Accipio ergo 9. gemina vice, & ſubduco à 9. addito o. nempe à 90. & reſiduum 72. eſt numerus quæſitus; Sic 7. per 6. differentia eſt 4. quam multiplico per 7. & faciunt 28. ſubduco à 70. & dant 42. numerum genitum ex multiplicatione 7. in 6. Et ratio eſt; quia 70. eſt 7. decies acceptus. Quòd, ſi auferatur ab eo 7. quater acceptus, clarum eſt, quòd remanet 7. ſexties acceptus, nempe per 6. multiplicatus: hęc autem regula comodior eſt in magnis numeris: cum differentiæ à 10. paruæ ſunt, & in illis deſeruit.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datis duobus numeris non ſimplicibus inuicem multiplicandis, ſi quilibet numerus per alium multiplicetur, & ſeruetur proportionum locus vbique, & ſumma cuiuslibet multiplicationis colligatur, erit facta multiplicatio compoſitorum numerorum.

VIſa facili multiplicatione numerorum ſimplicium, videndum eſt quomodo ex eis numeri maiores multiplicentur. Sint ergo multiplicandi 254. per 43. cùm ſit ſeruandus proportionis locus, debet minor ſub maiore ſubſcribi tali modo,

254
vt numerus vnitatum ſub vnitatibus, 43

 de-

decimarum ſub decimis, & omnes alij numeri correſpondenter collocentur. Et quia quilibet per alium multiplicari debet, & iam cognoſco quomodo multiplicentur numeri ſimplices. Ideo multiplico 3. per 4. & faciunt 12. ſilicet ex propoſ. 10. & 11. numeros geminę proportionis, primum ſimplicium vnitatum, ſecundum numerorum decimarum, & proportionis immediatè ſequentis: ideo 2. vnitatibus ſubſcribo, ac 1. decimis. Poſtea 3. per 5. ſequentem numerum multiplico, & faciunt 15. quorum primus 5. locum ex propoſ. 14. proportionis eiuſdem, quæ eſt numeri 5. debet occupare nempe ſecundum. Vnde numero 1. ſubſcribendus, vt vides, & 1. numeri 15. ad tertium locum pertinebit, cum ſit proportionis immediatè ſequentis. Deinde multiplico. 3. per 2. & faciunt 6. numerum tertij loci.

254
43
12
15
6
16
20
8
10922

Itaque iam prima figura inferioris numeri multiplicata eſt per omnes figuras numeri ſuperioris: Modo multiplicanda eſt ſecunda figura; ideoque accipio 4. & multiplico per 4. & faciunt 16. & quia 4. eſt ſecundi ordinis in numero 43. Ideo genitus ad eundem locum ſpectat ex propoſ. 14. nempe ſecundum. Quare ipſius 1. ad tertium deuenit ex propoſ. 15. Poſtmodum iterum multiplico 5. per 4. & faciunt 20. cuius primus 0. ex propoſ. 15. debet occupare tertium locum, & ideo ſubſcribo tertio loco 0. & 2. quarto. Deinde 2. per 4. & faciunt 8. quarto loco ponendus. Tandem congrego omnes ſimul, eritque ſumma numeri ex multiplicatione geniti 10922.

Practici tamen breuitatis gratia non omnes numeros diſtinctè ſcribunt; ſed transferunt ad alios anteriores, V. g. in præcedenti exemplo, non ſcribent numerum 12. ſed 2. quidem ſcilicet numerum verò 1. mente retinebunt, donec multiplicent ſequentem 5. per 3. & producant 15. cuius numero 5. addent illam vnitatem mente retentam, & ſcribent 6. & alterum 1. mente conſeruabunt, donec iterum per 3. multiplicent 2. & faciunt 6. cui addent 1. mente ſeruatum, & ſic ſcribent 7. & ſic in ſecunda multiplicatione numeri 4. efficiunt vt hic videre licet. Nam ſolum ſcribēt 6 & 1. coniungent cum 20. vt ſint 21. & ſcribent 1. & 2. coniungent cum numero 8. vt ſint 10. quem tandem ſcribent. Deinde, vt priùs, ſumma colligitur

254
43
762
1016
10922

Si quando numerus zifris conſtat, ſufficit ponere tot zifras, quot ſunt in numeris tum multiplicato, tum multiplicatore, & deinde vltimum numerum multiplicare inferioris, cum ſuperiori, & erit facta multiplicatio, V. g. ſint multiplicandi 20000. per 300. Quia ſunt 6. zifræ in vtroque eas omnes ſcribo, deinde multiplico 3. cum 2. & vltimo loco pono 6. & erit fine ſumma confecta multiplicatio.

20000
300
6000000

Quod ſi numerus alter conſtet zifris, at alter nequaquam; alter per alterum multiplicandus eſt: Et confecta multiplicatione ſummæ eius addendæ ſunt tot nullæ, quot ſunt in altero ipſorum, vt vides in exemplo.

33000
35
165
99
1155000

EXPENSIO V.

De numerorum integrorum diuiſione.

Diuiſio eſt inuentio numeri, qui ſuis vnitatibus demonſtret, quoties numerus minor continetur in maiore; & metiatur maiorem. Duplex eſt autem, alia enim eſt numeri ſimplicis quemcunque alium diuidentis, alia numeri compoſiti alium pariter diuidentis.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Quilibet numerus maior cuiuslibet proportionis per quemlibet alium numerum partiri poteſt.

Sit numerus proportionis decimarum 80. Dico quod per quemlibet alium numerum minorem, ſeu æqualem diuidi queat.

Probatur primo de minori, qui ſit V. g. 4. Vtique ego poſſum aſſumere huic numero 4. ęquè multiplicem, vt mihi placet, ex poſt. 2. Accipiam ergo numerum multiplicem, qui 80. non excedat proximè, ita vt, ſi ſemel adhuc multiplicem, excedat; Iterum poſſum exprimere numerum multiplicitatis, ideſt quot vicibus aſſumpſerim. Si enim aſſumo multiplicem, etiam quot vicibus aſſumpſerim ignorare non debeo. Si ergo exprimam, expreſſus numerus erit ille, qui quæritur, & appellabitur Quotiens, ideſt Indicans, quot vicibus contineatur 4. in 80. qui numerus vicium erit 20.

Probatur etiam de ęquali; quia, ſi eſt æqualis cōmenſuratur ipſi, ergo vnica vice capiet in ipſo.

Quare patet. Quod numerus cuiuslibet proportionis per quemlibet diuidi poſſit, cum per minorem, & æqualem, vt libet diuidatur.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Quilibet numerus minor, vt minor, per maiorem partiri nequit.

Probatur ex definitione 16. Minor nullis vicibus continet maiorem; Ergo vices ſecundum quas continet, exprimi nequeunt. Quare nec diuidi.

Dixi autem, *numerus minor, vt minor*, quia numeri minoris, vtpote quantitatis in partes deſignabiles plures ſecari poterit quælibet vnitas, & ſic augeri numero. Quare auctus numero, diuidi poterit.

THEOR. III. PROPOS. XX.

In qualibet figura numerica, non poteſt eiuſdem proportionis maior numerus capere, quam 9.

Probat. Nam capiat maior numerus. Iam euadit 10. ideſt alterius proportionis, nempe vnitas decimarum.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Non omnis numerus per alium, ita diuidi poteſt manendo eiuſdem rationis, vt non ſuperſit aliquid.

PRobatur diuidere eſt cognoſcere, quot vicibus numerus datus contineatur in diuidendo: ſed non omnis numerus ex æquo omnem numerum metitur, cum non ſit eius pars, ſed multoties partes ex defin. 4. Ergo tunc aliquid remanere debet.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Illud, quod remanet, ſemper eſt aliqua pars numeri diuidentis.

PRobatur. Nam ex Axiom. 6. omnis numerus ſeipſum per vnitatem metitur: Ergo quemlibet alium ex Axiomate 9. per vnitatem metietur, quia numerus quemcũq; numerũ metiẽs metitur etiam omnem numerum, quem ille metitur. Quare, cùm vnitas metiatur omnem numerum ſaltem per vnitatem, numerus remanens metietur numerum diuiſorem ſaltem per vnitatem. Propterea hoc erit exprimendum.

COROLLARIVM

QVoniam numerus reſiduus à diuiſione eſt pars numeri diuidentis. Ideo erit numerus fractus, id eſt non erit totum; ſed aliqua pars. Vnde hic neceſſariò docendum erit; quomodo fracti ſcribantur, & quomodo partes eorum nominentur: Numerus itaque fractus neceſſariò exprimendus duobus numeris; quia ex præced. prop. cùm nõ ſit numerus abſolutus; ſed relatiuus, & ſe habeat tanquam pars ad totum. Relatiua verò ex Ariſt. ſint ſimul cognitione conſequenter exprimendum erit totum, & pars tali modo $\frac{3}{6}$ cognoſcetur enim 3. numerum ſuperiorem concludere in ſe tres partes numeri 6. Ideoque 3. numerus ſuperior dicetur numerator, quòd numeret partes: at inferior denominator, qui exprimit totum, & indicat, cuius totius partes ſint ſuper lineolam numeri deſcripti, lineola vero interijcitur diſtinctionis gratia. Superior quoque numerus poteſt eſſe maior, & inferior minor; quia aliquando neceſſe eſt exprimere habitudinem, & relationem numeri ſuperioris ad inferiorẽ, vt $\frac{3}{2}$ vnde more fractorum id fit: quòd in fractis exprimatur relatio totius, & partis.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Reſiduum numeri alicuius vnitatis maioris poteſt habere tot vnitates in minori proportione acceptas, quòd poſſit diuidi per eundem numerum, quo prior diuiſus eſt.

SIt diuidendus numerus 90. per 8. Iam certum eſt 8. in 9. vnica vice capere, & reſiduum eſſe vnitatem, quæ non capit 8: ſed, quia illis eſt vnitas decimarum, ſi decima accipiatur tanquam numerus ſimplex, & proportionis immediatè inferioris, iam habebit numeros 10. capaces ſemel numeri 8. cum reſidua vnitate.

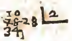
PROB. VII. PROP. XXIV.

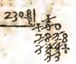
Si videatur quoties numerus minor contineatur in numeris maioris cuiuſlibet proportionis: Deinde ſucceſſiuè in alijs minoris proportionis cum reſiduo remanente à diuiſione numeri maioris, & hæ vices ſcribantur per ordinem erit facta diuiſio.

QVoniam, vt dictum eſt propoſ. 18. in hac operatione proportio non eſt ſeruanda. Sed quilibet numerus alium diuidere poteſt, cuiuſcumque proportionis ſit: Ideo ponemus numerũ diuidentem. V.g. 34. ſub numero diuidendo 7828. abſque reſpectu loci, & quia reſiduum maioris numeri poteſt iterum diuidi ex prop. 23. in minori ſequenti proportione: ideo ponemus numerum diuidentem ſub maiore numero diuidendo, ad hoc vt ex eo diuiſo remaneat reſiduum iterum diuidendum, ſed acceptum in minori proportione tali modo, & ducatur lineola. Video quot vicibus numerus primus diuiſor 3. capiat in 7. & cognoſco vicem eſſe duplicem, ſimulque etiam aſpicio, ſi eadem gemina vice numerus 4. poſſit capere in numero ſequente 8. cum eo, quod remanet à primo numero 7. Sed hic poteſt capere; ideo ſcribo 2. ſeorſim. Et ad hoc, vt ſciam numerum ſubtrahendum multiplico 2. per 3. & faciunt 6. quos ſubduco à 7. & remanet 1.

7828
34

Scribo itaque 1. reſiduum ſuper 7. deleoque 7. tali modo, vt poſſit cognoſci, lineolâ ſuper 7. ductâ. Iterumque multiplico 4. per 2. & faciunt 8. quos ſubduco ab 8. & nihil remanet. Quare ſcribo ſuper 8. zifrã, & deleo 8. Deleoque etiam totum numerum 34. vt nihil iam amplius eo loco deſeruiens, quòd numeri illius proportionis iam ſint diuiſi. Quamobrem ſcribo loco immediatè inferiori ſub reſiduo numeri diuiſi ad diuidendam proportionem inferioris ordinis, & conſidero, quot vicibus capiat 3. in reſiduo 10. tanquam numerum inferioris proportionis acceptо; & video tricies. Scribo ergo 3. apud 2. ſeorſim, & eodem modo multiplico 3. per 3. & faciunt 9. quos ſubduco à 10. & remanet 1. Deleo igitur 1. in numero 10. & zifræ deletæ ſuperpono 1, quæ cum 2. facit 12. multiplico itaque 4. per 3. rurſus, & faciunt 12. ſubduco itaque 12. à 12. & nihil remanet: Vnde deleo 1. & 2. & ſuperpono o. eo quòd nihil remaneat. Deleo quoque numerum diuiſorem, tanquam non amplius eo loco deſeruientem, ſed ad vlteriorem locum promouendum. Quare ſcribo ſequenti loco numerum diuiſorem; hac enim mutatione loci fit, vt accedat ad numerum reſiduum acceptum in minori proportione ex præced. propoſ. 23. & ideo diuidi poſſit: Si tamen aliquid remaneat ſufficiens. Hic autem nihil remanet ſufficiens, cùm tantùm relinquatur 8. numerus primus





Digitized by Google

primus ſimplicium vnitatum, in quo numerus 34. capere nequit, & ideo in quotiente apud 3. pono 0. eò quòd in vltimo numero vltimi loci nulla diuiſio potuerit fieri, quòd ſemper ſeruandum eſt, quotieſcumque occurrerit numerum diuiſorem in aliqua proportione non capere: ſed diuiſorem eſſe promouendum adhuc ad minorem numerum.

Reſiduum verò 8. eſt pars numeri diuidentis ex propoſ. 22. ideo ſcribendus eſt apud alios, ſed vt minutia, nempe ſuperiùs 8. & interiecta lineola numerus diuiſor 34. quare diuiſo numero 7828 per 34. quotiens erit 230. $\frac{8}{34}$ nempe 230. & inſuper ex triginta *quater partibus in quibus vnitas diuiſa eſt* 8. *partes*.

Quod ſi aliquando occurrat in vltimo ipſo numero versùs ſiniſtram, qui primus omnium diuidendus eſt non capere numerum diuiſorem, vel vltimum capere: ſed non penultimum, vel antepenultimum; tunc ad ſecundum locum inferiorem promouendus eſt.

Sit numerus diuidendus 7930. per 794. quia 4. prima diuiſoris non capit in 3. ideo aſſumenda eſt proportio minor, & prima diuiſione non debeo diuidere 793. quia nequit. Sed numerum 7930. Conſidero itaque quot vicibus capiat 7. in 79. & video; quod nouem vicibus, (neque enim amplius capere poteſt, vt ſupra propoſ. 20. quam 9. in qualibet proportione, licet aliquando minus) ideoque multiplico per 9. diuiſorem 794. & fiunt 7146. auferendi à diuidendo 7930. & facta erit diuiſio. Quod ſi iſte defectus eueniat non in principio, ſed in medio, vt ſi 7946. diuidantur per 73. Tunc appoſita apud quotientem zifra, ad locum inferiorem diuiſor promouendus. Sic ſemel 73. capit in 79. ideoque quotiens eſt 1. & reſiduum eſt 6. qui cum 4. numero ſequentis proportionis facit 64. in quo deberet capere diuiſor numerus 73. Cum ergo non capiat, ad aliam proportionem tranſeundum eſt, priùs appoſitâ zifrâ apud quotientem, vt ſignificet 10. Et eſt deinde diuidendus numerus 646. per 73. Et quia 7. capit in 64. nouem vicibus, & 3. non capit in reſiduo 16. nouem quoq; vicibus; ideo dico octo vicibus capere & pono 8. apud quotientem; vt ſit 108. & facta multiplicatione eueniunt 584. quos ſubduco à 646. & fiunt 62. reſidui pro fractis ponendi. Quare quotiens erit 108. $\frac{62}{73}$

Alius modus tutiſſimus diuidendi erit. Multiplicare priùs ſenſim numeros diuiſoris per numeros ſimplices, vſque quo eorum ſumma eueniat maior, quam correſpondentis figuræ numeri diuidendi: deinde extrahere ſummam proximè minorem à numero diuidendo.

V.g. ſit diuidendus numerus 993470 per 247. Priùs per numeros ſimplices multiplico diuiſorem 247. hoc modo hic lateraliter appoſito priùs per 1. deinde per 2. &c. vſque quo perueniam ad numerum 1235. maiorem numero 993. conſtante tribus vltimis figuris diuidendi, quæ debent primo diuiſori correſpondere. Quo facto video; an reperiatur 993. in his numeris ita multiplicatis: Et ſi non reperio, ſummo proximè minorem; nempe 988. deducoque à 993. & remanent 5. & quia 4. appoſui apud 988. notando quod 988. eſt 247. quater acceptus; Idcirco appono pro quotiente 4.

247	1
494	2
741	3
988	4
1235	5

993 | 4
988
———
5

Deinde aſſumo aliam figuram à numero diuidendo, nempe ſequentem 4. & pono apud 5. & conſidero in numeris multiplicatis; & genitis à diuiſore per numeros ſimplices ducto; an adſit hic numerus; & video non adeſſe, nec quidem proximè minorem, ſed omnes maiores, vnde apud 4 quotientem pono zifram, & aſſumo aliam figuram nempe 7. & video, an in ſerie numerorum adſit hic numerus 547. & video nec hic quidem reperiri: ſed proxime minorem 494. ergo quotienti 40. appono 2. lateralem, & deduco à prædicto 547. numerum 494. & reſiduum eſt 53. deinde vltimam figuram aſſumo, nempe 0. à diuidendo, & appono ad 53. & faciunt 530. Reperioq; numerum proximè minorem eſſe 494. quem deduco à 530. & apud quotientem, item 2. lateralem appono & facta ſubtractione reſiduum eſt 36. quam more reſiduorum apud quotientem adſcribo. Eritque quotiens 4022 $\frac{36}{247}$.

40
547

402
547
494
53

4022
530
494
36

Sed licet tutiſſima ſit hæc regula; Attamen prolixa eſt. Quare poterit deſeruire in aliquo magno numero diuidendo per alium aliquem magnum numerum; cùm enim ibi error ſit maximi diſpendij temporis, & laboris; opportuniùs erit huc modo operationem comutari; Et nota ex præced Prop. 20. multiplicationem numeri diuiſoris non eſſe continuandam vltra 9. quia magis, quàm nouem vicibus non poteſt contineri figura diuidens in diuidenda.

Tertius modus apud Italos vſitatus eſt talis. Sit diuidendus numerus 4680. per numerum 37. Poſito numero diuiſore ſeorſum, trahatur infra ipſum lineola. Deinde video, vt ſupra feci, quot vicibus 3. capiat in 4. nimirum quòd vnica vice; ideo pono 1. pro quotiẽte ſuper lineolã, & per illum 1. multiplico diuiſorem, & numerum genitum ſub duabus vltimis figuris diuidendi ſubſcribo.

Et ex inde ſubduco, & reſiduum noto ſub lineola. Multiplicatis ergo 37. per 1. generat 37. quos deduco à 46. & reliquunt 9. Aſſumo deinde aliam figuram, nempe 8. à diuidendo, & pono apud 9. Et video, quot vicibus capiat 37. in 98. Cognoſcoque capere bis; quia licet 3. capiat ter in 9. non tamen capit 7. in 8. ter: quare dico bis, & ſic 7. capit in 8. cum reſiduo ex 9. etiam bis, & licet capiat magis; nil intereſt. Ergo apud quotientem 1. appono 2. & multiplico per diuiſorem 37. & faciunt 74. quos deduco à 98. & reſiduum eſt 24. Aſſumo rurſus vltimam figuram 0. & appono apud 24. faciuntq; 240. Video igitur, quot vicibus capiat 3. in 24 & cognoſco, quod octies: Verùm 7. in 0. nullo modo capit. Aſſumo itaque minus, & dico 3. in 24. capere ſepties, remanentq: 30. in quibus 7. ſepties non capit. Aſſumo itaq; rurſus minus, & dico capere 3. in 24. ſexties, & reſiduum eſt 60. in quibus ſexties vtique 7. capit; quia 7. multiplicatus per 6. facit ſolum 42. Ideo

4680 | 1
37 | 37
———
98

4680 | 12
37 | 37
———
98
74
———
240

apud

apud quotientem 12 adſcribo numerum 6. ſignificantem ſex vicibus numerum diuiſorem in diuidendo contineri: multiplicoque per 6. diuiſorem 37. & genitus eſt 222. quos deduco à 240. & reſiduum eſt 18. quem numerum more reſiduorũ apud quotientem ſcribo. Eſtque quotiens 126. $\frac{18}{37}$

4680	126
37	37
98	
74	
240	
222	
18	

EXPENSIO VI.

De Probationibus.

QVoniam in calculandis numeris non raró eueniunt errores; nunc modus tradendus eſt, quo in vnaquaque regulâ operationes factæ examinentur.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Ablato 9. ex qualibet proportione integra remanet numerus ſimplex denominans eam proportionem.

* DEtur numerus 70. à quo auferatur 9. quoties auferi poteſt. Dico quod remanebit numerus denominans eam proportionem, & quia denominabatur à 7. Ideo remanet numerus 7.

Probatur. Nam V. g. 70. ſignificat ſeptem decimas; ſi autem ex decimis qualibet dematur 9. in qualibet decima ſupererit 1. cùmque ſint 7. decimæ, erunt reſiduæ ſeptem vnitates, quę conſtituunt numerum 7.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ſiue numeri aſſumantur, vt ſignificantes decimas, ſiue decimas decimarum, &c. ſemper æquali modo idem remanſurum ſimplicem proportionis denominatorem; ac ſi, vt numeri ſimplices accepti fuiſſent. Nam ex qualibet ablatione cuiuſcumque proportionis ſemper remanet vnitas; vt ſi ex 102. auferatur 9. tot vicibus, quot poteſt auferri, remanet numerus 12. à quo deductus 9. relinquitur numerus 3. ille ipſe; qui reſtaret, ſi numerus 1. & 2. tanquam ſimplices vnitates in numero 102. acceptæ fuiſſent. Item à numero 730. aufero 9. quoties fieri poteſt, ideſt vicibus 80. reſiduum erit 10. à quo ſi aufero 9. remanet 1. idem numerus, qui remanet à 7. & 3. vt ſimplicibus acceptis.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Si numerus decimarum multiplicetur per numerum quemcumque, & à multiplicato auferatur 9. quoties fieri poteſt, relinquetur numerus, ac ſi ſimplices numeri fuerint inuicem multiplicati.

SI numerus 80. multiplicatus per 3. & generet 240. Dico, quòd ſi à 240. auferatur 9. quantùm fieri poteſt, relinquetur numerus talis; ac ſi 8. ſimpliciter per 9. fuerit multiplicatus.

Probatur. Nam relinquitur numerus denominans eam proportionem, & antecedent. ideoq; à 200. auferatur 9. quantũ fieri poteſt remanet 2. & à 200. reſtat 2. & à 40. remanet 4. Quare ablato 9. à 240. quantũ fieri poterit remanet 24. nempe numerus ille, qui factus, & genitus fuiſſet; ſi 8. fuiſſet multiplicatus per 3. Sed ſit numerus multiplicans, & multiplicatus decimarum V. g. 80. & 30. adhuc idem ſuccedet. Nam producet 2400. à quo ablatus 9. relinquit numerum 24. quem produxiſſent, ſi fuiſſent ſimplices.

COROLLARIVM

HInc eſt: Quod, ſi à numero aliquo genito à ſimplicibus auferatur 9. quantùm fieri poteſt; quod relinquetur idem reſiduũ; ac ſi fuiſſet numerus genitus à numeris decimarum; ſi à 24. relinquitur 6. & à 2400. relinquitur adhuc 6.

Quòd, ſi ſit coniunctus cum aliquo ſimplici, idem eueniet; ſi ab eis priùs auferatur 9. quantũ fieri poteſt; nimirũ à 75. octies remanent 3. & ab 86. nouies, remanent 5. qui ſimplices numeri inuicem multiplicati generabunt talem numerum, à quo ablatus 9. quantùm fieri poteſt, idem reſiduum relinquet; ac ſi in ſua ſpecie, & ab illorum genito ablatus 9. fuiſſet, quantùm fieri potuiſſet. Sic 3. & 5. inuicem multiplicati faciunt 15. & ablato 9. relinquũt 6. quod reſiduum à genito 6450. ex numeris 75. & 86. reſtat. Ratio eſt; quia aſſumptus 7. & 5. vel 8. & 6. vt ſimplices, idem relinquunt, ac aſſumpti; vt decimas ſignificantes, ſic 7. & 5. faciunt 12. & ablato ſemel 9. remanet 3. quòd remanet ablato 9. octies à 75. & ab 8. & 6. vt ſimplices; nempe à 14. idem reſiduum remanet ablato ſemel 9. ac remanet ab 89. nouies ablato 9.

Quare ex præced. multiplicatis inuicem iſtis reſiduis 3. & 5. ſi à genito dematur 9. idem reſiduum dabit, ac ſi à genito ab eorum primitiuorũ 75. & 86. mutua multiplicatione 9. quoties fieri poteſt auferatur. Oportet verò ab illis priùs auferre 9. quantùm fieri poteſt, alioquin, ſi ſemel poſſet auferri, non eſſent ſimplices; ſed decimas ſignificantes.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si à numero collecto in vnam ſummam auferatur aliquis numerus, & à colligendo idem numerus auferatur debent reſidua, tum collecti, tum colligendi remanere æqualia.

Probatur. Nam ſit ſumma 169. & numerus colligendus ſit priùs 42. & 37. & 81. & 9. qui ſunt notati litera A. & auferatur idem numerus ab vtriſque, V. g. 81. *Dico quod reſidua erunt æqualia.*

A
42
37
81
9
169 B

Probatur. Nam ſi ab æqualibus æqualia demas; quæ remanent ſunt æqualia, ſed numerus colligendus A, & collectus B ſunt æquales: Ergo ablato eodem numero 81. ab vtriſque erunt adhuc reſidua æqualia.

PROB.

PROB. I. PROPOS. XXVII.

Collectionem; an ſit benè facta, examinare.

AVferatur à numero collecto, & colligendo 9 quantum fieri poteſt, numeris, vt ſimplicibus ad ſectandam facilitatem aſſumptis, ex coroll. propoſ. 4. Nam, ſi idem numerus remanet, facta, tum à collecto, tum à colligendo, ablatione, bona erit collectio.

Sit numerus colligendus A, & à primo 39. auferatur 9. quoties poteſt, remanent 3. qui cum 5. faciunt 8. & cum 1. faciunt 9. qui abijciatur; & deinde aſſumatur 1. cum 5. faciunt 6. & cum 1. faciunt 7. & cum 9. eueniunt 16. à quibus abijcio 9. reſiduum eſt 7. quem ſcribo ſeorſum.

A
39
51
15
19
———
124 B



Deinde ad ſummam B accedo nimirum 124. & addo 1. ad 2. faciunt 3. & 3. ad 4. & faciunt 7. æqualis nimirum numerus alteri 7. iam ſcripto. Vnde benè erit facta diuiſio.

Dices aufertur maior numerus à numero colligendo ab A, quàm à collecto B: nam ex numero A multotirs aufertur 9. at à collecto nulla vice: quare non poſſunt reſidua remanere æqualia ex propoſ. 26.

Reſpondetur poſſe occurrere quandoque errorem illo ſolo caſu, ſi error in colligendo commiſſus ſit intermiſſo, aut ſuperaddito 9. vt patet in numero C, & eius ſumma G, quę falſa eſt; eò quia 9. ſit intermiſſus, & tamen idem numerus 7. remanet.

49 C
51
15
19
9
———
G 124



Ceterum, cum hic error raro occurrat, hinc eſt; quòd regula ſit bona; quia licet 9. auferatur pluribus vicibus à numero colligendo A, quàm à collecto B, nihil tamen intereſt; cùm idem ſit auferre 9. à numero A, & non auferri à numero B, vt ſimplex, dum tamen auferri poſſit in ſua proportione acceptus, vt Corol. prop. 24. Et patet. Nam idem numerus remanet, ſi auferatur 9. ab 80. octies, ab 8. ſumpto, vt 8. nulla vice. Semper enim remanet 8. propter proprietatem numeri 9. quæ oſtenſa eſt Propoſ. 24.

PROB. II. PROPOS. XXVIII.

Subtractionem examinare: vtrum bene fuerit confecta.

AVferatur 9. Quantum fieri poteſt à ſubtracto, & reſiduo, & id quod remanet notetur, & ſimiliter à numero, à quo deducitur, ſubducatur 9. quantum fieri poteſt. Nam, ſi reſidua ſint æqualia, bona erit ſubtractio. Sit numerus A, à quo facienda eſt ſubtractio, numerus ſubductus B reſiduum verò ſit C.

3675 A
439 B
———
3236 C

Accipio reſiduum C; & auſtro 9. quoties fieri poteſt, dicendo 3. & 2. faciunt 5. & 3. faciunt 8. & 6. faciunt 14. à quibus ablato 9. remanet 5. & ſcribo ſeorſum ad latus crucis. Deinde aſſumo numerum B ſubductum, nempe 4. cum 3. faciunt 7. & 9. abijcio ſcribo 7. ad alterũ latus crucis. Addo hoc 7. cum numero priori ſeorſim ſcripto 5. & faciunt 12. à quibus deductus 9. reſtant 3. & ſcribo ſuper crucem. Deinde accedo ad numerum A, & 3. addo numero 6. & faciunt 9. quem abijcio, & 5 & 7 faciunt 12. à quo abijcio, 9. & remanent 3. vt priùs. Ideoque ſubtractio optima eſt.



Ratio eſt. Quia numerus ſubtractus cum reſiduo æquatur numero, à quo fit ſubtractio. Vnde 9. ab vtriſque æqualiter deducta debet relinquere idem reſiduum.

PROB. III. PROPOS. XXIX.

Multiplicationem explorare: an bene ſibi conſtet.

AVferatur 9. tum à numero multiplicante, tum à numero multiplicato, quoties fieri poteſt, & à reſiduis quoq; inuicem multiplicatis 9. auferatur quoties fieri poteſt, & reſiduum notetur. Iterumque à numero genito auferatur 9. quantùm fieri poteſt. Si reſiduum ſit ęquale reſiduo præcedenti iam notato, multiplicatio benè ſe habebit, & abſoluta conſiſtet: Pro exemplo ſit numerus 3792. multiplicandus per 97. Auſero 9. aſſumendo priùs 3. & deinda 7. & faciunt 10. abiecto 9. remanet 1. abijcioque ſequentem 9. & 1. cum 2. faciunt 3. quem ſcribo.

Abijcioque à multiplicatore 97. ſemel 9. & reſiduum eſt 7. multiplico quoque 7 per 3. & faciunt 21. abiectis 9. relinquitur rurſus 3. quos ſcribo, vt vides 7. ad partem crucis, 3. ad alteram partem, & vltimum 3. ſuper crucem.

3792
97
———
26544
34128
———
367824

Deinde accedo ad numerum genitum; & dico 3. & 6. faciunt 9. quem abijcio; hinc 7. & 8. faciunt 15. & abiecto 9. ſunt 6. & cum 2. ſunt 8. & cum 4. faciunt 12. à quo abiecto 9. remanet 3. numerum infra crucem collocãdum quia ergo 3. infra crucẽ cũ 3. ſupra crucem æquales numeri ſunt; ideo multiplicatio bene ſe habet.



Probatur. Nam ſi aſſumpſimus numerum multiplicatum, & multiplicantem, vt numeri ſimplices: Numeri verò ſimplices inuicem multiplicati producunt ex coroll. propoſ. 25. numerum, à quo ablatus 9. quoties poteſt demi relinquit numerum æqualem reſiduo; quod à genito reſtat, ſi ab eo ſimiliter 9. auferatur.

Quòd, ſi occurreret ipſum 9 relinqui; abijciatur tamen, & ad latera crucis, & ſuper crucem o. ponatur. Nam, & o. infra crucem collocabitur genito, ablato 9. nihil relinquenta. Sic 54. & 39 inuicem multiplicatis faciunt 2106. Ablato itaque à 54. 9. remanet o. & ablato à 39. idem 9. remanet 3. qui multiplicatus cum o. producit o. aifrã ſupra crucem ponendam. Quare, & genitus 2106. ablato 9. relinquit o.



PROBL. IV. PROP. XXX.

Diuiſionem examinare.

EOdẽ modo fit, ac in multiplicatione, & eadẽ ratio valet. Sit V. g. 7945. diuiſus per 35. & quotiens ſit 227. Auferatur à 35. numerus 9.

quo-

quoties fieri poteſt,& ſunt 8. & à 227. remanent 2. multiplicentur inuicem fiunt 16. à quibus ablatus 9. relinquit 7. Deinde à numero diuidendo 7945. auferatur 9 vt ſupra dictum eſt,& relinquet 7. Quare bene ſtabit diuiſio: At ſi adſint minutiæ V.g. ſi diuidendus numerus eſſet 7950. & diuiſor 35. & quotiens 227 $\frac{5}{35}$; tunc numerator 5. cum quotiente ſumendus, & ab eo 9. quoties fieri poteſt demendus, & relinquetur 7. qui multiplicatus cum 8. reſiduo diuidentis, dat 56. à quo ſubductus 9. quantùm fieri poteſt, relinquit 2. & à numero diuidendo 7950. reiectis 9. prout fieri poteſt, relinquitur 2. Vnde facta diuiſio benè ſe geret.





PROB. V. PROPOS. XXXI.

Cuiuſcumque regulæ operationem per aliam examinare.

SVmma numerorum ſubtractione collectorum probatur. Sic ſumma 117. examinatur ſubtrahendo 39. & 42. & 117. Nam ſi remanet 36. erit bene facta collectio. Et è contra ſubtractio numerorum collectione examinatur; ſic, ſi reſiduum 17. à ſubtractione numeri 32. à 24. remanens colligatur cum numero 32. qui à maiori ſubducitur,& efficiat 49. vt priùs, ſubtractio recta erit.

36
42
39
117
49
32
[illegible]

Ratio patet. Quia ſi auferatur id, quod additum eſt, quod eſt ſubducere relinquitur neceſſariò id, quod erat, & ſi addatur id, quod ablatum eſt, idem, quod erat, integratur. Quare ſi benè erit facta collectio, ſubtractione idem reſtituetur, quod priùs, & ſi bona eſt ſubductio, additione, quod priùs erat, integrabitur.

Multiplicationem numerorum ex diuiſione experimur. Nam ſi multiplicationis ſumma per numerum, vel multiplicatum, vel multiplicantem diuidatur, neceſſe eſt alterum ex ipſis prouenire, quòd, ſi non proueniat, ſignum eſt collectionem, vel multiplicationem non fuiſſe exactam.

Partitio quoque examinatur multiplicatione: Nam ſi numerus quotiens cum numero diuidente multiplicetur, additis, ſi fortè fuerint, reliquijs, debet ſumma multiplicationis æquare numerum diuiſum; quòd ſi non æquet, ſignum eſt diuiſionem non eſſe perfectam, ſed in aliquo deficere.

Ratio eſt, quia diuidere eſt numerum in tot partes ſecare, quot ſunt in diuidente vnitates, & multiplicare eſt numerum integrare ex alio numero, tanquam pars aſſumpto toties, quot ſunt in multiplicante vnitates, ex def. 15. & 16. Vnde dato multiplicante, qui quotiens erat, & multiplicato, qui erat diuidens, neceſſe eſt, vt idem numerus rurſus integretur. Sicut dato eodem genito, & integrato, & eodem diuidente neceſſe eſt, vt idem quotiens numerus reſtituatur, qui multiplicatus fuerat.

TRACTATVS IX.

IN V. LIBRVM EVCLIDIS

PARS PRIMA.

De Proportionum Notione.

CVM definitiones, quas ad initium Quinti libri tradit Euclides multa luce indigeant, vt percipiantur, viſum eſt earum explicationem profuſiùs proſequi, & ne dum eas, vt Mathematicorum mos eſt, tanquam nomina explanare; ſed proportionum, quam explicant, eſſentiam probare, diuiſiones, modumq; eas cognoſcendi, & in eis argumentandi exponere: vt hac cognitione præuia, quæ deinde 5. libro oſtenduntur genericę proportionum habitudines faciliori captu comprehendantur.

EXPENSIO I

Quid ſit Ratio.

RAtio eſt quædam quantitatiua relatio. Relatio ſecundùm noſtra principia philoſophica expenſ.4. de relatioe conci. 5. & expenſ. 7. concl.3. eſt quædam dependentia obiectorum in eis cognoſcendis, quæ fundatur in aliqua poſitiua, ſeu dependentia, ſeu ſaltem applicatione vnius rei ad ailam. Ideoque Ratio erit quædam relatio quantitatis orta ex applicatione reali, aut poſſibili ad minùs quantitatis ad aliam quantitatem; vt inuicem commenſurentur, vel ſaltem inuicem ſe contineant, aut ſe ſuperent, & hæc poſſibilis quantitatum commenſuratio, vel actualis eſt illa, ob quam intellectus conſiderat alteram quantitatem dependenter ab altera, & inter eas reſpectum, & relationem recognoſcit. Cum ergo Ratio in relatione partis, & totius conſiſtat, & commenſurationis, operæ prætium eſt priùs partis, & totius definitionem declarare.

DEFINITIO I.

P*Ars eſt magnitudo minor alia magnitudine, quæ multiplicata eam adeo menſurat, vt nihil menſuratæ maioris magnitudinis ſuperſit.*

Duplex ex pars alia *Aliquota*, alia *Aliquanta*. Aliquota hic definitur, quæ talis eſt, vt tot vicibus capiat in maiori, ſint illæ vices, quot, quot ſint, vt nihil ſuperſit tale, quod illi adamuſſim nõ commenſuretur: Sed totum multiplicatis illis vicibus penitùs correſpondeat. Sic vncia, ſeu digitus metitur lineam 4. digitorum quater acceptus, & lineã ſexdecem digitorum ſex decies acceptus: ſed ſi aliquid ſuperſit in toto, quod menſuranti quantitati non adæquetur, ſed etna alicui parti, tunc dicitur pars aliquanta, de qua definitio non eſt: Sic digitus, lineæ 4. digitorum, & $\frac{1}{4}$ dicetur pars aliquanta; quia id quod ſupereſt quatuor digitorum, & vnica quarta pars ipſius digiti menſurantis.

DEFINITIO II.

M*Vltiplex eſt autem maior minoris, cùm minor metitur maiorem.*

Eſſe partis eſt relatio minoris quantitatis ad maiorem; Multiplicitas verò eſt relatio maioris quantitatis ad minorem; Intelligitur verò multiplicitas non reſpectu partis aliquantæ, ſed aliquotæ ita, vt vices quibus menſura adhibetur æquent pluries replicatæ tandem maiorem, & ſibi multiplicem.

DEFINITIO III.

Æ*Quèmultiplices illæ magnitudines dicuntur cum æqualibus numero vicibus à minori quãtitate menſurantur.*

Duæ lineæ quatuor palmorum dicuntur æque multiplices vnius palmi; quia palmus quatuor vicibus adhibitus ſucceſſiuè, & hanc, & alias menſurat.

DEFINITIO III.

R*Atio eſt duarum magnitudinum eiuſdem generis ſecundùm quantitatem habitudo.*

Quùm duæ quantitates; ſint illæ, ſeu lineæ, ſeu ſuperficies, ſeu ſolida inuicem comparantur, & ſunt eiuſdem generis ſecundùm quòd vna maior eſt, quã alia, ſeu minor, ſeu æqualis; tunc illæ magnitudines inter ſe Rationem conſequi dicuntur, & hæc collatio, ſeu comparatio dicitur Ratio, ab aliqnibns etiam Proportio; Quare patet; cur debeant eſſe eiuſdem generis: quia ſcilicet, vt inquit Ariſt. 10. Methaph. tex. 4. *menſura eiuſdem generis eſt, magnitudinum* namque *magnitudo, & ſecundum vnumquodque longitudinis longitudo, latitudinis latitudo, vocum vox, grauitatis grauitas; &c.*

Cum ergo magnitudines inuicem referãtur prout vna excedit, vel æquat, vel ab alia deficit, hinc eſt, quod debeant eiuſdem generis eſſe: alioquin inter ea, quæ diuerſi generis ſunt, nec maius quid, nec minus, nec æquale eſt; ſiquidem numerus non poteſt dici æqualis alicui ſuperficiei, aut maior, aut minor: cùm in eodem genere non reperiatur, & ratio fundamentalis eſt, quia inter ea, quæ diuerſi generis ſunt non poteſt fieri realis applicatio; vnde habitudo, quæ in reali, ſeu poſſibili applicatione fundatur, inter ea reperiri nõ poteſt. Maximè quòd mẽſura debet nos inducere in cognitionem rei menſuratæ; at quomodo id eueniet, ſi quod menſuratur alterius generis eſt; nec ſuæ menſuræ conforme reperitur.

Dicitur quoque ſecundum quantitatem: quia comparatio penes qualitatem Ratio non vocatur; nec lineæ referri Ratione, quòd ambæ, V.g. ſint albæ, aut nigræ. Sic dicitur *habitudo* in genere, nec explicatur, in quo conſiſtat iſta relatio; an in ratione menſurantis, & menſurati: quia licet hanc proportionem dicant inuicem aliquæ quantitates, quæ dicuntur rationales: non tamen omnes id habitudinis aſſequuntur, cùm quædam dictæ irrationales nullam commenſurationem adipiſcantur, ſed earum proportio in eo conſiſtat: quòd ampliùs non ſint reſpectu alterius, quam quod ſunt, & nihil vltra quantitatis obtineant ad alteram collatæ; quàm quòd conſequuntur.

Verum fundamentum huius relationis dicitur à Mathematicis antecedens terminus verò conſequens. Sic linea 3. palmorum collata ad lineam 6. palmorum dicetur antecedens; & linea 6. palmorum ſubſequens, & è contrariò quoque linea 6. palmorum relata ad lineã trium palmorum dicetur antecedens, ſicut illa trium palmorum conſequens.

DEFINITIO IV.

PRoportio eſt rationum ſimilitudo.

Proportio dicitur etiam analogya; ab Euclide autem vocantur quoque proportio, & eſt in ratione continentis, vel contenti, vel maioris, & minoris, aut æqualis ſimilitudo. Ita quod fundamenta huius relationis non ſint quantitates ipſæ: ſed quantitatum habitudines.

Cum ergo reperiuntur duæ magnitudines, vt 2. ad 6. quæ ſe reſpiciant in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, vt aliæ, V.g. vt 4. ad 12. tunc duæ illæ 2. & 6. dicentur conſequi eandem analogyam, & proportionem, quam 4. & 12. Dixi autem in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, non in ratione menſurantis, & menſurati: quia ſunt aliquæ quantitates, vt innui ſupra, & ſequenti expenſ. pleniùs dicam, quæ irrationales nulla cõmenſuratione inuicem referantur: Quare ſimilitudo earum ita erit, vt V.g. quantitas A collata ad quantitatem B ſit tanta, & non amplius, vt quantitas C reſpectu quantitatis D, ita quòd licet vices, quibus A menſurat B, aut vices, quibus C, menſurat D, non poſſint exprimi, adhuc tamen ſimiles ſint: ſed ad pleniorem huius rei declarationem videamus. Vnde dignoſcatur in quantitatibus Analogya.

EXPENSIO II.

In quantitatibus quænam ſint proportionis, notiones.

SCiendum eſt quantitates reſpectu alterius, alias irrationales eſſe, alias rationales. Rationales quantitates ſunt duę, vel plures, in quarum vna reperitur aliqua pars æqualis alteri parti alterius, quę menſuret ambas ſeu per æqualem replicationẽ illius partis menſurantis, ſeu per inæqualẽ. V.g. rationales dicentur lineæ duæ, quarũ vna ſit 7. palmorũ altera 20. palmorũ: quia palmus in vtriſq; eſt pars ęqualis, per quam ita metiri poteſt linea 7. palmorũ, vt nihil remaneat ex ea, cum tota longitudo 7. palmis æqualis ſit, ſicut, & linea 20. palmorum vigeſies multiplicatos palmos cõplectitur, vt nihil remaneat. Irrationales verò ſunt tales quædam, lineæ, vel quantitates, in quibus pars nulla reperitur, quæ ſit æqualis parti alterius quantitatis; per quam ita metiatur, tum vna, tum alia; vt nihil remaneat. V.g. diameter quadrati, & latus ſunt lineæ incommenſurabiles; Quia nec palmus, nec ſemipalmus, nec quarta pars palmi, nec aliqua alia menſura; quæ ex æquo menſuret vnam V.g. latus, vt nihil ex eo ſuperſit, menſurabit, & alteram: quia ſemper, aut aliquid ſuperabit, aut aliquid deſſiciat, & (quia faciliora ſunt antè proponenda) ponemus primò definitionem habitudinis rationalis vnius quantitatis ad aliam.

DEFINITIO V.

RAtionem habere dicuntur rationales magnitudines, cùm vna alterius partes aliquotas continet.

Partes aliquotas appellamus eas, quæ multiplicatæ totam quantitatem æquant, vt diximus.

Cùm ergo aliqua quantitas continet partes alterius, illa reſpectu alterius dicitur habere rationem, & habitudinem. Diximus verò partes, non aſſignando quot ſit; quia ſiue partes, quas continet, prima quantitas A, menſurent quantitatem alteram B per eundem numerum, ſeu eam ſuperent, ſeu minus ſint, nihil intereſt; & ita linea 7. palmorum habet Rationem lineæ 6. palmorum, & lineæ 7. palmorum, & lineæ 20. palmorum, ſeu 30. licet tamen non eiuſdem ſpeciei.

DEFINITIO VI.

IRrationales quantitates inuicem habitudine referuntur, & relatione, cùm multiplicatæ ſe inuicem continere poſſunt.

Ratio huius definitionis eſt, quia per continentiã partium nequaquam poterat definiri; cùm nulla pars in vna ſicut nec in altera detur; quę pro communi menſura deſeruire poſſit. Vnde præcedens definitio non poterat deſeruire: licet enim, & hæc definitio rationalibus quantitatibus quoque conueniat; non tamen illas per hanc definitionem, quæ parum obſcurior eſt, definire cõueniens viſum eſt ob facilitatem ſectandam; licet Euclides id fecerit.

Quod autem quantitates, quorum vna multiplicata ſuperare poteſt aliam V.g. duo latera diametrum vnum, ſicut diametri duo latera duo, & ſic continuè, habitudinem dicant, patet. Nam ſecundùm magis, & minus ſe inuicem excedunt,

& ideo habitudinem talem habent; vt ſaltem quoad multiplicationē comparabiles ſint: Nam multiplicatæ ſaltem poterunt eſſe fundamentum proportionis, & ita ſpeculationi Mathematicæ ſubijci. V. g. circumferentia ad diametrum proportionem habet, ſed irrationalem; ideoque poteſt eſſe fundamentum proportionis, Nam poterit dari aliqua alia linea recta irrationalis ad quam ſe habeat diameter, vt ad circumferentiam. Si verò multiplicata non ſuperet aliqua quantitas, aut non ſuperetur, habitudo inter illas non eſt. Sic infinita quantitas non habet relationem aliquam quantitatiuam ad alteram quantitatem infinitam; quia infinitum, quantumuis multiplicatum, infinitum non ſuperat. Quòd autem hic mutuus exceſſus proportionalium quantitatum ſit fundamentum ſimilitudinis alicuius patet. Quia quantitates duæ A, V. g. ad B in omni multiplicatione quantitatis A, quæ adhibeatur poſſunt inuicem ſe habere, ac duæ aliæ C, & D, ſi & ipſæ tot vicibus multiplicentur nimirum fundamenta, vel termini æquo numero vicium multiplicata aſſumantur: nam poteſt eſſe, quòd ſi fundamentū A multiplicatū 20. vicibus minus inueniatur quam a terminus ſuus; quòd ſic quoque fundamentū C 20. vicibus multiplicatum minus inueniatur, quàm ſuus terminus D: Vel ſi multiplicetur fundamentum A 21. vicibus, & maius inueniatur, quā ſuus terminus B: Quod ſic quoque fundamentum C 21. vicibus aſſumptum ſuo termino D maius inueniatur.

At ſi è contra termini multiplicentur duabus vicibus, & fiat maior B fundamento A, & deinde terminus alter D multiplicetur duabus vicibus, quòd ſimiliter euadat maior quam C, & ſic ſemper in omni multiplicatione æquis vicibus adhibita, aut fundamenti, aut termini ſuccedat, Omnino in hoc A, & B quantitates ſe reſpicient ſimiliter, ac C, & D, & fundamentū primum habitudinis ad ſuum terminum habebit ſimilitudinis relationem eandem, quam fundamentum ſecundum ad ſuum terminum; quia ſimili

A * B
C D

modo in omni multiplicatione, quæ poſſit fieri fundamentum primum excedit ſuum terminum, ſicut aliud ſecundum fundamentum excedit quoque ſuum: Vel ſi æquatur primum, æquatur quoque ſecundum, vel ſi primum fundamentum termino ſuo ſit minùs, hoc quoque ſecundum fundamentum relationis ſuo termino eſt minùs. Ecce ergo in iſtis fundamentis, quæ multiplicata ſuperant ſuos terminos, vel ſuperantur ab ipſis, aliqua in hac mutuā termini, fundamentiq; ſuperatione, ſimilitudo: cùm, & aliud fundamentum æquali multiplicatione multiplicatum ſuperet quoque ſuum terminum.

At ſi daretur aliqua quantitas, V. g. angulus contactus tanquam fundamentum, qui ad ſuum terminum angulum rectilineū comparatus ſemper minor inueniretur, hæc habitudo alteri habitudini, V. g. alterius anguli contactus cum altero angulo rectilineo comparari nequit. Nam angulus primus contactus nunquam poteſt, aut æquare, aut ſuperare ſuum terminum rectilineum; ſicuti nec alter angulus contactus poteſt vnquam ſuperare ſuum; & ideo nullam aliam habent fundamenta, cum ſuis terminis ſimilitudinem, niſi quòd minus ſunt; at ſi ſint minus eodem modo, & ſimili ratione, ſeu habitudine diſſimili dignoſci nequit: cùm nec ſint quoad ſuas partes comparabiles, eò quòd ſint irrationales; neque earum ſimilitudo proportionum quoad omnem, multiplicationem, & genericam ſimilitudinem probari poſſit.

Patet itaque, cur habitudo duarum proportionum irrationalium definiatur per earum mutuā ſuperationem; ſi multiplicentur: Quia hoc tantùm præbet fundamentum ſimilitudinis ipſarum proportionum, Et hæc ſimilitudo proportionum eſt illa, quæ ſpeculationi, & argumentationi Mathematicæ deſeruit.

EXPENSIO III.

Quænam quantitates proportionem conſequantur.

OPeræ pretium eſt cognoſcere, quænam ſint illæ quantitates, quæ proportione, & ideo analogya gaudeant; ne aliquando ſumamus eas quantitates, quæ nulla proportione aſſimilari poſſunt, tanquam in ea ſimiles; & ſic ab euidentia in manifeſtos errores incidamus.

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Infiniti ad infinitum nulla eſt proportio.

PRobatur, quoniam infinitum multiplicatum non poteſt ſuperare aliud infinitum; neque illud continere. Siquidem Infinitum, vt voluere antiquiores eſt illud, quod in ſe continet, quidquid eſt conceptibile illius; ſi vero multiplicaretur, iam eſſet aliud infinitum, cum quo multiplicitatem conſtitueret.

Deinde iuxta Ariſt. eſt illud infinitum, in quo eſt ſemper aliquod vltra accipere; ſi autem infinitum non adæquaret infinitum multiplicatum, in eo iam non eſſet vltra quid acciperetur; ſiquidē acceptū eſſet quid quid eius eſſet dum aliū adæquare nequit, ergo infinitum non poteſt habere aliud infinitum maius ſe, & ideo multiplicatum erit.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

Finitum nullam dicit rationem cum infinito.

PRobatur, quia finitum, ſi maneat finitum nūquam aut æquabit, aut ſuperabit infinitum; ſed illæ quantitates inuicem dicunt proportionē; quæ ſe mutuo poſſunt ſuperare, ergo finitum infinito nulla proportione conformatur.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Puncta, quæ ſunt in aliqua quantitate nullam dicunt proportionem Mathematicam, & cognoſcibilem, cum punctis, quæ ſunt in alia.

PRob. Ea enim, vel finita ſunt, vel infinita. Si infinita ex præcedenti nullam dicunt inuicem rationem, ſi finita; vel ſunt indiſtinguibilia, & indetermina, vel non. Si indetermina

iam

iam nequeunt ſe inuicem ſuperare: Nam quòd indeterminatum eſt multiplicari nequit; cùm eius neque hæc, neque illa para adſit, nec ſi multiplicetur, quantitas illius multiplicationia agnoſcitur.

Si determinata ſunt, vel ſunt æqualia quantitate, & hoc eſt falſum: Nam omnes lineæ eſſent cómenſurabiles, vel quantitate inæqualia: At earum quantitas non agnoſcitur, nec determinata eſt. Nam quantitas puncti ſaltem ſub indiuiſibilitate ſenſibili latet: Ergo multiplicata, incertum erit, an ſe ſuperent, aut æquent, ſiue non.

2. Probatur. Nam demoſtrationi Mathematicę deſeruire non poſſunt; cùm ad hoc lis inter Phyloſophos pendeat; an ſint puncta, vel partes; an ſint finita, vel infinita; an diſtincta, ſeu indiſtincta; an æqualia, ſeu inæqualia. Quare nec vlla proportio, ſi qua eſſet, certa reperiretur, & indubitabilis, quæ fundamentum demoſtrationi Geometricæ firmum præberet.

CONCLVSIO IV. PROP. IV.

Inter puncta, & lineas. Inter lineas, & ſuperficies. Inter ſuperficies, & corpora nulla proportio intercedit.

PRobatur. Nam nec punctum quantumuis multiplicatum lineam adæquare poteſt, nec linea ſuperficiem, nec ſuperficies corpus, cùm vel infinitæ ſint, vel indeterminatæ, nulloque certo numero comprehendantur: Quare ęquè multiplicari non poſſunt, cum earum numerus non agnoſcatur.

COROLLARIVM.

HInc habes, quòd ea Geometria; quæ in indiuiſibilium proportionibus fundatur omnino ſuſpecta ſit; licet enim concluſiones, quas deducit verè reperiantur: non inde tamen hinc illa certitudinem acquirit, vel in principijs, vel in illationibus; cum à præmiſſis falſis verùm ſequi poſſit, vt Logici fatentur, vt patet ex hac omnis homo eſt bellua, omnis bellua eſt viuens, ergo omnis homo eſt viuens.

EXPENSIO IV.

De diuiſione Rationum.

RAtio apud Mathematicos vocatur etiam proportio: quia ſumunt fundamentum proportionia pro ipſa proportione. Vnde diuiſiones, quæ ſequuntur Rationum, vocantur etiam proportionum.

CONCLVSIO I. PROPOS. V.

Proportio rationalis diuiditur in duas, inæqualitatis, & æqualitatis.

PRobatur: Quis aliqua quantitas ita continet aliam, vt ab ea contineatur, vt duæ lineę 7. palmorum ſe inuicem commenſurant. Alia verò continet magis aliam, quàm quòd contineatur ab ea: vt linea 7. palmorum continet lineam 3. palmorum, & ampliùs: at linea trium palmorum non continet lineam ſeptem palmorum: niſi ſecundū quid, & quoad aliquos palmos.

CONCLVSIO II. PROP. VI.

Ratio inæqualitatis quæcumque etiam irrationalis; quæ ſemper inæqualitatis eſt, diuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis.

PRob. Nam quantitatū inæqualium, vel maior confertur ad minorē, & hæc maioris inæqualitatis eſt, vel minor ad maiorem, & hæc eſt inæqualitatis minoris. Neque tibi videatur maior ad minorem eâdem relatione referri, quâ minor ad maiorem; eſt enim diuerſa relatio, & proportio. Quoniam quantitas maior V.g. quinque palmorum linea ad minorem trium palmorum habet maiorem proportionem, quàm minor ad ſe, cū eā contineat ſemel, & inſuper ipſius duas tertias partes: & minor ad maiorē collata minorem proportionem habet, cum minus ipſius contineat; ſiquidem nec totam quidem continet; ſed tantum tres partes ex quinque, quibus conſtat.

Cum ergo maioris ad minorem maior proportio ſit, quam minoris ad maiorem patet eſſe diuerſas, & ideo diſtingui.

CONCLVSIO III. PROP. VII.

Ratio rationalis maioris inæqualitatis ſecatur in ſex genera. Si proportionem Æqualitatis multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem *in* multiplicem ſuperparticularem, *&* multiplicem ſuperpartientem. *At minoris inæqualitatis in eaſdem ſpecies quoque ſe recipit verùm ad diſtinguendum, & indicandum; quòd ſit minoris inæqualitatis additur particula* ſub: *ita dicitur ſubmultiplex, ſubparticularis, ſub partiens, &c.*

PRobatur, & ſimul ſingulæ proportiones aſſignatæ explicantur.

Nam maior continet minorem, aut ſemel, aut pluries. Si maior continet minorem pluribus vicibus ex æquo, vt nihil ſuperſit, ita vt minor maioris pars aliquota ſit, vt palmus eſt pars decima lineæ, quæ ſit decem palmorum; dicitur multiplex. Multiplicaturque ſecundùm vices, quas continet minorem V. g. dicitur dupla, tripla, quadrupla, quæ continet minorem bis, ter, quater. At ſi minor conferatur ad maiorem dicitur ſubdupla, ſubtripla, ſubquatrupla; quòd minor contineatur, à maiore bis, ter, quater, &c. At ſi continet pluribus vicibus, & aliquid inſuper remaneat; tunc, aut id, quod remanet, facit vnā partē aliquotā minoris, aut nō, ſed plures partes, ſi facit vnam partem aliquotam minoris; tunc dicitur multiplex ſuper particularis; Sic 9. ad 4.

ad 4. habet proportionem multiplicem ſuper particularem; quia bis 4. continet, & inſuper quartam ipſius partem: ita 26. ad 6. habet rationem multiplicem ſuper particularem; cùm quater ſex contineat, & inſuper 2. nimirum tertiam eius partem.

At ſi ne dum pluries contineat; ſed inſuper plures partes eius, quæ non conficiant vnam partem aliquotam. Tunc eſt multiplex ſuper partiens V. g. 27. ad 5. comprehendit enim quinquies 5. & inſuper duas eius partes, quæ aliquotam partem non conficiunt, cum non menſurent numerũ 5 ex æquali; ſi autẽ conficerent vnam partem aliquotã, iam illa eſſet Ratio multiplex ſuperparticularis propter vnicã partem aliquotam, quę ſupereſſet, vt eſt 26. ad 6. nam 2. qui ſuperſunt tertiam partem numeri 6. conficiunt.

Faceſſunt autem hæ duæ Rationes in diuerſas ſpecies, quæ denominantur iuxta partes, quas cõtinent E. g. ſi multiplex ſupparticularis talis ſit, vt maior bis contineat minorẽ, & remaneat pars dimidia dicitur dupla ſeſquialtera, ſi bis, & tertiam partem minoris, dicitur dupla ſeſquitertia; ſi ter, & inſuper quartam partem, dicitur tripla ſeſquiquarta, &c.

Cęterum ſi Ratio eſſet minoris inæqualitatis tunc adderetur particula *ſub*; & diceretur ſubdupla ſeſquialtera ſubtripla ſeſquiquarta.

At ſi de multiplici ſuperpartiente loquamur, hęc quoq; denominatur iuxta vices, quas maior cõtinet minorem, & iuxta id, quod inſuper continet V. g. Si quinquies minorem contineat, & inſuper 3. ex quatuor partibus, quibus minor conſtat, vt eſt 23. ad 4 dicitur Ratio quintupla ſuper tripartiens quartas, ſic ſi eſſet 22. ad 5. diceretur quadrupla ſuperbipartiens quintas, &c. Et hoc quoad multiplicem proportionem maioris inæqualitatis. Verùm ſi ſit minoris inæqualitatis idem dicendum prorſus; niſi quòd particula *ſub* eſt addenda pro *ſuper* V. g. quadrupla ſubbipartiens quintas, Tripla ſub tripartiens octauas, &c.

At ſi maior contineat minorem ſemel tantùm; tunc eſt ęqualitatis. Verùm ſi contineat ſemel, & inſuper vnam eius partem aliquotam; tunc dicitur ſuperparticularis, V. g. 8. ad 9 habet Rationem ſuperparticularem; quia 9. continet 8. ſemel, & inſuper octauam eius partem; ſic 10. ad 8. Rationem ſuperparticularem tenet; quia 10. ſemel continet numerum 8. & inſuper eius quartam partem, quæ eſt 2.

Quæ in ſpecies multas ſecatur iuxta diuerſas partes, quas inſuper maior continet minoris quãtitatis: Nam ſi minorem quantitatẽ contineat ſemel, & eius dimidiam dicitur ſuperparticularis ſeſquialtera, ſi tertiam partem, dicitur ſeſquitertia, &c.

At ſi ſemel contineat, & inſuper aliquas partes amplectatur vnam aliquotam non integrantes, vt 9. continet 7. ſemel, & inſuper duas partes, quæ 7. non diuidunt ex æquo; nec ſunt eius partes aliquotę; tunc eſt Ratio ſuperparticularis partiẽs.

Quæ, & habet diuerſas ſpecies iuxta partes, quas continet maior minoris vltra continentiam totalem ipſius maioris; Sic ſi contineat maior minorem ſemel, & 3. partes, ex 10. vt ſe habet 13. ad 10. dicitur Ratio ſuperparticularis tripartiens decimas, & ita de alijs. Et hę ſunt Rationes maioris inęqualitatis: at minoris inęqualitatis sũt ipſæ eędem; niſi quòd pro particula *ſuper* additur particula *ſub*. Sic Ratio 2. ad 3. erit ſubparticularis ſeſquialtera, ſic 8 ad 10. erit proporcio ſubparticularis ſeſquiquarta. Sic 5. ad 7. erit Ratio ſubparticularis bipartiens quintas, &c.

PROB. I. PROPOS. VIII.

Datis duobus numeris reperire, quam Rationem ex aſſignatis dicant.

DEntur primo 5. & 20. de quibus volumus agnoſcere, in quã Ratione inuicem ſint; diuidatur maior per minorem, & quotiens erit 4. quia ergo eſt numerus plurium vnitatum, & nihil remanet. Dico quod eſt Ratio multiplex, & dicitur quadrupla, quia 5. numeri 20. eſt quarta pars aliquota: Igitur 5. ad 20. erit Ratio multiplex ſubquadrupla, & 20. ad 5. erit Ratio multiplex quadrupla.

Detur ſecundo 15. & 35. Diuido rurſus maiorem per minorem, & quotiens eſt 2. remanentq; 5. diuido rurſus per hoc reſiduum numerum minorem, & quotiens eſt 3. Quia itaque primus numerus quotiens eſt 2. dico eſſe rationem multiplicem duplam; quia verò ſecundus eſt 3. pars aliquota numeri 15. dico eſſe duplam ſeſquitertiam.

Verum ſi aliquid adhuc remaneret V. g. ſi eſſet datus numerus 16. & 35. tunc primus quotiens eſſet 2. & ideo Ratio eſſet dupla, & reſiduum eſſent 3. per quod diuiſus numerus minor 16. aliquid remanet nempe 1. ideo dicitur Ratio certij generis multiplex, & ſuperpartiens, nec ſecundus quotiens quæritur, cùm reſiduum numeri minoris pars aliquota non ſit, ſed vterque numerus minor, & reſiduum exprimitur, & dicitur *dupla tripartiens* ob 3. reſiduum, *decimas ſextas* ob 16. numerum minorem. Vnde 35. ad 16. habet proportionem multiplicem duplam tripartientẽ decimas ſextas, ideſt complectentem bis minorem, & inſuper tres partes ex 16. quas numerus minor continet.

Eodem modo agendum eſt; ſi eſt Ratio ſuperparticularis, vel ſuperparticularis partiens. Sic ſi quæratur, quę ſit Ratio 10. ad 8. diuidendus eſt numerus maior 10. per 8. & quotiens eſt 1. remanentq; 2. quo diuiſus 8. dat per quotientem 4 dico itaque proportionem 10. ad 8. eſſe ſuperparticularem ſeſquiquartam; at ſi numerus minor non diuideretur ex æquo, & aliquid remaneret: tunc non eſſet ſuperparticularis; ſed ſuperpartiens, vt ſi quæratur Ratio 10. ad 7. Iam quia 7. diuidit 10. ſemel, & quotiens eſt 1. dicitur ſuperparticularis, at quia 3. remanent, per quem ex æquo non diuiditur 7. & aliquid remanet: Ideo eſt ſuperparticularis tripartiens ob 3. reſiduum, ſeptimas, quod finit numerum minorem 7.

COROLLARIVM

SI quis volet exprimere Rationes per numeros. Si ſint maioris inæqualitatis multiplicia eam exprimet eo modo, quo ſolent fractiones exprimi, ponendo tamen ſi ſit maioris inæqualitatis numerum maiorem ſuper lineam, & minorem infra eam, V. g. ſcribet proportionem duplam, ſic $\frac{2}{1}$ triplam $\frac{3}{1}$ quadruplam $\frac{4}{1}$

At, ſi ſit multiplex ſuper particularis, exprimet per integrum, & fractionem, vt quintupla ſeſquiquarta $5\frac{1}{4}$ vel reducendo totum numerum in fractionem $\frac{21}{4}$

Si autem ſit multiplex ſuperpartiens exprimetur nihilominùs per integrum, & fractionem eodem modo vt 2. & $\frac{3}{7}$ exprimit Rationem duplam tripartientem ſeptimas, vel etiam poterit exarari reducendo totum in fractionem ſcribendo $\frac{17}{7}$. Et ita agendum eſt in ſuperparticulari exprimendo eam per vnitatem tanquam per integrum, & per fractiones, vt Ratio 8. ad 10. nempe ſuperparticularis ſeſquiquarta exprimitur, vel numero 1 $\frac{2}{8}$, vel per $\frac{10}{8}$ vel per $\frac{5}{4}$

Idem obſeruabitur in exprimendo ſuperparticulari multiplici, & efficietur 1 $\frac{3}{7}$ vel $\frac{10}{7}$ quæ eſt Ratio ſuperparticularis tripartiens ſeptimas.

At ſi exprimenda Ratio, quam habet numerus minor ad maiorem numerus minor ponetur ſuper lineolam, & maior infra.

Sic ſubmultipla erit $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{9}$, &c. multipla ſubparticularis erit $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ Multipla ſubpartiens $\frac{1}{2\frac{2}{3}}$ ſubparticularis $\frac{8}{10}$ ſubpartiens $\frac{7}{10}$

EXPENSIO V.

De rationum compoſitione.

CVm proportiones, Rationumque ſimilitudines debeamus declarare premittenda eſt earum compoſitio; quæ eam immutat ſimiles proportiones, vel diſſimiles componendo.

Obſerua aliam eſſe proportionem duplam, triplam, &c. aliam duplicatam, triplicatam, aliam compoſitam.

Proportio tripla, quadrupla, &c. eſt, cùm quantitas maior continet minorem ter, quater, quinquies, &c. vt 2. continetur à 4. vel 6. vel 10. At proportio duplicata, triplicata, quadruplicata eſt; cùm numerus, vel quantitas multiplicat ſe, & ſuum productum, & productum producti, & ſic ſucceſſiuè: Quoties enim interuenit hæc multiplicatio, tot vicibus dicitur multiplicata, ſic ſi ſemel fiat eſt ſimplex; ſi gemina vice, eſt duplicata; ſi ter, eſt triplicata; vt ſi 2. multiplicet ſe, & fiat 4. hæc eſt proportio ſimplex: at ſi iterum 2. multiplicet 4. & fiant 8. eſt duplicata, & ſi iterũ 2. multiplicet 8. & fiant 16. eſt triplicata, & 32. quadruplicata eſt proportio huius numeri ad 2. At ſi hæc multiplicatio non per eandem proportionem fiat dicitur compoſita, V. g. ſi 2. ad 6. dicat proportionem, & 6. ad 9. proportio 9. ad 2. dicitur compoſita ex proportione 2. ad 6. & 6. ad 9. in nulloque alio differt à duplicata; niſi quod illa ſemper eadem eſt, & continua hìc verò proportio non continua: ſic 3. 9. 27. ſunt numeri, qui continua proportione progrediuntur; ideoq; 27. ad 3. dicitur habere proportionem duplicatam. Nimirum gemina vice repetitam; At 3. 6. 9. ſunt numeri, qui continua proportione non correſpondent; neque enim ſimilis Ratio eſt 3. ad 6. quam 6. ad 9. cùm prima ſit ſubdupla, nempe 1. ad 2. Secunda verò ſubparticularis ſeſquialtera nimirum 2. ad 3. & ideo 9. dicitur habere ad 3. proportionem compoſitam.

Itaque proportio tripla: quadrupla, &c. eſt propriè Ratio: at verò duplicata, triplicata; vel etiam compoſita eſt Proportio poſſibilis: nempe inter 2. V. g. & 16. poſſunt intercipi, & interſeri duo proportionales numeri dicentes inuicem ſimilem proportionem, & Analogiam ſcilicet 4. & 8. inter 2. & 16. & erunt 2. 4. 8. 16. & triplex ſimilitudo intermediabit nimirum 2. ad 4. prima, 4. ad 8. ſecunda, 8. ad 16. tertia. Sic compoſita eſt proportio poſſibilis, quæ poteſt intercipi inter duos numeros; ſed diſſimilis, & diuerſa, ſi inter eos plures numeri interijciatur. Sic 2. ad 10. habet proportionẽ cõpoſitã: quia duo intermedij diuerſam proportionem dicent, vt 2. 4. 6. 10. Nam proportio 2. ad 4. eſt differens ab ea, quam habet 6. ad 10. cùm hæc ſit ſubparticularis quadripartiens ſextas, at illa ſubdupla.

Aduerte autem vnius quantitatis ad alteram non eſſe vnicam compoſitam proportionem; ſed multis poſſe eam reſpicere compoſitis proportionibus pro vt ſunt quantitates, quæ inter vnam, & alteram mediant, quæ ſunt infinitæ, ita 9. dicit proportionem compoſitam ad 3. eius; quã habet 6. ad 3. ſed etiam erit compoſita quam 4. ad 3 & quam 5. ad 3. Sic inter 100. & 5. multæ, multæque proportiones interponi poſſunt, ex quibus omnibus dicitur componi proportio 100. ad 5. vt 100. 20. 5. 100. 50. 5. 100. 30. 5. 100. 10. & 5. ſic tot erunt compoſitæ proportiones, quot numeri poſſunt interponi inter 100. & 5.

Vnde proportio compoſita eſt etiam ſimplex; prout eam animaduertes: Nam, ſi V. g. 10. compares ad 5. erit ſimplex; at reſpectu 5. & 7. erit compoſita ex proportione 5. ad 7. & 7. ad 10.

Ratio verò; cur inter vnam quantitatem, & aliã poſitâ quantitate intermediâ extrema ex illâ dicãtur componi eſt: quia cum V. g. 100. habeat in ſe eas partes, quas 50. poſſidet tot vicibus conrentas prout continetur in 100. V. g. duabus vicibus neceſſe erit; quod, & obtineat omnes partes ſecundum quas numerus ipſe 50. continet 5. quę ſunt 10. ideoque 5. decies acceptus componit 50. & etiam in duplo maiori proportione ſumptus; nempe ſecundùm eam, quâ 100 reſpicit 50. componet numerum 100. Sic proportio 10. ad 5. componitur ex proportione alicuius numeri intermedij, vt 8. Nam 5. ad 8. eſt vt 1 $\frac{3}{5}$ vel $\frac{8}{5}$ nimirũ quãtitas 5. cum tribus vnitatibus, vel partibus accepta æquat 8. at 8. eſt ad 10. ut $\frac{4}{5}$ nempe; ſi ad 8. addatur quarta eius pars æquat 10. Ergo quantitas 5. aucta tribus partibus ipſius 5. nempe 3. & quarta parte ipſius 8. nempe 2. æquabit 10. Quare proportio 10. ad 5. conſtat ex proportione; ſeu partibus, quibus 8. continet 5. & his quibus ipſa quantitas 10. continet 8. comparata ad 5. & 8. ſecùs verò ſi ad vnum ſimplicem numerum.

Et hinc licet definitiones harum proportionum colligere.

DEFINITIO VII.

Proportio replicata eſt; cum trium magnitudinum, vel plurium, eadem eſt ratio primæ ad mediam, quæ mediæ ad tertiam, & tertiæ ad quartã prima enim dicitur duplicatã habere proportionem ad tertiam; triplicatam ad quartam, & ſic conſequtiuè donec termini extiterint.

DEFINITIO VIII.

Ratio compoſita eſt, cum rationum quantitates aliquam effecerint rationem inter ſe multiplicatæ.

Rationum quantitates ſunt denominatores Rationum V. g. rationis A B $\frac{2}{6}$ denominator eſt 3. quia indicat ſuis vnitatibus quomodo 6. contineat 2. vel quot partes ipſius 6. in ſe contineat 2. nempe tertiam. Si ergo denominatores multiplicentur

centur inuicem alicuius proportionis nimirum 3. denominator proportionis A B $\frac{2}{6}$ & C D $\frac{3}{12}$ denominator, qui eſt 4. producunt 12. denominatorem, qui denominat proportionem compoſitam ex A B, & C D nimirum H F $\frac{6}{72}$ & exprimit quod 6. in 72. continetur vicibus duodecim, quia ergo denominator proportionis $\frac{6}{72}$ eſt 12. Et 12. producitur ex multiplicatione denominatorum 3. & 4. qui denominant proportionem; 3. quidem rationis A 2. ad B 6. & 4. rationis C 3. ad D 12. ideo proportio H F $\frac{6}{72}$ producitur à proportionum compoſitione A B, & C D.

PROB. I. PROPOS. IX.

Datis duabus proportionibus quatuor numeris, expreſſis reperire tres terminos eaſdem proportiones habentes.

SIt data gemina proportio, nimirum 3. ad 4. & 2. ad 5. Oporteatq; reperire tres numeros eandem proportionem exprimentes. Diſponãtur, vt vides. Deinde fundamenta Rationum 3. & 2. inuicem multiplica & fient 6. Poſtea fundamẽtũ vnius, cum termino alterius multiplicetur, vt 3. cum 5. & fient 15. Tandem ipſi termini multiplicentur inuicem, & fient 20. Dico quod 6. 15. & 20. habent eandem proportionem, quam 3. ad 4. & 2. ad 5.



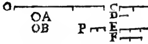
Probatur. Nam cùm numero 3. multiplicauerimus 2. & 5. producti 6. & 15. conſtabunt tot ternarijs, quot vnitates erant in 2. & 5. ex defin. 15. Tract. 8. Ideo dicent eodem proportionem ex defin. 5. huius, quam 2. & 5. Deinde quia 5. multiplicauit 3. & 4. productis 20. & 15. conſtabit tot quinarijs, quot vnitates erant in 3. & 4. ex cit. defin. ideoq ex defin. 5. huius dicent 15. & 20. eandem proportionem, quam 3. & 4. quòd tot quinarij ſint in vtroque multiplicato, quot priùs erant in multiplicandis vnitates: Quare ita erit in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5. quòd ſicut 5. continet 5. vnitates, & 2. duas, ſic 15. continent 5. ternarios, & 6. duos, & ſicut 4. continet quatuor vnitates, & 3. tres: ſic 20. continet 4. quinarios, & 3. tres quinarios: Quare ita erit 2. ad 5. vt 6. ad 15. & 15. ad 20. vt 3. ad 4. quod erat præſtandum.

PROB. II. PROPOS. X.

Datis duabus proportionibus, quibus proportio alicuius quantitatis erga aliam conſtat, cognoſcere; quænam ſit ipſius ad aliam proportio.

SIt data proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ dicatur compoſita ex duabus proportionibus; quam nimirum habet linea, vel numerus 3. ad 2. & linea, ſeu numerus 4. ad 1. vt cognoſcatur quænam ſit A ad B quantitates quaſcumque proportio: inueniantur ex præcedenti tres numeri eiuſdem proportionis, vt ſunt 2. 3. 12. vt ſit 12. ad 3. vt 4. ad 1. & 3. ad 2. vt priùs erant. Dico, quòd ea eſt proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ eſt 12. ad 2. nihil curando de intermedio 3.

Probatur. Quia 12. numerus habet proportionem compoſitam eam, quam 12. ad 3 & 3. ad 2. quæ eſt ea, quam habet 4. ad 1. & 3 ad 2. ſed hęc eſt gemina proportio, ex qua componitur proportio quantitatis A ad quantitatem B ex ſuppoſitione. Ergo proportio quantitatis A ad quantitatem B eſt illa quam habet 12. ad 2.



COROLLARIVM I.

* HInc ergo elucet: Quomodo proportio compoſita dignoſcatur: nimirum ſi comparentur extrema relictis medijs. Vnde neque erit neceſſe reperire tres numeros; ſed ſolum duos extremos inter quos compoſita proportio reperiatur, hoc autem fiet ex præced. 9. propoſ. ſi multiplicemus ſimul, Rationũ antecedentis, ſeu fundamenta, V. g. 2: Et 3. & 4. & 5. terminos: Nam numeri producti 6. & 20. habebunt proportionem compoſitam, quam 3. ad 4. & 2. ad 5. Ita quoque in lineis poterit fieri. Nam ſi detur proportio E ad F, & C ad D non eadem; & multiplicetur C fundamentum tot vicibus, quot partes aliquotæ ſunt in antecedenti, ſeu fundamento E, & fiat O iterumque conſequens D multiplicetur, ſeu terminus ſecundum partes; quę ſunt in conſequenti, ſeu termino F, & ſecundum quas dicit proportionem, & fiat P; dico O ad P habere proportionem compoſitam; cum idem fiat quod in numeris effectum eſt. Vnde ſi quantitas A dicatur habere proportionem compoſitam ad B lineæ C ad D, & E ad F habebit eam proportionem quam O ad P.

COROLLARIVM II.

* HInc etiam eſt: Quod ſi dentur plures proportiones; quam duæ ex quibus aliqua alia proportio componatur, idem agendum ſit multiplicando fundamenta inuicem, deinde terminos, vt ſi ſit proportio 3. ad 4. & 1. ad 5. & 2. ad 7. & 4. ad 5. multiplicabimus omnia antecedentia ducendo primum in ſecundum, deinde tertium in productum ex primis vt fiant 24. deinde eodem modo conſequentes terminos, & fient 700. Ergo proportio 700. ad 24. eſt compoſita ex proportionibus aſſignatis omnibus; quod etiam poteſt fieri reperiendo quantitates, quæ continuè ſint proportionales.

COROLLARIVM III.

IDem prorſus agendum, & faciliùs, cum proportio eſt eadem, quæ multiplicanda ſit, vt inueniatur proportio replicata, ſic 2. ad 4. & 5. ad 10. inuenietur proportio duplicata 10. ad 40. vt patet in iſtis numeris 10. 20. 40. inter quos eſt eadem proportio primi ad medium, quæ medij ad vltimum.

EXPEN-

EXPENSIO VI.

Quænam quantitates proportionem conſequantur, & quam obtineant.

CVm acturi ſimus de modo argumentandi de vna proportione ad alteram, & via argumentationis in earundem ſimilitudine conſiſtat; ideo priùs quænam ſit, & inter quas quantitates reperiatur proportio cognoſcere oportet.

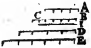
DEFINITIO IX.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe; cùm prima, & tertia, ideſt fundamentorum æquè multiplicia à ſecunda, & quarta, ideſt terminorum æquè multiplicibus, aut æquantur, aut ſuperantur, aut ſuperant iuxta omnem multiplicationem, quæ adhibeatur.

Quia dantur quædam quantitates, nempe irrationales, vt ſupra diximus, quæ nulla communi menſura poſſunt menſurari, & ideo neque earum proportio indiuidua manifeſtari; cùm non cognoſcatur: ideo in hac definitione proportio tantùm generica exprimitur, quam omnia proportio poſſidet, ſeu rationalia, ſeu irrationalis: nempe, quòd ſi multiplicentur fundamenta ęquè ideſt per eundem numerum, & termini æquè ideſt per eundem numerum; non tamen neceſſariò, quem adhibuimus in fundamẽtis, & reperiatur; quòd fũdamenta ſemper ſimul excedunt, aut æquent, aut minus ſint, adhibitâ quacumque multiplicatione, dicendum eſſe fundamenta ad ſuos terminos ſimili proportione referri.

Ratio eſt. Quia impoſſibile eſt, quod fundamenta cum terminis non ſint in eadem proportione, deinde ſemper æquo pacto reſpectu terminorum ſe habeant data qualibet multiplicatione poſſibili.

Nam ſit maior A, quàm B particulâ C, quæ deberet abeſſe, vt eſſet ſimilis proportioni D ad E: ita quòd, ſi illa deficeret, tunc proportio A ad B eſſet ſimilis proportioni D ad E. Certum eſt, quòd ſi A, & D fundamentorum æquè multiplicia ſumantur, & etiam B, & E terminorum. Quod terminus B creſcet magis; quàm E reſpectu fundamentorũ; & non ſimili augmento, quia ſemper C particula abundans, & ſimilitudinem auferens



etiam ipſa multiplicabitur. Cùm ergo creſcat magis B; quàm E, & non ſimiliter augeatur, neceſſariò aliquando eueniet, quòd ſi E proximè ęquetur ſuo fundamento D in aliquâ multiplicatione, vt clarum eſt poſſe euenire, data qualibet multiplicatione; ita vt deficiat ſolùm pars C, vel minus, quam C, eueniet inquam, quòd BC iam ęquabitur ſuo fundamento A, vel etiam ſuperabit: Quapropter, tũc terminus BC æquabitur ſuo fundamento A, vel illud ſuperabit; dum terminus E non eſt maior, nec æquat ſuum fundamentum D. Exemplum ſit in numeris, & dicantur

eſſe fundamenta	4 ad 6	vt	terminos
	3 ad 5		

Sumanturque æquè multiplices fundamentorum, 8. fundamenti 4. & 6. fundamenti 3.

Sic quoque terminorum 12. termini 6. & 10. termini 5. Videtur, quòd ſit proportio, quòd terminorum ambo æque multiplicia ſuperent pari conſenſu fundamentorum æquè multiplicia. Verùm alia multiplicatio adhibeatur, & fundamenta quinquies accipiantur, eruntque multiplicia fundamentorum 20. & 15. Termini verò ſumantur tricies; eruntque terminorum æquè multiplicia 15. & 18. Videa ergo iam quomodo multiplex 15. termini 5. tricies acceptus æquet multiplicem fundamenti 3. quinquies accepti: at termini 6. tricies accepti multiplex 18. fundamenti ſui multiplicem 20. quinquies accepti non æquet; igitur inter hos numeros ſimilis proportio non erit, eo quia inuentum ſit aliquando fundamentum eſſe maius ſuo termino, cùm aliud fundamentum ſuo termino non ſit maius, cùm fundamenta ęqualibus vicibus, tum termini æqualibus vicibus licet non eiuſdem numeri, ac fundamentorum, fuerint multiplicati.

Dices omnis poſſibilis multiplicatio eſt infinita. Ergo numquam poſſumus ſcire: an in aliqua multiplicatione contrarium eueniat; cum omnis multiplicatio adhiberi ob ſuam infinitatem non poſſit.

Reſpondeo in vnaquaque materia ſuppetere tales probationes, quæ oſtendunt: quòd idem eueniet in omnibus poſſibilibus multiplicationibus, quod euenit in multiplicationibus de pręſenti adhibitis, & quòd ſemper res ita procedet. Quoniam par ſit ratio de omni multiplicatione poſſibili, ac de illis, quæ in præſentiarum adhibentur.

DEFINITIO X.

EAdem verò habentes rationem magnitudines proportionales dicũtur. Hoc per ſe clarum eſt.

DEFINITIO XI.

CVm fundamentum primum iuxta aliquam multiplicationem excedit ſuum terminum, & fundamentum ſecundum ſuum terminum non excedit; tunc primum fundamentum habet maiorem proportionem ad ſuum terminum; quam ſecundum ad ſuum terminum.

Ratio huius rei eſt. Quia ſi aliquando contingat, quòd fundamentum B. creſcat, ita quòd ſuperet terminum A, altero fundamento E ſuum terminum D non ſuperante, in aliquo erit maior B V. g. in C, quam requireretur ad hoc, vt diceret eandem proportionem ad A; quàm E ad D ex anteced. Linea autem maior dicit maiorem proportionem ad aliam, quam linea minor eò, quòd requiritur, vt ſimiles ſint. Namque ſit linea I ad A, vt B ad D illa erit minor, quam B: cùm B deberet detruncari, vt ſupponitur, ſi ad ſimilem proportionem E ad D deberet reduci. Cùm ergo B ſit maior, quàm I dicet etiam maiorem proportionem, quam I, quia linea maior B continet plus, vel plures partes lineæ A, quàm linea I, & ideo continebit etiam magis de linea A, quàm E contineat de linea D, quę tantũ de ea continet, quãtũ I de A.

COROLLARIVM.

CVm ergo duæ quantitates inæquales comparantur ad maiorem V. g. Pes 12. vnciarum palmus 6. & paſſus 72. Pes dicitur habere maiorem rationem ad paſſum, quam palmus eo, quòd plures partes eius contineat; nempe 12. cum palmus ſolum 6. contineat ex vncijs 72. At ſi paſſum compares cùm pede, & palmo, nempe cum minoribus, paſſus habet minorem proportionem cum maiori nempe cum pede, quàm cum minori, nimirum cum palmo; quia pedem continet ſolum ſex vicibus, at palmum 12. vicibus; & ideo eſt maior proportio paſſus ad palmum; quàm ad pedem; minor, verò ad pedem, quam ad palmum.

Si verò duas quantitates inæquales compares cùm minori V.g. paſſum, & pedem cum palmo. Maior eſt proportio maioris, quam minoris ad eam; quia plus continet maior de ea V g. paſſus de palmo, quàm minor, nempe pes de ipſo palmo. At è contra minor comparata cum duabus inæqualibus, ſe maioribus; Minor hæc ad minorem V. g. palmus ad pedem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem, cùm de illa minori contineat magis, quòd palmus pedis contineat medietatem; at verò paſſus 12. partem.

Si tandem mediocris comparetur, cum maiori ſe, & cum minori, vt pes cum palmo, & cum paſſui mediocris magis continet de minori; cum eam totam contineat, & inſuper aliquid amplius quã de maiori, quam nec totam continet. Vnde habet maiorem proportionem cum minori, quam cum maiori. At, ſi minor, & maior ad mediocrem comparentur, maior dicet ob eandem cauſam maiorem proportionem ad mediocrem; quàm minor ob continentiam maiorem, quam habet cum totam eam contineat; non autem minor mediocrem.

DEFINITIO XII.

PRoportio in tribus terminis ad minus conſiſtit.

Quia, cùm ſit proportio Relationum quantitatum, & Rationum ſimilitudo, & ad relationem requiratur fundamentum; & terminus ad hoc, vt inuicem comparentur relationes, & ſimiles inueniantur, oportebit aſſignare fundamentum, & terminum hinc, inter quæ reperiatur vna relatio; & fundamentum, & terminum inde; in quibus conſiſtat alia relatio, quæ relationes, & & habitudines, deinde ſimiles dicantur. Verum, quia eadem quantitas poteſt reſpectu vnius eſſe fundamentum; vt 4. ad 8. & reſpectu alterius terminus, vt 2. ad 4. in quo 4. eſt terminus reſpectu minoris, & fundamentum reſpectu maioris: ideo proportio, & rationum ſimilitudo in tribus terminis ad minus conſiſtit.

DEFINITIO XIII.

HOmologæ, ſeu ſimiles rationi magnitudines ſunt, antecedentes quidem antecedentibus, ideſt fundamenta fundamentis, & conſequentes conſequentibus, ideſt termini terminis,

Docet ne dum dari ſimilitudinem rationum, ſeu habitudinum vnius quantitatis ad aliam, quæ relationes ſunt fundamenta proxima ſimilitudinis, ſed etiam fundamenta remota, ideſt ipſas quantitates Rationem dicentes in ſimilitudine cum alia proportione conuenientem, dici, & ipſa ſimilia in hoc; quod duæ quantitates deſeruiant pro fundamentis, & in ratione fundamentorum conueniant, & duæ pro terminis deſeruiant, quę non eſt ſimplex denominatio: ſed neceſſe eſt fundamenta in hoc conuenire, quòd aut ambo ſint æqualia terminis, aut ambo maiora, aut ambo minora, alioquin ſi vnum eſſet maius, aliud minus ſuo termino non eſſet eadem proportio cum vna eſſet maioris inæqualitatis, altera minoris.

DEFINITIO XIV.

ORdinata proportio eſt; cùm in duplici ſerie quantitatum proportionem dicentium eædem quantitates media deſeruiunt pro fundamento, & termino Rationis.

Sint duæ ſeries quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	4	6	8

Referaturq; 2. ad 3. vt refertur 4. ad 6. & rurſus 3. ad 4. vt 6. ad 8. ita quòd termini 3. & 6. deſeruiant etiam pro fundamentis: Et ſint quidem termini reſpectu proportionis antecedentis; fundamenta verò reſpectu ſequentis: Quamuis proportio antecedens non ſit eadem, ac ſequens ſed diuerſa; nihil intereſt, dicit quod hæc erit ordinata proportio. Quoniam eodem ordine diſpoſiti termini inuicem ſe reſpiciunt procedendo verſùs extremos terminos 4. & 8.

DEFINITIO XV.

PErturbata proportio eſt; cùm in duplici ſerie quantitatum proportionem dicentium media terminus vnius deſeruit pro fundamento reſpectu extremæ quantitatis; at fundamentum alterius deſeruit pro termino reſpectu primæ quantitatis.

Sint duæ ſeries quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	6	8	12

Ordo verò earum perturbatus ſit, & referatur 2. ad 3. vt 8. ad 12. Deinde referatur 3. terminus, vt fundamentum ſumptus ad 4. vt alia quantitas 6. refertur ad fundamentum 8. Ita quòd terminus primæ ſeriei 3. deſeruiat pro fundamento ad aliud tertium; at fundamentum ſecundæ ſeriei 8. deſeruiat pro termino ad aliud ſumptum, vt fundamentum. Si ergo ita ſint ordinati termini vocabitur proportio perturbata; & oportebit ponere illud aliud in prima ſerie pro vltima quantitate, vt in ſecunda pro prima. Vocatur autem proportio perturbata, quòd non ſeruetur idem ordo, cùm in prima ſerie media, & ſecunda quantitas ſit terminus, & fundamentum: reſpectu quidem primę quantitatis terminus; reſpectu verò aſſumptæ extremæ fundamentum. At in ſecunda ſerie ſecunda quantitas ſolum terminus eſt reſpectu primæ; at prima eſt fundamentum, & terminus; terminus quidem reſpectu antepoſitæ aſſumptæ, fundamentum verò reſpectu ſecundæ ſuę quantitatis.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De modis arguendi in proportionibus.

PRius agendum eſt de modo arguendi in genere; deinde de ſingulis modis in ſpetie.

Præſupponendum ex Logica. Solùm ſyllogiſmum inter argumenta à Logicis enumerata efficaciter concludere: Vnde, vt argumenta in proportionibus fundata vim adſtrictiuam adipiſcantur, & intellectum euidentiâ conuincant, oportet, licet Enthymematis modo prolata; quòd tamē ad ſyllogiſmum reduci poſſint. Syllogiſmus verò conſtat tribus propoſitionibus: Primæ duæ dicuntur Præmiſſæ, & earum prima eſt Maior, ſecunda Minor, vltima dicitur Concluſio. Pręmiſſę verò conſtant ex Subiecto, & Prędicato terminis, & Copula: Et terminus, qui replicatur in maiori, & minori dicitur, *Medius terminus*. Sic, ſi dicatur *omnis homo eſt animal*, hæc eſt maior propoſitio, & *homo* eſt ſubiectum eſt copula *animal* Prædicatum, cui additur minor. *Sed omne animal eſt viuens*; quæ, vt prima componitur ex ijſdem partibus, ſed ſubiectū eſt medius terminus nempe *animal*, quod replicatur in maiori, & minori; & ambæ hæ propoſitiones dicuntur *Præmiſſæ*. Tandem deducitur Concluſio euidens. *Ergo omnis homo eſt viuens*. Quæritur itaque in argumentis proportionum, quænam ſint partes ad ſyllogiſmum neceſſariæ?

CONCLVSIO I. PROPOS. XIII.

Argumenta proportionum duo extrema, & medium terminum poſſident ipſas Rationes; copula eſt proportio aſſerta, quæ particula vt explicatur.

PRobatur Sit argumentum Methematicum *numerus 1. eſt ad 2. vt 3. ad 6. Sed vt 3. ad 6. ita eſt 4. ad* 8. Ergo 1. ad 2. eſt vt 4. ad 8.

Numeri ipſi non ſunt termini: nā, tunc argumentum conſequeretur ſex terminos, vt ſunt ſex diuerſi numeri: argumentum verò conſtans pluribus terminis; quam tribus, non concludit ex Logicis: ſed fallax eſt, & deficit in forma. Quare erit terminus ipſe proportio, quæ inter duos terminos reperitur.

Confirmaturque. Nam propoſitiones modales pro terminis integra propoſitione gaudent vt *neceſſe eſt hominem eſſe animal*, illud enim *neceſſe* eſt ſubiectum, at hominem eſſe animal, eſt prædicatum. Sic, & hic 1. eſt ad 2. ſubiectum eſt, & 3. *ad* 6. eſt Prædicatum, nempe duæ relationes altera, quæ eſt inter 1. & 2. altera verò, quæ militat inter 3. & 6. medius verò terminus erit proportio media 3. *ad* 6. quæ reperitur in maiori, & minori.

Probatur ſecunda pars. Nam copula eſt illa, quæ ſemel eſt in maiori, ſemelque in minori, & in conſequentia. Sed talis eſt particula *vt* ſi ſit aſſertiua, vel negatiua, nempe iuncta cum verbo *eſt*, vel *non eſt*; quoniam reperitur in omnibus tribus propoſitionibus. Ergo, *vt eſt* erit copula.

Probatur ſecundò. Quoniam tota vis argumenti ex proportionibus deducti, vt propoſ. 16. huius conſiſtit in identitate ſimilitudinis proportionum: Et ex eo, quòd proportiones duæ ſint ſimiles alicui tertię, arguitur, eſſe idem ſimilitudine inter ſe. In hoc enim probauimus vniuerſaliter in noſtris Placitis Phyloſophicis vim ſyllogiſticam ſtatuendam: *Sed vt eſt* ſignificat hanc relationem ſimilitudinis, & indicat proportiones eſſe idem in ſimilitudine; Ergo in eâ particulâ copulæ latebit; cum copula ſit illa, quæ ſignificat identitatem Prædicati, & Subiecti.

Sed iam accedamus ad particulares modos explicandos, quibus vtuntur Mathematici; qui ſunt *Alternatio*, *Inuerſio*, *Compoſitio*, *Diuiſio*, *Conuerſio*, *Æquatio*. Et licet ſint alij modi, vt explicabimus, hos tamen particulariter proprijs definitionibus illuſtrauit Euclides, vtpote difficiliores, & in quibus, vt plurimùm termini, & fundamenta ſedes mutarēt, & alterum vices alterius in deductione concluſionis ſubiret. V. g. antecedens, & fundamentū A in pręmiſſis ponitur in concluſione, tanquā terminus, & conſequens. At nos alios etiam modos, in quibus nulla terminorum, fundamentorumque viciſſitudo reperitur, perſpicuitatis gratia explicabimus.

Modi itaque argumentandi ſunt quædam enthimemata conſtantia ex duplici propoſitione perfectâ, & affirmatiuâ; quorum conſequentiâ ſemel probatâ, ex inde efficaciam ſyllogiſticam conſequuntur, & euidenter oſtenduntur. Quia omne Enthymema, cuius conſequentia probata ſit, vim ſyllogiſticam conſequitur; vt *iſte angulus eſt in ſemicirculo, ergo rectus eſt*. Si aliũde conſtet, omnem angulũ eſſe rectũ in ſemicirculo, erit ac ſi integrum ſyllogiſmum conficeres, *& diceres Omnis angulus in ſemicirculo rectus eſt. Iſte in ſemicirculo reperitur: Ergo rectus erit*. Quapropter, & modi arguendi Mathematici in proportionibus ſunt efficaces, quia licet ſint Enthymemata, eorum tamen conſequentiam eſſe bene deductam in 5. libro Euclid. oſtenditur.

Iſtis itaque perceptis, obſeruandum eſt, duplicem eſſe modum argumentandi: Alium abſolutum, cùm quantitates dicunt quidem proportionem ſimilem, ſed non ſe habent inuicem, vt continens, & contentum: vt pars, & totum. Alium verò eſſe relatiuum, in quo quantitates ſumuntur, tanquam dicentes relationem totius, & partis. Primò itaque explicabimus modos argumentandi abſolutos, à reſpectu partis, & totius. Deinde relatiuos.

DEFINITIO XVI.

ALterna, ſeu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis, ſeu fundamenti, & termini vnius proportionis tanquam fundamenta in concluſione, vt ſe referentia ad fundamentum, & terminum alterius proportionis, tanquam ad ſuos terminos.

Iſte modus eſt: Cùm ponitur fundamenti ad ſuum terminum ſimilis proportio, quæ eſt alterius fundamenti ad ſuum terminum: Et deinde infertur. Quod fundamentum, ad fundamentum eâdem ſimili habitudine refertur, vt terminus ad terminum. Sic ſi ponantur eſſe.

2 ad 4
vt
3 ad 6

Deinde poterit deduci, Ergo erit etiam Fundamentum 2. ad fundamentum 3. pro termino ſumptum, Vt terminus 4. pro fundamento ſumptum ad terminum 6.

Qui modus argumentandi efficaciter concludens demonſtratur propoſ. 19. lib. 5. Quod intelligitur, ſi fundamenta, & termini ſint eiuſdem generis. Non enim rectè inferetur ex eò, quòd linea A ad lineam B eſſet in proportione, vt numerus 2. ad numerum 3.; quod deinde eſſet etiã linea A ad numerum 2. vt linea B ad numerum 3. vt clarum eſt; cum nulla ſit proportio lineæ ad numerũ. Hanc verò argumentationẽ Doctores exprimunt, cum eâ vtuntur, dicendo; ſi 2. ad 4. vt 3. ad 6. ergo permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6.

DEFINITIO XVII.

INuerſa ratio eſt, cùm fundamenta, antecedentiaque proportionum aſſumantur pro terminis, & termini, ſeu conſequentia aſſumuntur in concluſione pro fundamentis.

Si aliquis argueret: Quoniam eſt fundamentum 2. ad ſuum terminum 4. vt fundamentum 3. ad terminum 6. Ergo etiam erit terminus 4. ad fundamentum 2. vt terminus 6. ad fundamentum 3. vſurpando in concluſione terminos pro fundamentis, & fundamenta collocando pro terminis: hic modus dicitur *inuerſa ratio*, & hunc modum eſſe demonſtratiuum conſtabit ex Coroll. pr. 4. par. ſequentis. Exprimiturque dicendo. Ergo permutando, &c.

DEFINITIO XVIII.

ARguere ex æqualitate eſt, cum ſunt plures quantitates, quam duæ ordinatam, ſeu perturbatam proportionem dicentes, & arguitur, eſſe eã proportionem inter fundamentum, & vltimum terminum vnius ſeriei, ac inter fundamentum, & terminum alterius vltimum, relictis intermedijs.

Dentur plures magnitudines; quàm duæ dicentes proportionem, veluti aliæ eiuſdem numeri, ſeu proportione pturbatâ, ſeu ordinatâ, & ſint

Ordinata 1. 2. 6. Perturbata 4. 8. 12.
vt 3. 6. 18. vt 2. 3. 6.

Si ergo relinquantur media aſſumptis extremis in concluſione, & primum fundamentum 1. dicatur referri ad vltimum terminum 6. vt fundamentum 3. ad vltimum terminum 18. ex eo, quod ſint 1. ad 2. ſic 3. ad 6. & 2. ad 6. ſic 6. ad 18. bona erit illatio in ordinata proportione; & bona quoque in perturbata; & ex eo, quod ſit 4. ad 8. vt 3. ad 6. & 8. ad 12. vt 2. ad 3. efficaciter deducetur concluſio, eſſe quoque 4. ad 12. vt 2. ad 6. In qua proportione, vt valeat, ritè ordinandi ſunt termini: nam ſi 2. poneretur vltimo loco poſt 6. in ſecundâ ſerie, tunc vltima relictis medijs, vt patet, non ſumerẽtur. Quod ſi ſint plures termini, quàm tres, valet adhuc argumentum; ſic ſi ſint.

Ordinata 1. 2. 6. 8. Perturbata 4. 8. 12. 18.
3. 6. 18. 24. 2. 3. 6. 9.

Licebit adhuc in proportione ordinata arguere, vt 1. ad 8. ſic 3. ad 24. & perturbata vt 4. ad 18. ſic 2. ad 9. Hunc verò modum eſſe efficacem in omni proportione etiam irrationali; licet ſint ſeries diuerſi generis oſtenditur pr. 24. & 23. lib. 5. & eam ſignificant in arguendo. Ergo *ex æquo*, vt, &c.

MODI ADDITI.

DEFINITIO XIX.

ENumeratio rationis poteſt dici, cùm pluribus quantitatibus ordinatis, quæ dicant eandem proportionem, aſſumuntur omnia fundamenta, vt dicentia eam proportionem ad omnes terminos, vt vnum ad vnum.

Si dentur multæ proportiones ordinatæ, & ſint

1. vt 3. 4. 5.
ad ad ad ad
2. 6. 8. 10.

Et illis poſitis, deinde inferatur eſſe 13. nempe omnia fundamenta ad 26. omnes terminos ſimul, vt fundamentum aliquod, V. g. 3. ad terminum ſuum 6. iſte modus poteſt vocari Enumeratio; eo quia ad ſimilitudinem enumerationis Dialecticæ poſitis pluribus particularibus proportionibus cõcluſio deducatur, quę concludat omnes: & probatur propoſ. 17. lib. 5.

DEFINITIO XX.

COllectio eſt, cum plurium quantitatum proportionem ordinatam dicentium aſſumuntur fundamenta, & termini vnius ſimul, vt fundamentum, & antecedens ad fundamenta, & terminos alterius proportionis tanquam ad conſequentem, & terminum, & arguitur, ita eſſe omnia ad omnia; vt fundamentum aliquod ad aliud fundamentum.

Sit proportio ordinata propoſita
1. ad 2. & hoc ad 6. & hoc ad 8.
vt 3. ad 6. & hoc ad 18. & hoc ad 24.

Si hac poſitione inferatur. Quod etiam omnia fundamenta, terminique 1. 2. 6. 8. nempe 17. ſint ad alterius ſeriei fundamenta, terminoſque 3. 6. 18. 24. nimirum 51. vt aliquod ipſorum 2. ad aliud correſpondens 6. bona erit illatio, & oſtendetur Coroll. 2. propoſ. 19. Poteſt verò hæc illatio eſſe integra, & dimidiata: Nam omnia fundamenta, & termini poſſunt colligi, vel eorum aliquot in prima ſerie; dummodo colligantur correſpondentia in ſecunda ſerie.

Sic ſi colligantur extrema 8. & 1. in prima ſerie, & fiant 9. & item in altera ſeria correſpondentia 3. & 24. & fiant 27. erit eadem proportio 9. ad 27. quæ 2. ad 6. vel 1. ad 3. vel 6. ad 18.

Verùm hic quoque fundamenta, & termini debent eſſe eiuſdem rationis, & ſpeciei alioquin ſicut in permutata, rectè illatio non fieret.

DEFINITIO XXI.

REſiduatio eſt modus argumentandi, in quo totum ponitur, ad totum proportione reſpondens, vt pars ad partem, & deinde arguitur ex hoc quoque, eſſe reſiduum ad reſiduum, vt totum, ad totum.

Sit V. g. proportio 15. ad totum 3. vt pars 5. primi totius ad partem alius 1: Erit quoque reſidui 10. primi totius, proportio ſimilis proportioni, quæ eſt ad alteram partem reſiduam 2. alius.

Iſte verò modus arguendi eſt diuerſus ab ijs, de quibus acturi ſumus, qui ſe referunt; vt totum, & pars. Nam hic pars non confertur cum toto ſuo; ſed cum parte alius totius. Propterea que non eſt proportio partis, vt partis propriè; cùm non reſpiciat ſuum totum; ſed partem alteram, non ſibi compartem, alterius totius. Iſte verò modus oſtenditur propoſ. 22.

DE-

DEFINITIO XXII.

R*Eplicatio poteſt dici modus arguendi; cùm terminus, & fundamentū replicata æquè ſumuntur, & ad fundamentum, et terminum conferuntur, vel æquè replicatos, vel ſimplices, alterius combinationis.*

Sit V. g. 3. ad 4

Vt 6. ad 8

Poſſum arguere eſſe quoque multiplex 3. nempe 9. ad ſuum terminum 12. multiplicem æquè numeri 4. quemadmodum eſt 6. ad ſuum terminum 8, quod oſtendetur propoſ. 18. lib. 5. Idemq; argumentum valebit, ſi quoque combinationis alterius æquè multiplicis ſumantur, V. g. 24. numeri 8. & 18. numeri 6. erit namque 9. ad 12, vt 18. ad 24.

DEFINITIO XXIII.

D*Etractio poteſt dici modus argumentandi, cùm ex antecedenti, et conſequenti partes proportionales detrahuntur, et arguitur eſſe reſiduum fundamenti ad reſiduum termini, vt aliud fundamentum ad alium terminum, vt priùs erat totum fundamentum ad ſuum terminum totum.*

Dicatur quod 8. ſit ad 24.

velut 2. eſt ad 3.

Si ex 8. & ex 24. detrahantur partes proportionales 3. & 9. remanebunt 5. & 15. Si ergo arguatur, quòd 5. ſit ad 15. vt 1. ad 3. iſte modus poterit vocari *Detractio*; & oſtenditur valere in proportione multiplici propoſ. 6. lib. 5. In quacumq; proportione Coroll. prop. 25. eiuſdem.

DEFINITIO XXIV.

R*Eflexio poteſt dici modus argumentandi, cùm duo fundamenta; ſeu antecedentia ſeorſim referuntur ad vnicum terminum, ſimili proportione, vt alia duo fundamenta, ſeu antecedentia ad ſuum terminum, ſeu conſequens; Deinde fundamenta prima ſimul ſumūtur, & arguitur obtinere eandem proportionem; quam alia duo fundamenta ſimul ſumpta ad ſuum terminum.*

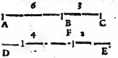
Dentur duo fundamenta 3. & 2. qui referantur ad terminum 6. & alia duo 6. & 4. qui referantur ſimili proportione; ac prædicta ad ſuum terminum 12. Si deinde arguatur eſſe quoque duo fundamenta ſimul, ſeu antecedentia 3. & 2. nempe 5. ad ſuum terminum 6. vt fundamenta 6. & 4. nempe 10. ad ſuum terminum 12.; erit bona deductio, & efficaciter concludet.

Probatur verò iſte modus propoſ. 25. lib. 5.

Modi, qui inuoluunt rationem totius, & partis.

DEFINITIO XXV.

C*Ompoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ſeu vnius; & hoc totum collatum ad ipſum conſequentem.*



Sit proportio A B partis ad B C partem; vt proportio alterius partis D F, ad alteram partem F E, & colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius A C; nempe antecedentis cum conſequente, fundamenti, & termini proportionis ſimul ad ipſam conſequentem, ſeu terminum B C; vt aliud totum D E fundamentum, terminuſque alterius proportionis ad ſuum terminum E F; dicetur huiuſmodi argumētum Compoſitio rationis eo, quod ex conſequente, & antecedente componatur aliud nouum antecedens, ſeu fundamentum. Demonſtraturque hic modus argumentandi propoſ. 21 lib. 5. Euclid. & quando illo vtuntur Mathematici; ita arguunt, vt A B ad B C; ſic D F ad F E, ergo *componendo*, vt A C ad C B; ſic D E ad F E. Sed forte explicabitur meliùs iſte modus argumentandi; Quod ſit: à proportionis partis ad cōpartē totius eiuſdem ſimilitudine proportioni alterius partis ad cōpartē alterius totius, deinde deducere, quod etiam totum prius ſit ad partem ſuam, ſicut totum poſterius ad partem ſuam, quæ partes fuerint ambæ, vel termini, vel fundamenta, & è contrà.

V. g. ſit pars 1. ad partem 2. totius A;

Veluti pars 1. ad partem 2. totius B;

Erit etiam componendo totum A ad ſuam partem 2; vt totum B ad ſuam partem 2.

Vel; ſi ſit pars 1. ad partem 2. totius A,

Velut pars 1. ad partem 2. totius B:

Erit quoque totum A ad ſuam partem 1;

Vt totum B ad ſuam partem 1,

Vel è contrariò,

Si ſit pars 1. ad partem 2. totius A;

Vt pars 1. ad partem 2. totius B.

Erit quoq; pars 1. ad totum ſuum A;

Vt pars 1. ad totum ſuum B;

Vel etiam erit pars 2. ad totum ſuum A.

Sicut pars 2. ad totum ſuum B.

DEFINITIO XXVI.

D*Iuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſum conſequentem.*

Sit proportio, vt in præc. figura, A C totum ad B C partem vt D E totum ad F E partem, ſi deinde arguatur, quod exceſſus quoque A B, quo antecedens; nempe totum A C ſuperat conſequens, ſit ad ſuam partem B C conſequentem. Velut exceſſus D F, quo item antecedens D E ſuperat conſequentem F E, nimirum totum ſuam partem, ad ipſam F E conſequentem, iſte modus arguendi appellabitur diuiſio rationis, eò quod diuidantur antecedentia, ſeu fundamenta proportionum in ſuas partes, & oſtenditur iſte modus propoſ. 20. lib. 5. Eucl. In diuiſione autem rationis, dum deducunt concluſionem, ita loquuntur auctores *ergo diuidendo, &c.*

Diuiſio itaq; rationis ad hoc, vt rem clariùs explicemus, eſt cū à ſimilitudine proportionis partis cum toto ſuo ad proportionē partis cum alio toto ſuo, quę partes ſint ambæ homologæ ſcilicet, vel fundamenta, vel termini, deducitur ſimilitudo proportionis compartis alteri parti eiuſdem totius ad proportionem compartis alteri parti alterius totius.

V. g. ſit totum A ad ſuam partem 2.

Vt totum B ad ſuam partem 2.

Erit ergo *Diuidendo* compars 1. ad ſuam compartem 1. totius A,

vt

vt compars 2. ad ſuam compartem 1. totius B.
Vel vt totum A ad ſuam partem 1.
Sic totum B ad ſuam partem 1.
Ergo erit, vt 1. pars ad compartem 2. totius A;
Sic 1. pars ad compartem 2. totius B:
Vel etiam ſic vt 1. pars ad A ſuum totum;
Sic 1. pars ad B ſuum totum:
Ergo vt pars 1. ad partem 2. totius A;
Sic pars 1. ad partem 2. totius B.

DEFINITIO XXVII.

COnuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſum conſequentem.

Veluti in præcedenti figura ex eo, quod ſit AC ad AC, vt DE ad FE; Ergo eadem tota AC ad exceſſum AB; ſic altera tota DE ad exceſſum DF: iſte modus arguendi dicitur *Conuerſio rationis*, & oſtenditur propoſ. 19: lib. 5. & cum illo vtuntur Mathematici, ſic inferunt; Igitur per Conuerſionem rationis, &c.

Itaque Conuerſio rationis propriè eſt arguere à ſimilitudine proportionis totorum cum ſuis partibus, ad ſimilitudinem proportionis totorum cum reliquis ſuis partibus.

V.g. vt totum A ad ſuam partem 1.
Sic totum B ad ſuam partem 1.
Ergo conuertendo vt totum A ad reliquam partem ſuam 2.
Sic totum B ad reliquam partem ſuam 2.

Tandem aduerte, quod præter compoſitionem rationis aſſignatam datur etiam alius modus argumentandi, qui eſt compoſitio ipſarum proportionum, & differt propter hoc ab allata; quòd illa ſit compoſitio ipſarum quantitatum proportionem dicentium; hæc verò ipſarum rationum. Si enim ſint duæ proportiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, & duæ aliæ iſtis ſimiles $\frac{4}{6}$, & $\frac{8}{10}$, & ex primis modo, quo docuimus propoſ. 11. vnica proportio componatur $\frac{8}{15}$, item ex ſecundis, & fiant $\frac{4}{6}\,\frac{8}{10}$ erit adhuc eadem proportio 8. ad 15. quæ 32. ad 60. vtpote ex iiſdē proportionibus cōpoſita; ſi ergo prob. proportionem A ad B eſſe compoſitam ex iiſdem proportionibus ex quibus eſt compoſita proportio quantitatis C ad D; benè arguetur eſſe A ad B, vt C ad D. Vnde dabitur quoque alia diuiſio rationis, nempe; ablatis rationibus ſimilibus à ſimilibus, quòd etiam reſidua habebunt eandem proportionem; ſic ablata proportione $\frac{2}{3}$ à proportione $\frac{4}{5}$; & item proportione $\frac{4}{6}$ à proportione $\frac{8}{10}$, remanebunt reſiduum primæ $\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}$, reſiduum ſecundæ $\frac{4}{6}\,\frac{8}{10}$ qui ſimilem proportionem dicent ad inuicem; eritque 10. ad 12. vt 40. ad 48. Vnde ſi quis probet, ablatas fuiſſe à ſimilibus proportionibus A ad B, quæ eſt C ad D proportiones ſimiles; reſidua quoque (poterit deducere) eſſe inuicem ſimilia: quod oſtendemus agentes de proportionalitatibus Rationum.

TRACTATVS IX.

IN V. LIBRVM EVCLIDIS

PARS SECVNDA.

De Proportionibus in genere.

COgnitis Rationum, Proportionumque definitionibus, modumq; illas tractandi, & in illarum cognitione ſe exercendi, ad proprietates earum genericas, & vniuerſaliſſimas accedimus. Eſtq; hic tractatus veluti Metaphyſica apud Phyloſophos. Nam ſicut illa entia vniuerſaliſſimè accepta cognitione intuetur; Sic iſte liber proportiones, atque earum ſimilitudines ſub tota vniuerſalitate animaduertit. Primòque agit, vtpote notiori de proportione multiplici: ſecundò de proportione plurium quantitatum ad vnam comparatarum, tertiò de pluribus quantitatibus ad plures collatis in ordine ad cognoſcendam earum in proportionibus diſſimilitudinem, & tandem de plurium quantitatum ad plures in Rationibus ſimilitudine, in quibus modi argumentandi fundantur. Iſte verò Tractatus à primis quatuor libris nullatenùs dependet; ſed tantum ab antecedenti Tractatus parte: verùm, quia eius cognitio ad ſextum neceſſaria eſt, cui, & primus, & ſecundus liber deſeruiunt; conueniens erit primum, ſecundumque librum legiſſe ſaltem, vt mens illis libris exercitata faciliùs per huius propoſitiones excurrat.

EXPEN-

EXPENSIO I.

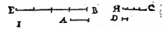
De ſimilitudine multiplicium quantitatum.

QVoniam proportio multiplex facilis eſt, conueniens fuit, vt ipſa ad percipiendam ſimilitudinem cuiuſcumque proportionis aditum ſterneret.

THEOR. I. PROP. I.
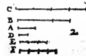
Si ſint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æquè multiplices; Quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo; tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SI dentur quotcumque magnitudines; nimirum duæ; A quidem vnius palmi; at D vnius digiti, & dentur deinde æqué multiplices aliæ æquales numero, V. g. B E ipſi A, & H C ipſi D. Dicit propoſitio, *quòd ſi omnes ſimul ponatur, multiplices nempe hinc E B, & H C, & ſimpliceſ inde A, & D, quòd adhuc illæ compoſitæ ſimul, iſtis ſimul compoſitis, erunt æquè multiplices, vt erant priùs.*



Nempe; quod vt quatuor palmi continebant priùs *quater* lineam palmarem; ſic nunc quatuor palmorum linea, & quatuor digitorum *quater* continet lineam palmi, & digiti vnius.

Probatur ex defin. 3. præc. Tract. Illæ dicuntur æquè multiplices quantitates; cùm æquis numero vicibus vna continetur in alis. Quare A quater continebitur in B E, & D quater in H C. Si ergo diuidatur, in ſuaſque partes diſtribuatur E, B, & H C ſingulæ partes palmares erunt ex B E effectæ, ſingulæ digitales ex H C. Addantur itaque ſingulæ partes digitales palmaribus ſingulis; hæ ſingulæ lineis ſimplicibus compactis ſimul A, & D, æquiualebunt. Ex 2. enim pronunc. l. 1. æqualia addita æqualibus æqualitatem non tollunt. Quapropter A, D ſimul ſingulis palmis, digitiſq; æquiualebit, cumque ſint quatuor digiti, & quatuor palmi ex hypoteſi, quòd ſint æqué multiplices. Ergo A, & D vnitæ lineæ continebuntur quater in lineis multiplicibus E B; & H C ſimul. Vt priùs continebantur ſumptæ ſeorſim in ſingulis ſeorſim ſumptis.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, ac tertia quartæ; fuerit autem, & quinta ſecundæ, atque ſexta. quartæ, erit & compoſita prima cum quinta, æquè multiplex ſecundæ, ſicut eſt tertia cum ſexta quartæ.

SIt duplex ordo linearum; Prior, in quo ſint tres magnitudines, nimirum prima, & antecedens palmorum 2. ſequens palmorum 4. ſubſequens C palmorum 8. Deinde ſit poſterior ſeries trium quoque magnitudinum; quæ antecedenti ſuæ D ſint æquę multiplices; vt ſunt prioris ordinis magnitudines antecedenti ſuæ A. V.g. ſi antecedens D eſt digitus, erit E ſequens duorum digitorum, & F ſubſequens quatuor digitorum. Dicit propoſitio *compoſitas quoque ſubſequentem* C *extremam, & ſequentem* B primæ A primi ordinis, eſſe *æquè multiplices*, vt in poſteriori ordine cū mediâ E, & ſequenti *extremi* F *compoſita, eſt* primæ D.

Probatur, Nam linea A menſurat lineam ſequentem B bis: Quater verò ſubſequentem C. Ergo ſi addantur ſimul B, & C bis, quaterque nimirum ſex vicibus eadem A. ambas menſurabit.

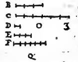
Sed in poſteriori ordine antecedens D ex hypotheſi menſurat quoque bis ſequentem E, & ſubſequentem F quater. (quia menſurat ſuas ſequentes, vt in priori ordine antecedens ſuas ſequentes menſurabat) Ergo hìc quoque antecedens D ſuas ſequentes E, & F ſimul poſitas bis, quaterq; menſurabit, nimirum ſexties; vt faciebant ſequens, & ſubſequens compoſitæ in priori ordine, quod erat oſtendendum.

Aduerteque primam eſſe B, ſecundam A, quintam C; tertiam E, quartam D, & ſextam F, ſed, quia iſte modus explicandi videtur non adeo perſpicuus, illum vitauimus; licet alioqui laudatiſſimus.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ſit prima ſecundæ æquè multiplex, ac tertia quartæ; Sumantur verò æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt ex æquo ſumptarum multiplex, altera quidem ſecundæ, altera verò quartæ.

SIt duplex ordo magnitudinum, Prior, in quo ſit prima B, & ſequens pal. 3. multiplex ſecundæ A, quæ ſit 1. palmi; huic verò ſumatur ſubſequens C, quæ ſit ſequenti multiplex, & eam V. g. contineat bis. Deinde Poſterior Ordo ſumatur magnitudinum eadem multiplicitate continentiarum conformis priori Ordini. Cuiuſque ſequens E ſit trium digitorum reſpectu primæ D vnius digiti. Illi autem ſequenti E ſumatur æquemultiplex F, nempe bis, vt in priori Ordine.



Dicit propoſitio *has ſubſequentes* C, & F, *tum prioris, tum poſterioris ordinis eſſe etiam æquemultiplices ſuis antecedentibus* A, & D.

Pro-

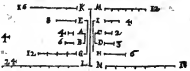
Probatur. Nam ſi C ſubſequens primi ordinis, & F ſubſequens ordinis ſecundi ex hypotheſi bis multiplicant ſuas partes æquales ſuper ſequentes B, & E, quælibet ex illis, veluti FQ, æquabitur ſuæ ſequenti E, & CO ſuæ item ſequenti B. Sed iſtæ ſequentes ex hypotheſi quoque ſunt æquę multiplices antecedentium A, & D, & quælibet V. g. B multiplicat tot partes æquales ſuper A, quot E multiplicat partes æquales ſuper D. Ergo etiam partes ſubſequentium CO, & FQ, vtpote ſequentibus æquales: Sed aliæ partes reſiduæ in his lineis ſubſequentibus C, & F ſunt prædictis CO, & FQ. æquales. Ergo additæ iſtis adhuc facient totam lineam, quam complent, æquè multiplicem ex ant. propoſ. 2. Vnde C toties continebit A, quoties F continebit D; quę ſunt multiplices primæ; & tertiæ; quod erat probandũ.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam: etiam æquè multiplices ipſarum quantitatum iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem; ſi prout inuicem reſpondent; ita ſumptæ fuerint.

SInt duæ combinationes magnitudinum AC prior, BD poſterior, ſitque A ad C, vt B ad D; nempe A in C contineatur, veluti continetur B in D. Sitque A prima, C ſecunda, B tertia, D quarta. Sumãturque horum fundamentorum A, & B æquè multiplices quantitates E, quę contineat A tricies, & G, quæ contineat B tricies. Terminis quoque C, & D iuxta quamuis multiplicationem à prima fundamentorum diuerſam ſumantur duæ aliæ æquè multiplices inter ſe nimirum I, quę bis continet C, & H, quæ bis continet D. Dicit itaque propoſitio, *quòd iſtæ multiplices inuicem reſpondentes dicunt eandem proportionem inter ſe, quam dicebant quantitates ſimpliciter.* Et ſic, quod ita referatur E multiplex magnitudinis A, ad I multiplicẽ magnitudinis C veluti multiplex G magnitudinis B refertur ad multiplicẽ H magnitudinis D. Itaq; multiplicia fũdamẽtorũ, vt fũdamẽta referentur ad multiplicia terminorum tanquam terminos. Quod, vt probetur; iſtis quoque aſſumendæ ſunt æquemultiplices, fundamentis quidem E, & G multiplices K, & L, & terminis H, & I, aliæ æquemultiplices M, & N.

Probatur modo propoſ. Secundum par combinationum E, & G eſt æque multiplex fundamẽtis A, B, & I, H eſt æque multiplex terminis C; & D.



Quare ex definitione 9. aut æqualiter creſcent, aut æqualiter decreſcent, aut æquabuntur; Multiplicia fundamentorum, reſpectu multiplicium terminorum: Itaque creſcente E ſuper I, creſcet & G ſuper H: at deficiente E, ab I; deficiet quoque G ab H, & ſi æquentur E, & I æquabuntur G, & H, eo quia ex hypotheſi ſimplices quantitates, quibus multiplices ſunt, inuicem proportionem dicant, & ex def. 9. illæ quantitates, quæ proportionem dicunt, habent ſuas multiplices hac conditione crementi, decrementi, & æqualitatis præditas.

Tertium verò par K, L eſt quoque multiplex reſpectu fundamentorum A, B, & aliud M, & N reſpectu terminorum C, & D, ex anteced. propoſ. Quod quælibet linea in his tertijs paribus multiplex ſit ſuæ correſpondenti in ſecundo pari. (& quælibet parum correſpondentium ſecundarum parium ſit æque multiplex fundamentis, & terminis ſibi correſpondentibus. Vnde K erit multiplex A, & L ipſius B, at M ipſius C, tandem N ipſius D.

Proptereaque etiam ipſæ magnitudines tertiæ eam conditionem conſequentur crementi, decrementi, vel æqualitatis in omni multiplicatione, quam ſecundę multiplices E, G, & I, H. Creſcenteque N reſpectu M creſcet L ſuper M, & decreſcente decreſcet, ſe æquante æquabitur.

Cum itaque ipſę ſecundę multiplices ſil. fundamenta E & G termini quoque H, I habeant tertias multiplices K, L fundamentorum; M N terminorum illius conditionis, quæ requiritur in def. 9. ad ſimilitudinem proportionum, crementi, decrementi, æqualitatis, erunt proportionales, & ita erit E ad I, vt G ad H.

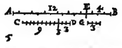
COROLLARIVM

HInc eſt quod ſi quantitatum duæ combinationes dentur, & antecedens A ad ſequentem C dicat eam proportionem, quam antecedens B dicit ad ſequentem D; quod dicent etiam proportionem è cõtrariò C ad A, vt D ad B. Ratio eſt: Quia ſi E, & G multiplices fundamentorum A, & B, vel ſimul ſuperant, vel ſimul æquant, vel ſimul deficiunt, à multiplicibus terminorum iuxta quamuis multiplicationem, & ideo eſt A ad C, vt B ad D; Pariter quoque multiplices terminorum I, & H ſimul deficiunt, vel ſimul æquant, vel ſimul ſuperant iuxta quamcumque multiplicationem multiplices fundamentorum E, & G: Vnde eadem ratione C erit ad A, vt D ad B.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ; etiam reliqua reliquæ erit multiplex, vt tota totius.

SI ſint duæ magnitudines AB maior, & CD minor, quibus ſingulis auferantur duæ par-



tes AE, & CF, quæ inuicem eam multiplicitatem dicant, quam totæ inuicem dicebant; Licet cum ſuis totis non eſſent illæ partes commenſurabiles, aut certè iiſdem partibus non componerentur;

rentur; Multiplicitas enim attendenda eſt vnius partis reſpectu alterius, ſicut, & totius ad aliud totum, non totius reſpectu partis. Sint itaque ablata pars A E, ita multiples reſpectu C F ablatæ, vt eſt multiples B A totum reſpectu C D totius. Aſſerit propoſitio. *Quod etiam reſiduum maioris erit multiplex reſpectu reſidui minoris, vt erat totum maius multiplex A B reſpectu totius minoris C D.*

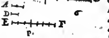
Ad id probandum aſſumitur aliqua alia quantitas G, cui ſit multiplex E B reſiduum, vt eſt reſiduum multiplex maius A E reſpectu minoris reſidui C F. Certum eſt; quod, ſi addatur hæc quantitas G portioni ablatæ C F totius minoris, ita erit multiplex totum maius A B ad totum hoc compoſitum denuò, vt eſt pars ablata maioris A E reſpectu ablatæ minoris C F. Sed hoc totum maius A B eſt ex ſuppoſitione, ita multiplex ad totum minus C D, vt erat ablata portio A E à maiori toto reſpectu ablatæ portionis C F à minori. Ergo hoc totum minus C D & rurſus eius pare ablata C F aſſociata cum aſſumptâ G, inuicem æquabuntur; vtpote quibus ſit totum A B æquè multiplex ex 6. pronunc. Aufer itaque ablatã portionẽ C F; & id quod remanet F D, & G quantitatea remanebunt æquales, vtpote, quòd ab vtraque eadem C F ablata fuerit, quæ priùs quidem cum C D totum minus integrabat, at cum G aſſociata fuerat.

Sed huic aſſumptæ G, ita eſt multiplex reſiduũ E B totius maioris, vt ablatum A B ad ablatum C F, ex hypotheſi. Ergo, & huic reſiduo D F, ita eſt multiplex E B reſiduum maioris, vt ablatum A E ad ablatum C F, & conſequentes, vt totum A B ad totum C D.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & quædam detractæ ſint earum æquè multiplices, & reliquæ earundem, aut æquales erunt, aut æquæ multiplices.

SI ſint duæ magnitudines C B, & E F, quarum prima ſit æquè multiplex alicui A, ſicut, & altera E F eſt multiplex alteri alicui D, V.g. ſepcies. Et auferantur, tum à prima C B, tum ab altera E F æquè multiplicee portiones earundem A, & D, nimirum Q B, & P F. Dicit *reſidua* C Q, *&* E P *eiſdem* A, *&* D *remanere, aut æqualia, aut æquemultiplicia, quodlibet ſuæ correſpondenti* Q C *ipſi* A, *&* E P *ipſi* D.



Probatur. Quoniam propoſ. 2. probatum eſt, quòd ſi duę æquè multiplices duarum; vt C Q multiplex A, & E P multiplex D, & aliæ duę Q C, & F P earundem A, & D æquè multiplicea componantur duæ, & duæ, quæ reſpectu eiuſdem quantitatis multiplicas ſunt, etiam compoſitæ C B, & E F remanebunt æquè multiplices reſpectu earundem A, & D. Ergo etiam detractæ æquemultiplices Q B, & P F ab æquè multiplicibus totis, quæ remanent erunt æquè multiplices, aut ſaltem æquales, cum quælibet pars multiplicium ſit æqualis eis quantitatibus, quibus ſunt multiplices. Vnde detractis æquè multiplicibus Q B, & P F; aut plures partes reſtabunt in C Q, & E P, ideoque erunt æquè multiplices reſiduæ E P, & Q C, aut vna; & ideo erunt æquales ipſis A, & D, quibus priùs ante detractionem erant æquè multiplicee.

EXPENSIO II.

De proportione ad vnicam quantitatem relata.

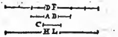
HIc agimus de pluribus ad vnicam comparatis, & ipſae quantitates, vt ſe habent, ad aliquam quantitatem examinamus: Si quidem facilius eſt duarum quantitatum ad vnicam collatio (cùm multiplicitas ſæpé ſæpiùs confuſionem inducat) quam plurium quantorum inuicem comparatio. Agemus autem primò de ſimilitudine deinde de diſſimilitudine in duabus quantitatibus ad vnam conferendis, vt magis ex diſſimilitudine ipſa ſimilitudo nota euadat.

THEOR. I. PROP. VII.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, & eadem eandem rationem conſequitur ad æquales.

SInt A, & B æquales. Dicit *conſequi eandem rationem ad aliam* C. Quod vt probet recurrit ad æquè multiplices, quæ V.g. eas contineant ter, vt D, & F. Lineæ verò C aſſumantur æquè multiplices duæ H, & L, quæ erunt æquales, vtpote eiuſdem æquè multiplices, ex pronunc. 6.

Probatur. Nam, cùm multiplices D, & F æqualium ſint inuicem æquales ſimul creſcent, decreſcent, & æquabuntur reſpectu multiplicium vnius C ſecundò aſſumptarum H, & L inuicem quoque æqualium, & hoc iuxta omnem multiplicationem. Quapropter, quantitates, quibus multiplices ſunt, eandem dicent proportionem, & A ad C proportionabitur; vt B ad idem C. Pariterque etiam C ad A eandem habebit rationem, quam idem C ad B; quia eiuſdem multiplices H, & L ad multiplicea D, & F habent conditionem, quam multiplices quantitatum in proportione ſimilium requirunt, vel æqualitatis ſimultaneæ, vel diminutionis, vel augmentationis.



THEOR. II. PROPOS. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

MAiorem rationem habere eſt magis de quantitate æquali alterius quantitatis in ſe continere, quam de alia V. g. 6. palmi continent 4. palmos, ideoque ad lineam 4. palmorum maiorem proportionem habent, quam ad 5. pal-

imos, cum 4. palmos contineat ſemel,& dimidiū, non autem 5. palmos.

Duas verò partes habet hæc propoſitio. Prima eſt: *Si dentur duæ lineæ, quarum vna ſit maior vt* A *alia minor, vt* B: *& comparentur ad aliam, quamlibet, vt* H: *Maior dicetur habere maiorem rationem ad eam* H, *quàm minor* B.

Diuidatur A ita vt CA ſit æqualis minori quantitati B: Sumaturq; parti minori, ſiue ſit C A, ſiue reliquum G C, multiplex F E, adeoque replicetur, vt euadat, vel maior, vel ſaltem æqualis ipſi H, & eidem multiplici F E addatur multiplex D E tot vicibus replicata, quot eſt ipſa F E, quæ tamen replicet, & multiplicet maiorem partem C A, eritq; D E maior, quam F E, & conſequenter maior, quam H, quòd F E ei, vel æqualem fecerimus, vel maiorem. Sumatur verò quantitatis H multiplex talis L M, quæ ſit proximè maior, quam E D, ita vt E D, non excedat, niſi ad ſummum quantitate H; tunc enim M L non poterit ſuperare D F, quia exceſſus, vel æqualis ipſi H, vel minor: non poteſt ſuperare F E, quæ æquat, vel ſuperat H, & ſic D F multiplex A G non erit minor, quam M L, & E D minor, quam M L. Linea D F verò



ex 1. huius eſt multiplex quantitatis A G; eo quia componatur ex multiplici ipſi CA, & ex multiplici ipſi GC. Sic E D eſt multiplex quātitatis AC ex effectione, & ideo quantitatis B ei æquali. (Vel ſi mauis F E erit multiplex G C, quæ æquabitur ipſi B; ſi B fuerit taliter aſſumpta, quæ relinquat C A maiorem, quàm B.)

Probatur. Multiplex antecedentis A G, nimirum D F excedit multiplicem L M ſuæ ſequentis H in prima combinatione. At multiplex D E antecedentis B multiplicem L M quantitatis H iterum pro ſequente ſumptæ in poſteriori combinatione non excedit. Ergo eſt maior proportio A G ad H, quam B ad H ex def. 11. præc. part. quia contingit aliquando quod multiplex antecedentis AG excedat multiplicē ſequētis LM, quādo multiplex ED anteced. B eandē multiplicē non excedit.

Probatur quoque ſecunda pars; *quòd* H *dicat maiorem proportionem ad minorem* B, *quàm ad maiorem* A G, mutando ſolum combinationem.

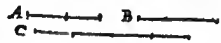
Nam L M multiplex H, vt antecedens ſumpta maior eſt multiplici D E ſequentis minoris B, quum eadem multiplex L M eiuſdem H, etiam hic pro antecedente ſumpta, non ſit maior in hac poſteriori combinatione multiplici D F ſequentis AG. Ergo H dicit maiorem proportionem ad B, quàm ad A G ex def. 11. præc. part.

THEOR. III. PROPOS. IX.

Quæ ad eandem poſſident eandem rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem; iſtæ quoque ſunt inter ſe æquales.

HÆc propoſitio oſtenditur per reductionem ad impoſſibile, & conuertit vtramque partem Theor. 1. huius.

Aſſumantur itaque duæ lineæ A, & B, quæ dicant eandem proportionem ad C. Dicit propoſitio, *quòd* A, *&* B *ſunt inuicem æquales.*



Quòd, ſi non ſunt æquales.

Sit A maior, & B minor. Erit ergo ex præced. propoſitione maior proportio maioris A, quàm minoris B ad eandem C contra hypotheſim.

Probatur quoque ſecunda pars. Quoniam, ſi C reſpicit per eandem proportionem A, & B, & non ſunt ęquales: Ergo ex 2. parte præced. prop. C diceret maiorem proportionem ad B, quàm ad A contra hypotheſim.

THEOR. IV. PROPOS. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt; Ad quam verò eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.

HÆc propoſ. conuertit duas partes propoſ. 8. & ipſa quoque probatur per reductionem ad impoſſibile.

Sic A, quæ maiori ratione referatur ad B, quàm C refertur ad ipſam B, Dicit A eſſe quoque maiorem; quàm C.



Probatur. Nam, ſi forent æquales A, & C, haberent ex pręmiſſa propoſ. eandem rationem ad B, quòd eſt contra Hypotheſim. Si verò A, quæ maiorem rationē habet eſſet minor, quàm C, conſequeretur contra præſuppoſitum minorē rationem ad B, quàm C ex propoſ. 8. Ergo erit A maior, quàm C.

Secundò; ſi eadem B reſpicit proportione maior C, quàm A. Dicit eſſe minorem C, quàm A. Quod oſtenditur: Nam non erunt æquales, quoniam B ad eaſdē ex 9. propoſ. eandē rationem haberet. Rurſus non maior C, quàm A minor; quia B tunc ad A minorem quantitatem, maiorem rationem haberet ex 8. propoſ. quàm ad C: Ergo erit C minor, quàm A: cum non ſit, nec æqualis ipſi A, nec maior ipſâ.

EXPENSIO III.

De plurium quantitatum ad plures quantitates diſſimili comparatione.

VTilis admodum euadit hæc ſpeculatio ad oſtendendos modos argumentandi in omni genere proportionum etiam Irrationalium; Ita vt huius propoſitiones ſint veluti quædam Lemmata ad propoſitiones de plurium quantitatum proportionalium ſimilitudine ad alium item plurium quantitatum proportionalium ſimilitudinem percipiendam, per quam, deinde veritatem, & firmitatem argumentorum Mathemathicorum cognoſcimus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XI. Euc.13.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam: prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

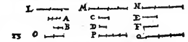
ASſumantur tres combinationes quantitatum A, B, & C, D, & E, F, quarum duæ nimirum A, B, & C, D, dicant proportionem; ita vt A, quæ dicitur prima, & antecedens ad B ſuam ſequentem cōparata, ita ſe gerat in eâ contineda, vt ſecundę combinationis C antecedens ad D ſequētem relata. Hæc verò antecedens ſecundæ combinationis, nimirum C ad ſequentem ſuam D collata maiorem proportionem dicat, quam tertię combinationis antecedens E ad ſequentem ſuam F. Aſſerit, *quòd, & antecedens primæ combinationis* A *dicet maiorem proportionem ad ſequentem ſuã* B, *quàm combinationis tertiæ antecedens* E *ad ſuam ſequentem* F.

Probatur. Accipiantur multiplices antecedentium, ſeu fundamentorum in ſingulis combinationibus L M N, & multiplices ſequentium ideſt terminorum O, P, Q, quæ ſingulæ fundamentorum ſint ſibi æquè multiplices; ſicut etiam terminorum ſint ſibi æquè multiplices, licet differant à multiplicitate priorum.

Si itaque antecedens ſecundæ combinationis C ad ſuam ſequentem D dicit eam proportionem, quam primæ combinationis antecedens A dicit ad ſuam ſequentem B; Ergo multiplices earum antecedentium ex 9. defin. pr. p. huius creſcent ſimul ſemper decreſcent, æquabuntur adhibitâ qualibet multiplicatione reſpectu ſequentium; ita vt, cùm ſuperat vna antecedens ſequentem ſuam, ſuperet, & alia antecedens ſequentem ſuam; ſi æquat, æquet; ſi vna deficit, deficiat, & alia.

Sed huius ſecundę combinationis antecedens C ad ſequentem D maiorem proportionem habet; quàm antecedens tertiæ combinationis E ad ſuam ſequentem F: Ergo ex 11. defin. euenire poteſt aliquando; quòd creſcat multiplex M fundamenti C ſecundæ combinationis, & conſequenter com eo multiplice L ſuæ ſimplicis A prioris combinationis ſe augendo pariter ſuper multiplices terminorum O, & P, & non creſcat tamen N ſuper Q.

Quia ergo non creuit N magis, quàm Q, cum creuit M magis, quã P, at cũ creuit M, magis quam P, creuit ſemper L in priori combinatione magis, quam O, & ſemper L ſequitur M, non autem N: Ergo horum multiplicium ſimplices dicent ma-



iorem proportionem, & ſi dicit maiorem proportionem C ad D. quam E ad F, etiam ex 11. definit. dicet maiorem proportionem A ad B, quam E ad F; quòd multiplex L ſimplicis A ſimul cùm multiplici M ſimplicis C maior inuenta ſit aliquando, quam multiplex O, & P terminorum ſuorum; non autem N multiplex E maior inuenta ſit multiplici Q termini ſui F.

COROLLARIVM

HOc etiam argumentum demonſtrat, quòd ſi ſecundæ combinationis fundamentum C ad terminum D dicit minorem proportionem, quàm dicat E ad F; eam quoque dicere A ad E: cùm ſicut M multiplex minor ſit, quam P, ſic, & L multiplex minor ſit, quam O; cùm tamen N aliquando maior ſit, vel æquet Q.

THEOR. II. PROPOS. XII. Eucl. 14.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; Prima verò, quàm tertia ſit maior; etiam ſecunda maior erit, quàm quarta: Quod ſi fuerit æqualis prima tertiæ, erit etiam æqualis ſecunda quartæ, ſi fuerit prima minor, quam tertia erit etiam ſecundà minor, quam quarta.

TRes partes propoſitio ennmerat, quæ tamen ſingulæ faciliter probantur. Si ſint duæ combinationes, quarum antecedens A, quam dicit primam ad ſequentem B, quam vocat ſecundam ita comparetur in proportione, vt alterius combinationis C tertia ad ſequentem D quartam. Dicit propoſitio; *Quòd qualis altera antecedentiũ fuerit reſpectu alterius antecedentis: Etiam altera ſequentium reſpectu ſuæ ſequentis* talis erit, ſi maior antecedens A antecedente C; maior erit quoque ſequens B ſequente D, ſi æqualis, æqualis; ſi minor A, quàm C, minor quoque erit B, quàm D.

Quoniã ponitur maior A ãtecedẽs antecedẽte C, erit maior proportio A ad B, quã C ad B. Itaq; ſunt tres cõbinationes quantitatum; prima eſt C ad D, quę ita refertur, vt in ſecũda cõbinatione A ad B: Verùm hæc ſecunda A ad B nõ ita refertur, vt tertia C ad B: ſed maior eſt proportio A ad B ſecundę combinationis; quam C ad B tertiæ, vt in principio diai: Ergo ex præcedenti maior erit quoque proportio in prima combinatione C ad D; quam in tertia C ad B. Cum ergo eadem C dicat maiorem rationem ad D, quam ad B; ideoque minorem ad B, quàm ad D, ideo ex 8. propoſ. maior erit B, quàm D.

Probatur ſecunda pars. Quia ponitur æqualis antecedens A antecedenti C, erit eadem proportio A ad B; quam C ad B: Cùm ergo ex hypotheſi ſit A ad B, vt C ad D, erit etiam eadem proportio C ad D; quam C ad B: ideoque D, & B ex propoſ. 9. inuicem erunt æquales.



Tertia quoque pars patet ex Coroll. propoſ. præced. Nam ſi minor eſt A, quam C, erit minor proportio A ad B, quam C ad B. Itaque inſtituemus tres combinationes: Eritque prima C ad D in eadem proportione, quam A ad B; ſed hæc ſecunda A ad B non erit in eadem proportione, quã in

in tertia C ad B: Verùm minor erit proportio A ad B; quàm C ad B: Ergo ex præced. Coroll. minor quoque erit proportio C ad D, quam C ad B. Ideoque C ad B habebit maiorem proportionem, quàm ad D, quare ex 9. propoſ. B erit minor quàm D,

COROLLARIVM I.

CLarum autem eſt ob æqualitatem proportionum; Quod ſi antecedens A ſua ſequente B ſit maior; quòd etiam antecedens C ſua ſequente D futura ſit maior: Quia alioquin ſi A eſſet maior, quàm B, & C minor quam D, aut æqualia ipſi D illa quantitas A diceret proportionem maioris inæqualitatis ad B, at quantitas C diceret ad D proportionem, aut minoris inæqualitatis, aut æqualitatis. Et idem aſſeras ſi A ſit minor, quàm B, etiam C futuram eſſe minorem, quàm D, & ſi æqualis ſit A, & B, & alias quoque quantitates C, & D eadem æqualitate potiri,

COROLLARIVM II.

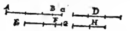
COlligitur quoque, Quod ſi B, & C ſit eadem, vel ſint æquales; quòd. ſi A ponatur maior, quàm C, ipſa C etiam erit maior, quàm D, dummodo ſit A ad B, vt C ad D; quia, cùm B ſit maior, quam D ex prop. 12. & C ſit ei B æqualis, erit etiam ipſa C maior, quam D.

THOR. III. PROPOS. XIII. Eucl. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

SInt duæ magnitudines A C, & D, quæ ſe inuicem proportione ea reſpiciant, quâ aliæ duæ E G, & H, Sitque A C maxima earum, & H minima, Dicit; quod, ſi iſtæ ſimul addantur; facient quantitatem maiorem, quàm reliquæ mediocres ſimul compoſitæ, nimirum D, & E G. Nam ſi ex A C maxima detruncetur pars A B æqualis lineæ D, & ex media E G portio æqualis E F lineæ minimæ H, cùm ſint æquales additæ ſimul A B, cum H pro primo toto, & D cum E F pro ſecundo toto æqualia erunt. Siquidem ipſi H prioris totius æqualem detruncauimus E F partem additam ipſi D, & ipſi lineæ D poſterioris æqualem fecimus B A additam partem ipſi H.

Sed portiones reſiduæ B C maximæ, & F G mediæ ſunt inæquales, maiorque eſt maximæ reſiduum, quàm mediæ; Ergo, ſi hæc reſidua addantur, reſiduum nempe B C priori toti A B, & H, & mediæ F G poſteriori toti E F & D, maius erit prius compactum ex maximâ, & minimâ, quàm poſterius totum compoſitum ex medijs.



Remanet itaque oſtendendum, quod reſiduum maximæ B C, ſit maius, quam mediæ F G. Id verò probatur. Tota A C maxima, eſt ad ſuam mediocrem E G, vt D mediocris ad minimam H: Ergo partes ablatæ à maximâ pars A B, & ex mediâ E F eandē dicent proportionē; quia mediocri D, & minimæ H ſunt æquales: Quare ex prop. 6. reſidua B C, & F G eandem dicent proportionem, quàm ſua tota. Totum verò A C maius ponitur eò, quod ſit maximum; quam E G; ergo, & reſiduum B C, erit maius, quàm F G. Alioquin ſi eſſet æquale, aut minus non diceret B C ad F G eandem proportionem maioris inæqualitatis quam A C ad E G, ſed vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.

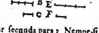
Propoſitio autem verificatur pro nunc tantùm de proportionalibus multiplicibus ob propoſ. 6. in qua fundantur; ſed infra extendetur ad quaſcumque proportionales Coroll. propoſ. 22.

THEOR. IV. PROPOS. XIV. Eucl. 20.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales, numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; ex æquo verò prima maior fuerit, quàm tertia, etiam quarta maior erit, quam ſexta; ſi fuerit æqualis, erit quoque quarta ſextæ æqualis; ſi fuerit illâ minor, hæc quoque illâ minor erit.

SVmantur tres magnitudines A, & B, & C, & aliæ tres D, E, & F, quarum combinationes in eadem ratione ſint A ad B prioris ternarij, vt D ad E poſterioris, & B ad C prioris, vt E ad F. poſterioris. Dicit primo; quòd ſi prima A, ſit maior tertia C in priori ternario, quòd etiam prima D erit maior, quàm tertia F in poſteriori.

Probatur. Nam, quòd A ex hypotheſi ponatur maior, quàm C, erit ex propoſ. 8. maior proportio A ad B, quàm C ad B; & quia eadem eſt proportio B ad C, quàm E ad F, & ideo ex Coroll. propoſ. 4. C ad B, quam F ad E; dicet quoque A ad B maiorem proportionem, quàm F ad E. Sed A ad B eſt eadem proportio, quam D ad E ex hyp. Ergo D quoque dicet maiorem proportionem ad E, quàm F ad E: Ergo ex prop. 10. erit maior D, quam F.



Probatur ſecunda pars: Nempe, ſi ſit æqualis prima A tertiæ C prioris ternarij; quòd etiam talis ſit poſterioris ternarij prima D ad tertiam F, hoc eſt æqualem, eodem argumento.

Quoniam ſunt æquales A, & C, ex 7. huius A antecedens ad ſequentem primi ternarij B erit, vt ſequens, & tertia C ad ipſam mediam B: ſed, vt hæc media B eſt ad vltimam, & tertiam C; ſic eſt media alterius ternarij E ad ſuam extremam F, & è contrà ex Coroll. propoſ. 4. huius, nempe vt C ad B, ſic F ad E; Sed dictum eſt, quòd C ad B, eſt vt A prima ad B mediam, & ex hypotheſi, vt A ad B; ita D poſterioris ternarij ad E mediam; Ergo, vt D prima ad E mediam, ita F tertia ad E eandem mediam. Quare ex 9. propoſ. erit D æqualis ipſi F, quod erat probandum.

Probatur quoque tertia pars, eodem argumento, quo pars prima, nempe ſi ſit minor A, quàm C, futuram eſſe quoque minorem D, quàm F.

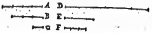
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XV. Eucl. 23.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur; fuerit verò perturbata earum proportio; ex æquo autem prima tertiâ maior fuerit, erit quarta maior, quàm ſexta; Si æqualis prima tertiæ, etiam quarta ſextæ erit æqualis; ſin illa minor, & hæc minor erit.

SIt ternarium linearum A, B, C, & aliud ternarium D, E, F; Quarum proportio ſit perturbata nimirum relatio, & proportio, quæ intercedit inter primam A, & ſecundam B prioris ternarij imitetur proportionem, quæ eſt in poſteriori ſecundæ E ad tertiam F. Quæ verò proportio reperitur inter ſecundam B, & tertiam C prioris ternarij ſimilis ſit proportioni, quam habet D primò poſita ad ſecundam E.

Dico; quòd, ſi in priori ternario prima maior erit, quàm tertia; etiam in poſteriori prima, quã Euclides vocat quartam, maior erit, quàm tertia, quam vocat ſextam.



Probatur hæc prima pars; Quoniam maior ponitur A prima, quàm C tertia: Ergo maior erit proportio primæ A ad mediam B, quàm tertiæ C ad eandem mediam B; Sed in eadem proportione reperitur B ad C, in qua D ad E, & ideo ex Coroll. propoſ. 4. C ad B, quàm E ad D. Ergo maior proportio A ad B, quàm E ad D: vt erat maior quã C ad B. Rurſus eadem proportio reperitur A ad B, quã E ad F. Ergo eſt maior proportio E ad F; quàm E ad D. Igitur ex prp. 10. D erit maior, quã F.

Probatur ſecunda pars de æqualitate; nempe; ſi A ponatur æqualis ipſi C, quòd D erit æqualis ipſi F.

Quoniam A, & C ſunt æquales: Ergo ex prop. 7. eandem rationem habent A, & C ad B; ſed ratio, quâ B reſpicit C, eſt eadem, quâ D reſpicit E; & ex Coroll. 4. eadem quoque ratio eſt C ad B, quàm E ad D; Igitur eadem ratione A refertur ad B, quã E ad D: Sed ruſſus A proportionem dicit ad B, vt E ad F. Ergo E refertur ad D eadem proportione, ac ad F: Ergo F, & D erunt æquales, ex propoſ 9. huius.

Probatur quoque tertia pars eodem prorſus argumento, quo prima pars oſtenſa eſt; Quod ſcilicet poſito A minori, quàm C in priori ternario, minor quoque in poſteriori ſit D, quàm F. Quia enim minor eſt A, quàm C dicet minorem proportionem ad B, quàm C ex 8. propoſ. Sed A ad B eſt; vt E ad F: Ergo E ad F dicet minorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt eſt B ad C, ita eſt D ad E, & ex Coroll prop. 4. C ad B, vt E ad D: Quare erit minor proportio E ad F, quàm E ad D; vnde D erit minor, quàm F.

EXPENSIO IV.

De modis argumentandi; ſeu ſimilitudine proportionum.

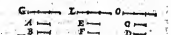
HVcuſque comparauimus quantitates ſecundùm, quòd, aut maiorem, aut minorem proportionem dicebant, & ſemper diſſimilem, & fundamenta proiecimus, quibus modos ſupra deſcriptos argumentandi in proportionibus oſtendamus optimus, & euidentes: Nunc ad ipſas oſtenſiones horum modorum animus delegandus.

Obſeruandum eſt. *Conuerſionem rationis*, iam ſupra Coroll. 4. propoſ. fuiſſe oſtenſam; Nam fuit demonſtratum; quòd ſi ſint duæ combinationes quantitatum, in quarum prima ſit A ad B, vt in ſecunda C ad D, quòd etiam è conuerſò erit B ad A, vt D ad C. Vnde licebit arguere: ſi eſt A ad B, vt C ad D; erit etiam D ad C, vt B ad A conuertendo. Hìc itaque alij modi erunt oſtendendi.

THEOR. I. PROPOS. XVI. Eucl. 11.

Quæ eidem rationi ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem rationes.

SInt proportionales inuicem quantitates A B in prima combinatione, & quantitates E F in ſecunda. Iſtiſque quantitatibus E F ſint item proportionales quantitates tertiæ combinationis C, D, ita vt ſimilitudo proportionum; quæ eſt inter combinationes primam, & ſecundam non ſit diuerſa, ſed eadem; quæ eſt inter proportiones ſecundæ, & tertiæ combinationis. Dicit propoſitio; quòd hæ proportiones quantitatum primæ combinationis ſint ſimiles proportionibus ter-



tiæ combinationis, & ponitur vniuerſale fundamentum, & generale arguendi in proportionibus; ſiquidem omne efficax argumentum fundatur in hoc, vt proportiones ſint ſimiles alicui tertiæ proportioni, ex quo deducitur eſſe ſimiles inuicem.

Ad id ergo probandum aſſumantur alia paria combinationum ſingulis iſtis combinationibus multiplicium, ita, vt multiplices fundamentorum æquali vicium numero conſtent; Terminorum quoque licet non cum primis, inuicem tamen ſint æquè multiplices, itaque Fundamentorum, ſeu antecedentium A, E, C, ſint æquè multiplices G, L, O, Terminorum verò ſint æquè multiplices K, M, N,

Prob. Cum ponamus primam combinationem A, & B dicere proportionem eandem ſecundæ cõbinationis quantitatibus E, & F: Ergo ex defin. 9. Creſcente multiplici aliqua G in omni multiplicatione ipſius fundamenti A ſuper aliam correſpondentem multiplicem K termini B, vel decre-

ſcente

Digitized by Google

ſcente, vel illi ſe æquante, creſcet decreſcet, æquabitur ſimul, & altere fundamenti E multiplex L ſuper ſuam correſpondentem M termini F.

Verùm, quia ponitur quoque eadem proportio inter quantitatea tertiæ combinationis, & ſecundæ; eſtque E, ad F, vt C ad D, multiplices fundamentorum creſcent, decreſcent, æquabuntur pariter reſpectu multiplicium terminorum, & L, V. g. ſuperente multiplicem M, ſuperabit quoque o multiplicem ſuam N, vel hæc æquabitur, illâ ſe æquente, vel defficiet illâ defficiente.

Itaque multiplices G, O fundamentorum A, & C combinationum extremarum concordabunt ſimul in creſcendo, decreſcendo, & ſe æquando reſpectu multiplicium K, N terminorum B, & D: dum concordant in eodem cremento, decremento, & æquatione cum medie L multiplici fundamenti E, reſpectu multiplicis M ſui termini F.

Itaque, cùm A, & C fundamenta habeant ſuas multiplices O, & L reſpectu multiplicium K, & N terminorum ſuorum B, & D creſcentes ſimul, ſimulque decreſcentes, & ſimul ſe ęquantes, habebunt fundementa ad ſuos terminos ſimilem proportionem, & A erit ad B, vt C ed D.

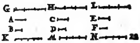
THEOR. II. PROPOS. XVII. Euc.12.

Si ſint magnitudines quotcumque proportionales; quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

IN prima huius demonſtratione hoc Theorema oſtenditur in proportione multiplici; Modo verò hic oſtenditur in proportione quacumque etiam irrationali. Dicitur itaque, quòd ſi dentur tres combinationes, aut etiam plures; quarũ antecedens ad ſequentes ſuas, fundamẽtaq; proportionum terminis eandem obtineant proportionem, & ſit in prima combinatione A ad B, vt in ſecunda C ad D, vt in tertia E ad F, quæ omnes ſimilitudine proportionum correſpondeant. Dicit, quòd, ſi omnes antecedentes ſimul accipiantur A, C, E, & comparentur ad omnes ſequentes ſimul B, D, F, omnes antecedentes, ad omnes ſequentes ſimili proportione correſpondebunt, vt aliqua antecedens, ex ipſis V. g. C ad ſuam ſequentem D proportionatur.

Prob. Nam acceptis ęquè multiplicibus G, H, L ad omnes antecedentes A, C, E, erunt omnes ſimul æquè multiplices ed omnes antecedentes A, C, E, ſimul ſumptas vt vne ſcilicet O vni earum A ex prima propoſ. huius. Acceptis quoque æquè multiplicibus K, M, N, ſequentium B, D, F, erunt omnes multiplices ſimul collectæ K, M, N, ad omnes ſequentes B D F item ſimul ſumptas, vt vna multiplex K ad vnam ſuã ſequentem B. Sed, & antecedentes ſingulæ proportioné conſequuntur eandem ad ſuas ſequentes ex hypotheſi. Ergo ex defin. 9. pert. pr. huius æquabitur ſimul, decreſcet creſcetque multiplex vnius antecedentis A reſpectu multiplicis ſuæ ſequentis B cum multiplices omnes G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, in omni multiplicatione conſimili gradu, vel decreſcunt, vel creſcunt, vel æquantur reſpectu multiplicium K, M, N, ſimul ſuarum ſequentium B, D, F.

Si itaque omnes multiplices G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, relatæ ad multiplices omnes K, M, N, omnium ſequentium B, D, F, creſcunt, decreſcunt, æquantur quemadmodum vne V. g. G relata ad ſuã correſpondentem K. Igitur ex definitione 9. omnes antecedentes A, C, E, ſimul iunctæ ad omnes ſequentes B, D, F, ſimul vnitas dicent proportionem eandem, veluti vna antecedens, nempe A ad ſuam ſequentem B comparata. Quod erat probandum.

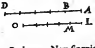


Hic oſtenditur modus argumentandi, quem addidimus, primus; cum enumeratis multis combinationibus, quæ eandem proportionem habeant, ex inde arguitur omnia fundamenta eſſe ad omnes terminos, vt vnum fundamentum ad ſuum terminum: & eſt Enthimemma, quod alia probatione non indiget, cùm remaneat hic probatum, & redactum ed prima principia, & totalem euidentiam, vt patet.

THEOR. III. PROPOS. XVIII. Euc.15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi ſumantur pro vt inuicem reſpondent.

SInt ſuarum partium A B, & L M, æquè multiplices lineæ A D, & L O dicit ſingulas eſſe proportionales; inuicem. Si ite ſumantur prout correſpondent, nempe ſi referatur pars ad partem, ita totum, ad totum.



Probatur. Nam ſinguię partes lineæ A D ſunt æquales inuicem; Ergo ex 7. propoſ. omnes ad vnam earum V. g. ad A B eandem habent rationem, ſic, & in linea L O omnes, cum ſint æquales, ed vnam eendem earum V. g. ad L M habent eandem rationem.

Igitur, vt ſe habet vne antecedentium A B ad vnam conſequentiũ L M V. g. ita ſe hebebunt omnes ſimul antecedentes, ideſt tote linea A D ad omnes conſequentes, nimirum L O, ex pr. 17.

THEOR. IV. PROP. XIX. Eucl. 16.

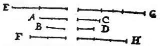
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIc demonſtratur alterna, ſeu permutata proportio, quæ tradite eſt def. 16. Si namque ſint duæ combinationes, quarum in vna antecedens A ad ſequentem B eam proportionem dicat, quam in ſecunda combinatione antecedens C dicit ad D.

Dico quoque eam proportionem dicere ambo antecedentes inuicem A, & C, quam ſequentes inuicem dicũt B, & D, quod temen intelligendum, quũ proportiones ſunt in eodé genere, vt patebit.

Ad

Ad id vero probandum in prima combinatione antecedenti A, & ſequenti B ſumantur multiplices E F, quæ complectantur numerum partium ęqualem, & idem fiat in ſecunda combinatione aſſumendó multiplices G, & H, quæ licet non cum primis, adhuc tamen ſaltem inuicem partes ęqualis numeri habeant.



Probatur. Nam antecedētium multiplices E, & G creſcent, ęquantur, decreſcunt, vt ſequentium multiplices F, & H. Ergo ipſę inuicem antecedentes A, & C proportionem dicunt eam, quam conſequentes B, & D. Probatur, quod creſcant, decreſcant, ęquentur multiplices antecedentium, vt multiplices ſequentium ex defin. 9. quia dicunt inuicem proportionem. Quòd verò dicant proportionem patet; quia eidem dicunt proportionem: nam ex propoſ. præced. ita proportionatur multiplex E multiplici F ſequentis, ſicut antecedens A proportionata eſt ad ſequentem B; ſed præſupponitur quod antecedens A ad ſequentem B in prima combinatione dicant eam proportionem, quam antecedens ſecundæ combinationis C dicit ad D. Ergo, & multiplex E antecedentis proportionem dicit cum F multiplice ſequentis, vt antecedens C ſecundæ combinationis ad ſequentem D.

Sed idem quoque ex præmiſſa propoſ. de multiplici G reſpectu ſuæ antecedentis C, & de multiplici H reſpectu ſuæ ſequentis D. in ſecunda combinatione aſſerendum nempe, quòd dicant eam proportionem, quę reperitur inter antecedentem C, & ſequentem D huius ipſius ſecundæ combinationis. Ergo multiplices in prima combinatione inuicem, & multiplices ſecundæ combinationis inuicem eam proportionem dicunt, quam antecedens C, & ſequens D. Quare dicent, ex 16. huius eandem proportionem inter ſe duę E ad F, vt duæ G ad H: Æquabuntur, itaque creſcent, & decreſcent æqualiter ex 18. propoſ. huius in omni multiplicatione. Vnde, & quantitates, quibus ſunt multiplices, nimirum antecedentes A ad C, & ſequentes B ad D inuicem dicent eandem proportionem ex defin. 9. part. primæ.

COROLLARIVM I.

VNde colligas poſſe mutari rationem alternè ſolum in proportionibus eiuſdem generis, quia ſi eſſent diuerſi generis non poſſent dici, multiplices primæ combinationis, & ſecundę vnquam æquari, vel eſſe maiores, vel minores; quia quantitates diuerſi generis ſicut æqualitatem non habent, ita nec poſſunt dici maiores, vel minores.

COROLLARIVM II.

HInc, & ex propoſ. 17. illum modum, quem aſſignauimus ſupernumerarium, & definit. 10. appellauimus Collectionem probare poſſumus. Nam diſpoſitis terminis.

2	3	4
6	9	12

Ita vt ſit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & 3. ad 4. vt 9. ad 12. erit etiam permutando 2. ad 6. vt 3. ad 9. & 3. ad 9. vt 4. ad 12. Quamobrem ex propoſ. 17. poterimus colligere omnia fundamenta ſimul in hac proportione permutata 2. 3. 4. nempe 9. comparando ad omnes terminos ſimul 6. 9. 12. ſcilicet 27. & dicere, quòd, ità ſit 2. ad 6. vt 9. ad 27. nempe vt fundamentum aliquod 2. ad ſuum terminum 6. ita omnia fundamēnta 9. ad omnes terminos ſcilicet 27.

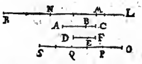
PROB. V. PROPOS. XX. Eucl. 17.

Si Cōpoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoq; diuiſæ proportionales erunt.

DEmonſtratur his modus argumentandi, in proportionibus, qui dicitur diuiſio rationis. Namque ſi tota magnitudo A C, ſit proportionata ad ſuam partem B A, veluti tota D F ad ſuam partem E D.

Dicit quoq; diuiſas eandem ſeruare rationem, & adhuc eſſe, vt pars A B ad eiuſdem partem alteram B C, ita pars D E ad eiuſdem totius partem alteram E F.

Quod vt probetur aſſumendę ſunt duarum partium A B, & B C æquè inuicem multiplices, quæ erunt L M, & M N. Deinde duarum partium alterius quantitatis D E, & E F æquè multiplices inuicē, & cū *primis* O P, & P Q. Vbi conſiderandū eſt, ex prima prop. huius, quòd iſtæ multiplices partium ſimul poſitæ, vt O Q, & L N, ſunt quoque æquè multiplices totorū A C, & D F. Quo notato, rurſus accipiantur æquè multiplices partiū A B, & D E, & addantur primis ipſarum met aſſumptis multiplicibus ſimulq; poſitę ex ſecunda prop. huius erunt adhuc æquè multiplices, nimirum M N R. quantitati A B, & P Q S, quantitati D E,



Quoniam N M prima in priori ſerie ea multiplex ſecundæ A B, vt in poſteriori Q P eſt multiplex ſecundæ D E: & N R. tertia prioris ſeriei, ita eſt multiplex ſuæ ſecundæ A B, vt tertia Q S in poſteriori ſerie eſt multiplex ſuę ſecundę D E; ideo, vt ibi docetur, ſimul compoſitæ prima, tertiaque M R. erit etiam ita multiplex ſecundæ A B prioris ſeriei, & poſterioris prima cum tertia P S ſuæ ſecundæ D E.

Quo poſito. Aſſumantur pro prima combinatione totæ quantitates A C, & D F, quæ vt ſupponitur dicunt ſimilem proportionem cum ſuis partibus B A, & D E, quę pro ſecunda combinatione aſſumendæ ſunt, & ita ſit A C tota ad A B partem, vt D F tota ad D E partem; quare earum multiplices ſimul, æquantur, creſcunt ſimul, atque decreſcunt in omni multiplicatione ex 9. defin. nimirū L N & O Q totorum, & fundamentorum reſpectu M N R, & P Q S, quæ ſunt multiplices partium, & terminorum, ſed compoſitæ, vt diximus. Ablectis itaque partibus iſtis, ex quibus componuntur ab æquè multiplicibus M N hinc & P Q, inde, quæ ſunt communes, tum multiplicibus totorum, tum multiplicibus partium; cùm creſcunt, creſcent

adhuc

adhuc, cùm deficiunt, deficient quoque, cùm æquantur, ſimiliter æquabuntur remanentes multiplices hinc LM, & OP reſiduę totorum, reſpectu quantitatum ſimiliter reſiduarum partium RN, & QS. Sed hæ remanentes ſunt etiam multiplices partium. nimirum LM partis CA, & PO partis FE ex hypotheſi, in prima combinatione; At in ſecunda RN ea oſtenſ. eſt multiplex partis AB, & SQ partis ED. Ergo partes AB ad BC inuicem proportionem dicunt vt DE ad EF, ex 9. defin. cùm earum æquè multiplices ſimul creſcant, decreſcant, & æquantur iuxta quamlibet multiplicationem antecedentiũ reſpectu conſequentium.

COROLLARIVM

COllige hinc poſſe argumentari, quòd, ſi pars ad totum proportionem dicit, vt alia pars ad ſuum totum, etiã pars ad partem, vt altera pars ad alteram partem dicat proportionem, tàm rectè, quam conuerſè argumentando; nimirum ne dum rectè dicendo, vt AC ad AB, ita DF ad DE: Ergo vt AB ad BC, ita DE ad EF; ſed etiam conuerſè, ergo, vt CB ad AB ita EF ad DE.

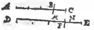
COROLLARIVM.

DEducitur ſecundò, nihil intereſſe, quod ſummantur pro prima combinatione, partes maiores, aut minores; quia æquo modo valet argumentum, vt patet. Nec quòd aſſumantur priùs maiores partes; vt totis proportionales, ex quo arguatur; quod etiam partes eædem maiores ſint reſiduis partibus proportionales, vt ſi dicatur vt AB, ad AC; ita DE ad DF. Ergo vt AB ad BC; ita DE ad EF.

THEOR. VI. PROPOS. XXI. Euc. 18.

Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales; hæ quoque compoſitæ erunt proportionales.

HÆc propoſitio demonſtrat illum modum argumentandi in proportionibus eſſe bonum, quo deducitur vt definitione 24. quòd, ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, coniũctas quoque eandem proportionem ſeruare, qui modus arguendi apellatur *Compoſitio rationis*. Si dentur itaque diuiſæ magnitudines; nimirum AB, & BC proportionales; vt ſunt DF ad FE.



Dicit compoſitas quoq; eſſe ſimili proportione correſpondentes, & totum AC, ad partem BC referri, vt totum DE ad partem FE.

Probatur. Si enim totum AC non eſt proportionatum parti ſuæ BC; vt alterum totum DE ſuæ parti FE; erit ſaltem in aliquo toto eorum aliqua pars, cui correſpondeat totum ſuum, vt parti ſuæ alterum totum refertur.

Aſſignetur itaque, & ſit in linea DE pars N *minor*; Sitque iuxta aduerſarios AC totum ad BC partem, vt DE totum ad NE partem, quò poſito ſequitur abſurdum tali modo.

Si enim eſt, vt AC totum ad BC partem, ita DE totum ad NE partem: Erit quoque diuidendo AB pars ad BC partem ex præced. vt AN pars ad NE partem: ſed ex hypotheſi, vt eſt AB pars ad BC partem; ſic quoque eſt DF pars ad FE partem: Ergo ex 16. propoſ. huius pars DN ad partem NE aſſignatam obtinebit eandem proportionem, quã pars DF ad partem FE primo poſitam: quòd earum proportiones ſint ſimiles tertię proportioni; nimirum AB ad BC. Sed antecedens DN ponitur maior, quàm antecedens DF; ergo etiam ſequens NE erit maior ſequente FE ea propoſ. 13. hoc autem abſurdum eſt, quia ponitur minor ab Aduerſarijs. Quod ſi pars EM maior ſtatuatur ipſâ FE, & velint aduerſarii, quòd ED totũ ad ME partẽ, ſit in eadẽ proportione, quâ reperitur AC totum ad BC partem, incidimus adhuc in idẽ abſurdum: Nam tunc erit minor ME, quam EF, quæ ME eſt aſſignata ab ipſis maior.

Et probatur ſimili argumento. Quoniam enim ex aduerſarijs eſt AC totum ab BC partem; ſic DE totum ad ME partem; poterimus diuidere ex antecèd. & aſſere, quòd AB pars ſit ad BC partem; ſic DM pars ad ME partem. Verum etiam pars DF eſt ad partem FE, vt pars AB ad partem BC ex hypotheſi: qua de ré DM ſimili proportione conſentiet ad ME, ac DF ad FE; quòd eorũ proportiones tertiæ proportioni, quæ militat inter AB, BC ſint ſimiles; Sed antecedens DM ponitur minor, quàm antecedens DF: Ergo etiam, & conſequens ME minor eſſet ſequente FE, & tamen maior EM ab aduerſarijs conſtituta eſt quàm EF.

COROLLARIVM I.

Collige, quòd nihil intereſt; an arguas priùs conuertendo terminos, & vtendo conuerſione, V. g. dicendo; ſi proportionem dicit AB ad ſequẽtem partem in prima combinatione BC, quam dicit DF antecedens in ſecunda combinatione ad ſuã ſequentem FE, igitur conuertendo terminos erit ſequens BC ad ſuam antecedentem AB in prima cõbinatione, vt ſequens FE ad antecedentem ſecundæ combinationis DF. Deinde ſequatur is arguendo compoſitione rationis; Ergo, & erit tota AC antecedens ad ſequentem AB ſuam partem vt eſt antecedens DE tota ad ſequentem DF ſuam partem. Imo poſſum, & adhuc contrario modo ſumere terminos, & arguere ſequentem quoque, quæ eſt pars AB ſe habere ad totam AC antecedentem, vt pars DF ſequens ad antecedentem totam DE.

COROLLARIVM II.

COllige hinc illum modum argumentandi in proportionibus cõfirmari, quo arguitur ex proportionis ſimilitudine, quam habet prior linea AB cùm ſua parte BC, comparata proportioni, quam habet tota poſterior linea DE, cum ſua parte FE, quod etiã tota prior AB ad ſuam reliquam partem AB ſimili proportione referatur, quam tota poſterior DE ad ſuam reliquam partem DF. Quod ergo iſte modus argumentandi bonus ſit.

Probatur. Nam cum tota prior, AC ſe habeat ad ſuam partem BC, vt poſterior DE tota ad ſuam partem EF, poterit quoque argumentari *diuidendo* ex 20. huius, & aſſumendo reſidua pro totis, quare reliqua pars AB, in priori linea erit ad ablatam CB; quo pacto eſt DF reliqua in poſteriori linea ad ablatam FE: Quamobrem, & poterimus conuertere propoſitionem, & é contra dicere, quod ablata CB in priori linea ad reſiduum AB eſt,

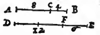
ſicut

ſicut ablata EF ad reſiduam DF. Iterumque Componendo ex propoſ. 21. huius, quòd ſicut ſe habet tota AC prior ad ſuã partẽ reſiduã AB, ita ſe habeat tota DE poſterior ad DF ſuam reſiduam partem.

THEOR. VII. PROP. XXII. Eucl. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum,, vt totum ad totum ſe habebit.

SVpra id quoque oſtenſum eſt ab Eucl. in proportione multiplici, vt quid faciliùs, licet demonſtratio ab illa nullo pacto dependeat, cùm tamen à multis antecedentibus, vel mediatè, vel immediatè dependentiam obtineat. Hic itaque generaliter oſtendit, & dilatat propoſitionem etiam ad proportiones irrationales. Si itaque reperiatur aliqua quantitas AB, quæ tota ad aliam DE ſimilis in proportione ſit, vt eius aliqua pars BC, eſt proportionata alterius parti EF. Dicit quoque reliquum AC ad reliquum DF ſimilem proportionem conſequi.



Probatur. Nam ex propoſ. 16. ſi in prima cõbinatione tota antecedens prior linea AB ad ſequentem poſteriorem totam DE, vt pars à priori linea BC antecedens in ſecunda combinatione ad ſequentem EF partem ablatam alterius poſterioris, licebit permutare terminos; & affirmare ex propoſ. 19. *permutando*; Antecedentem quoque totam AB ad antecedentem BC, quæ eſt ſua ablata pars, dicere eam proportionem, quam ſequens tota DE dicit ad ſequentem EF, quæ eſt ſua à ſe ablata pars. Iterumque ex propoſ. 20. poterimus arguere *diuidendo*, & dicere; Quod ſi eandem proportionẽ, quam dicit tota antecedens AB, in priori linea ad antecedentem BC, quę eſt ablata ſibi pars, dicit quoque tota ſequens DE in poſteriori linea ad ablatam ſui partem EF; Quod etiam reliqua pars AC prioris lineæ ad BC reſiduum in eadem proportione ſint; quam poſterior DF ad poſteriorem FE dicebat: Quare rurſus *permutando* erit, vt AC fundamentum ad DF fundamentum, vt terminus BC ad terminum FE: hoc eſt, vt tota AB ad totam DE, quæ ex hypoth. vt BC ad EF comparatur.

COROLLARIVM

HInc apparet propoſitionem 13. eſſe intelligendam vniuerſaliter; cùm vniuerſaliter ſit verum, quòd, ſi ſit totum ad totum, vt ablatum ad ablatum; etiam reliquum ad reliquum, ita erit vt totum ad totum; & ideo, quòd, cum ſit AC maior, quam EG, quod etiam ſit reſiduum BC maius quam FG adhibita figur. propoſ. illius.

THEOR. VIII. PROPOS. XXIII. Euc. 22.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero; quæ binæ in eadem ratione ſumantur; etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonſtrauit ſuperius Euclides in propoſ. 14. quòd binæ ſumptæ in eadem ratione quantitates eſſent, vel æquales, vel minores, vel maiores alijs quantitatibus ſumptis, vt binæ pariter ſecundum proportionem ſimilem ad primas: nunc demonſtrat eſſe etiam proportionales, ex quo deſumitur modus argumẽtandi ex Æqualitate vocatus.

Sint itaque magnitudines ABC, & alię tres DEF. Sitque prima, & antecedens A ad ſuam ſecundam, & ſequentem B, in priori ternario, vt in poſteriori prima D, & antecedens eſt ad ſecundam, & ſequentem E. Sit quoque B modo, vt antecedens poſita ad tertiam C ſuam ſequentem in priori ternario, vt in poſteriori ſecunda E ſumpta, vt antecedens, eſt ad tertiam F ſequentem ſuam. Dicit ex *æqualitate primã* A *ad tertiam* C in priori ternario *ita referri*, vt in poſteriori *prima* D *ad tertiam* F intermiſſis medijs terminis B, & E.

Quod, vt oſtendatur, accipit ſingulis quantitatibus prioris ternarij ſingulas lineas L, M, N, quarum quęlibet, ita multiplex ſuæ cuique lineæ aſſumantur, vt aſſumuntur in poſteriori ternario multiplices O, P, Q, correſpondentibus lineis; Lineæ itaque L, & O ſint æquè multiplices primarum A, & D, V. g. duplæ: M verò, & P ſint æquæ multiplices ſecundarum B, & E, V. g. triplæ: N Q tandem ſint æquè multiplices tertiarum V. g. quadruplæ.



Probatur. Nam tum in priori, tum in poſteriori ternario primarũ multiplices L, O, relatæ ad tertiarum multiplices N, & Q creſcunt decreſcunt pariter ad quã cumque multiplicationem, vel etiam eis æquãtur. Ergo primæ A, & D quibus ſunt multiplices ex 9. definitione in eadem proportione erunt reſpectu tertiarum C, & F.

Remanet antea probanda. Probatur autem ex 14. propoſitione huius. Nam multiplices binæ in eadem proportione ſumuntur, ita, vt in priori ternario multiplicium, ita reſpiciat prima multiplex L ſecundam ſuam M, ſicut in poſteriori multiplicium ternario prima multiplex O, reſpicit ſuã multiplicẽ P, & idẽ dicas de ſecunda multiplici M relata ad multiplicem tertiã N, quæ ita ſe habet ad eam, vt in poſteriori ternario multiplicium ſecunda P ad ſuam tertiam Q comparata.

Ratio huius ex propoſ. 4. huius deſumitur. Quòd multiplices antecedentes ad ſequentes ſuas eam habeant proportionem, quam habent ſimplices antecedentes, quibus multiplices ſunt ad ſuas ſequentes ſimplices. Quare, cùm antecedens A ad ſequentem B in priori ſimplicium linearum ter-

nario ſit,vt in poſteriori antecedens D ad ſequentem E ex hypotheſi, ſequitur, vt tali quoque proportionis ſimilitudine afficiantur earum multiplices ita, vt ſit L ad M, vt O ad P. Rurſus cum pariter ex hypotheſi B ad C prioris ternarij ſit, vt E ad F; quod earum multiplices quoque in proportione ſimilitudinem dicant ita, vt ſit M ad N, vt P ad Q. Cum itaque ita ſit L ad M, vt O ad P; & M ad N, vt P ad Q erit perpetuus nexus, & ſimultas ex propoſ. 14. huius L, & O in cremento decremento, & æquatione reſpectu extremarum N, & Q. Quare ex defin. 9. ſimplices eandem dicent proportionem, & A erit ad C, vt D ad F.

COROLLARIVM I.

QVòd ſi ſint, ſeu maiores, ſeu minores eodem pacto probatur V.g. ponamus in priori ternario adeſſe X, quæ ſe habeat ad A, vt in poſteriori Z ad D, erit quoque ex eodem argumento X ſumpta vt prima ad B quæ tunc erit tertia, vt in poſteriori Z prima habet ad E, quæ tunc erit tertia, & eodem modo de alijs quibuſcumque, vel antecedentibus, vel ſequentibus oſtendetur.

COROLLARIVM II.

COlligitur ſecundo eſſe bonum illum modum arguendi, quo deducitur; quòd ex eo, quia proportionem ſimilem habeant B ad C, vt E ad F, quod etiam ſimilem proportionem linea B ad lineam pũctatam ipsâ C quadruplo, vel vt libet maiorem habebit, ac altera D ad lineam punctatam, quadruplo, vel vt libet æquè maiorem, Maiores enim iſtæ, cùm ſint in proportione multiplici eâdem, poſſunt ſumi, vt tertiæ; vnde ex æqualitatis argumentatione licebit inferre earum proportionem, cùm primis, & dicere; ex eo, quod C ſit ad B, vt F ad E, multiplicem quoque C eſſe ad B, vt multiplex ipſius F ad E.

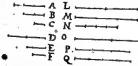
THEOR. IX. PROP. XXIV. Eucl. 23.

Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eâdem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonſtratur hic argumentationem ex æqualitate eſſe bonam, etiamſi proportio fuerit perturbata: Sit ergo ternarium prius linearum A B C, & aliud poſterius D E F, in quorum priori proportio primæ A ad ſecundam B aſſimiletur proportioni, quam habet ſecunda E in poſteriori ternario ad tertiam F, at quàm proportionem habet prima D huius poſterioris ternarij ad ſecundam ſuam E; habeat quoque ſecunda B prioris ternarij ad tertiam C. Dicit; *quòd prima* A *ita proportione refertur ad tertiam* C *in priori ternario; ſicut in poſteriori prima* D *ad tertiam* F *refertur.*

Quòd vt probet, aſſumit æquè multiplices in ſingulis ternarijs ita, vt primæ A, & D æquè multiplices habeant L, & O, V.g. duplas; ſecundæ verò B, & E æquè multiplices obtineant V.g. triplas M, & P: At tertiæ C, & F æquè multiplices naneiſcantur N, & Q, V.g. quadruplas.

Probatur ternarium multiplicium cum alio multiplicium ternario in ratione perturbata conuenit; ita vt prioris prima L ad ſecundam M referatur ſimiliter, ac in ſecunda P ad tertiam Q in poſteriori ternario: huius vero prima O ad ſecundam P referatur, vt in priori ſecunda M ad tertiã N.



Sed iam probatum eſt 15. propoſ. huius, quòd in ratione perturbata primæ V.g. O, & L creſcunt decreſcunt æquantur ſimul, & vnâ in qualibet multiplicatione & reſpectu quantitatum N, & Q, inuicem in creſcendo, & decreſcendo, vel ſe æquando ſemper indiuiſibiles comites eodem modo ſe gerunt.

Ergo lineæ ſimplices nimirum A prima dicet eam proportionem cum tertia C in priori ternario; qualem dicit prima D ad vltimam F in poſteriori.

Probandum remanet itaque, quod multiplices tum huius, tum alterius ternarij in ratione perturbata conueniant, ex propoſ. 18. quia partes cum pariter multiplicibus in eâdem ratione ſunt, ſi ſumantur prout inuicem reſpondent: Cum igitur ſimplices ſint partes multiplicium, quòd earum partibus ſint æquales, patet, quòd ſi ſimplices in ratione perturbata ſibi correſpondent, eodem pacto, & multiplices ſibi correſpondebunt in eadem ratione perturbata: Vnde ita L erit ad M, ſicut P ad Q, & O ad P, vt M ad N.

THEOR. X. PROPOS. XXV. Euc. 24.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: habuerit autem, & quinta, ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

QVod demonſtratum eſt 2. propoſ. de proportione multiplici, modò hic de omni proportione etiam irrationali oſtenditur.

Si ſint tres magnitudines in priori ternario, quarum prima A ad mediam B eam dicat rationem, quam in poſteriori prima D ad ſecundam E, & rurſus ad has medias nimirum ad B in priori ternario tertia C eam proportionem dicat, quam in poſteriori tertia F ad mediam E habet: Affirmat *compoſitas quoque primam* A. *& tertiam* C, quod in pũctatis expreſſum eſt prioris ternarij ſimili proportione reſpicere B, ſicut compoſitas primam D & tertiam F poſterioris ternarij ipſam E.

Probatur itaque obſeruando priùs; quòd cùm tertia dicat proportionem ad ſecundam tum in vno, tùm in alio ternario ex hypotheſi, *conuersè* arguendo etiam media in quolibet eorũ erit proportionalis tertiæ, ita vt B ſit ad C eodem modo;

ac

c ѕ eſt ad F : quia ex hypotheſi C eſt ad B, quemadmodum E eſt ad F.



Quo ſuppoſito, iam poſſumus arguere ex ęqualitate ſecundùm documenta propoſ. 23. quia habemus binas in vnoquoque ternario, tum priori, tum poſteriori ſibi proportione ſimili reſpondentes; namque ita eſt A ad B in priori ternario, vt D eſt ad E in poſteriori, & ita B eſt ad C in priori, ſicut E eſt ad F in poſteriori.

Ergo ex *æqualitate*, ita prima A in priori ternario proportionabitur ad tertiam C, vt in poſteriori prima D proportionatur tertiæ F. Et iam poteris arguere *componendo* ex documentis prop. 21. & addendo A primæ linea C, quod per punctatam exprimitur, dicere quod tota AP nimirum continua, & C punctata ad C dicat ſimilem proportionem; vt dicit tota DQ nimirū continua cum F punctata ad F.

At ad hoc, vt tandem deueniamus ad concluſionem oportet conſtituere aliam argumentationem ex æqualitate. Iam enim habemus ex dictis vſque adhuc A primam cum C punctata s. AP proportionatam ad C ſicut prima D Q proportionatur ad F; Sed ex hypotheſi quoque C eſt ad B proportionata, vt eſt F ad E. Ergo ita erit ex æqualitate tota AP, nimirum continua AC cum CP punctata ad B, vt eſt proportionata tota DQ, nimirum continua DF cum FQ punctata ad E.

COROLLARIVM

Colligit hic Clauius; quod hoc modo argumentandi, quo vſi ſumus poſſe, & demonſtrari, id quod oſtenſum eſt propoſ. 6. de proportione multiplici conuenire omni proportioni. Nimirum, quod ſi duæ magnitudines ad duas eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habent ad eaſdem eandem proportionem, & reliquas, quę remanent, ad eaſdem eandem proportionem habituras. Nam poſitâ eadem figurâ aſſumea pro prima prioris ternarij totam AC cum punctata CP, & pro poſterioris ternarij prima DF cū punctata FQ. Si ergo auferatur C, & F, & ponantur rurſus pro tertijs, ita quod ad ſecūdas ſuas B, & E eam habeant proportionem, quam habebant, quando erant coniunctæ. Reliquę AC, & DF ad eaſdem ſecundas B, & E eam proportionem habebunt, quam priùs habebant integræ ad B, & E. Pr. Nam C eſt ad B, vt F, ad E; Ergo conuertendo, vt fecimus priùs, B erit ad C, vt E ad F. Quare ex æqualitate tota ACP erit ad C, vt tota DFQ eſt ad F; Erga diuidendo ita eſt AC ad C; vt DF ad F; Et quia ex hypotheſi itá eſt C ad B, vt F ad E; Ideo AC, & DF poterunt poni pro primis C, & F pro medijs, & B, & E pro tertijs, & ex æquali argumentari, ita eſſe AC ad B, vt DF ad E, quod eſt propoſitum.

TRACTATVS X.

IN VI. LIBRVM EVCLIDIS

De proportione quantitatis continuæ.

VIſis proportionibus genericis ad particulares deſcendimus iuxta diuerſitatem materiæ, quibus præcipuè applicantur; Nam alia eſt proportio numerorum, alia eſt quantitatis continuæ; Quantitatis verò continuæ duplex eſt, alia rationalis, alia irrationalis. Modò verò agimus de quantitatis continuæ proportione prout præſcindit ab irrationali, ſeu rationali.

EXPENSIO I.

De principijs huic tractatui ſpectantibus.

PRincipia, quæ huic expenſioni maximè deſeruiunt ſunt definitiones quædam figurarum, quę proportiones fundant.

DEFINITIO I.

SImiles figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales proportionalia.



Figuræ illæ ſimiles dicuntur, quæ angulos æquales habent, vt ſunt B niger angulo A, & D angulo E, & C angulo B albo, & latera proportionalia circa æquales angulos; ita vt ſit trianguli nigri crus C D ad alterum B D eiuſdem; Veluti crus B E albi ad crus A E eiuſdem, quæ complectuntur angulum E album æqualem angulo D nigro, quem crura prædicta DC, & B D complectuntur, & ſic de alijs cruribus. Quapropter quadratum, & figura altera parte longior non ſunt ſimiles figuræ; quia latera quadrati habent circa quemlibet angulum rectum proportionē æqualitatis; at figuræ altera parte longioris proportionem inęqualitatis, licet alioquin, tum vnius, tum alterius figuræ, anguli ſint æquales, vtpote recti. Vnde etiam conſtat omnes figuras, quæ rectilineæ ſunt, æquilateræ, & æquiangulæ, & numero eodem, tum laterum, tum angulorum conſtant, eſſe inter ſe ſimiles, licet maximè ſint inæquales.

DEFINITIO II.

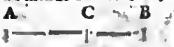
REciprocæ figuræ ſunt, cùm in vtraque figura antecedentes, & conſequentes rationum termini ſunt,

Ideſt, cùm in prima figura fuerit fundamentum proportionis, & in ſecunda terminus proportionis eiuſdem: in eadem verò ſecundâ fundamentum reperiatur alterius proportionis correſpondentis, & huius terminus in primâ, ita vt duarum proportionum ſimilium nulla ſit tota in vnica figura; ſed fundamentum ſit in vna terminus in alia; hæ dicuntur figuræ reciprocæ. Sic in fig. præced. ſi ſit A E ad A D, vt B C ad B A dicerentur illa duo triangula figuræ reciprocę, quia AE eſt fundamentum vnius proportionis, & B A terminus alterius in triangulo albo, ſic & B D eſt terminus primæ proportionis, & B C fundamentum ſecundę proportionis in triangulo nigro.

DEFINITIO III.

SEcundùm extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cùm vt tota ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum fuerit ad minus.

Si linea data A B, ita diuidatur in C, vt correſpondeat eadem proportione ſimili tota ad maius ſegmentum A C, vt idem maius ſegmentum A C ad minus C B refertur; tunc dicitur ſecta in C extrema, & mediâ ratione.



DEFINITIO IV.

ALtitudo cuiuslibet figuræ eſt, perpendicularis à vertice ad baſim deducta.

Ptolomæus in libro de Analemmate inquit. Menſuram debere eſſe certam, & determinatam. Propterea, cùm omnes rectæ lineæ; quę à vertice alicuius figuræ ducuntur incertæ ſint, & indeterminatæ, meritò ſola perpendicularis rationem menſuræ ſibi vendicat, & altitudinem cuiuslibet figuræ metitur; ſic figuræ Q C A P altitudo eſt P C cadens in latus QA. Poteſt tamen quodlibet aliud latus conſtitui pro baſi, & linea perpendicularis à remotiori angulo deducta (acumen enim illius



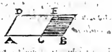
an-

anguli, vertex eſt) dicitur altitudo figuræ illius, ſic V A in latus C Q demiſſa erit altitudo quoque figuræ. Nota definitionẽ de compoſitione Rationum, quam ponit hic Euclides eſſe ſupra explicatam Tract. 9. Exp. 5. Def. 7. part. 1.

DEFINITIO V.

Parallelogrammum ſecundum aliquam rectam lineam applicatum deficere dicitur parallelogrammo; quando non occupat totam lineam, Excedere verò quando occupat maiorem lineam, quam ſit ea ſecundum quam applicatur; ita tamen, vt parallelogrammum, quod deficit, vel excedit illi applicato eandem habeat altitudinem, quam ipſum parallelogrammum applicatum; & conſtituat cum eo totum vnum parallelogrammum.

Sit data recta linea A B, ſuper quam conſtituatur parallelogrammum A C D E, cuius latus A C totam longitudinem lineæ A B non æquet, ſed deſit C B; tunc parallelogrammum A E erit deficiens,



& ſi interrogetur, quo defectu? hic defectus erit parallelogrammum E B nigrum occupans reliquũ lineæ C B, & eandem altitudinem cum deficiente A E obtinens, & cum eo parallelogrammum vnicum, vt D B conſtituens. Deinde ſit linea A C, & ei applicetur parallelogrãmũ maius B D. quod ipsã excedat latere A B in parte C B; tunc parallelogrammum erit abundans, aut excedens; Exceſſus autem erit parallelogrammum nigrum E B habens eandem altitudinem, cum prædicto B D. & cum eo idem parallelogrammum conſtituens D B.

DEFINITIO VI.

Homologæ ſunt quantitates, cum, vna, fundamenta, & antecedentia proportionem, altera terminos continet, vel conſequentia.

Cum itaque aliqua quantitas habet in ſe fundamenta, & antecedentia rationum; alia terminos correſpondentes, illæ quantitates dicentur homologæ.

V. g. in fig. def. 1. Si ſit crus A B albi ad crus B C alterius nigri, vt A E albi ad B D nigri; dicuntur triangula figuræ homologæ, cum fundamenta ambo A B, & A E ſint in albo, termini B C, & B D ambo in nigro.

EXPENSIO II.

De proportione laterum triangulorum.

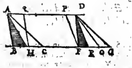
Cvm triangula principium figurarum ſint, & ea ex quibus figuræ reliquæ conſtituuntur: Hinc eſt, quòd in primis de proportione laterum agatur, quæ ea ambiunt, atque conſtituunt.

THEOR. I. PROPOS. I. Eucl.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes.

Cvm triangula, & parallelogramma ex def. 4. habeant altitudinem eandem, cum fuerint conſtituta inter eaſdem parallelas, ob eandem perpendicularem, quam conſequuntur. Conſtituantur primo duo triangula nigra inter parallelas A D, & B G. Dicit, quòd hæc triangula proportionem ſimilem ad inuicem poſſident, quam baſes & C. Quod vt probetur in parallela, quã baſes inſunt, aſſumendæ ſunt baſibus æquales, nimirum baſi B H trianguli B H A vna æqualis, quæ ſit H C, coniungendæque ſunt C & A, fietque triangulum H A C æquale triangulo nigro ſibi contermino ex 1. Coroll. propoſ. 39. primi.

Rurſuſque alteri baſi F R trianguli nigri aſſumendæ ſunt æquales; V. g. duæ R O, & O G, coniungendæque ſunt rectis O D, & D G; facientq; triangula R O D, & O D G ex Coroll. 2. prop. 40. primi æqualia nigro F D R.



Probatur. Baſes triangulorum alborum æquales ſunt baſibus nigrorum triangulorum; ipſaq; triangula ſuis triangulis conterminia probata ſunt ex Coroll. 1. propoſ. 40. primi æqualia: Ergo ſunt æquè multiplicia baſia, & triangulum album baſi ſuæ contermine, & nigro triangulo B A H pro priori pari. Sicut triangula duo, duæq; eorum baſes R O, & O G ſunt æquè multiplices eiuſdem baſis F R, & trianguli nigri F D R pro ſecundo pari: nimirum baſes quidem baſibus multiplices, ſicut triangula triangulis.

Cum ergo in quacunque multiplicatione baſis B H, & trianguli B A H æquè multiplices in primo pari creſcant, vel decreſcant, vel æquentur pariter relatæ ad æquè inuicem multiplices baſia F R, & trianguli nigri F D R in ſecundo pari; dicendum eſt ex defin. 9. tract. 9. triangulum nigrum B A H ad nigrum F D R eam habere proportionem, quam habet baſis B H ad baſim F R, & ideo, quòd baſium ad baſes, & triangulorum ad triangula ſit proportio ſimilis.

Probatur quoque de parallelogrãmis. Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione ex 18. lib. 5. Sed triangula ſunt dimidia parallelogrammorum ex propoſ. 39. primi: Ergo cum triangulis in eadem ſunt ratione; Sed triangula in eadem ſunt ratione, vt baſes; Ergo, & parallelogramma. Et erit parallelogrammum B Q ad parallelogrammum R E, vt baſis B H ad baſim F R.

COROLLARIVM

Colligitur ex Commandino; quòd, ſi triangula habeant æqualem, vel eandem baſim ſe habere ad inuicem, vt altitudines, V. g. triangulum C D L nigrum, & triangulum E M F nigrum erunt inuicem, vt altitudines, nempe perpendiculares

lares punctatæ BD, & HF; Namque, ſi trahatur EH, & CB erunt triãgula punctata CBD, & HEF, vt altitudines BD, & HF pro baſibus vſurpatę, ſiquidem erunt inter parallelas AC, & DB, & inter FH, & AG:



Sed triangula punctata ſunt æqualia nigris ex prop 39. 1. Coroll. vtpote inter eaſdem parallelas, & ſuper eandẽ baſim conſtituta: Ergo nigra triangula in eadem proportione ſunt, ac altitudines, & vt altitudo BD ad altitudinem FH, ſic CDL ad EMF; quòd & dicendum eſt de parallelogrammis, cùm ſint dupla triangulorum, prout in probatione propoſitionis dictum eſt.

THEOR. II. PROPOS. II. Eucl. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera; & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones iuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

ASſerit; quòd, ſi in aliquo triangulo, vt in triangulo ABC ducatur parallela ad aliquod laterum V.g. DE, *hæc proportionaliter ſecabit crura reliqua* AB, *&* AC, & hoc pro prima parte.

Ad quod demonſtrandum ducit lineas DC, & EB punctatas, quæ faciunt duo triangula minora ſuper eandem baſim DE conſtituta, & inter parallelas BC, & DE, nimirum triangulum DEB, & aliud DEC, quæ ex propoſ 39. 1 Cor. 1. erunt æqualia.

Probatur triangulum nigrum eſt ad punctatum DAE, vt baſis AD ad baſim DB.



Rurſus idem triangulum nigrum eſt ad aliud punctatum DEC in eadem proportione veluti eſt baſis AE, ad baſim EC ex prop. 1. huius.

Sed, vt triangulum nigrum ſe habet ad vnum ex triangulis punctatis V. g. BDE, ita ſe habet ad aliud DEC, ex propoſ. 7. quinti, cum vt dictum eſt hæc triangula ſint æqualia: Ergo vt ſe habet baſis trianguli nigri DA ad baſim punctati DB; ita ſe habet eiuſdem trianguli baſis AE ad baſim punctati EC. Quare crus AB eſt ſectum proportionaliter in D eã proportione, quã ſectum eſt crus AC proportionaliter in E.

Secunda verò pars conuertit priorem, & dicit, quod ſi trianguli latera ABC ſecta fuerint proportionaliter in D, & E *linea, quæ puncta coniungit erit parallela.*

Probatur verò ex eò, quòd triangula DEC, & DEB ſint æqualia; Ergo ex Coroll. 1. propoſ 39. primi inter eaſdem parallelas DE, & BC ſunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem triangulo nigro ſunt proportionalia. Sunt etiam proportionalia eidem nigro ex prima huius propoſ. quia habent baſes eiuſdẽ nigri, baſibus ſimiliter proportionales, & eſt DA ad DB, vt AE ad EC ex hyp. & inſuper ſunt inter eaſdem parallelas AB, & PE, & inter AC, & DQ; ſiquidem cum deſinant in eundem verticem; etiam inter parallelas eaſdem erunt. Ergo vt baſis DA ad baſim DB; ſic triangulum nigrum ad triangulum BDE: & vt AE ad EC baſes; ſic triangulum nigrum ad triangulum DEC: Ergo alibi DEC, & EDB erunt inuicem æquales ex 9. quinti. Quare ex Coroll. 1. propoſ. 39. erunt inter parallelas.

THOR. III. PROPOS. III. Eucl. 3.

Si trianguli angulus bifariam ſectus fuerit; ſecans autem angulum recta linea ſecuerit, & baſim; baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera.

Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad ſectionem deducitur, bifariam ſecat ipſum angulum.

SIt triangulum ADC; diuidaturque aliquis angulus eius V.g. A bifariam per rectam AE, affirmat primò, *quod hæc in B puncto ſecat baſim* DC *in duas portiones, quæ inuicem ita proportionatæ ſunt, vt ſunt connexa ſibi crura*, V.g. ita eſt DB ad BC, vt DA ad AC. Quòd, vt probet, ad AB à puncto D ducit parallelam DH; deinde prolungat latus AC vſque quo coeat in H. Probat autem coituras has lineas, quia anguli niger, albuſque ſimul ad D, æqualis angulo B nigro ob parallelas ex prop. 30. & niger ad C ex Coroll. 6. prop. 17. ſunt minores duobus rectis, (vt in omni triangulo euenit) deberent verò eſſe æquales ex propoſ. 29. ad hoc, vt DH, & HC eſſent parallelę, & ideo non poſſent coire.



Ad hoc autem, vt propoſitio immediatè probetur, probandũ eſt priùs, quòd crura DA, & AH ſint inuicem æqualia.

Id oſtenditur ex æqualitate angulorum. Nam, cùm crus DA incidat in parallelas DH, & AB, faciet angulos alternos ęquales; nimirum nigrũ ad D, & album cruce ſignatũ ad A ex propoſ. 30. primi. Rurſuſque cùm crus HA incidat in eaſdem parallelas HD, & BA faciet angulum externum nigrum ad A oppoſito, & interno H æqualem ex propoſ. 30. primi. Sed angulus niger, & cruce notatus ex hypotheſi facti ſunt æquales; Ergo, & angulus H, & D niger erunt æquales. Quare ex propoſ. 15. primi latera hos angulos æquales ſubtendentis erunt æqualia; Quo ſuppoſito probatur propoſitio.

Eam proportionem, quam habet portio AH ad AC eandem habet, cum ſit crus ei æquale, DA ad AC ex propoſ. 7. quinti. Sed pars baſis DB, vtpote inter parallelas DH, & AB intercepta, parti alteri BC ſimili proportione refertur, quã HA ad AC ex 2. huius propoſitione. Ergo BD ad CB dicit etiam ſimilem proportionẽ, quam dicit crus DA ad AC.

Se-

Secunda pars eſt appoſita primæ, dicitque è contrariò, quòd ſi baſis ſecta ſit in partes proportionales eâ proportione, quam latera inter ſe habent, *quòd angulus* A *ſectus erit biſariam*, ſuppoſitaque praxi antecedenti trahendi parallelam HD, & prolungandi latus AH, ita probat. Angulus ad A cruce ſignatus eſt ęqualis angulo alterno nigro ad D, alterq; niger ad A eſt æqualis angulo H externus interno ex prop. 30, Sed iſti nigri D, & H ſunt inuicem æquales: Ergo, & angulus cruce ſignatus; & niger ad A ſunt inuicem æquales; Quare angulus ad A trianguli D A C propoſiti ſectus eſt biſariam. Angulus autem H, (quòd probandum eſt) æqualis inuenitur angulo nigro ad D ex 14. prop. primi; Quia latera ijs ſubtenſa DA, & AH æqualia ſunt. Sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem AC eandem dicunt rationem: Eandem verò dicunt rationem ad AC ex 11. quinti: quia dicunt eandem rationem ad AC, quam pars baſis D B ad partem B C. & linea D A quidem ex hypoteſi, HA vero ex 2. huius, quod ſit inter parallelas, vt pars D B; parallelæ enim ſunt ex conſtructione D H, & A B.

THEOR. IV. PROPOS. IV. Euc. 4.

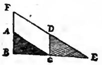
Æquiangulorum triangulorum, proportionalia ſunt latera; quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

AD probandam hanc propoſitionem aliqua priùs in ipſo probationis apparatu, & praxi præſupponenda ſunt, & etiam probanda. Itaq; ſi dētur duo triãgula nigrũ nigriuſq; quę habeant angulos correſpondentes æquales V. g. angulũ ad A nigerrimum angulo ad D nigro, angulum ad C nigerrimum angulo nigro E angulum verò nigerrimum B angulo nigro ad C. Dicit, quòd *crura, quæ claudunt æquales angulos, ſint inuicem proportionalia*, pro prima parte propoſitionis: nimirum dicere V. g. crus B C ad A C ſimilem proportionem, quam dicit quoque C E ad E O; quoniam claudunt æquales angulos nigerrimum ad C & nigrum E, & ſic dicas de alijs. Quod, vt oſtendatur ponenda ſunt duo triangula ſuper vnam rectam BE, & prolunganda ſunt latera BA, & DE ad hoc, vt fiat triangulum maius B F E: namque ſupponit neceſſariò conuenire in F, eo quòd præſupponat angulum B, & angulum E ambos non poſſe eſſe rectos, & conſequenter ex propoſ. 29. primi non poſſe eſſe parallela prolungata crura BF, & EF. Anguli verò illi recti ambo eſſe nequeunt: quia cuiuſcunque trianguli duo anguli ſunt duobus rectis minores; ſi autem B ponatur rectus nigerrimus ad C erit minor recto, & conſequenter angulus ei æqualis E.

Sed antequam probetur propoſitio probandum eſt primò quoque, rectas BF, & C D eſſe parallelas. Id verò oſtendetur. Si conſideretur B C, quæ incidit in eas, & facit angulum DCE nigrum externum angulo ad B nigerrimo interno, & ad eaſdem partes, vt ex hypoteſi conſtat, æqualem; Quare ex probatis 29. primi BF, & CD parallelæ ſunt; cùm incidens in eas B E faciat angulum externum interno, & eaſdem partes æqualem.

Probandum quoque eſt ſecundo lineas A C, & F E eſſe parallelas ob eandem prorſus cauſam. Nam eadem linea B E incidens in eas in punctis C, & E facit angulum ACB nigerrimum nigro E æqualem, vt ex hypotheſi conſtat: Vnde ſpatium illud album F AD C erit parallelogrammum, vtpote parallelis contentum. Quare, & latera correſpondentia FD, & AC erunt æqualia ex 34. propoſ. primi, necnon, & latera FA, & DC.

Progreſ. 1. Probatur propoſitio lineæ FB, & DC parallelæ ſunt. Ergo ex 2. propoſ. huius ob antecedens ad D F ſequentem, vt C E antecedens ad B C ſequentem proportione referuntur. Quare *permutando*, vt ex 19. propoſ. quinti, vel ex



def. 16. ipſa crura triãguli nigri, quę fecimus antecedentia erunt ad inuicem, vt partes F D, & B C quas poſuimus tanquam conſequentes, & erit DE ad CE, vt FD ad BC: Sed pars F D æquatur ex prædictis cruri AC: Ergo crus DE erit ad crus C E nigri trianguli, vt crus A C cruri B C nigerrimi. ambientia angulos æquales E nigrum, & C nigerrimum.

Progreſ. 2. Idem eodem argumento probabitur de cruribus AB, & BC, quæ inuicem eâ proportione conſentiant, quâ CD, & CE. Nam A C eſt parallela ipſi FE: Quare portio cruris CE, vt antecedens ita reſpondebit proportione ad aliam B C ſequentem, vt AF pars alterius cruris, vt antecedens ad aliam partem B A ſequentem. Quare *permutando*, ita erunt antecedētes inuicem CE ad AF, vt ſequentes inuicem B C ad B A: ſed AF eſt ęqualis cruri C D: Ergo C B ea proportione reſpicit CD. quâ BC reſpicit B A. Etiam de cruribus angulos æquales C nigrum, & B nigerrimum ambientibus propoſ. oſtenſa eſt; probatur tandem de cruribus æquales angulos D, & A ambientibus. Vtendo argumento ex *æqualitate*, quod docet 23. propoſ quinti.

Progreſ. 3. Nam iam habes primam quantitatem cruris D E habere ad ſecundam CE eam proportionem in priori triangulo nigro, quam habet prima quantitas BA ad ſecundam B C in ſecundo triangulo nigerrimo ex primo progreſſu. Et ex ſecundo, quòd ſecunda quantitas primi nigri triãguli CE reſpicit D C tertiam ea proportione, qua ſecundi nigerrimi, trianguli quantitas lineæ C B reſpicit tertiam BA. Ergo ex æqualitatis argumento prima cruris quantitas nigri DE, ita refertur ad tertiam DC, vt trianguli nigrioris ſecundi quantitas AC relationem dicit ad A B.

Secunda verò pars patet ex definitione 6. homologarum quantitatum; nempe ſimilium, ſimiles enim quantitates dicuntur illæ, quæ geminæ in aliqua quantitate poſſunt ſummi; vt antecedentes, vel vt conſequentes. Hoc autem habent latera triangulorum æquiangulorum, cum æqualibus angulis ſubtenduntur. Nam, vt potes conſiderare in proceſſu probationis, latera, quæ vt antecedentia ſumpta, vel conſequentia ſunt, fuere ſemper ea, quæ æqualibus angulis ſubtenſa fuere, & ideo crus A C eſt ſimile cruri D E; quia conſiderata fuerunt, vt antecedentia; nempe, vt fundamenta proportionis, quę angulis æqualibus

ad C

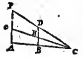
ad C nigro,& A ſubtenduntur. Sic CA, & BC ſunt ſimilia, homologa; quia vt ſequentia poſſunt aſſumi; nempe, vt termini proportionis, ſunt autem ſubtenſa angulis A, & D æqualibus, & ita de alijs duobus DC, & AB.

COROLLARIVM I.

Hinc fit. Lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo ſimile. Nam in triangulo EBF, Cùm lineæ FB, & DC parallelæ ſint, incidens in eas recta FB faciet angulum nigrum externum D interno F, & ad eaſdem partes ex 30. 1. æqualem. Rurſus incidens AE idem præſtabit faciendo angulum externum C nigrum æqualem interno B, & ad eaſdem partes; angulus verò E eſt communis. Ergo erit æquiangula pars nigra CDE toti triangulo FBE. Quare habebit latera æquales angulos ambientia proportionalia, & proinde ex def. 1. huius ſimilia erunt triangula.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoque: Quod ſi baſi V. g. AP parallela AD agatur, & ab angulo C, cui ſubtenſa eſt, V. g. recta ad baſim ducatur, quæ parallelam diuidat, & baſim; eas diuidere in partes proportionales, eſſeque DH ad HB, vt PO ad OA. Nam ex præcedenti Coroll. triangulum totum CAP, & triangulum eius pars DBC ſunt ſimilia. Rurſuſque triangula OPC, & pars eius DHC. Et ſic triangula HBC, & OAC ſimilia ſunt. Itaque ea proportione reſpiciet CD crus CP, qua DH refertur ad PO. Rurſuſque eadem CD ad eandem CP referetur, vt BD ad PA Itaque ex 16. lib. 5. erit DH ad PO, velut DB ad PA. Quamobrem *permutando* fundamentum, & pars DH reſpiciet fundamentum, & totum DB, vt terminus, & pars PO reſpicit terminum, & totum PA. Quare diuidendo eãdem proportionem dicet pars DH ad partem HB, vt pars PO, ad partem OA.



THEOR. V. PROPOS. V. Eucl. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula quoque erunt, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

Sit triangulum ABC primum. Aliudque DHE nigrum, cuius latera ſint lateribus primi proportionalia, ideſt ſit DH ad DE, vt BA ad AC V. g. comprehendant duas tertias partes, quorumlibet correſpondentium. Dicit, quod hoc triangulum nigrum erit primo æquiangulum.

Quòd, vt probet facit triangulum punctatum



DEK triangulo primo æquiangulum BAC.

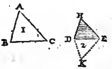
Probatur. Nam crus AB ex 4. huius dicit eam proportionem ad baſim BC primi trianguli vt crus punctatum DK ad ſuam baſim DE.

Sed ad eandem baſim dicit quoque ex hypotheſi eam proportionem, quam BA ad BC crus DH trianguli nigri. Ergo æqualia erunt hæc crura DH, & DK ex 9. quinti. Eodem modo argumentum procedet de crure punctato EK, quod erit æquale cruri HE trianguli nigri; quia dicunt eandem proportionem ad ſuam baſim DE, quam crus CA primi trianguli ad baſim ſuam BC. Ergo ex 8. prop. primi angulus K angulo H eſt æqualis; ſiquidem baſis eſt communis, & crura correſpondentia æqualia. Quare, & anguli ad baſim correſpondentes erunt æquales nimirum niger, & albus ad D, & niger, & albus ad E. Sed anguli trianguli punctati ex conſtructione ſunt æquales angulis primi trianguli BAC: nimirum angulus D albus angulo B. Ergo, & angulus correſpondẽs niger D. Item angulus E albus angulo C: Ergo & correſpondens niger E eidem erit æqualis. Et tandem K angulo A quare, & angulus H niger eidem A erit æqualis vnde triangulũ DHE nigrum angulos primo BAC eos æquos habet, qui homologis cruribus inſunt.

THEOR. VI. PROPOS. VI. Eucl. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, æqualeſque angulos habebunt ſub quibus homologa latera ſubtenduntur.

Hoc eſt quaſi idem Theorema, ac antecedens, ſiquidem eodem argumenti methodo probatur, ſimilique praxi initur. nihilque aliud diuerſi habet; niſi quod diuerſam conditionem ſupponit, nempe vnum angulum vni æqualem, lateraque proportionalia. quæ hunc angulum ambiunt. Si itaque triangulum BAC primum, & aliud nigrum, quod habeat angulum ad D nigrum angulo primi A æqualem; ſintque latera illud concludentia DH, ad DE lateribus, BA, ad BC proportionalia. Dicit reliquos angulos reliquis eſſe æquales. Nam ſic verificabitur quoque ſecunda pars, nempe ſimilia, & homologa eſſe illa latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur: nimirum BA, & DH, qui ſubtendunt angulos æquales E nigrum, & C album eſſe ſimiles, vt antecedentes proportionum, & BC, & DE baſes, quæ angulo A, & H ſubtenduntur eſſe quoque ſimiles, V. g. terminos proportionum. Vt autem id probetur, faciendus eſt punctatis lineis angulus ad D albus æqualis angulo B, & angulus ad E albus æqualis angulo C, vt in præcedẽti propoſ. anguluſque K ex Coroll. 2. propoſ. 17. primi erit æqualis angulo A: Quare triangulum punctatum erit æquiangulum primo triangulo BAC.



Probatur. Nam triangulum punctatum eſt æquiangulum triangulo primo. Sed triangulo

huic

huic punctato eſt æquiangulum triangulum nigrum; Ergo triangulum nigrũ eſt æquiangulum triangulo primo. Quod autem triangulum nigrum ſit æquiangulum triangulo punctato, probatur eundo per ſingulos angulos ſufficienti ſingulorum enumeratione, angulus ad D niger eſt ex hypotheſi æqualis angulo B primi trianguli; vt eidem angulus albus punctati ad D ex conſtructione eſt æqualis; Ergo albus, & niger ad D inuicem æquales ſunt. Reliqui verò anguli probabuntur æquales ex æqualitate laterum correſpondentium. Nam ex 22. propoſ. primi, triangula habentia crura duo æqualia ambientia angulum æqualem, æqualia quoque ſunt quoad baſim, & reliquos angulos. Hæc autem triangula habent duo crura duobus æqualia. Crus enim DE in his triangulis punctato, & nigro eſt commune; quare remanet ſolum probandum de crure DK, & DH, quòd ſint æqualia.

Probatur verò; quia DK eam proportionem dicit ad DE; quam dicit BA ad BC primi trianguli ex 4. huius propoſ. tum ſint æquiangula: ex effectione: Sed eam proportionẽ, quam dicit BA ad BC, & ideo, quã DK ad DE ex 16. l. 5. imitatur quoq; ex hyp. proportio DH ad DE in nigro triangulo. Ergo ex prop 9 l. 5. æqualia ſunt inuicem DH, & DK, vtpote vni baſi ED eandem proportionem dicentia.

Quapropter, tùm iam habeamus duo crura punctati; & duo nigri trianguli angulos ad D nigrum, & albũ ambientia æqualia, anguli reliqui ad E niger, & albus, & angulus H, & K erunt æquales ex prop. 22. primi, & ideo duo triangula nigrum, & punctatum erunt æquiangula.

THEOR. VII. PROPOS. VII. Eucl. 7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem; circa verò alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum autem ſimul vtrumque, aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia ſunt latera.

DEntur duo triangula ſemialbum, & nigrum, quę habeant angulos nigros æquales E. g. A, & D, & crura alios angulos C, & G ambientia proportionalia, ſcilicet AC ad CA in ſemialbo proportionetur, veluti FG ad GD in nigro. Reliqui verò anguli ſpecie non diſſonent, ſed ſint aut ſimul minores recto, aut ſimul non minores.

Ideſt reliquus angulus albus B ſit acutus, ſi F eſt acutus; aut ſi B ſit obtuſus, talis quoque ſit F; aut ſi B eſt rectus, talis quoque ſit F. Nam ſi ſpecie diſſentiunt, & vnus eſſet acutus, alter obtuſus, hac ſola vltima conditione deficiente propoſitio non verificaretur.

Probatur verò oſtendendo datis ijs conditionibus duorum angulorum æqualium, & laterum proportionalium circa alios duos, & ſpeciei eiuſdem reliquorum, reliquos ſpecie ſolum notos eſſe inuicem æquales, & conſequenter ex propoſ. 27. lib. primi etiam reliquos duos proportionalibus lateribus ſeptos, eſſe ęquales, & hoc oſtendendo alterũ eorũ, nec maiorẽ eſſe poſſe, nec minorẽ.

Caſus 1. Sit itaque angulus A angulo D æqualis, anguli B, & F ſpecie noti, nimirum minores recto, & angulus C ſit clauſus cruribus proportionalibus, & ſit AC, ad CB, vt anguli G crus DG ad crus FG. Dico angulũ C angulo G eſſe æqualem.



Quod ſi non credatur: Sit, vt inquiunt aduerſarij, ſemialbus angulus C maior; quam G, qui vt eſſet æqualis ipſi G, ſufficeret pars nigra C. Igitur triangula nigra inuicem erunt æquiangula; quod habeant omnes angulos æquales, & quidem A, & D ex hypotheſi; anguli verò G, & C ex aduerſarijs; anguli H niger, & F ex neceſſariâ conſequentiâ ob prop. 17. l. 1. Cor. 2. Quãobrem habebunt latera proportionalia ex propoſ. 5. huius, & CA erit ad CH, vt DG ad GF: Sed vt AC ad BC, ita proportionatur ex hypotheſi DG ad GF: Ergo ex prop. 16. quinti, vt AC refertur proportione ad CH: Sic idem AC refertur ad BC: Quare ex 9. quinti, cùm eadẽ eis eandẽ dicant proportionem, crura HC, & CB erunt æqualia; ideoque ex propoſ. 14. primi H, & B anguli albi, vtpote æqualibus ſubtenſi cruribus, æquales. Sed angulus B ex hypotheſi eſt minor recto: Ergo H albus erit minor recto, & conſequenter niger H maior recto: Sed oſtenſum eſt angulum nigrum H eſſe ęqualẽ angulo F nigro, & ideo minorẽ recto. Ergo eſſet minor, & non minor recto, quod eſſe nequit.

Caſus 2. Sit deinde ABC niger, & angulus A in ipſo æqualis angulo D, & ſit AC, ad CH; vt DG ad GF, & ponantur, vt priùs H angulus niger, & F, minores recto, & dicatur ab aduerſarijs, angulum nigrum C eſſe minorem angulo G, qui, vt eſſet æqualis, deberet eſſe ſemialbus C. Tunc triangulũ AAC ſemialbũ nigro erit æquiangulũ, & B angulo F ex prop. 17. l. 1. Cor. 2. ob angulos A, & D æquales ex hypotheſi, & ſemialbum C, & nigrum G ex aduerſarijs.

Ergo erit ex 5. huius AC, ad BC, vt DG ad GF. Sed ex hypotheſi eſt etiam AC, ad CH, vt DG ad GF; Ergo erit AC ad BC, vt AC ad HC: Erunt itaque æquales ex 9. quinti HC, & BC. Sed angulus H niger eſt æqualis angulo F minori recto, ex hypotheſi; ergo H albus maior recto, & B ei æqualis ob laterum, quibus inſiſtunt æqualitatem ex propoſ. 14. maior quoque recto contra oſtenſa: Oſtenſus eſt enim æqualis angulo nigro F, qui ponitur minor recto.

Caſus 3. Sint deinde angulus B, & angulus F non minores duobus rectis ideſt, vel ſint recti, vel obtuſi, & dicatur ab aduerſarijs, angulum C ſemialbum eſſe maiorem angulo G, qui, vt eſſet æqualis, deberet eſſe niger C. Itaque vt priùs triangula nigra erunt æquiangula, ob angulum A ex hypotheſi angulo D nigro æqualem, & angulum nigrum C ob dictum aduerſariorum angulo G æqualem; & ideo angulus H niger erit æqualis angulo F: Iteraque erunt proportionalia, eritque AC ad CH, vt DG ad FG, & ex hypotheſi AC ad CB, ita DG ad GF. Igitur erit AC ad CH, ita AC ad CB: ex 16. l. 5. Erunt ergo ęquales ex prop 9 l. 5. CH, & CB. Ideoque angulus albus H erit æqualis angulo albo B. Sed angulus B ponitur, vel rectus, vel maior recto. Ergo talis eſſet angulus H albus, & ſic cõtra propoſ. 17. duo anguli trianguli eſſent æquales duobus rectis, vel eis maiores, & angulus niger H eſſet minor recto, qui oſtenſus eſt maior.

S Caſus

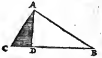
Caſus 4. Sic quoque oſtendeeur propoſitio; ſi dicant aduerſarij angulum ad c eſſe minorem angulo G, vt ſupra oſtenſum eſt in ſimili caſu 2.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII. Eucl. 8.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit, quæ fiunt à perpendiculari triangula, tum toti triangulo, tùm ipſa inter ſe ſimilia ſunt.

IN triangulo ABC angulus BAC ſit rectus, à quo ad baſim perpendicularis agatur AD. Dicit duo triangula, in quæ à perpendiculari CAB triangulum partitur album, & nigrum *eſſe ſimilia toti ſemialbo, & etiam inuicem.*

Probatur. In triangulo toto angulus totus ſemialbus A rectus eſt; Et pariter recta eſt angulus D albus trianguli penitùs albi: Angulus verò ad B eſt communis ergo ex Coroll. 2. propoſ. 17. reliquus niger C albo apud A erit æqualis: Vnde triangulum CAB totum erit æquiangulum ſuæ parti albæ DAB.



Cùm itaque hæc triangula ſint æquiangula; homologa erunt ex propoſ. 4. huius ea crura, quæ angulis æqualibus ſubtenduntur. Ideoque ſicut eſt B C baſis angulo recto oppoſita, vt antecedens ſumpta ad crus CA in ſemialbo triangulo: Sic eſt B A baſis albi trianguli angulo recto oppoſita ad crus OA angulo B oppoſitum, & ſicut BA crus ad AC crus maioris trianguli ſic DB crus ad DA in minori. Quare latera, quæ æqualibus angulis opponuntur erunt homologa: Quia baſes angulis rectis oppoſitę deſeruiunt pro fundamentis. dicitur enim, ſic eſt CB baſis ad crus CA, vt baſis BA ad crus DA ſicut etiam crura pro terminis.

Probatur quoque de parte nigra eodem modo. Nàm ſi in triãgulo nigro angulus D niger angulo A ſemialbo æquatur; cùm ambo recti ſint: angulus C niger cõmunis: Ergo reliquus niger apud A, reliquo angulo B ex Coroll. 2. prop. 17. erit æqualis. Cum ergo triangulum nigrum, & ſemialbum totum C A B ſint æquiangula; patet eſſe ſimilia. Vnde, cùm album, & nigrum ſint ſimilia ſemialbo toti; erunt etiam ſimilia inuicem.

COROLLARIVM I.

MAnifeſtum hinc euadit perpendicularem ab angulo recto in baſim cadentẽ eſſe mediam proportionalẽ inter duo baſis ſegmenta, & eã proportionem dicere BD ad AD: quam A O ad CD. Siquidem, qualis eſt proportio AB ad AC, talis eſt proportio DB ad DA. Rurſuſque qualis eſt proportio BA ad AC, talis reperitur proportio DA ad DC: Ergo ex prop. 16. lib. 5. eadem proportione, refertur D B ad DA quã DA ad DC, & id euenit, quod D A ſit crus minus reſpectu albi, & reſpectu nigri ſit crus maius, & duo munia obeat.

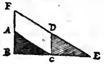
COROLLARIVM II.

FRuitur quoque; Crus quodlibet eſſe medium proportionale inter totam baſim, & illam baſis partem, cui vnitur. Nam oſtenſum eſt; quòd ita ſe habet BC baſis ad crus BA in triãgulo maiori, vt eadẽ BA baſis in minori ad DB crus. Sic quoq; ſe habet baſis CB ad crus CA, ſicut ſe habet idem crus CA, & baſis ad crus CD. Et hoc euenit. Quia CA, AB crura ſunt, ſimul baſes, & duplici munere funguntur, ob quod poſſunt deſeruire pro termino, & fundamento.

THEOR. IX. PROPOS. IX. Euc. 32.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, & ſecundùm vnum angulum componantur, ita vt homologa latera ſint etiam parallela, tunc tertium vtriuſque latus in rectam lineam coibit.

SIt triangulum propoſ. 4. BAC nigerrimum, & CDE nigrum, & ita collocentur, vt AB oppoſitum angulo apud C, ſit parallelum cruri CD oppoſitum æquali angulo E. Sic crus AC parallelum



cruri OE, quæ æqualibus angulis nigerrimo apud B, & nigro apud C opponuntur. Et ita erunt crura homologa parallelé poſita; quòd crura angulis oppoſita æqualibus ſint proportionum, aut fundamenta, aut termini. Dico crus B C & CE, quæ remanent in vnam rectam extendi, quæ eſt BE.

Probatur: Angulus apud A nigerrimus, qui æquatur albo apud C, quòd A C incidat in parallelas BF, & CD ex 30. primi. Angulus item apud B nigerrimus, qui nigro apud C æqualis eſt. Angulus tandem nigerrimus apud C, hi tres faciunt, cũ ſint anguli eiuſdẽ triãguli duos angulos rectos, ergo nigerrimus apud C, & albus æqualis nigro A, & niger æquali nigerrimo apud B etiam ipſi erunt ęquales duobus rectis. Ergo ex prop. 11. l. 1. lineæ BC, & CE in directum erunt; cum efficiant, cum linea AC, vel CD angulos duobus rectis æquales.

EXPENSIO III.

De reciprocatione laterum in figuris.

LIcet hic ſolùm Euclides de parallelogrammis, & triangulis agat, cùm tamen ſint hæ figuræ omnium figurarum initia, hæc expenſio videtur ad omnes poſſe extendi, vtpote omnium reciprocationem pertractans. Reciprocatio verò eſt vt diximus, cùm fundamentum proportionis eſt in vna figura, terminus verò eiuſdem in alia, & in hac alia fundamentum ſimilis proportionis reperitur, & terminus in priori, ita vt quælibet combinatio partim in vna figura ſit, partim in alia.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 14.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum parallelogrammorum reciproca ſunt latera, circum æquales angulos, & vnus angulus alteri æqualis, illa ſunt æqualia.

DVas partes habet hęc propoſitio, & ſecunda primam conuertit. Prior itaque eſt, quod ſi dentur duo parallelogramma æqualia, quę inſuper angulum angulo æqualem obtineant, hęc habitura quoque latera, quæ ſunt circa æquales angulos reciproca.

Sint itaque rectangula duo albũ AO, & DO ſemialbum. Dicit latera horum eſſe reciproca, quæ ambiunt angulos æquales, & ita eſſe DA huius ſemialbi ad AF alterius albi, vt alterius latus AC eſt ad huius latus BA.

Ad probationem verò præſupponendum eſt, quòd, ſi duo parallelogramma vniantur in vertice æqualiũ angulorũ, ita poterũt cõſtitui, vt latera in vnã rectã coeant, & latus DA v. g. parallelogrãmi DB ſemialbi vnam rectam faciat cum latere AF alterius albi. Hoc verò colligitur à propoſ. 13. lib. 1. vbi dicitur lineas rectas angulos æquales ad verticem efficere, cùm vnà coeunt. Ideoque cum anguli albi apud A huius ſint æquales tum parallelogrammi DB, tum alterius AO, & latus DA, cum AF penes rectam lineam ſit poſitum, neceſſe eſt, vt etiam aliud latus AC in directum ſit cum latere AB;



alioquin ſequeretur angulos ad verticem apud A eſſe æquales, & lineas in directum nequaquam poſitas eſſe.

Quo ſuppoſito, producendum eſt latus FH vſq; dum occurrat lateri OF producto in L, & iam habemus parallelogrammum nigrum AL.

Et ſic Probatur propoſ. Parallelogrammum nigrum eſt eiuſdem altitudinis, ac album AO. Ergo ex 1. propoſ. huius erunt inuicem vt baſes, & ita erit parallelogrammum AO ad nigrum, vt AC baſis ipſius ad AB baſim nigri, & alterius DB communia. Eodem pacto philoſophare de ſemialbo reſpectu nigri. Nam, cùm ſit eiuſdem altitudinis cum ipſo nigro, reſpiciet illud, vt ſua baſis DA, nigri reſpicit baſim albo parallelogrammo communem AF, eritque ſemialbum ad nigrum, vt D A ad A F.

Sed ex 7. quinti, cùm alba parallelogrãma æqualia ſint inuicem, ex hyp. eidẽ nigro eandem dicunt proportionem. Ergo, & baſis CA ad baſim AB eandem dicet proportionem, quam baſis DA ad baſim AF. Quare latera reciprocè ſe reſpicient. Secunda pars primam conuertit; aſſeritque; quòd ſi latera DA, & AF; ſic AC, & AB circa angulos æquales apud A reciproca fuerint in proportione ita vt proportionem, quæ eſt C A, ad A B imitetur proportio, quæ eſt DA ad AF, rectangula ipſa fore æqualia. Supponitque probatio eandem conſtructionem, quæ perfecta eſt.

Probatur ex 9. quinti, ſi parallelogramma albũ A O, & DB ſemialbum ad nigrum eandem dicent proportionem, æqualia erunt: ſed eam dicunt: Ergo æqualia ſunt. *Minor* verò argumenti conſtat: Quia parallelogramma eiuſdem altitudinis eam dicunt proportionem, quam ſuæ baſes ex 1. huius. Ergo parallelogrammum AO album, aliud nigrum eâ proportione ſpectabit, quã ſua baſis AC, ſpectat baſim AB nigri cùm ſit eiuſdem altitudinis, ac nigrum. Ideoque aſſeras de parallelogrammo ſemialbo DB, quòd cum ſit eiuſdem altitudinis cum nigro eodem, eam dicet proporportionem, quam ſua baſis AD ad baſim AF.

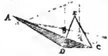
Sed baſium DA, & AF proportio, quã ſe reſpiciunt ex præſuppoſitione eadem eſt, ac baſium AC & AB, Ergo, & parallelogramma album AO, & ſemialbum DB eadem proportione reſpicient nigrum idem. Quare ſunt æqualia ex propoſ. 9. lib. 5. citata.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum triangulorum, vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.

DEntur duo triangula æqualia BEC album, & nigrum ADB habentia angulos, qui ad B æquales; Aſſerit, & crura fore reciproca in proportione: nimirum eſſe albi crus EB ad crus nigri BD, vt crus AB eiuſdem nigri ad crus BC trianguli albi. Quod, vt probet; collocandi ſunt tali modo triangula ſe in verticibus tangentia, vt crura vnius, cum cruribus alterius vnam rectam efficiant V. g. A B, & B C ſicut crus E B, & BD. Hoc autem poterit fieri, vt in precedenti diximus propter angulos æquales ad B album, & nigrum, Coniunganturque D, C, & fiat triangulum nigerrimum DBC.



Probatur. Nam nigrum, & nigerrimum triangulum ſunt eiuſdem altitudinis, cùm conueniant in vertice D, Ergo ex propoſ. 1. huius, eam proportionem, quam triangula dicunt ad inuicem nigrum ad nigerrimum, dicent, & baſes AB ad BC. Idem dicas de triangulo albo, & nigerrimo: ſunt enim eiuſdem altitudinis, quòd conueniant in puncto C: Quare ex eadem prima huius, baſis EB albi ad baſim BD nigerrimi eandem dicet proportionem, quam album triangulum ad nigerrimum. Sed tum triangulum album, tum nigrum ex prop. 7. quinti, eo, quòd ex hypotheſi ſint æqualia eandem dicunt proportionem ad nigerrimum: Ergo,

& crus EB, ad crus DB eandem dicet proportionem, quam AB ad AC.

Secunda verò pars Theorematis eſt conuerſa præcedentis, & dicit; quòd ſi crus EB ad aliud reciprocum BD, dicat eandem proportionem, quâ refertur AB ad BC, æqualia fore triangula: Nam vt baſes ita ex prop. 1. huius erunt quoque triangula album, & nigrum ad nigerrimum, cum ſint eiuſdem altitudinis: Quare, cum ex prop. 9. quinti, quæ eidem eandem dicunt rationem æqualia ſint, ſequitur vt æqualia quoque ſint triangula album, & nigrum cum baſes AB ad BC, & BE ad BD ex præſuppoſitione eandem proportionem dicant.

EXPENSIO IV.

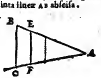
De lineis proportionaliter ſecandis.

VIdimus primo libro ſectionem linearum in partes æquales: modo hic illam intuebimur in partes proportionales; nec tamen ſectionum modi omnes hac expenſione concludemus: plurimi enim ſunt; qui, cum non ſint elementares, & tanquam principia generalia nõ ſe habeant, nec neceſſarij ad elementa ipſa percipienda ſint: Imo multorum cognitionem ſupponant non dum hauſtam, vt queant intelligi, ideo ea in proprium tractatum reiecimus. Fuit autem neceſſarium, vt primo lib. fecimus, agere priùs de triangulis; vt hę operationes ſecandarũ linearũ oſtẽderẽtur.

PROB. I. PROPOS. XII. Eucl. 9.

A datâ rectâ lineâ imperatam partem auferre.

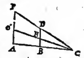
IMperetur, vt ex linea AB auferratur, V.g. quinta pars, Ex A ducatur recta AC, vtcunque, quę tamen angulum aliquem efficiat in A, & in hac linea AC tot partes ab A incipiendo ſignentur æquales aſſignatæ ad placitum magnitudini, quota pars eſt ea, quæ deſideratur detruncari, vt in propoſito exemplo, aſſumendæ ſunt quinque partes, quia quinta detrahenda eſt, & ab vltima parte C ducenda eſt linea, quæ extremum alterius B coniungat, ita vt fiat triangulum ACB. Huic autem à puncto penultimo F parallela agatur FE, eritque EB pars quinta lineæ AB abſciſſa.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. huius ea proportione, quâ refertur AE, ad EB, eâ ipſâ AF reſpicit FC. Ergo componendo, vt docuit argumentari 18. propoſ. quinti, ita reſpicit AB tota partem ſuam BE, ſicut AC tota partem ſuam CF. Sed CF eſt quinta pars totius AC. Ergo & BE erit quinta pars totius AB.

COROLLARIVM

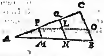
HInc deducitur, & à Coroll. 2. prop. 4. Poſſe quoque ab aliqua V. g. DA partes, quaſcunque placuerit, auferri. Si lineam ducas ei parallelam maiorem aliquam, quę ſit AP, eamque diuidas in partes quaſcumque, E. g. in duas in O, deinde extrema, & omnia pũcta diuiſionum ad idem quodcumque punctum C ducas, quod ſit vltra lineam diuidendam minorem DB ita quòd in medio ipſa remaneat, & lineæ in punctum C conuenientes per eam tranſeant, vt ſunt PC, & OC, & AC. Iſtæ enim diuident lineam propoſitam DB in partes proportionales ijs partibus, quas in PA fecimus: Eritque DH, & HB in linea DB, vt PO ad AO in linea PA; quod oſtenditur in ipſo Coroll. 2. propoſ. 4. cuius figuram hic adhibemus.



PROB. II. PROPOS. XIII. Eu. 10.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

HAc ferre eſt eadem, quæ ſuperiori problemate, Sit recta AB ſecanda in tot partes, quæ proportionem eam inter ſe ſeruent, quam partes alicuius alterius datæ inter ſe conſeruant. Conſtituatur itaque recte aſſignata AC tali modo, vt faciat cum diuidenda angulum A, & iunctæ extremitatibus linea BC, ad hanc AB à pũctis diuiſionũ P, & Q ducantur parallelæ PM, & QN. Nam linea AB erit diuiſa, vt propoſ. repoſcit, in partes ſimiles lineæ AC, vtque id probetur, ducatur PO punctata ad AB parallela.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. huius, vt eſt AP ad PQ, ita ſe gerit pars AM reſpectu partis MN, ergo proportionales ſunt eadem proportione AM, & MN, quâ erant partes AP ad PQ.

Eodem modo valet argumentum de parte PQ, & QC, quæ inuicem eam proportionem ſeruabunt, quam in linea punctata partes PL, & LO ob eandem propoſ. huius 2.

Sed partes punctatæ PL, & LO ſunt æquales partibus MN, & NB ex propoſ. 33. primi, quod in parallelis lineis ſignatæ ſint, & à parallelis effectæ. Ergo etiam PQ, & QC ita ſunt proportionales, vt MN, & NB.

COROLLARIVM

COlligitur hoc modo poſſe ſecari AB ſecundum proportionem quamcumque datam: Nimirum, ſi priùs ſignemus in AC indeterminata eas partes habentes eam proportionem, quam volumus, & cętera præſtentur, vt priùs, quando linea AC vt in propoſitione, præſupponebatur iã diuiſa.

COROLLARIVM

COlligitur quoque lineas duas proportionaliter in geminis punctis diuiſas habere quoq; inter medias ſectionum proportionales V. g. diuiſa AC in Q nimirum in duas tertias partes, & in P nimirum in ſuam tertiam partem intermedia ſectionũ erit PQ, quę eam dicet proportionẽ cum AP, ſeu QC, quam dicit intermedia ſectionum MN

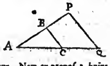
ad

ad AH, vel NB, ſi & AB ſimiliter in eaſdem proportionales partes ſecetur in M, & N. Nam iunctis iſtis lineis, vt faciant angulum in A idem; quod in propoſitione explicauimus, valebit argumentum, vt patet, cùm ſit eadem figura.

PROB. III. PROPOS. XIV. Eucl. 11.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

SInt duæ rectæ AB, & AC, ita diſpoſitæ, vt angulum in A conſtituant, producaturque ea, quam volumus conſtituere pro antecedenti V. g. AC, & in parte productâ capiatur CQ æqualis alteri AB, quam volumus eſſe ſequentem. Ducta deinde recta ad extremitates BC, ei à puncto Q parallela agatur QP, quæ inueniet in P lineam AB productam. Affirmat propoſitio, BP *tertiam proportionalem eſſe*: nimirum eam dicere proportionem AC antecedentem ad AB ſequentem quã reſpicit ipſa AB ſequens tertiam ſubſequentem BP.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. huius; Ita proportione refertur AC antecedens, ad CQ ſequentem in priori crure AQ, vt AB ad BP refertur in ſecundo crure AP; Sed antecedens AC ita refertur proportione ad CQ velut ad AB antecedens in poſteriori crure (ſiquidem AB, & CQ ex conſtructione ſunt æquales) Ergo eam proportionem ex 7. quinti, quam dicit antecedens AC ad AB, ſequentem ſuam dicet quoque AB antecedens etiam ipſa ad BP ſequentem, & ſic AB erit media proportionalis: Nimirum ſequens reſpectu AC antecedentis, & pariter antecedens reſpectu ſubſequẽtis BP. At PB tertia proportionalis, erit, vt vul. prop.

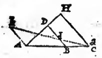
COROLLARIVM.

COllige eodem modo, & quartam proportionalem, & quaſcunque alias poſſe inueniri; nimirũ ſi poſterioribus duabus, tertia inueniatur proportionalis regulâ præced. Inuenta enim, cum tribus priùs inuentis, quatuor erunt proportionales, & ſic ſi alias cupias ſemper eadem praxi vteris.

PROB. IV. PROPOS. XV. Euc. 12.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

DVas habeas lineas AB, & BC, quas in directum collocabis ita vt vnam rectã conſtituant AC; reliqua verò AD ita collocetur, vt faciat angulum quemcumque in A cum prima AB. Sit verò reperienda quarta proportionalis ita, quòd, ſicut AB proportionẽ habet ad BC, ita reliqua angulum faciens AD, cum aliã reperiendã proportionata exiſtat. Coniunge itaque extremitates D, & B rectâ DB, & huic coniungenti à puncto C ducparallelam, quæ occurrat lineæ AD productam in H. Nam DH erit quarta, quæ quæritur ita, vt eodem modo, quo ſe habet antecedens AB prioris cruris ad ſequentem eiuſdem BC. Sic referatur antecedens poſterioris cruris AD ad ſequentem DH in proportione.



Probatur faciliter ex 2. propoſitione huius: Cùm enim DB ſit ex conſtructione parallela ad CH. Ergo ſicut refertur AB ad BC in priori crure; Sic refertur AD ad DH in poſteriori.

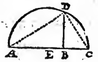
COROLLARIVM.

COllige cum Pappo. Quomodo reperire poſſis quartam proportionalem; quæ ſit ad tertiam, vt prima ad ſecundam inuerſo ordine. Nam inuerſo ordine tertia AD erit coniungenda non ad extremum primæ A, ſed ad extremum C a ſecundæ, vt per lineas punctatas factum vides, & literis minuſculis notatũ; eſt enim eadem AD, quæ a d. Nam tunc ex eadem propoſ. 2. ſicut antecedens, & prima AB ſe habet ad B a ſecundam, ita quarta b, d ſe habet ad tertiam d a.

PROB. V. PROPOS. XVI. Eucl. 13

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

SInt duæ rectæ AB, & BC, quibus media proportionalis inuenienda ſit. Diſponantur in directum, ita, vt fiant vna linea AC, quam bipartiea in E, & in ſectione E facto centro interuallo vſque ad



extremitatem alterutrius extenſo V. g. A, ſemicirculus deſcribatur ADC. Deinde ſuper B erigatur perpendicularis BD. Nam hæc erit media proportionalis inter AB, & BC, quod vt probetur ducendæ ſunt rectæ AD, & DC, quæ ex propoſ. 28 tertij facient angulum rectum in D.

Probatur verò propoſitio ex Coroll. propoſ. 8. Nam D B cadit ſuper baſim angulo recto toti D ſubtenſam: quare inter duas eius portiones AB, & BC erit media proportionalis. Angulus verò D punctatis factum rectus eſt, quòd in ſemicirculo ex propoſ. 28. tertij exiſtat.

COROLLARIVM

HInc eſt. Quòd perpendicularis excitata ſuper diametrum à quocunque puncto eius, ſit medium proportionale inter duo diametri ſegmẽta, vt clarè conſtat, cùm ex propoſ. 28. tertij ſemper ADC angulus rectus ſit, quoquo puncto circumferentiæ vertex eius, reperiatur.

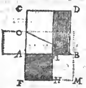
PROB.

Digitized by Google

PROB. VI. PROP. XVII. Eucl. 30.

Propoſitam rectam lineam terminatam extremâ, & mediâ ratione ſecare.

*SIt recta AB; & ex 15. l. 2. ſit ſecta in G ita, vt rectangulum ſub totâ AB, & minori ſegmẽto GB contentum, ſit æquale quadrato ex maiori ſegmento AG erectum. Dico hanc lineam extremâ, & mediâ ratione eſſe ſectam, eſſeque AB totam ad ſegmentum maius AG, vt ſegmentum idem AG ad minus BG in proportione repetitur.



Probatur. Quoniã enim quadratum, ſeu parallelogrãmum album ex maiore ſegmento AH eſt æquale rectangulo nigro ex minore ſegmento, & tota effecto GD erit BD tota reciprocè ex propoſ. 10. huius ad GH maius ſegmentum, vt GA, ideſt æqualis GH ad GB ſegmentum minus. Vnde cùm tota ita ſe habeat ad ſegmentum maius, vt ſegmentum maius ad minus, linea AB in G erit ſecta extremâ, & mediâ ratione ex hoius def. 3.

EXPENSIO V.

De æquipotentia proportionalium linearum.

HIc agitur; datis lateribus proportionalibus, vel quatuor, vel tribus, quòd poſſint duo rectangula æqualia conſtituere, vel quadratum, & rectangulum licet inuicem ſint inæqualia. Pertractatur itaque de linearum proportionalium æquipotentia in genere.

THEOR. I. PROPOS. XVIII. Euc. 16.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum eſt æquale illi, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo.

Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D. Dico primò, ſi ex A, & D extremis rectangulum componatur, vt eſt album DA, & ex medijs aliud rectangulum nigrum BC, hæc duo rectangula fore æqualia.

Probatur. Anguli ſunt æquales niger, & albus ad A, vtpote recti latera quoque reciproca proportionalia ex hypotheſi, nempe ſimili proportione refertur ex def. 2. huius PD ad AC, vt BA ad AP, quia ſic in vtraque figura terminus, & fundamentum relationis eſt. Ergo ex 10. huius parte 2. rectangula album, & nigrum erunt æqualia.

Probatur ſecũda pars, quæ eſt conuerſa prioris; nimirum, quòd rectangulis æqualia habeant rectas ſub quibus continẽtur proportionales. Colligitur verò probatio ex prima parte prop. 10. Nam cum hic habeamus angulos ad A nigrum, & album æquales, & reciproca latera, nimirum ſe ſimili proportione reſpicientia PD lineam AC, vt BA lineam AP; patet lineas eſſe proportionales, & PD eſſe ad AC, vt BA ad AP.



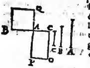
THEOR. II. PROPOS. XIX. Eucl. 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, quod ſub extremis comprehenditur, æquale eſt ei quadrato, quod comprehenditur ſub media.

Et è contrariò ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei quadrato, quod à media deſcribitur, illæ tres lineæ proportionales erunt.

SInt tres lineæ A, B, C proportionales ita, vt qua proportione reſpicit A ſequentem B, ſequens quoque reſpiciat ſubſequentem C. Dicit, quòd ſi ex extremis A, & C fiat rectangulum PC, & ex media C fiat quadratum QB; Quadratum, & rectangulum futura eſſe æqualia.

Probatur. Quia accipiam punctatam AQ æqualem mediæ B. Quare eam proportionem, quam dicit A ad punctatam, dicet, & B ad C. Cum ergo ſint iã quatuor proportionales, patet ex præcedẽti propoſitione, rectangulum quadratũ BQ ex punctatâ, & lineâ B, æqualibus, & medijs conſtitutum, eſſe æquale rectangulo ex extremis C, & A conſtituto ex'ant.



Secunda pars conuertit priorem eodem fundamento lineæ punctatæ præſuppoſito, & eodem argumento, quõ ſecunda pars præced. Theorem. probata eſt; cum enim æqualia ſint quadratum, & rectangulum, erit proportio PA ad punctatam AQ, qualis eſt BA, ad AC, ſed punctata, & BA æquales ſunt, ergo erit AP ad BA, vt BA ad CA, nimirum trium proportionalium A, B, C.

EXPENSIO VI.

De proportione duplicata, & compoſita, quam figuræ inter ſe poſſident reſpectu laterum homologorum.

COmparantur in hac Expenſione latera figurarum, tum ſimilium, tum diſſimilium inuicem, & quam proportionem obtineant conſideratur, vt ex inde cognito genere figuræ, & proportione laterum, faciliter etiam innoteſcat proportio ipſarum figurarum, vel è contrà.

THEO-

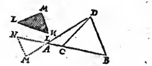
THOR. I. PROPOS. XX. Eucl. 19.

Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

DVo triangula, vel duas figuras habere duplicatam proportionem laterum homologorũ, nihil aliud eſt, quàm quòd ita ſit figura ad figuram proportionata, ſicut inter tres lineas proportionales prima linea proportionatur ad tertiã, ita enim proportio duplicatur gemina vice, nam dicitur ſicut eſt antecedens ad ſequentem, & ecce prima proportio, ita eſt ſequens ad ſubſequentem ecce ſecunda: V. g. ſi baſis, quæ ponitur antecedens triangulorum ſimilium ſunt vt 1. ad 2. ſequentem, triangula erunt inuicem vt 1. ad 4. nimirum repetendo proportionem gemina vice: nam ſicut ſe habet 1. ad 2. ita proportionatur 2. ad 4.

Duplex autem poteſt eſſe caſus. Nam vel latera homologa ſunt æqualia, & ſic etiam figuræ erunt æquales, cùm æqualia repetitis proportionibus ſemper æquo modo ſe habeant, & ſi volo reperire alium numerum, qui dicat proportionem, quam dicit 2. ad 2. non poſſum reperire; niſi 2. at cum proportio eſt inæqualitatis, tunc difficultas eſt, & id demonſtrare oportet.

Sint ergo duo triangula ſimilia nigrum, & album ADB, abſcindaturque ex propoſ. 14. baſibus AB, & LM tertia proportionalis ex latere AB, & ſit AC, ducaturque recta DC, eritque triangulum ADC probandum priùs, & demonſtrandum æquale triangulo nigro antequam ipſam propoſitionem probemus.



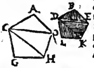
Probatur. Ex hypotheſi, vt eſt AD ad AB, ita eſt LM ad LN ergo *permutando* ex 19. lib. 5. erit fundamentum AD ad fundamantum LM, vt terminus AB ad terminum LN; Sed vt eſt AB ad LN, ita fecimus LN ad AC proportionata crura. Ergo proportione correſpondebit AD ad LM, vt LN ad AC. Ergo hæc triangula NLM, & ADC habebunt latera reciproca. Siquidem fundamentum primæ cõbinationis, & terminus alterius eſt in vno triangulo AD, & AC, & terminus primę, fundamentumq; ſecundæ eſt in alio triangulo, nimirum NL, & LM. Quamobrem ex 15. huius erunt triangula æqualia punctarum, quod æquale fecimus nigro (claritatis gratia,) & triangulum ADC: quo ſuppoſito ita propoſitio

Probatur. Tres lineæ, nimirum AB baſis, baſi LM, & LN baſi AC continuam dicunt proportionẽ; Vnde ſecundum ſuperiùs explicata AB ad AC duplicatam dicet proportionem: Sed triangulum album maius ADB eam ad nigrum refertur proportione, quã baſis AB ad baſim AC: Ergo duplica ad illud proportione refertur. *Minor* vero *argumenti* oſtenditur, nimirum quod triangulum ADB ad nigrum referatur, vt baſis AB ad baſim AC. Quia triangulum maius album dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit ad triãgulum ACD; quia iam hæc duo triangula nigrum, & ACD probata ſunt æqualia, ſed ad triangulum ACD dicit proportionem, quam baſis AB, ad baſim AC ex prima huius, quod in eundem verticem D finiant, Ergo refertur quoque ad nigrum eã proportione, quã baſis AB ad baſim AC duplicatã AB ad baſim LN.

THEOR. II. PROPOS. XXI. Eucl. 20.

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygona duplicatam habent eam rationem, quam habet latus homologum ad latus homologum.

SInt polygona ſimilia album, & nigrum habentia angulos æquales ſingula alba ſingulis nigris, vt A angulo B, & C angulo D, &c. Sic & latera proportionalia circa angulos ęquales V g. ſit AC, ad BD, vt AQ ad BE. Dicit pro prima parte *hæc duo polygona diuidi in triangula ſimilia, & numero æqualia.*



Nam ducantur rectæ ab vno angulo ad alios oppoſitos, vt ab angulo D lineæ DE, DX, ſic ab angulo C rectæ CH & CQ, eruntque triangula numero æqualia, vt patet. Probatur itaque, quòd hæc triangula ſint ſimilia: Nam primò DLK nigro eſt ſimile triangulum CGH albi polygoni. Ratio eſt quia angulus L niger eſt æqualis albo G, & circa illos latera, ex hypotheſi ſunt proportionalia. Ergo ex prop. 6. & def. 1. triangulum DLX, eſt ſimile triangulo CGH. Vnde etiam anguli reliqui erunt æquales V. g. apud K, & H in dictis triangulis, & ex propoſ. 4. huius latera DK, & CH, vtpote angulis æqualibus in æquiangulis triangulis oppoſita erunt homologa, ideo erit DX ad CH, vt LK ad CH. Sed ob ſimilitudinem polygonorum, vt eſt LX ad GH, ita eſt KE ad HQ: Ergo ex ęquo erit vt DK ad CH, ſic KE ad HQ. Sic quoque angulus apud K totus eſt æqualis angulo toti H; pars quoque anguli K verſus L eſt æqualis parti H verſus G. Ergo reliqua pars DKE erit æqualis reliquę CHQ. Quare ex propoſ. 6. triangulum DKE nigrũ erit ſimile albo CHQ; quod angulum apud K habeat æqualem angulo apud H, & latera circa ipſos proportionalia, & ſic de reliquis alijs argumentabitur.

Prob. 2. eſſe homologa totis. Nã triangula nigrum DLK, & CGH album ſunt ſimilia inter ſe, ideoque habebunt duplicatam rationem laterum homologorum DK, & CH ex præc. & etiam eandem habebunt duplicatam rationem triangula ſimilia DEK nigrum, & CQH album, quod eodem latere DX, triangula nigra, & eodem CH triangula alba prædicta inexiſtant. Quare triangula DLK nigrum ad album CGH eam habebit rationem, quam triangulum nigrum DEK ad album CQH, vtpote eiuſdem proportionis lateris ad latus duplicatam vt diximus Tract. 9. Def. 27. in fine, & idem fiet argumentum de reliquis. Cum ergo ſint proportionalia triangula polygoni nigri triangulis ſibi, its vt omnia fundamenta proportionum, ſeu antecedentia ſint in vno, & conſequentia, ſeu termini in altero. Ex propoſitione verò 17. quinti, vt eſt

vnum

vnum antecedens ad vnum conſequens, ſic ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia, erunt omnia triangula nigri polygoni ad omnia albi, nempe totum ad totū in eadem ratione, vt aliquod nigrum triangulum ſuo correſpondenti albo.

Probatur tandem tertia paes; Quod polygonum ad polygonum ſit in duplicata ratione lateris homologi ad latus homologum. Peobatur inquam. Quia ita eſt polygonum nigrum ad album, vt triangulum V. g. DLK nigrum ad album ſimile CGH: Sed ſimilia triangula laterum homologorum duplicatam habeot rationem ex præced. Quare etiā polygonum nigrum ad album duplicatam habebit rationē laterum homologorū V g. KL ad GH.

COROLLARIVM

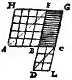
HInc eſt, quod ſi fuerint tres lineæ proportionales, vt eſt prima ad tertiam, ita eſſe polygonum deſcriptum ſimile ſuper ſecundā ad polygonum ſuper tertiam deſcriptum, vel polygonum ſuper primam ad polygonum ſimile ſuper ſecundam deſcriptum; quia enim prima linea ad tertiam duplicatam habet ſecundæ rationem: Polygonum verò ſuper primam delineatum habet duplicatam primæ lineæ rationem ad polygonum ſuper ſecundam formatum; patet; cùm ſit eiuſdem proportionis lineæ primæ ad ſecundam duplicata proportio primæ eiuſdem lineæ ad tertiam, & polygoni ſupee primā ad polygonū ſuper ſecūdā duplicata quoq;, quòd erit eadē lineę primę ad lineam tertiam, quam polygoni ad polygonum proportio.

THEOR. III. PROPOS. XXII. Euc. 23.

Æquiangula parallelogramma inter ſe eam habent rationem, quæ ex proportione laterum componitur.

QVantitas compoſitam reſpectu alterius habet rationem, cùm ne dum illam ſecundùm vnam proportionem reſpicit, ſed ſecundùm plures, V. g. linea dicit proportionem ad aliam tanquam 10. ad 5. ita vt minorem ſuperet medietate. Deinde hæc minor ad minorem ſe, dicit propoetionem tanquam 5. ad 3. Illa itaque maior 10. partium ęqualium habet ad lineam trium partium rationem compoſitam; nimirum eam, quæ eſt inter 5. & 3 & intee 5. & 10. Ita, vt reſpiciat illam, ne dum ſuperando eam medietate, vt ſuperat 5. ſed inſupee eam ſuperando duobus quintis vt 5. ſuperat 3. vt diximus tract. 9. pr. part. def. 7. Dicit itaque Euclides, quòd *parallelogramma æqualium angulorum eam proportionem habeat*, quæ ex lateribus componitur: nimirum aream rectilinei ABHE; ne dum eſſe maiorem rectilineo DC paruo proportione, quæ eſt inter AB, & AC hoc eſt dupla: ſed & ea, quæ eſt inter AE, & AD, quæ eſt E. g. 5. ad 3. Quamobrem, ſi DC minus rectilineum continet 6. Rhombos, ne dum AB continebit 10. Rhombos, quæ eſt proportio 5. ad 3. Sed inſuper alios 10. nimirum 20. quæ eſt proportio 2. & 1. Et ita Rhombus AE, dicit proportionem multiplicem, quia bis continet Rhombum DC, & inſuper proportionem ſuperparticularem bipartientem ſextas, id eſt ſemel, & duas eius ſex partibus.

Poteſt etiam fieri comparatio inter AB, & BD latus pro vna proportione, & EB, & BC pro alia, & idem eueniet, vt ſunt 20. 8 6. vel 6. 15. 20. Primi namque proportionem habent, quam 5. ad 2.



& 4. ad 3. ſecundi vero proportionem habent, quam 2. ad 5. & deinde 3. ad 4. Vt autem propoſitionem demonſtret, coniungit rectilinea ad apicem B, angulorum æqualium, ita vt in rectam vnam conueniant, vt fecimus ſupra propoſ. 10. latera reciproca AB, & BC ſicut latus BD cum BE: prolungenturque eodem modo latera LC, & HE, donec ſibi occurrant in G, & conſtituatur rectilineum nigrum BG.

Probatur rectilineum maius ea t. huius dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit latus AB ad BC. Nigrum vero dicit eam proportionem ad minus, quā dicit EB ad BD, ob eandem altitudinē, ſed ex pr. p. 5. def. 8. rectilineū maius ad minus dicit proportionē compoſitam ex ſua proportione ad nigrum, & nigri ad minus: Ergo dicit etiam proportionem compoſitam ex lateribus AB ad BC pro prima proportione componente, EB, ad BD pro ſecunda.

COROLLARIVM I.

COlligo. Quod eadem eſt ratio in triangulis habentibus vnum angulum alteri æqualem, vt eſt videre in triangulis BDC, & ABE, cùm enim triangulum ſit medietas rectilinei in eadem baſi, & eiuſdem altitudinis ſequitur, vt triangula eundem angulum habentia eodem pacto, ac rectilinea ſe habeant ad inuicē, cùm ita ſe habeat duplum ad duplum, ſicut medietas ad medietatem ex propoſ. 18. lib. 5.

COROLLARIVM II.

* COlligitur quoq; quòd, cùm triangula omnia eiuſdē altitudinis, & baſis ſint æqualia, fient, & parallelogramma, ſequitur quòd triangulum V. g. BCD ſe habeat ne dum ad triangulum ABE; ſed etiam ad quodcunque aliud eiuſdem altitudinis, & baſis, vtpote illi æqualibus eodem modo; ſicut, & quæcunque triangula eiuſdem altitudinis, ac triangulum maius ABE, quia ſunt ipſi æqualia, reſpicient BCD triangulum minus, & quòdcunque illi æquale, vt ſunt ea omnia, quæ cùm hoc minori eiuſdem altitudinis ſunt, & baſis eâdem ratione: quare verum erit illud, quòd difficiliori argumento demonſtrat Commandinus, triangula inter ſe rationem habere compoſitam ex proportione baſium, & altitudinum, & idem dicas de parallelogrammis.

EX.

EXPENSIO VII.

De ſimilium figurarum notione, & effectione.

TOta hæc quæſtio de figuris ſimilibus cognoſcendis eſt, & id ex quadruplici principio, ſeu loco, ſcilicet, vel ex cognitione laterum; vel ex ſimilis alterius comparatione, quòd 1 duæ alteri ſint ſimiles, & ideo inter ſe; vel quòd pars ſimiliter ſit deſcripta, ac ſuom totum; vel tandem quòd figuræ ipſę ſimiles efficiantur, & ideo in primis docet eas efficere, & datam figuram imitari.

THEOR. I. PROPOS. XXIII. Euc. 18.

A data recta linea deſcribere rectilineum ſimile ſimiliterque poſitum, ac alterum rectilineum.

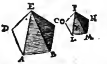
SIt rectilineum paruum x, cui oporteat ſuper datam rectam AB deſcribere rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum, nimirum quod habeat angulos æquales, & latera proportionalia paruo rectilineo x.

Sic itaque faciendum eſt: reſoluatur figura parua x in triangula nigrius, nigrum, & album, ſiue etiam in plura, ſi pluribus lateribus, quàm aſſignata, conſtet. Deinde ſuper AB ad A fiat angulus niger æqualis angulo nigro L, ſimiliterque ad B fiat angulus alius niger æqualis angulo nigro M, & ex 27. primi angulus E niger angulo nigro P æqualis erit.

Rurſus idem fiat ſuper lineam AB faciendo angulum album ad A angulo albo ad L æqualem. Pariterque angulum album ad E angulo albo ad P æqualem; reliquuſque D reliquo O æqualis erit. Tandem idem efficiatur de angulis nigerrimis ad B, & E; quæ æquentur angulis nigerrimis M, P, & C eueniet æqualis angulo N. Et ita rectilineum AB, rectilineo x erit ſimile, ſimiliterque poſitum.

Probatur. Nam anguli eodem ordine æquantur, & latera proportionalia ſunt. Ergo ſunt ſimilia

Probatur itaque de angulis; quòd æquentur.



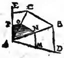
Nam pars alba ad A parti albæ ad L, ſicut nigra alia A, & L nigra æquales ſunt; Ergo totus angulus A toti angulo L æqualis erit. Idem philoſophare de partibus anguli E, quæ partibus anguli P æquantur, ſic de partibus B partibus M æqualibus, & hoc ex conſtructione: iamque probatum eſt angulum D angulo O, & angulum C angulo N eſſe æqualem, quamobrem omnes anguli eodem ordine in vtraque figura æquales ſunt.

Probatur quoque de lateribus. Nam æquiangula ſunt triangula ex conſtructione. Ergo, & latera erũt proportionalia ex 4. huius, prout æquales ambiunt angulos. Quapropter, vt ſe habet in proportione AB ad BE, & BE ad BC, ita ſe habet in triangulo paruo LM ad MP, & MP ad MN. Vnde ex *æquo* ita proportionabitur AB ad BC, vt LM ad MN; Et ex 4. huius, vt eſt BC ad CE, ita MN ad NP: Ergo hæc tria latera AB, & BC, & CE inuicem ſimiliter ſe habent ac tria correſpondentia in figura x, quæ ſunt LM, & MN, & NP.

Idẽ autẽ prorſus argumẽtũ valet de alijs tribus AB, & AD, & DE figuræ maioris, quæ eodem ritu probabuntur proportionalia tribus figuræ x; nimirum lateribus LM, & LO, & OP; Ergo rectilineũ maius minori eſt ſimile, ſimiliterque poſitum.

COROLLARIVM

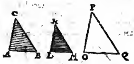
COllige ex Clauio angulos quoque æquales fieri diuidendo figuram in triangula, duo nigra, & album, & productis lineis diuidentibus AC, & AB ſicut, & lateribus anguli A, ex quo prodeunt AD, & AE ſingulis reliquis lateribus ON, MN, OP parallelas ducẽdo DB, & BC, & CE. Ita enim triangula maiora incluſis, & minoribus (vt ex Coroll. propoſ. 4. erunt proportionalia V. g. album maius ABD, albo minori, ANM, &c. conſequenter tota figura maior conſtans ex triangulis ſimilibus, ſimilis erit figuræ minori incluſæ.



THEOR. II. PROP. XXIV. Eucl. 21.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia; & inter ſe ſunt ſimilia.

SInt duo rectilinea album, & nigrum nigerrimo LMN ſimilia. Aſſero *eſſe etiam inter ſe ſimilia.*



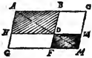
Probatur faciliter. Nam duo anguli correſpondentes A, & O ſunt æquales angulo L. Ergo & inter ſe. Item B, & Q angulo M; item C, & P angulo N; vnde & æquales inter ſe; lateraque angulos æquales amplexantia ex 4. propoſ. huius erunt proportionalia. Siquidem CA eſt ad CB, vt LN ad NM, & LN eſt ad NM, vt PO ad PQ. Ergo ex æquo CA erit ad CB, vt PO ad PQ. Et idem dices de alijs eruribus; atque adeò per definitionem. Similia erunt triangula nigrum, & album, quòd ſint ſimilia nigerrimo LNM.

THEOR. III. PROPOS. XXV. Euc 24.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

ADſit parallelogrammum AGMC, in quo ducatur diameter AM, & per quodlibet eius pun-

punctum D ducantur duæ parallelæ ad latera GM, & MC; quæ ſint BF, & HE. *Dicit parallelogramma, quæ circa diametrum ſunt nigrum, & nigerrimum eſſe inter ſe ſimilia.*



Probatur, quia conſtituuntur triangulis, quę parallelæ auferunt. Vnde ex Coroll. propoſ. 4. huius, triangula ea erunt ſimilia triangulis totius, V. g. parallelogrammum maius nigrum conſtituitur duobus triāgulis æqualibus ex prop. 41. l. 1. ſed quorū quodlibet, vt ABD eſt ſimile vni ex duobus triangulis, ex quibus conſtituitur totum, ideſt triangulo AGM ob parallelam BD ipſi GM: triangulum quoque nigerrimum minoris DEM ſimile eſt eidem toti triangulo AMC. Ob parallelam DE, ipſi AC, Ergo parallelogramma quoque nigerrimum, & nigrū, vtpote eis triangulis dupla erunt ſimilia toti. Quare & ſimilia inter ſe erūt ex prę-ced. vel ex 16. lib. 5. quæ enim vni tertiæ ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eædem rationes.

THEOR. IV. PROP. XXVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt.

Et ſi à rectis lineis ſimilia, ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint, etiam ipſæ lineæ proportionales erunt.

PRima pars huius Theorematis eſt. Quod ſi ſint quatuor lineæ, cuius antecedēs AB in prima cōbinatione ad ſequentē DE ratione referatur ſimili rationi, quâ in poſteriori combinatione refertur LM antecedens ad ſequentē PQ, & conſti-



tuantur ſuper rectas primæ combinationis duo rectilinea inuicem ſimilia, ſimiliterque poſita V. g. duo triangula album, & nigrum. Rurſuſque ſuper rectas ſecundæ combinationis alia rectilinea diuerſi, etiam generis à primis; ſed tamen inuicem ſimilia, ſimiliterque deſcripta V. g. duo quadrata album, & nigrum. Affirmat, *quòd hæc rectilinea erunt proportionalia*, ita, vt, ſicut triangulum album ad nigrum referatur, ita quadratum album ad nigrum refertur, quod vt probetur.

Inuenienda eſt tertia proportionalis recta primæ combinationis, quæ erit R. Sicut, & poſterioris combinationis reperienda eſt tertia proportionalis S, ſecundum documenta 14. propoſ. huius hoc poſito.

Probatur ex propoſ. 21. Coroll. vt eſt baſis AB ad tertiam proportionalem R, ita eſt triangulum album ad nigrum.

Pariterque vt eſt latus LM ad tertiam proportionalem S ita ex eodem Coroll. eſt quadratum album ad nigrum.

Sed baſis AB trianguli dicit ad ſuam proportionalem R ſimilem proportionem, quam dicit LM ad S. Ergo, & triangulum album reſpicit nigrum eâ proportione, quâ quadratū albū reſpicit nigrū.

Minor argumenti conſtat ex 23. quinti nimirum quod AB ſit ad R. veluti LM eſt ad S. Quoniam, cùm R, & S ſint tertiæ proportionales, ex æquo argumentando, eam proportionem, quam dicet AB ad ſuam proportionalem R, eandem dicet LM ad ſuam tertiam proportionalem S: Quoniam dicebant eandem proportionem ad ſuas ſequentes DE, & PQ, ex hypotheſi.

Secunda vero pars vertit primam, & præſupponit ad probationem inueniendam tribus AB, nimirum DE, & LM quarta proportionalis YZ; ſuper quam conſtituendum eſt rectangulum ſimile, ſimiliterque poſitum; ac rectilineum LM, de quo probandum eſt priùs, quòd ſit æquale rectilineo PQ, ad hoc, vt conuertatur propoſitionis prima pars, & probetur, quòd rectilineis rectilineis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis proportionalis, lineis conſtent proportionalibus.

Probatur autem, quòd ſint æqualia duo quadrata nigra. Quia ad ipſa dicit eandem proportionem quadratum album: quam dicit AB ad DE, & quidem ad quadratum nigrum PQ ex ſuppoſitione; ad quadratum verò YZ ex eo quod ſit ſuper quartam proportionalem YZ. vt ex antecedenti probatione huius propoſitionis conſtat, vnde erit triangulum album ad nigrum, ita quadratum album ad nigrum eo quia ſit AB ad DE vt LM ad YZ. Quare ex propoſ. 9. quinti cum eiſdem quadratis nigris eandem dicat proportionem album quadratum, erunt æqualia quadrata nigra

Probatur modo ſecunda pars propoſ. Duo quadrata nigra ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum ex 20. huius; ſed hæc probata ſunt æqualia; Ergo, & latera PQ & YZ erunt æqualia. Sed latus LM dicit eandem proportionem ad latus YZ; quam baſis AB ad baſim ED. Ergo etiam eamdem dicit proportionem latus ML ad latus PQ, quam baſis AB ad baſim ED,

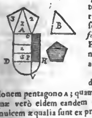
THEOR. V. PROPOS. XXVII. Euc. 25

Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum, rectilineū & alteri dato æquale conſtituere.

SIt datum rectilineum A V. g. pentagonum, cui conſtituendum ſit rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum: ſed alteri dato æquale V. g. triangulo B. Itaque ſecundùm doctrinam propoſ. 43. primi rectilineum parallelogrammum D C æquale rectilineo A cōſtituatur ſuper latus quodlibet eiuſdem rectilinei imitandi A, & huic rectilineo parallelogrammo fiat aliud nigrum ſimile ſuper latus alterum CF ideſt CH, ſed æquale rectilineo B. Inueniatur ergo lateribus DF, & FH parallelogrammorum nigri, & albi, quæ æqualia non ſunt, media proportionalis ex propoſ. 16. huius PV, & ſuper hanc PV rectilineum conſtituatur nigrum ſimile priori iuxta regulas propoſ. 23 & hoc eſt illud, quòd quæritur.

Nam pentagonum nigrum, iam fecimus ſimile,

le, ſimiliterq; conſtitutū dato A. Quare ſolum remanet demonſtrandum; quòd triangulo B ſit æquale, id verò oſtenditur. Nam eſt æquale rectangulo nigro CH, ſed hoc eſt æquale *prout fecimus* triangulo B. Ergo, & pentagonum nigrum eſt æquale triangulo B.



Maior probatur. Nam dicit eandem proportionem pentagono A; quam dicit rectilineum CH; quæ verò eidem eandem dicunt proportionem, inuicem æqualia ſunt ex propoſ. 9. quinti.

Quod verò nigrum pentagonum, & nigrum parallelogrammum dicant eandem proportionem pentagono A oſtenditur: Nam dicunt eandem proportionem, quam parallelogrammo DC: Sed hoc pentagono A eſt æquale. Ergo, & pentagono A, ex 7. quinti eandem dicunt proportionem.

Probandum eſt. Quod parallelogrammo DC eandem dicant proportionem nigrum pentagonū, & nigrum parallelogrammum. Nigrum parallelogrammum ad parallelogrammum DC ea proportione refertur ex prop. 1. huius, cum ſint eiuſdem altitudinis, qua baſes DP, & PH. Sed ea proportione, quâ referuntur baſes DP, & PH, pentagonum nigrum ad idem parallelogrammum refertur: Ergo refertur ad CD proportione eâdem pentagonū nigrum, qua rectangulum nigrum CH.

Patet hæc *minor* figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ ſuper primam, & mediam lineam referuntur, vt refertur prima ad tertiam ex Coroll. prop. 21. Sed pentagonum nigrum eſt poſitum ſuper mediam PV: ergo dicit ad pentagonum A, cui ſimile eſt, & ſimiliter poſitum eam proportionem, quam dicit prima PH ad tertiam DP: Sed pentagonum A ex conſtructione eſt æquale parallelogrammo DC. Ergo ad hoc parallelogrammum dicit ex 7. quinti eam proportionem, quam prima, quæ eſt baſis HP dicit ad tertiam, quę eſt baſis PD; quod erat tandem probandum. Quare pentagonum nigrum ad parallelogrammum album referetur, vt PH ad DP, ſed taliter etiam nigrum parallelogrammum ad albū maius refertur: Ergo nigro parallelogrammo nigrum pentagonum erit æquale; quare, & ipſi B triangulo.

EXPENSIO VIII.

De ſimilium figurarum additione, & ſubtractione.

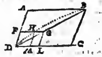
PRimo parallelogrammorum deficientium, vel abundantium proprietates ponit, ex inde docet addere, vel ſubducere alieni parallelogrammo, & applicare datæ lineæ, vel cum defectu, vel cum exceſſu, vt placet, deſeruitque hæc doctrina maximè lineis irrationalibus, de quibus lib. 10. agit Euclides.

THEOR. I. PROPOS. XXVIII. Euc. 26.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ei ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circa idem diametrum, ſicut totum, conſiſtit.

DIcit. Quod, ſi à maiori parallelogrammo ABDC auferatur parallelogrammum minus DFGL, quod deinde ipſi accommodetur, vt angulus ſuper æqualem angulum ſitus ſit, vt vides in D. Dicit hoc paruum parallelogrāmum conſiſtere circa diametrum totius DB; quod probat per reductionem ad impoſſibile.

Nam ſi dicatur. Quod DG, & GB in vnam re-



ctam non conueniant, & ideo, quòd non poſſit eſſe diameter idem trahatur diameter, & ſit punctata, quæ tranſeat non in G, ſed per aliquod aliud pūctū. Itaque E.g. trāſibit per H, & tracta HM parallelogrammum FHDM erit, ſimile toti BADC ex 25. huius, quia ex aduerſarijs circa diametrum ſunt: Quamobrem latera inuicem erunt proportionalia, ita vt quā proportione DA reſpicit latus totius DC, ſic latus minoris DF reſpiciat DM: ſed & idem latus DF reſpicit DL eadem proportione, quâ DA reſpicit DC; quia parallelogrammum FGDL eſt ſimile toti ex 25. huius: Ergo cùm ad idem DF eandem dicant proportionem ex 9. quinti eſſent æqualia DM, & DL pars, & totum. quod repugnat.

THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 27.

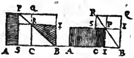
Omnium parallelogrammorum ſecundùm eandem rectam lineam applicatorum deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterque poſitis, parellogrammum maximum eſt id, quod à dimidia deſcribitur, dummodo defectus quorumcunque aliorum ſimiles exiſtant defectui, quo deficit parallelogrammum prædictum à dimidia deſcriptum.

DEtur recta AB, cui applicetur parallelogrammum nigrum AP deficiens ad complendam, occupandamque totam lineam AB portione PB. Aſſerit, quod, ſi huic deficientię PB ſuper dimidiam CB conſtitutum ſit ſimile parallelogrammum, quale eſt ex prop. 25. huius AB, cum ſit circa diametrum BP deficientis ſuperficiei. Aſſerit inquam iſtud parallelogrammum ex dimidia, ſed deficienti ſuperficiei ſimile, eſſe maius parallelogrammo nigro AP, & quocunque alio cum dictis conditionibus facto.

Probatur pars AS nigri parallelogrammi fig. ad

 dex-

dexteram eſt ęqualla parti CI parallelogrāmi BR ex medietate deſcripti : Reliqua verò para C P



parallelogrammi nigri, cùm ſit complementum æquarur, & ſuppletur per alind complementū PQ, quod ex prop.35.l.r. ei eſt æquale, ergo rectilineū eu medietate BR. ſuperat parallelogrammum nigrum AP reliquo parallelogrammo RP. Ita etiam euenit; ſi parallelogrammum nigrum AP fieret altius paralelogrāmo ex medietate deſcripto QR, dummodo hoc parallelogrammum, vt ſupra dixi, eſſet ſimile defectui BP, nempe euiſtens circa diametrum ſuperficiei deficientis nigro rectilineo ad occupandam totam lineam AB, vt potes videre in altera figura.

Probatur eodem modo. Nam AQ eſt æquale parallelogrammo BQ; ablatia itaque ab vtriſque complementia æqualibus IQ, & SR. remanebunt æqualta adhuc reſiduæ partes, nimirum hinc ſeminigra BR., inde parallelogrammum AP nigrum adiuncto ei paruo rectilineo PR: Ergo nigrum parallelogrammum AP eſt minus ſeminigro RB. & deficit ab eius ęqualitate hac portione ei additā RP.

PROB. I. PROPOS. XXX. Eucl. 28.

Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo deficiens tali ſuperficie parallelogrammâ, quæ ſit ſimilis alteri parallelogrammo dato. Dummodo datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non ſit maius eo, quod à dimidia deſcribi quiret, ſimile defectui dato.

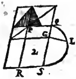
SI tibi exhibeatur recta linea AB, ad quam applicandum ſit parallelogrammum æquale triangulo nigro; ſed quòd deficiat ad totam lineam cōplendam in ſua ſuperficie, portione tali, quæ ſit ſimilis alteri datæ D.

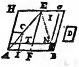
Eſt primo aduertendum, quod hoc triangulum non debet eſſe maius; quàm illud rectangulum, quod deſcriberetur à medietate; namque deffectus deinde non poſſet ſimilia rectilineo dato D conſtitui; quòd, vt probauimus in pręced. propoſ. rectilinea applicata, quæ deficiunt ſimili defectu rectilineo dato ea, quæ ſunt ſuper medietatem, ſunt maxima omnium. Vnde ſi eſſet rectilineum maius, quàm quod ſuper medietatem poſſet fieri, deinde deffectus ſimilis non eſſet rectilineo dato.

Præceptum I. Deſcribatur itaque ſuper AB rectilineum D, quod ſit punctatum AC, tractoq; diametro EA indefinitè, erigatur à puncto medio F parallela lateri punctato CI, quæ occurrat diametro UA in H, fiatque totum rectilineum AFHE ſuper medietatem: de quo primo videndum eſt: an ſit æquale triangulo nigro per operationem, quam vides, & quam docuit Euclides propoſ. 42. primi. Siquidem facto rectilineo PG in dato angulo A ſecundùm longitudinem lineæ AF, æquale triangulo nigro, prolungatiſque lateribus RP, & QS, transferendum eſt rectilineum AE ex medietate ſuper illud: nam ſi excedatur à rectilineo PG, operatio non poteſt fieri, vt dictum eſt: ſi eidem rectilineo commenſuretur, & ſit ei æquale, nihil aliud expoſcitur, factum enim eſt, quod quæritur, & defectus EA erit ſimilis rectilineo dato D, at ſi maius ſit rectilineo PG.

Præceptum 2. Tunc ex doct. propoſ. 27. huius inueniatur exceſſui inuento GR parallelogrammum æquale AN, & ad id reperiatur inter QG latus rectilinei triangulo æqualis, & latus GA latus exceſſus media proportionalis GL, ſuper quam traſlatam in EO fiat parallelogrammum EN ſimile, ſimiliterque poſitum, ac defectus EB; producāturque latera ON, & NT. Iamque erit applicatum lineę AB rectilineum AN æquale triangulo nigro; ſed quod deficit rectilineo nigro NB ſimilis rectilineo D.

De quo duo probanda ſunt. Primum, quòd ſit ſimile rectilineo D defectus niger NB: ſecundo, quòd rectilineum AN ſit æquale triangulo nigro.





Prog. 1. Similitudo itaque probatur. Quia figura deficiens EB eſt ſimilis figuræ ex medietate AHEF, quæ eſt contermina. Sed hæc facta eſt ſimilis figuræ D, Ergo etiam illa deficiens EB ſimilis erit figuræ D. Sed huic quoque eſt ſimilis deficiens figura minor incluſa TO, Ergo, & reliqua nigra BN. Patet conſequens, quia ex prop. 28. h. eſt circa idem diametrum totius BE, quæ verò circa diametrum ſunt ex propoſ. 25. huius, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

Progreſſ. 2. Quod verò parallelogrammum AN, æquale ſit triangulo nigro; Probatur. Nam AN eſt æquale rectilineo PG, in 2. fig. Sed illud PG eſt æquale triangulo nigro ex conſtructione: Ergo, & rectilineum AN eſt æquale triangulo nigro.

Probatur maior propoſitio. Quòd parallelogrammum AN æquale ſit rectilineo PG, nam eſt æquale gnomoni TBO. Sed hic eſt ęqualis rectilineo PG, quòd ſint gnomon TBO, & PG reſidua ex æqualibus vt ex 1. & 2. præcep. PS, & BB. Ergo AN eſt quoque ei PG æquale. Quod verò AN ſit æquale gnomoni oſtenditur. Nam pars FN, cùm ſit complementum, eſt æqualis parti NO, ex prop. 35. primi. Pars autem AT, cum ſit ſuper ęquali baſi, & inter eaſdem parallelas eſt æqualis ex prop. 37. primi alteri parti TB. Ergo AN æquatur gnomoni TAO. Quapropter, cum AN rectilineum applicatum lineæ AB ſit æquale gnomoni TBO; hic verò gnomon TAO ſit æqualis rectilineo PG, quòd, vt dixi, ambo reſidua ſint æqualium UN, & GR. rectilineorum ab æqualibus EB, & PS ablatorum. Rectilineum verò PG ſit æquale ex effectione triangulo nigro; Etiam AN rectilineum erit ei nigro triangulo æquale, applicatum autem erit lineæ AB, & deficiet rectilineo nigro NB ſimile rectilineo D.

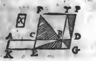
PROB.

PROB. II. P R O P O S. XXXI. En.29.

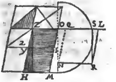
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens ſigura parallelogramma, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato.

EXhibita tibi ſit linea AB, ad quam oporteat applicare æquale triangulo ſeminigro parallelogrãmum excedens ipſam figura parallelogramma, nimirum GB, quæ ſimilis ſit parallelogrammo alteri dato V. g. X.

Conſtruatur itaque ſuper dimidiam AB, ideſt CB parallelogrãmum CFYB, ſed ſimile parallelogrãmo X, ſimiliterque poſitum; quo facto reperiatur quadratum æquale huic parallelogrammo, ſimulque triangulo ſeminigro; quod exequemur, vt vides in ſecunda figura, primo ex doct. 44. primi conſtituendo in dato angulo rectilinei X ſuper latus ZO æquale lateri CB rectilineum nigrum ZOIY æquale triangulo ſeminigro, & iuxta illud ponemus rectilineum YHMI ſimile, & æquale rectilineo CYFB. Hoc enim poterimus facere ex propoſ. 44. primi propter æqualitatem angulorum correſpondentium, & lateris YI, quo facto OM totũ redigemus in rectangulũ punctatũ æquale ex propoſ. 37. primi, vtpote inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſim. Huic verò rectangulo faciemus quadratum ęquale ONRS ex prop. 16 ſecundi. Tandemque huic quadrato fiat rurſus parallelogrammum æquale ex prop. 37. vel ex prop. 43. primi; ſed ſimile, ſimiliterque poſitum, ac parallelogrammum X.



Hoc itaque parallelogrammum ſimile eſt alteri ſeminigro CY ex medietate facto ſimile, ſimiliterque poſito, vt X; ſed tamen maius, quòd ne dum huic CY rectilineo ſeminigro, ſed etiam triangulo ſeminigro æquale ſit. Quare ob ſimilitudinem, & ſimilem poſitionem poterit deſcribi ſuper EB; ita vt exceſſus ſit verſus Y, & E, & excedat tribus partibus ſeminigris gnomonis CGY, vt perſpicuum eſt. Tracto itaque latere AK parallelo ipſi AB, & CF producto in E, erit parallelogrammum KD, requiſitum; quod erit æquale triangulo ſeminigro excedens datam lineam AB figura ſeminigra BG ſimili rectilineo dato X.



Probatur, vt in anteced. propoſitione AG rectilineum eſt æquale gnomoni CGY; quoniam pars KC eſt æqualis parti EB, vtpote duo dimidia totius KB, & ideo complemento AF æquali ipſi EB. Sed gnomon CGY eſt equalis triangulo ſeminigro: Ergo AG rectilineum eſt æquale triangulo ſeminigro.

Quod autem gnomon ſit æqualis triangulo ſeminigro, oſtenditur: nam eſt æqualis rectilineo YO nigro, quod BP, & HO duo tota ſint æqualia, & CY, MY duę partes eorũ ſint æquales, ex conſtruct. Ergo gnomon CGP, & rectilineum YO partes remanentes ex totis æqualibus erunt æquales. Cum itaque gnomon CGY, & rectilineum YO ſint æqualia. Rectilineum verò YO ex conſtructione ſit æquale triangulo ſeminigro. Ergo, & AO rectilineum applicatum æquale gnomoni, & ideo rectilineo nigro YO erit tandem æquale triangulo ſeminigro.

Patet autem; quod exceedat lineam AB datam, rectilineo BG ſimile rectilineo X; quod totum EP ſit ex conſtructione ei ſimile; ergo talia erunt etiam rectilinea circa diametrum ex propoſ. 28. huius. Circa verò diametrum reperitur BG rectilineum, ſcilicet QNBL.

E X P E N S I O IX.

De laterum figurarum proportionali potentia.

LIcet ſupra egerimus de potentia proportionalium linearum, quam habent ad conſtituendum alteri ęquale rectilineum; non tamen lineas conſideramus, vt in aliqua figura exiſtentes ad conſtituendum rectilineum proportionale. Modo hic eas conſideramus, vt latera alicuius figurę proportionalia alteri quacumque proportione. Et primo conſiderabimus, tanquam latera trianguli rectanguli; deinde tanquam latera alicuius quadrati, vt fecimus ſecundo libro. Euclides quidem hoc 6. libro de ſolâ potentia agit trianguli rectanguli, de potentia verò laterum alicuius quadrati lib. 13 tractat, ſed nos exiſtimauimus hic eſſe propriũ earũ propoſitionum locum.

THEOR. I. PROPOS. XXXII. Euc.31.

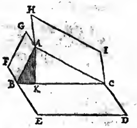
In rectangulis triangulis figura quælibet à latere angulum rectum ſubtendente deſcripta æqualis eſt figuris ſibi ipſi ſimilibus, ſimiliterque poſitis, quæ à lateribus deſcribuntur.

TRiangulum ſit rectangulum ABC, Deſcribaturque ſuper BC quæcumque figura rectilinea BD, cui ſimiles, ſimiliterque poſitæ conſtituantur ſuper crura BA figura BG, & CA figura CH. Dico figuram BD ſuper baſim *eſſe æqualem figuris ſuper crura BG, & CH.*

Prob. Sicut eſt ex CA quadratum prima quantitas ad quadratum ex CB ſecundam quantitatem in prima ſerie; ita eſt rectilinem CH prima quantitas ad rectilineum BD ſecundam quantitatem in poſteriori ſerie (debes autem imaginari ſuper latera rectanguli deſcripta quadrata l. id. fig. non exprimat.)

Hoc autem patet; quòd ſimiliter quadrata, & figuræ

figuræ ſe habeant, eo quòd ſit ex prop. 21. quadratum ad quadratum, vt figura ad figuram; quia ſunt

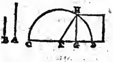


eorum proportiones duplicatæ eiuſdem proportionis laterum AC ad CB. Et ob hanc eandem rationem quadratum ex BA in prima ſerie tertia quantitas ad quadratum ex BC in eadem ſerie ſecundã quantitatẽ eſt, ſicot rectilineum BG tertia quãtitas ſeriei poſterioris ad AD rectilineum item ſecundam qoantitatem eiuſdem ſeriei poſterioris. Qua propter ex propoſ. 25. lib. 5. Compoſita prima quantitas com tertia prioris ſeriei, nempe quadrata ex CA, & BA erit ad ſecundam: nimirum quadratum ex BC, vt in poſteriori ſerie prima quãtitas rectilineum CH cum tertia quantitate rectilineo BG ſimul ſompts ad rectilineum AD. Sed quadrata ex BA, & AC dicunt proportionem æqualitatis qoadrato ex BC ex 31. l. 6: Ergo etiã rectilinea BO, & CH dicent proportionem equalitatis rectilineo BD ex BC.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duabus lineis inæqualibus reperire, quid poſſit plus maior, quam minor in ordine ad ſimiles figuras conſtituendas.

DEntur duę lineæ A maior, & B minor. Accipiatur alia quædã dupla maioris, vt CD, & eã diuisã per medium in E, eo in puncto centro facto, interuallo eius medietatis ED, ducatur ſemicirculus. Inde à centro E menſurata longitudine minoris datæ B vſque ad G, ibi erigatur perpendicularis, & deducatur vſque ad circumferentiam, & punctum contactus H centro E rectâ EH coniungatur. Dico enim, quòd ſi fiat figura ex GH ſimilis figuræ ex A effectæ *illud eſt ſpacium, quò figura ipſa ex A effecta ſuperat figurã ſibi ſimilem ex linea B erectam*, & ideo quod A eſt in potentia maiori, quàm B ad quamcunque figuram conſtituendam cuiuſcunque formæ, ſeu magnitudinis tota linea GH.



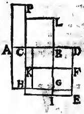
Probatur ex propoſ. præced. Subtenſa angulo recto G, ſcilicet HE, eſt æqualis lineæ datæ A, ideo quòd ſingolæ ſint æquales radio EC, & A quidem ex conſtructione; HE verò, quòd ſit radius. Quare eius figura ſimilis, ſimiliterque poſita, erit æqualis duobus figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis ex GH, & ex EG. Quamobrem figura ex A æqualis figuræ ex EH ſimilis, ſimiliterque poſita erit maior figurâ ex EG, & ideo ex A ſibi æquali totâ figurâ ex GH ſimili, ſimiliterque poſita; quod erat probandum.

THOR. III. PROPOS. XXXIV. Eu. 13.

Si recta linea ſecetur ſecandùm mediam, & extremam rationem, maius ſegmentum, cum dimidio totius iunctum, quintuplum poteſt efficere quadratum maius, quàm à dimidia totius deſcribitur.

SEcetur recta AB in C media, & extrema ratione. Sitqoe maius ſegmentum BC; Prolongetur in D, & ſit BD dimidia totius AB. Dico *quadratum ex CD; nimirum CE ex maiori ſegmento, & dimidio totius eſſe quintuplum maius, quam quadratum ex ſola dimidia BD, quod eſt BF.*

Probatur. Quadratum AG, ex AB totâ effectum, & ideo dupla lineæ BO, eſt quadruplum qoadrati ex ipſa dimidia BD, ex propoſ. 6. l. 2. Et huic quadrato æqualia ſunt rectangula duo, vnum AH ſub tota, & minore ſegmento, alterum CG ex tota, & maiore ſegmento ex prop. 4. l. 2.



Primo quidem rectangulo AK, vel AF ex tota, & minore ſegmento ęquale eſt quadratũ ex maiore ſegmento CB, quòd eſt CL, vel KI ex propoſ. 15. l. 2. Alteri verò rectangulo CO, ex tota, & maiore ſegmento ſunt æqualia duo rectangula ex CB, & BD qualia ſunt BK, & KO ex maiori ſegmento, & dimidiã totius effecta, & ideo æqualia inuicem. Loco tamen rectanguli XG ſubſtituamus æquale FI, quod ſit complementum rectanguli BK in quad. CF, & ideó ex prop. 35. l. 1. ei æquale, & hinc ęquale, rectangulo KG. Igitur quadratum AG ex tota eſt æquale rectangulis duobus ex maiore ſegmento, & dimidia BK, & FI, & quadrato CL, ideſt æquali KI ex ſegmento maiori, ideo hæc omnia erunt quadruplicia quadrato ex dimidia BF, vt eſt oſtenſum, tale eſſe quadratum AG, cui ęquantur. Adde omnibus iſtis ſimul rectangulis BK, & FI, & quadro KI quadratũ BF ipſum ex dimidia BD, & omnia erunt quintuplicia ipſiùs q. drati BF. Hæc autem omnia ſimul, nempe duo rectangula cum duobus quadratis, ex dimidia, & ex maiore ſegmento faciunt ex 6. l. 2. quadratum ex CD, ideſt CE erectum ſuper ſegmento maiori CB, & addita medietate BD; hoc eſt ſoper CD: Ergo hoc quadratum erit quintuplum quadrati BD.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV. Eu. 3. l. 13.

Si recta linea ſecundùm mediam, & extremam rationem ſit ſecta, minus ſegmentum dimidio maioris additum quintuplum poteſt eius, quod à dimidio maioris ſegmenti deſcribitur.

SIt data recta AB ſecta ſecundùm extremam, & mediam rationem in C; Sitque minus ſegmentū AC cui adijciatur dimidium OA maioris CB Dico DC poſſe efficere quadratum quintuplo maius, quàm AD.



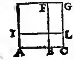
* Probatur. Ita proportionatur tota AB ad CB maius ſegmentum, vt CB ipſum ad AC.

Qua de re ex 18. l 5 etiam medietas totius ad medietatem ſegmenti maioris ſe habebit, vt ſegmentum maius CB ad minus CA, & ideo conuertendo minus CA ad maius CB ſegmentum ſe habebit, vt dimidiū AD ſegmenti maioris ad dimidium AI totius AB. Vnde ex 17. lib 5. minus CA cum dimidio maioris ſegmenti ſe habebit eodem modo ad maius CB cum dimidio AI totius AB, vt ſegmenti maioris dimidiū AD ad dimidium totius AI. Ideoque etiam quadrata harum linearum taliter ſe habebunt ex prop 26. h. Atq; adeo erit quadratum ſegmenti minoris ſimul, cum dimidio maioris ſegmenti, tanquam vna linea, & latere ad quadratum maioris ſegmenti cum dimidio totius lineæ AB tanquā vno latere, vt quadratum dimidij DA ſegmenti maioris ad quadratū dimidiæ totius AI. Ergo etiā permutando erit quadratum minoris ſegmenti cum dimidio maioris, tanquam vno latere, ad quadratum dimidij ſegmenti maioris, vt quadratum maioris ſegmenti cum dimidio totius, tanquam vno latere ad quadratum dimidię totius: ſed hoc quadratum ex precedenti eſt quintuplum quadrati dimidiæ totius. Ergo etiam quadratū ex DC minore ſegmento, & dimidio maioris effectum erit quintuplum quadrato ſegmenti DA dimidij maioris, quod erat probandum.

THEOR. V. PROPOS. XXXVI. Eu. 4 l. 13.

Si recta linea ſecetur ſecundùm extremam, & mediam rationem; Quod à tota, quodque à minore ſegmento vtraque ſimul quadrata tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur quadrato.

SIt AC ſecta ſecundum mediam, & extremam rationem in B. Dico quadratum AG totius AC, & quadratum BL minoris ſegmenti eſſe tripla quadrato IF maioris ſegmenti.



Probatur. Nam ex 15. lib 2. Rectangulum ſub tota AC, & minore ſegmento BC, nimirum AL, eſt æquale quadrato maioris ſegmenti IF. Itaque IF, vtpote pars quadrati AG iam æquat ſemet, vtpote quadratum maioris ſegmenti, & inſuper quadratum AG ex tota continet rectangulum AL ex tota, & minore ſegmento ipſi IF quadrato maioris ſegmenti æquale. Et inſuper FL rectangulum, cui, ſi addas quadratum minoris ſegmenti BL, erit æquale rectangulo AL, & conſequenter AG quadratum cum BL iam tertio æquat quadratū IF maioris ſegmenti. Vnde quadratum totius CA cum quadrato BL minore triplum faciunt quadrati à maiore ſegmento deſcripti, quòd propoſitum fuit.

THEOR. VI. PROP. XXXVII.

Si recta linea ſecundum extremam, & mediam rationem ſecetur. Apponaturque ei æqualis maiori ſegmento; hoc ſit minus ſegmentum reſpectu totius maioris, quæ modo ſe habet tanquam maius ſegmentum.

SIt AB ſecta ſecundùm extremam, & mediam rationem in C; adiiciaturque ei OB æqualis maiori ſegmento. Dico quòd DA eſt recta quoque ſecundùm extremam, & extremam rationem in B: eſſ[?] quæ minus ſegmentum DB; maius verò BA.

Prob. Rectangulum IF contentum ſub tota, & minore ſegmento ex 15 l. 2 eſt æquale quadrato DI maioris ſegmenti DB additi. Adde itaque vtriſque ſpatium, quod eis eſt cōmune; Eruntq; æqualia rectāgulum AH, & quadratum BF. Rectangulum verò continetur ſub tota OA, & maiore ſegmento DB addito. At quadratum BF lineæ BA, quæ erat à principio. Ergo ex 17 huius ita erit OA ad BA, vt BA ad BD; ideoque DA erit ſecta extremâ, & mediâ ratione.



COROLLARIVM

QVare ita potens erit AB, cum dimidio DA ad quintuplum quadrati dimidij DA ex 34. huius. & ex propoſ. 35. dimidium AB cum DB ſimul quintuplum poterit dimidij AB & ex præced. DA, & BD diſtinctæ poterunt duo quadrata ſimul triplum quadrati ex BA.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVIII.

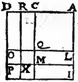
Si recta linea media, & extrema ratione ſecetur, & ei addatur minus ſegmentum; Quod tota cum hac additione poteſt efficere quadratum, quintuplum eſt eius, quod à maiore ſegmento efficitur.

SIt linea AR ſecta in C ſecundùm mediam, & extremam rationem & addatur ei minus ſegmentum OR. Dico totum DA quintuplo maius efficere quadratum; quam CA maius ſegmentum.

Probatur. Quadratum AQ vt ſæpius dixi ex maiore ſegmento & rectangulum CX ex tota RA, & minore ſegmento RC æquantur inuicem. Hoc

autem

autem rectangulum ter ſumptum, vt CX, & XI & PR cum quadrato AQ quater æquant AQ; adde tandem rectangulum ML cum quadrato PX, & addes æquale vni ex prædictis partibus CX: Cùm LM æquet RQ, rectangulum, & PX quadratum XQ: vnde totum erit æquale rectangulo toti CX ex tota, & minore ſegmento; & propterà quinta quātitas erit æqualis quadrato QA: Sed hæc omnia rectangula cum duobus quadratis æquant quadratū AP totius AD, vt conſtat ex propoſ. 10. lib 2. Ergo quadratum ex DA quintuplum eſt quadrati ex CA.



EXPENSIO VIII.

De proportionibus circuli, & partibus ipſius.

QVamuis Euclides vnicam propoſitionem de Circulo ſolùm adſerat, adhuc plures, illaſque elementares eſſe neceſſarias, experimentum docet. Cum & ea, quæ de parallelis in Coſmographia, & de figuris Iſoperimetris, & multa alia, hæc fundamenta expoſcant. Et ſanè cùm 3. lib. multa de æqualibus circulis, angulis, figuriſq; circulo inſcriptis dicti ſint, hic etiam de proportionalibus circuli partibus lautiùs agendum videbatur.

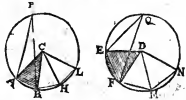
THEOR. I. PROPOS. XXXIX. Eucl. 33.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias conſtituti ſint. Inſuper, & ſectores.

SInt duo circuli æquales, quorum centra C, & D, ſintque in ipſis duo anguli nigri ad cētra ſubtendentes arcus, AB, & EF; ſectoreſque ACB, & EFD. Dicoque itaque *ita eſſe angulum nigrum apud C, ad angulum nigrum apud* D, *vt arcus* AB *ad arcum* EF, *& vt ſector* ACB, *ad ſectorem* EDF. Ducantur AB, & EF rectæ & in circulo vtroque aliæ iſtis ſubtenſis æquales accommodentur: in circulo C lineæ BH, & HL, &c vſque dum placet, & in circulo D, aliæ tot numero, ac præcedentes; ſed æquales EF, eruntque arcus ſubtenſi, circuli quidem C æquales arcui AB ex 28. tertij, & ex 26 anguli quoque albi apud C nigro C, vt ſinguli albi circuli D erunt æquales nigro, D necnō, & arcus ſubtenſi FM, & MN erunt æquales arcui EF.

Probatur itaque propoſ. Quam multiplex eſt aggregatum angulorum apud C, quod eſt ACL, anguli nigri C, tā multiplex eſt arcus AL, arcus AB, & ſector ACL ſectoris nigri. Item quam multiplex eſt aggregatum angulorum EDN anguli nigri D in circulo D, tā multiplex eſt arcus EN arcus EF, & ſector EDN ſectoris nigri.

Quare, ſi angulus ACL ſit æqualis angulo nigro, etiam arcus ſubtenſus AL arcui AB æqualis erit, ſi major angulus, maior erit arcus, ſi minor angulus minor quoque arcus. Et ita dicas de angulo EDN, & arcu EN; ſi enim angulus EDN æquet nigrū angulum D, arcus EN æquabit EF arcum, ſi minor ſit, erit minor, excedet ſi excedat, vnde ex def. 9. Tract 9 ſi angulus nig. C ponatur prima quātitas, & D ſecunda & terminus in priori combinatione; At in poſteriori, Arcus AB circuli C pro fundamento, & arcus EF circuli D pro termino: fundamenta, nempe angulus, & arcus circuli C, æquali paſſu excedent terminos, id eſt angulum, & arcum circuli D, æquabuntur, vel deficient, & hoc iuxta quamlibet multiplicationem. Quare ex illa definitione ſicut eſt prima magnitudo ad ſecundam, nempe angulus niger apud C ad nigrum apud D, ita eſt arcus AB, ad arcum EF.



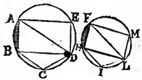
Et eodem argumento probabitur de ſectoribus, quòd ita ſit ſector ACB, ad ſectorem EDF, vt angulus niger in C ad angulum nigrum apud D quòd vt faciunt arcus, vnà cum angulis creſcant, decreſcant, & æquentur. Et quia anguli ad circumferentias dimidij ſunt angulorum ad centrum, ex prop 9. tertij ita erit ex 17. quinti, angulus ad circumferentiam P ad angulum ad circumferentiam Q; vt arcus AB, ad arcum EF, &c.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Quæ in circulis ſimilia polygona inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.

SInt Polygonum in circulo ABCDE, & FHILM in minori circulo; Dico *ita eſſe polygonum* ſuper AB ad polygonum ſuper FH, vt quadratum ex diametro AD, ad quadratum ex diametro LF.

Ducto enim diametro AD, & FL, nec non, &



BD ſubtenſâ, & HL, erunt triangula BDA, & FHL ſimilia, cùm ſint in ſimilibus ſegmentis ob ſimilitudinē præſuppoſitam polygonorum. Quare BA erit ad AD diametrum ex 4. ſexti, vt FH, ad FL; & permutando erit BA ad FH, vt diameter AD ad diametrū FL, ſed ex prop. 26. h. cùm baſium proportionem duplicatam habeant, vt eſt baſis ad baſim; ità polygona ſimilia ex ijs baſibus conſtituta: Vnde ita erit polygonum ſuper AA ad polygonum ſuper FH, vt quadratum ex AD, ad quadratū ex FL.

COROLLARIVM

Hinc elliciea idem dicendum de quocumque alio latere comparatum ad aliud ſibi correſpondens AE V.g. ad FM.

THEOR. III. PROPOS. XLI.

Circuli inter ſe ſunt, vt ex diametris quadrata.

* PRobatur. Nam ſi polygona ſimilia in circulis BCE, & FLM præced. propoſ. multiplicentur, vſque dum queant multiplicari, ſemper eorum latera æqué multiplicando erunt ad inuicem, vt quadrata diametrorum: ſed circulus polygonum, cuius latera multiplicata ſint quouſque multiplicari queant, non excedit. Nam ſi excederet, adhuc in ſegmēto circuli, vt eſt para nigra BA, & HF poſſent latera delineari. Ergo erit etiã circulus BACDE, ad circulum FHILM, vt quadratũ ex diametro AD ad quadratum ex diametro FL.

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Ambitus ſimilis Polygoni circulo inſcripti eſt ad ambitum alterius, vt diameter vnius ad diametrum alterius.

* PRobatur vtendo eadem fig. Nam BA prima quãtitas eſt ad AD ſecũdã; vt FH tertia ad FL quartam. Habet autem quinta BC ad ſecundam AD eandem proportionem; quam HI ſexta ad FL quartam. Ergo ex propoſ. 25. quinti compoſita quoque BA prima cum quinta BC habebit eandem proportionem ad AD ſecundam, quam tertia FH cum ſexta HI ad quartam FL, & ita dicas de omnibus alijs lateribus replicando idem argumentum. Sic quia quantitas prima ABC habet eandem rationem ad AD ſecundam, & diametrum; vt FHI tertia ad quartam, nempe diametrum FL: habet autem CD quinta eandem proportionem ad diametrum AD, nempe ad ſecundam quantitatem, quam IL: ſexta ad quartam nempe ad diametrum FL: habebit etiam quantitas compoſita prima cum quinta ABC, & CD, ad diametrũ AD; nempe ad ſecundã eandem rationē quã IFH, & IL ſexta cũ tertia ad quartam, nempe ad diametrum FL, & ſic de cęteris lateribus argumētũ vrgebit donec totus ãbitus ſit cõpletus. Cùm ergo ambitus poligoni ſit ad diametrum circuli, in quo eſt, vt ambitus alterius ad ſuum diametrum; erit etiam *conuertendo* Ambitus polygoni circulo inſcripti ad ambitum polygoni ſimilis in alio circulo inſcripti, vt diameter ad diametrum.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Circulorum circumferentiæ inter ſe ſunt, vt diametri.

* PRobatur. Nam ſi polygona ſimilia in circulis fig prop. 40. ABCDE, & FHILM multiplicentur, vſque dum multiplicari poſſunt; ſemper eorum latera ſimiliter numero augendo erunt ad inuicem ex præced. vt diametri: Sed polygonus multiplicatus in ſuis lateribus, vſque dum multiplicari poteſt, æquat ambitum circuli: nam ſi non æquaret in ſegmentis circuli, quibus excedit poligonum, alius polygonus poſſet inſcribi pluribus lateribus præditus contra hypotheſim; quæ ſupponit vltimum, qui poſſit inſcribi eſſe inſcriptum: Ergo ambitus circuli ad ambitum alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Chorda vnius circuli ad chordam ſimilem alius alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum.

PRobatur ex prop. proximè pręced. 40. Nam ibi probatum eſt AB eſſe ad FH, vt diameter AD ad diametrum FL ob ſimilitudinem triangulorum ABD, FHL.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Arcus cuiuſlibet circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habent proprotionem; quam chorda ad chordam: Et è contra.

* PRobatur. Qua vt in fig. propſ. 40. arcus ſunt ſimiles: Erit arcus BA ad arcum HF, vt circumferentia ABCDE ad circumferentiã FHILM: Sed circumferentia ABCDE ad circumferentiam FHILM eſt, vt diameter AD ad diametrum FL ex prop. huius 43.: & chorda AB eſt ad chordam FH, vt diameter AD ad diametrum FL ex propoſ. 44. Ergo ex æquo erit, vt arcus BA ad arcum HF, ita chorda ſubtenſa arcui BA ad chordã ſubtēſam arcui HF; Quod argumentum facilè etiam ad probandum proportionem conuerſam valebit.

COROLLARIVM

SEquitur hinc ſi arcus non ſint ſimiles, eos non habere inuicem, eandē proportionē: Si namq; eam haberent eſſent ſimiles; *conuertendo*, vt chorda ad diametrum, ita arcus ad circumferentiam.

TRACTATVS XI.
IN VII. LIBRVM EVCLIDIS
PARS PRIMA.

De proportionibus Numerorum in genere.

HIc agit Euclides de numeris. Diuiditurque in tres Expenſiones: In prima agit de fundamento proportionis in numeris, quæ eſt ratio mutua menſuræ, & menſurati; Secunda agit de proportione numerorum, in qua modi argumentandi etiam in numeris veri demonſtrantur, qui veri vniuerſaliter demonſtrati ſunt lib. 5. Tertia agit de numeris minimis primis inter ſe, & hoc vt octauo libro, deinde agat de proportionibus numerorum primorum, ſicut eodem libro agit de proportionibus planorum numerorum, & ſolidorum, quibus primi numeri ſunt radices.

EXPENSIO I.

De principijs.

PAucs hìc principia ponenda ſunt, cùm ferè omnia appoſuerimus tract. 8 quãdo de Arithmetica ſimplici egimus, & ea, quæ ſpecialiter ad hunc tractatum ſpectant ſunt ſequentia.

DEFINITIO I.

PRoportio numerorum eſt habitudo quædam vnius numeri ad alium ſecundùm quòd continet, vel continetur, vel ſemel, vel aliquoties, & inſuper aliquam illius partem vel partes.

Supra tract. 8. def 17. breuiùs proportionem numerorum definiuimus dicendo eſſe habitudinem numerorum in ratione menſurantis, & menſurati. Verùm hæc definitio per omnia genera proportionum accuratiùs in ratione quâque menſurantis, ſeu menſurati progrediens, rem ſpecialiùs aperit. Eas verò ſpecies proportionum exponit, de quibus ſupra egimus tract. 9. expen. 2. cor. 3.

Cùm dicit *continet, vel continetur*, explicat proportionem maioris, & minoris inæqualitatis, ſi adſit.

Cùm dicit *ſemel* explicat proportionem æqualitatis; cùm dicit *aliquoties* explicat proportionem multiplicem.

Cùm dicit, *& inſuper aliquam eius partem* explicat ſuper, vel ſubparticularem etiam multiplicẽ, ſecũdùm quòd cõtinet, & cõtinetur, vel ſemel, vel aliquoties, & inſuper aliquam contenti partem.

Cùm verò dicit *partes* explicat proportionem ſuperpartientem, vel ſubpartientem etiam multiplicem: nam ſi ſemel, & inſuper aliquas partes eſt ſuperpartiens, & ſi contineatur ſubpartiens: quòd ſi aliquoties, & inſuper aliquas partes, tunc eſt ſuper, vel ſubpartiens multiplex.

DEFINITIO II.

TErmini, ſeu radices proportionis ſunt duo numeri, quibus in illa proportione minores ſumi nequeunt.

DEFINITIO III.

CVm tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur, primi ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur primi ad ſecundum, & ſemper deinceps vno amplius, quam diu proportio extiterit.

Hæc definitio explicata eſt ſupra tract. 9. par. 1. def. 7.

Itaque ſi ſint tres numeri eadem proportione gaudentes V. g. 2. 4. 8. proportio 2. ad 8. eſt duplicata proportionis 2. ad 4. & ſi ſint quatuor eſt triplicata, V. g. 2. 4. 8. 16: numerus 2. ad 16. habet proportionem triplicatam, 2. ad 4. & ſic conſequenter ſi ſint quinque, V. g. 2. 4. 8. 16. 32.: numerus 2. ad 32. quatruplicatam proportionem habet eius, quam 2. ad 4. quod & intelligitur inuersè, quod numerus maior vltimus ad primum habeat proportionem repetitam, & replicatam, quam ſecundus ad primum. V. g. 32. ad 2. eſt quadruplicata eius, quæ 4. ad 2.

DEFINITIO IV.

QVotlibet numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum; & ita deinceps, donec intermedij extiterint numeri.

Hæc quoque definitio explicata eſt par. 1. def. 8. tract. 9. Vnde breuiter: ſi ponantur ordine numeri creſcentes, quoquo placuerit augmento V. g. 2. 8. 7. 9. 12. 16 vltimus 16. componitur ex proportionibus primi 2. ad ſecundum 8. & ſecundi 8. ad tertium 7. & tertij 7. ad quartum 9.

&

& quarti 9. ad qointum 12. Et ſi inter iſtos libeat interponere numerum vel plures, V. g. 8. inter 7. & 9. dicetur quoque 16. ad 5. nouiter appoſitis proportionibus componi.

AXIOMATA.

N*Vmerus metiens totum, & ablatum, metitur, & reliquum.*

Sit V. g. numerus 9. qui metiatur 45. & ablatum 27. Dico, quòd metitur, & reliquum 18. Nam cùm metiatur totum diuidi poterit totum in partes ipſi 9. æquales; nempe in quinque nouenarios. Cumque metiatur ablatum quoque, hoc ablatom 27. diuidi poterit io partes ipſi 9. æquales, oempe in tres noueoarios, & remanebuot duos nouenarios ad æqoandum totum. Ergo doo oouenarij meoſurant reliquum vſque ad complementum totius 45. nempe 18.

Axiomata reliqua tract. 8. habeotur.

EXPENSIO II.

De partibus numerorum alterum menſurantium.

AD hnc, vt ſternat iter ad numericas proportiones intelligendas Euclides iocipit agere de partibus numerorum, quæ alium numerom poſſint menſurare, vtpote qoòd io hac mutua menſura, vel totius, vel alicuius partis proportio eorum conſiſtat.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duobus numeris inæqualibus detrahatur ſemper minor à maiore alterna quadam detractione, & ſemper ſuperſit aliquid, donec perueniat ad vnitatem: Numeri primo aſſumpti primi inter ſe erunt.

17. 6.

SIt propoſitos numerus 17. maior, 6. minor, qui detrahatur à priori quoties fieri poteſt, nempe dupliei vice, deinde aliâ detractione reſiduum à qon 6. auferri nequeat, V. g. 5. detrahatur viciſſem à 6. ſi remaoeat vnitas ſola, vt hic remanet. Dicit propoſitio, *quod de his numeris, & omnibus aliis ſimili in proprietatem habentibus, pronunciandum ſit, quòd ſint inuicem primi, ideſt, quòd ſolam vnitatem pro communi menſura poſſideant.*

Progreſſ. 1. Probatur. Nam ſi aliam obtinerent; hæc eſſet oomerus maior vnitate, qui metiretur vtroſque oempe totom maius 17. & ablatum minus 6. ſed ex axiom. 12. nomerus metiens totom, & ablatum; metitor quoqoe reliquum. Ille ergo numeros maior vnitate metiretur, reliquum 5.

Progreſſ. 2. Et rurſus eodem ritu argumenti; quia 5. ſecunda detractione ablatom eſt à 6. & ex primo progreſſ. numerus ille maior vnitate metitur totum 6. & ablatum 5. metietor, & reliquum 1. Ergo oumerus maior vnitate ipſam vnitatem metietur, quòd eſt abſurdum. Vnde communis menſura nulla 17. & 6. numeris erit, oiſi vnitas; Ergo erunt inuicem primi ex def. 12. tract. 8.

PROBL. I. PROPOS. II.

Duobus numeris datis non primis inter ſe maximam eorum communem menſuram reperire.

6. 22.

DEntur duo numeri, vt 6. & 22. Detrahatur qoe minor à maiore quoties fieri poteſt; remanebunt 4. Detrahatur rurſus ſecooda detractione 4. à minore 6. & remanet 2. Detrahatur rurſùs tertia detractione 2. à 4 & nihil reliqui remanet *Dico 2. eſſe comunem amborum menſuram.* Quod, ſi eſſet oeceſſe aliam, & aliam detractionem reiterare, id fiat, dooec nihil remaoeat. Ille enim poſtremus numerus, à cuius detractione oihil remanet, erit communis aſſignatorum numerorum meoſura maxima.

. Progreſſ. 1. Probatur primò; Quod hæc ſit communis menſura V. g. 2. numeri 6. & numeri 22. ex pronunc. 10. tract. 8. Nam numerus numerom metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur; ſed numerus 2. vltimo remanens metitur 4. cùm nihil ex eo, factâ detractione, quoties fieri poteſt, remanſerit Ergo metitur qooque partes ei 4. æquales, quas numerus idem 4. per detractionem abſtulit à numero maiori. Ergo metietur quoque oumerũ ſe maiorem 6. qui ex ijs partibos cooſtabat, & ſe vltimo reſiduo V. g. ex 4. & 2.

Progreſſ. 3. Sed numerus 6. & 4. metiuntur numerum primum 22; cùm 6. æquetur partibus detractis nempe tribos vicibus numero 6. & 4 æqoetur reſiduo: Ergo vltimum reſiduum 2. metitur quoque numerum primo propoſitum 22.

Patet conſeq. quia metitor ex primo prog. 4. & 6. qui numeri integrant numerum primo poſitom 22.

Probatur ſecondò. Quòd hæc ſit menſura maxima. Nam ſi hic numerus 2. maxima menſura oon eſt; erit aliquis maior, quam 2. qui metietor vtroſque 22. & 6. Quare ex pron. 1. hnius metietur quoque primum reſiduum 4. qoia metitur totom 22. & ablatum 6. Sed eadem paritate, quia metitur totum 6. & ablatum 4. metietur quoque reſiduum 2. Maior ergo numerus, quam 2. commenſorabitur numero 2. qood eſt abſurdum.

Quod ſi datis duobus oumeris, & facta detractione nihil remaneat, oumerus minor erit communis maxima menſura maioris, vt eſt 6. oumeri 18. ſe enim metitur ſua quaotitate, & numerum maiorem ſui replicatione.

COROLLARIVM

HInc manifeſtum eſt numerum metientem duos nomeros, metiri quoque eorum communem maximam meoſuram: Nam aot hic numerus eſt æqualis, aut mioor. (maior enim eſſe non poteſt, eùm ijdem duo numeri duas maximas inæquales menſuras habere noo poſſint) Ergo ille numerus, ſi eſt æqualis, metietur quoque communem menſuram, cui equatur; ſi eſt mioor, idem valebit argumentum: nam maxima menſura eſt reſiduum vltimom: quare ſi metitur totum, & ablatum; metietur etiam omnia reſidua ſucceſſiuè remanentia, & tandem maximam quoq; com-

munem menſuram; Sic 6. eſt maxima menſura,& ſimul reſiduum numeri 42. & 12. quos ſi numerus 3. menſuret; dũ quaterdecies in numero 36. ſexties in 12 ineſt, menſurabit quoque 6. quòd eorum reſiduum exiſtat.

PROB. II. PROPOS. III.

Tribus numeris datis non primis inter ſe eorum communem menſuram reperire.

42. 18. 8. menſura 2.

DEntur tres numeri 42. 18. & 8. quorum communis menſura reperiri debeat.

Inueniatur primo maxima menſura duorum maiorum V. g. 42. & 18. ex 1. propoſ. quæ ſit 6. ſi ergo hæc maxima menſura capiat in tertio numero ex æquo ita, quod nihil remaneat: hæc erit maxima omnium communis menſura: At ſi aliquid remaneat exerceatur per mutuam detractionem regula tradita præc. propoſ. quoties opus eſt; detrahaturque E. g. 6. ab 8. quoties fieri poteſt. Remanebunt 2. rurſus ſi 2. ex 6. ſubducatur, nihil remanet.

Pronuntio itaque 2. eſſe trium numerorum 42. 18. & 8. communem menſuram maximam.

Probatur, quod ſit trium communis menſura ex præc. prop. Poſtremum reſiduum 2. eſt maxima menſura numeri tertij 8. & maximæ menſuræ 6. duorum primo aſſumptorum numerorum. Ergo etiam ipſorum eſt menſura ex pronunciato 2. huius.

Probatur quoque ſecunda pars; Quod ſit omnium trium maxima menſura. Nam, ſi non eſt, erit aliquis numerus maior V. g. Nũmorum, qui cum metiatur duos numeros primo propoſitos 42. & 18. metietur quoque eorum communem menſuram 6. ex Coroll. præcedenti; ſed ex hypotheſi metitur quoque tertium numerum 8. Numerus ille Nũmorũ cũ ex aduerſarijs dicatur triũ datorum numerorum communis menſura. Ergo metitur totum nempe 8. & ablatum 6. Qua de re metietur quoque reliquum 2. Sed ille Nũmorum numerus ponebatur maior, quam 2. Ergo numerus maior, quam 2. ipſum metiretur, quod eſt abſurdum.

COROLLARIVM

HInc elicies idem, quod in præced. Coroll. numerum metientem tres numeros metiri etiam maximam eorum menſuram: Nam maior eſſe non poteſt ipsâ maximâ menſurâ; ſi ſit æqualis clarum eſt cum numerus omnis ſe per vnitates ſuas metiatur. Si ſit minor eodem modo, quo ſupra probatur. Quoniam maxima menſura eſt reliquorum trium numerorum. Ergo ea menſura minor, quæ metitur tres numeros, nempe totum primũ, & ablatos reliquos per mutuam ſubtractionem, metitur etiam vltimum reſiduum, nempe omnium trium maximam communem menſuram.

COROLLARIVM II.

SI verò aliquis cupiat plurium numerorũ, quàm trium communem menſuram, idem præſtandum erit, & inuenta trium menſura, quarti, per mutuam detractionem inuentæ menſuræ ab ipſo, menſura maxima inuenietur; illa enim erit quatuor numerorum menſura communis.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Omnis numerus eſt cuiuslibet dati numeri, aut pars, aut partes

PRobatur. Vel ſunt primi inuicem, vt 7. & 5. & ſic numerus minor eſt partes numeri maioris; Quia tot habet vnitates V. g. 5. quæ ſunt partes maioris numeri, ex quibus, additis alijs, 2. componitur.

Vel duo numeri non ſunt inuicem primi, & ſic ſi minor maiorem metiatur, vt 4. metitur 8. tunc 4 eſt pars, vt per ſe patet, numeri 8. Quod ſi non metitur, reperiatur eorum communis menſura, qualis eſt 3. numeri 6. & 9. Aſſumanturque à minori numero ei communi menſuræ tot partes æquales, quot poſſunt ſumi V. g. 3. & 3. Iam numerus minor eſt partes numeri maioris; quia eius plures partes comprehendit; cùm 3. 3. integrent numerum 6.

THEOR. III. PROPOS. V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & ſimul vterque vtriuſque eadem pars erit, quæ eſt vnus vnius.

HÆc propoſ. eſt 1. 5. propoſ. 5. vniuerſaliter propoſita; modo hic in numeris oſtenditur.

Partes	3.	2.	compoſiti 5.
Integri	12.	8.	20

Dentur plures numeri, ſed facilitatis g. duo, vt 2. & 3. quorũ primus 2. diuidat 8. in tot numero partes V. g. in 4. in quot 3. diuidit 12.

Dico, quod compoſiti 2. & 3. diuiſores, vt faciant 5. diuident quoque compoſitos numeros 8. & 12. nempe 20. in tot numero partes, vt priùs diuidebant.

Probatur. Diuide numeros metitos 8. & 12. in partes æquales metientibus numeris 2. & 3. habebiſque ex hypotheſi æqualem numerum partium ex ſingulis metitis numeris, vt ex 8. erues 4. duenarios, ex 12. verò, 4. ternarios. Adde itaque ſingulos duenarios æquales 2. metienti

2	3
8	12
2222	3333

5555
20

ternarijs æqualibus metienti 3. efficieſque 4. quinarios æquales metientibus 2. & 3. ſimul additis. Ergo reperiret quinarius metiens in ſimul additis quinarijs, nempe vicenario 4. quinarios, ideſt ſingulas partes cuiuſcunque metiti 12. & 8. ſimul additas.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & ſimul vterq; vtriuſque eædem partes erit, quæ vnus vnius.

HÆc propoſitio eadem eſt, ac antecedens; ſolùmque vult, quòd numerus metiens comprehendat non vnam partem, ſed plures partes metiti. Sint ergo plures numeri, ſed pro nunc duo V.g. 6. metiens numerum 8. cuius comprehendat 3. duenarios ex quatuor quibus 8. conſtat, & 9. metiens 12. comprehendat quoque ex eo 3. ternarios ex 4. quibus conſtat.

Partes	6.	9	compoſiti	15
Integri	8.	12		20

Dico: Quod, ſi componantur 6. & 9. fiant 15. eandem tres partes comprehendent ex 8. & 12. ſimul additis, nempe Vicenario, vt prius ſimplices faciebant quælibet ex ſuo numero metito.

6	9
222	333
8	12
2222	3333

555

15

5555

20

Probatur. Diuide numeros metientes in partes, ſecundùm quas metiuntur ſuos metitos V.g. 6. in 3. duenarios, & 9. in 3. ternarios, quas ſimul addes idest duenarios cum ternarijs vt fiant 3. quinarij: Ergo metientes compoſiti, nempe 15. comprehendet tres quinarios. Sic eſt faciendum de metitis ſinguli enim diſtributi in partes metitas V.g. 8. in duenarios, & 12. in ternarios ex hypotheſi, tum duenarij, tum ternarij æquales numero erunt, nempe 4 qui ſimul additi erunt quinarij 4: prout numeri metiti conſtabant ſinguli, vel 8. ex 4. duenarijs, vel 12 ex 4 ternarijs. Cum ergo, tum metiti compoſiti eundem numerum partium 4. quinarios, & metientes 3. quinarios, ſecundum quem in menſura priùs correſpondebant, integrent; patet, quod etiam compoſiti alter alterius eædem partes erunt. Idē autem etiam eueniet, ſi tot factos aſſumas, aut ſi plures.

THEOR. V. PROPOS. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, vt ablatus ablati: & reliquus reliqui eadem pars erit.

SIt numerus integer 5. eadem pars numeri 20. quæ pars eſt ablati 2. numeri 8. ablati, hic à 20. ille à 5.

Pars	2	compars	3	totum	5
Pars	8	compars	12	totum	20

Dico reliquum 3. ex 5. eſſe eandem partem reſidui 12. ex numero 20.

Prob. Aſſume probationis gr. quemcumque numerum incognitum *Equorum*, cui reſiduum 3. ſit eadem pars, nempe tot vicibus in ſit, quæ eſt ablati 2. ablato 8. & conſequenter, quæ eſt totius 5. toti 20. idest quatuor vicibus ex hypotheſi. Ergo metientes 3 & 2. ſimul vt faciant 5. inuenient tot partes ex 5. propoſ. huius in metitis 8. & numero *Equorum* incognito ſimul vnitis, quot 2. ablatus, & metitor, in 8. ablato, & 5. totum in toto 20. Ergo illi compoſiti numerus 8. & numerus *Equorum* facient 20. hoc enim aggregatum metitur eadem menſura 5 nempe 2. & 3. compoſiti per vices 4. replicatas eaſdem, quibus metiabatur menſura 5. totum 20 Quare incognitus Equorum numerus erit 12, nempe reſiduum numeri 8. ex 20. quem metietur reſiduum 3. vt 2. ablatus, ablatum 8. & 5. totus totum 20.

COROLLARIVM

COllige, quod idem intelligitur in numeris fractis, & etiam de numero maiori, & multiplici reſpectu minoris. Sic ſi 8. ablatū ſit tot vicibus numero 2. ablato, quot 20. totus numero 5. toti, erit etiam reſiduum 12. tot vicibus maior numero reſiduo 3. vt patet, cùm ſit eadem ratio.

THOR. VI. PROPOS. VIII.

Si numerus numeri partes fuerint, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, vt totus totius.

Partes	6	9	compars	15	totum
Partes	8	12	compars	20	totum

SIt numerus 6. ablatus à 15. eadem pars numeri 8. ablati à 20. ſcilicet eius tot vices contineat V.g. tot duenarios, quot 15. integer minoris numeri continet vices numeri 20. integri maioris V.g. quinarios.

Dico, quod reſiduum 9. integri 15. cum numerus 8. fuerit ablatus, eſt eædem partes, nempe tot vicibus contineetur aliqua eius pars in numero 12. reſiduo maioris numeri 20. quot 6. in 8 vel 15. in 20.

Probatur. Aſſumatur aliquis alius *Equorum*, qui tot vices contineat numeri 12. quot ablatus 6. ablati 8. vel integer 15. numeri 20. Coniungatur q; iſte numerus *Equorum*, cum reſiduo 6. At 12. reſiduum cum ablato 8. Iſti vtique, vt priùs, facient 20. V.g. *Homines*. Ergo ille numerus *Equorum* iunctus cum 6. faciet 15. Nam, cùm incognitus Equorum numerus ſit eædem partes 12. vt 6. numeri 8. Ergo etiam iuncti 6. & incognitus ex propoſ. 6. huius erit eædem partes numeri 8. & 12. coniunctorum, ac vnus vnius V g. 6. reſpectu numeri 8. Sed numerus, qui ſit ad 20. vt 6. ad 8 alius non eſt; niſi 15. Ergo iſte numerus *Equorum* cum numero 6. iunctus faciet 15. Ergo erit ille numerus *Equorum* 9. nempe reſiduum numeri 15. ablato 6. qui ita eſt ad 12. reſiduum numeri 20. vt ablatum 6. ablato 8. vel totus 15. toti 20. Quod & de numeris quibuſcumque fractis intelligitur.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; Et viciſſem, quæ pars eſt vel partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes ſecundus quarti.

I. 2. Hominum	II. 8. Lapidum		
III. 3. Equorum	IV. 12. Nummorum		
333	222		

SIt primus numerus V. g. 1. *Hominum* numeri 8. ſecundi *Lapidum* eadem pars, quæ eſt 3. *Equorum* nũmeri tertij 12. *Nummorum*. *Dico, quod Hominum numerus numero Equorum eadem pars eſt, vel partes, quæ numerus Lapidum numero Nummorum.*

Probatur. Nam diuiſis *Lapidibus* 8. ſecundum vices, quas *Hominum* continet, V. g. in duenarios, & numerus *Nũmorum* ſecundum vices, quas continet *Equorum* V. g. in tot ternarios, erunt ternarij *Nũmorum* tot vices, quot duenarij *Lapidum* ex hypotheſi. Sed inſuper erunt omnes duenarij eædem partes reſpectu ternariorum. Cum enim omnes tum duenarij inuicem, tum ternarij inuicem ſint æquales fit, vt duenarius tot vnitates habeat reſpectu vnius ternarij, quot alius duenarius reſpectu alius ternarij. Ergo ſi coniungantur omnes duenarij ſimul, vt fiant 8. vt priùs numerum *Lapidum*, & ternarij quoque ſimul vniantur, vt fiant 12. *Nũmorum*, vt prius eadem pars, ſeu partes eædem manebunt ex 5. propoſ. & 6. huius, quæ vnus vnius, nempe quæ duenarij *Hominum* reſpectu ternarij Equorum.

THEOR. VIII. PROPOS. X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars, aut partes eſt ſecundus quarti.

SIt primus numerus *Hominum* 6. qui ſit partes ſecundi numeri 9, Sitque alter tertius numerus 8. *Equorum*, qui ſit partes num. 12. quarti.

I.	6 Hominum	II.	9.
III.	8. Equorum	IV.	12.

Dico. Quod primus numerus Hominum tertio Equorum eadem pars eſt, ſeu partes, quæ 9. ſecundus numerus numeri 12. quarti.

Probatur. Nam diuiſus in ſuas partes 6. numerus *Hominum* iuxta quas capit in 9 nempe in 2. ternarios, & 8. *Equorum* iuxta quas capit in 12. nempe in 2. quaternarios ſingulæ erunt ſui totius pars, quia 6. *Hominum* numerum habet tot ternarios, quot *Equorum* 8. quaternarios, Et inſuper erunt eadem pars, tam ternarius numeri 9. quam quaternarius numeri 12. ex hyp. Viciſſim ergo ex anteced. eadem pars, vel partes duenarius erit quaternarij, quæ 9 numeri 12. Ergo ſi iterum iungas duos ternarios *Hominum*, vt ſint 6. ſimulque iungas duos quaternarios *Equorum*, vt ſint 8. vt priùs ita erunt ex 5. & 6. prop. hu. iuncti ternarij 6. ad iunctos quaternarios 8. vt vnus 3. ad vnum 4 & ideo, vt 9. ad 12.

Nam, vbi ſi numerus numeri fuerit pars, aut partes, & alter alterius eadẽ pars, ſeu partes ſimul vterque vtriuſque eadem pars erit, vel partes, quæ vnus vnius.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum.

LIcet modi argumentandi vniuerſaliter ſupra oſtẽſi ſint l. 5. Quia tamẽ in quãtitate diſcreta ſpecialibus rationibus comprobari poterant, noluit Euclides eos præterire; quippe, cum proprietates quãtitatis diſcretę oſtendere apud ſe cõſtitutum habuerit, & illi præcipuum locum inter paſſiones numerorum inuenirent, ad eas penitùs oſtendendas etiam modos ipſos demonſtrationibus quantitatis diſcretæ naturæ addictos proſequi neceſſarium fuit.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIt numerus aliquis totus 21. ad 24. vt 14. ablatum à 21. ad 16. ablatum à 24.

Totus	21.	ad totum	24.
Vt ablatum	14.	ad ablat.	16.
Reliquum	7.	ad reliq	8.

Dico, quòd reliquum 7. erit in eadem proportione ad reliquum 8. vt 14. ad 16.

Probatur. Nam ex definitione erit totus pars, vel partes totius, vt ablatus ablati. Ergo, & reliquus reliqui ex 7. & 8. prop erit pars eadem, aut partes ablatus ablati, vt totum totius. Ergo dicent eandem proportionem; cùm proportio numerica in eo conſiſtat, quòd vnus reſpectu alterius ſit eadem pars, vel partes, & cęt. vt ex definit. 1. conſtat.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si ſint quicumque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Series	I.	3	2	5	collecti	10
Series	II.	9	6	15	numeri	30

SInt duę numerorũ ſeries, quorum numeri ſint proportionales ex ordine V. g. In prima ſerie 3. 2. 5. in ſecunda 9 6. 15. ita vt primus 3. referatur primo 9. vt ſecundus 2. ſecundo 6. & tertius 5. tertio 15.

Dico collectos numeros primæ ſeriei numeris collectis ſecundæ ſeriei eadem proportione referri, quam vnus eorum ad alium poſſidet.

Probatur. Numeri, qui dicunt proportionem ſunt eædem partes, vel eadem pars ad inuicem, vt ſunt numeri primę ſeriei, cum numeris ſecundæ ſed ex 5. & 6. propoſ. numeri, qui ſibi inuicem ſunt eadem pars, vel eædem partes, ſi vniantur, & colligantur, ſunt etiã eadẽ pars, vel eadem partes

tes

tes vnũ ad alterum ſit collecti, vt erat vnus vnius: Ergo 10. numeri primę ſeriei collecti erũt eadem pars, ſeu partes numerorũ 30. ſecundæ ſeriei collectorum, vt vnus 3. primæ ſeriei ad alterũ correſpondetem 9. in ſecunda. Igitur eum adhuc perſeuerent eædem partes, ſeu pars collecti eadem proportione, quâ ſinguli ſe reſpicient.

THEOR. IIJ. PROPOS. XIII.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, & viciſſem proportionales erunt.

4 6
8 12

SIt 4. ad 6. quemadmodum 8. ad 12. *Dico eos inuicem fore proportiales.*

Probatur, ex huius 9. vel 10. propoſ. Quia primæ combinationis antecedens numerus 4. & fundamentum relationis eſt eadem pars, ſeu partes ac 8. in ſecunda combinatione fundamentum itẽ, & antecedens; ſicut terminus, & conſequens in prima combinatione 6. eſt ad terminum, & conſequentem 12. in ſecunda combinatione. Sed qui ſunt viciſſem eadem pars, ſeu partes dicunt proportionem ex definit. 1. Ergo cum ſint viciſſem eædem partes viciſſem erunt proportionales, viciſſem vero ſignificat, quod fundamenta relatio num dicant eam proportionem inuicem, quam termini.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si ſint quotcunque numeri, & alij ijs æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Series I.	3	5	4	Ergo vt	3	ad	4
Series II.	9	15	12		9	ad	12

SInt duæ ſeries numerorum prima 3. 5. 4. Secunda 9. 15. 12. qui bini, & in eadem ratione ſumantur, nempe primus 3. ad ſecundum 5. ſit in prima ſerie, veluti 9. ad 15 in ſecunda ſerie: Sic in prima ſerie, ſit 5. ad 4. vt in ſecunda eſt 15. ad 12. Dicit, *quòd etiam extremi, tum primæ, tum ſecundæ ſeriei in eadem ratione erunt.* Primuſque 3. tertium numerum 4. eadem proportione reſpiciet, quâ 9 reſpicit 12.

Progreſſ. 1. Nam ex hypotheſi, vt primus 3. in prima ſerie ad ſecundum 5; ſic in ſecũda primus 9. ad ſecundum 15. & vt 5. ad 4. ſic ponitur 15. ad 12. Ergo permutando 3. erit ad 9. vt 5 ad 15. Rurſuſque vt 5. ad 15. ſic 4. erit ad 12. Ergo ex 5. & 6. propoſ. erunt etiam eadem pars, vel partes 3. numeri 9. quæ 5. numeri 15. Sic quoque eadem pars, vel partes 5. numeri 15. quæ 4. numeri 12. Quapropter eadem pars, vel partes erit 3. numeri 9. quas 4. numeri 12. Siquidem ſunt eadem pars, vel partes alter reſpectu alterius ſimiliter, ac eſt 5. numeri 15. Propterea etiam ſimiliter erit pars, vel partes 3. numeri 9 ſicut 4. numeri 12.

Cum ergo ſint inuicem numeris 3. eadem pars. vel partes numeri 9. quæ 4. numeri 12. ſequitur ex definitione 1. quod 3. ſit ad 9. vt 4. ad 12.

Progreſſ. 2. Cum itaque 3 reſpondeat proportione ad 9. eadem, quâ 4. reſpicit 12. Ergo rurſus permutando 3. erit ad 4. vt 9. erit ad 12.

COROLLARIVM

IN numeris itaque licebit argumentari *ex æquo*, & poſitis tribus numeris, vel pluribus, qui in eadem ratione bini, & bini; ac alij tres, ſeu plures ſumantur, poterit argui eſſe primum proportionis fundamentum ad vltimum terminum in prima ſerie, vt primum fundamentum ad vltimum terminum in ſecunda ſerie in proportione reſpondet.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Si vnitas numerum quempiam metiatur; æquè autem alter numerus alterum quẽdam numerum metiatur, & viciſſim vnitas tertium numerum metietur, ac ſecundus quartum.

LIcet vnitas numerus non ſit ſecundùm multos, eaſdem tamen proprietates, ac numerus præter pluritatem poſſidet, & maximè, quòd ſit pars alterius numeri V.g. 4. quemadmodum alter numerus 4 pars erit numeri 12. Quare idem verificabitur de vnitate, quod dictum eſt propoſ. 9. & 13. de numeris, abſque eo quod eandem demonſtrationem hic repetamus, & hoc ne dum intelligendum in hac propoſ. Sed in omni alia, vbi ſit comparatio numeri ad numerum: Nam quilibet numerus numeri menſurati ſit vnitas: V. g. 3. numeri 9. fiunt tres ternarij, ſicut in ipſo 3. ſunt tres vnitates. Dicit itaque Euclides, quod ſi 1. metiatur 3 ſicut 4. metitur 12. quòd vnitas quoq; metietur 4. ſicut 3. metitur 12. Quòd eſt dicere, quod ſi ſit 1. ad 3. vt 4. ad 12. quod etiam erit viciſſem 1 ad 4. vt 3. ad 12. ex propoſ. 13.

THEOR. VI. PROP. XVI.

Si duo numeri mutuò ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

6 4
24

DVo numeri 6. & 4. ſe ſe mutuò multiplicantes faciant aliquem.

Dico, *quòd ſiue 4 multiplicet ipſum 6. ſiue ipſe numerus 6. multiplicet 4.* numerum eundem prodire, vel duos numeros æquales V. g. 24 & 24.

Probatur. Tot erunt in producto 24 quaternarij, ſi 6. multiplicet 4 quot in numero 6. vnitates ex def. 15. tr. 8. & ita vnitas metietur 6. ſicut 4. metitur productum 24. Quare viciſſim ex præc. ita vnitas metietur 4. ſicut 6. numerum productũ 24 Quia verò etiam 4. multiplicat 6. Ergo productus numerus V.g. Ouium cõtinebit 6, quoties ſunt in 4. vnitates; cùm ergo in hoc poſteriori producto Ouium genito à 4. multiplicatore numeri 6. toties contineatur ſenarius, quot in 4. vnitates, & cùm 6. multiplicabat 4. ſenarius quoq; continebatur toties in producto 24. quoties in 4. erant vnitates, vt oſtenſum eſt; Ergo ſenarius per æquales vices menſurat productum 24. & hoc productum Ouium: Quapropter hoc productum Ouium erit 24. ex pr. 3. tr. 8.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Eſt 6 ad 8
Multiplicans 4
Vt 24 ad 32

SIt numerus 4. qui multiplicet 6. & multiplicet 8.

Dico, quod producti 24. *&* 32. *ita ſunt inuicem in proportione, vt* 6. ad 8. *multiplicati, quos* 4. *multiplicat.*

Probatur. Nam 6. continetur tot vicibus in 24. quot 8. in 32. cum tot vicibus contineatur, quot vnitates ſunt in 4. ex hypotheſi. Ergo ex defin. 20. dicent multiplicati cũ ſuis productis proportionem eandem cum ſint productorum eædem partes, & erit 6. ad 24. vt 8. ad 32. Ergo ex 13. propoſ. & ad inuicem, viciſſimque dicent proportionem, & ita erit 6. ad 8. multiplicati, ſicut producti 24. ad 32.

THEOR. VIII. PROP. XVIII.

Si duo numeri numerum quendam multiplicando fecerint aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Ita 6 8
Multiplicatus 4
Vt 24 32

SIt numerus 6. qui multiplicet 4. quem & 8. multiplicet.

Dico 24. *&* 32. *productos eſſe ita ad inuicem, vt* 6. *&* 8. *qui multiplicauere numerum* 4.

Probatur. Quia ex 16. h. producti erunt equales etiam ſi 6. & 8. non eſſent multiplicatores ſed 4. eos multiplicaret, ſed ex anteced. ſi vnus numerus duos multiplicat productus ad productum; ita eſt vt multiplicatus ad multiplicatum. Ergo idem ſequetur, ſi duo numeri vnum eundemque multiplicent, ideoque 6. erit ad 8. vt 24. ad 32.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & vltimo ſit numerus æqualis eſt ei, qui ſit à medijs.

Vel ſi numerus, qui emergit ex multiplicatione primi cum vltimo ſit æqualis producto ex medijs, illi numeri erunt proportionales.

SIt numerus 2. ad numerum 3. vt numerus 4. ad numerum 6. in proportione refertur.

Dico primò; quod multiplicatus primus 2. *cum vltimo* 6. *generat numerum æqualem genito ex multiplicatione mediorum* 3. *&* 4.

2. ad 3. vt 4 ad 6. Genitus 12.

Id verò demonſtratur. Etenim primus numerus 2. multiplicet 4. medium, & faciat numerum quendam *Ouium* V. g. 8. Cum ergo idem numerus multiplicet quoque extremum 6. ex hypotheſi & generet V. g. numerum *Hominum* 12. erit genitus *Ouium* 8. ad genitum *Hominum* 12. ex prop. 17. huius, vt generantes 4. & 6. per eundem numerum 2. multiplicati, & ideo etiam vt 2. ad 3. cum ex hypotheſi ſit eadem ratio.

Rurſus: quia ex hypotheſi 4. multiplicat 3. & generat numerum *Equorum*, ex effectione autem 4. etiam multiplicat 2. & producit numerum *Ouium* 8. Ergo 8. dicet eadem proportionem ad numerum *Equorum*, ac generantes 2. & 3. ideoque vt 2. ad 3. ita 8. ad numerum *Equorum*. Cum numerus *Ouium* 8. dicat proportionem ad numerum *Equorum*, & *Hominum*, quam 2. ad 3. ſeu 4. ad 6. quæ ex hypotheſi eſt eadem proportio. Et ideo, cùm dicat idem numerus ad eos proportionem eandem, erit eorũ, vel pars, vel partes eædẽ. Quare geniti erunt æquales, ex 1. pr. tr. 8. cùmque genitus ex 2. & 6. ſit 12. numerus *Hominum*, etiam numerus *Equorum* ex 3. & 4. genitus erit 12. cui eſt eædem partes numerus 8. *Ouium*.

Dico 2. Quod, ſi numerus productus à primo, & vltimo ſit æqualis producto ex medijs, *eos producentes numeros fore proportionales, & multiplicantes eſſe inuicem, vt multiplicati*: Sic numeri Hominum, & *Equorum*, ſi ſint æquales, erit 2. numerus multiplicans in genito *Hominum* ad multiplicantem 3. in numero *Equorum*, vt multiplicatus 4. in eodem ad multiplicatum 6. in numero Hominum ita, vt reciproca ſit relatio.

Probatur. Nam idem numerus *Ouium* ad eoſdem numerum inquam *Hominum*, & *Equorum*, vt pote ad æquales eandem dicit proportionem, & eam ipſam ex propoſ. 16. quam multiplicantes ad multiplicatos: quare ita erit 8. ad numerum 12. Hominum, vel Equorum, vt 2. ad 3. per numerum 4. generantes 8. Ouium, & Hominum numerum 12. vel vt 4. ad 6. per numerum 2. generantes 8. *Ouium*, & 12. *Equorum* numerum: Quare cum 2. ad 3. ſit in eadem proportione, ac *Oues* ad *Homines*, & in ipsâ eâdem ſit 4. ad 6 etiam inuicem erit eorũ eadẽ proportio ex prop. 16. l. 5. h. & ita erunt 2. ad 3, multiplicantes, vt 4. ad 6. multiplicati.

THEOR. X. PROPOS. XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur æqualis eſt ei, qui à medio efficitur.

SIt 2. ad 4. vt 4. ad 12. Medius numerus eſt 4. qui vt duplex æqualis vſurpatur. Vnde hæc eſt eadem propoſitio, vt prior eademque paritas. Nam in alio non differt; niſi quod medij numeri hic ſunt æquales vt 4. & 4. ibi vero inæquales.

THEOR.

THEOR. XI. PROPOS. XXI. Eucl. 22.

Si fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales: qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

	2	3	4	Ergo		2 ad 4	
6	8	12			vt	6 ad 12	

SInt duæ ſeries numerorum Vna 2. 3. 4. & altera 6. 8. 12. quarum numeri bini ſumantur: Reperiaturque eorum proportionem eſſe perturbatam: nimirum primos binos 2. ad 3. prioris ſeriei dicere inuicem eam proportionem, quam 8. ad 12. bini extremi ſecundæ ſeriei, & extremos binos peioris ſeriei 3 ad 4. dicere eam proportionem, quam duo primi 6. ad 8. poſterioris ſeriei.

Dico, quòd ex æqualitate in eadem ratione exiſtant.

Progreſſ. 1 Probatur. Ponitur ex hypotheſi 2. ad 3. vt 8. ad 12 Ergo ex 19. propoſitione, ſi multiplicentur inuicem extremi numeri 2. & 12. & medij 3. & 8. dabunt genitos æquales 24 & 24.

Progreſſ. 2. Sic quia in hypotheſi ponitur 3. ad 4. vt 6. ad 8. ſi eadem multiplicatio fiat extremorum 3 & 8. & mediorum 4. & 6. prodibunt numeri geniti æquales inter ſe. Ergo etiam cum priùs genitis.

Siquidem etiam hic inuicem ſe multiplicant 3. & 8. in vna multiplicatione ſicut progreſſu primo. Quare ſicut ibi producebant 24 ſic, & hic producent, cui genitus numerus ex 4 & 6. erit æqualis, & conſequenter genito primo ex numero 2. & 12. Ergo ex 19. propoſitionis parte ſecunda dicent proportionem ad inuicem generantes numeri, quæ vocatur ex æqualitate, & ita reſpondebit proportione 2. ad 4. in prima ſerie, vt 6. ad 12. in ſecunda medijs numeris poſthabitis 3. & 8.

Quod ſi fuerint plures numeri, quàm tres V.g. 2. 3. 4. 8. pro vna ſerie, & 3. 6. 8. 12. ita vt ſint etiam 4. ad 8. vltimi vt 3. ad 6. primi, idem prorſus ſequetur: Nam cùm ſit oſtenſum; ita eſſe 2. ad 4. vt 6. ad 12. relictis medijs 3. & 8. conſequenter erunt ſolum tres numeri pro vna ſerie 2. 4. 8. & pro altera 3. 6. 12. quorum proportio perturbata erit 2. ad 4. vt 6. ad 12. & 4. ad 8. vt 3. ad 6.

2. 4. 8.
3. 6. 12.

Vnde eadem, quæ ſuperiùs valebit demonſtratio: Idem etiam oſtendetur in quinque numeris, ac in quatuor etiam ſi numeri ſint fracti.

Et hæc Euclides de proportionibus numerorum. Verum adſunt etiam proportiones, quas libro 7. vniuerſaliter probat de quacunque quantitate, & quas ex intimis principijs Arithmeticis Clauius hic adducit, qui modi. cùm ſundent argumenta, quæ ex proportionibus petuntur ob eorum vtilitatem, viſum eſt non prætere.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si quatuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt.

NAm detur 4. qui ſit ad 10. vt 12. eſt ad 30.

4 ad 10	Ergo		10 ad 4
vt 12 ad 30		vt	30 ad 12

Dico, Quod conuertendo 10. *erit in eadem proportione ad* 4. *vt* 30. *ad* 12.

Probatur. Ponitur 4. ad 10 in eadem proportione, quâ 12. refertur ad 30. Ergo ex 13. propoſ & viciſſim proportionales erunt. Eritq; 4. ad 12. vt 10. ad 30. Quia itaque refertur 10. ad 30. & 4 ad 12. Ergo rurſus viciſſim proportionales erunt; eritque 10 ad 4. vt 30 ad 12. Ita enim proportionem conuertimus: dum terminos pro fundamentis relationum ſumimus, & conſequentia pro antecedentibus.

THEOR. XIII. PROP. XXIII.

Si compoſiti numeri proportionales fuerint, & diuiſi proportionales erunt.

COmpoſiti numeri proportionales ſunt; cùm totum refertur ad partem ſuam, vt aliud totum ad aliam partem ſuam. Sit ergo 9. qui referatur ad ſuam partem 3. vt 15. refertur ad ſuam partem 5. diuidantur iſti numeri per eaſdem partes ſuas, auferanturque partes 3. à 9. & erit 6. Rurſus 5. à 15. & erit 10.

Vt	9 totum ad 3 partem	Ergo	vt compars 6 ad 3
	15 totum ad 5 partem		ſic compars 10 ad 5

Dico, quod pars 3 refertur ad reliquum 6. *vt pars altera* 5. *refertur ad reliquum ſuum* 10.

Probatur. Quia ex prop. 11. ſi totum ad totum ſe gerat vt ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit. Sed numeri V. gr. 3 & 5. ſunt ablata 6. & 10. ſunt reliqua: Ergo ſe habent prorsùs eodem pacto vnum ad aliud correſpondens, 3. nimirum ad 5. & 6. ad 10. vt totum 9. ad totum 15. ergo, & inter ſe eodem pacto ſe habent, vt eum toto; quia quæ ſunt eadem vni tertio ſunt eadem inter ſe.

THEOR. XIV. PROP. XXIV.

Si diuiſi numeri proportionales ſint. Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

Vt	pars	7	ad	compartem	3
Ita	pars	14	ad	compartem	6
Ergo vt	pars	14	ad	totum	20
Sic	pars	7	ad	totum	10

DEntur numeri quatuor partes duorum integrorum V. g 7. pars prioris totius 10. qui ſit ad ſuam compartem 3. vt alterius totius 20. pars 14. eſt ad ſuam compartem 6.

Dico; quod etiam tota ſibi inuicem proportionalia ſunt ea proportione, qua partes, & quod componendo, fierit, vt 7. ad ſuam compartem 3 ſic 14. ad ſuam compartem 6. hinc etiam erit conſequenter to-

tum 10. ad 7. partem, vt totum 30. ad 14. partem.

Prob. Ponitur proportio 7. partis ad 3. compartem prioris totius vt pars 14. ad 6. compartem in poſteriori toto. Ergo ex propoſ. 13. huius erunt, & viciſſim, eritque 7. pars ad 14. partem fundamenta, vt 3. compars ad 6. compartem terminos: Quaderè ex propoſ. 12. huius, vt vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes, & ſic, vt 7. antecedens ad 14. conſequens, ſic omnes antecedentes 7. & 3. nempe totum 10. ad omnes conſequentes 14. & 6. ſimul, hoc eſt totum 20. proptereaque ex propoſ. 13. rurſus viciſſim erit 7. antecedens ad 10. antecedentem, vt 14. conſequens ad 20. conſequentem; nimirum pars ad ſuum totum, vt alia pars ad ſuum totum eadem proportione refertur; ex eò quod fuerit pars ad ſuam compartem, vt alia pars ad ſuam compartem, quod eſt arguere componendo ex definit. 25. lib. 5.

THEOR. XV. PROPOS. XXV.

Si compoſiti numeri proportionales fuerint; hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

CONuerſioni rationis locus datur, cùm totum refertur ad partem, vt aliud totum ad ſuam partem: Nam tunc poteſt argui; quòd, & altera pars ſit ad totum vt alia pars ad ſuum totum. V. g. ſit 9. pars numeri 15. & 12. pars numeri 20. & 9. referatur ſimili proportione ad 15. vt 12. ad 20.

Dicit, *quod ita quoque refertur reliquum 6. ad 15. totum, vt reliquum 8. refertur ad 20 totum ſuum.*

Vt pars 9 ad 15 totum.
Sic pars 12 ad 20 totum.
Ergo compars 6 ad 15 totum.
Vt alia compars 8 ad 20 totum.

Probatur. Nam ſi eſt pars 9. fundamentum relationum ad 15. totum, & ad terminum, vt 12. pars, & fundamentum ad 20. terminum, & totum. Ergo ex propoſ. 13. & viciſſim fundamenta 9. & 12. & partes dicent eandem proportionem, quam termini 15. & 20. tota. Quamobrem ſi eſt totus 15 ad totum 20. vt ablatus 9 ad ablatum 12. etiam reliquus 6. totius 15. ad reliquum 8. totius 20. ex 11. propoſ. erit, vt totus 15. ad totum 20. Si itaq; pars 6. vt fundamentum reſpicit relatione proportionis terminum, & partem 8. vt totum 15. tanquam fundamentum, totum 20. vt terminum: Ergo rurſus viciſſim ex 13. propor. inuicem fundamenta eandem proportionem dicent, quam termini inuicem, & ita reſpiciet totum 15. reliquum 6. ambo fundamenta; ſicut reſpicit totum 20. reliquum 8. ambo termini.

EXPENSIO IV.

De minimis, primiſque numeris.

THEOR. I. PROPOS. XXVI. Eucl. 23.

Primi inter ſe numeri ſunt minimi, qui eandem proportionem obtineant.

SIt 7. & 4. primi numeri ad inuicem. *Dico eos minimos eſſe eorum numerorum, qui proportionem ſimilem habent, quam 4. ad 7.*

Probatur. Nam ſi alius reperitur minor, quam 7. & 4. Sit ille *Equorum* quidam numerus, qui præſupponatur minor, quam 7. & *Leonum*, qui dicatur ab aduerſarijs, minor, quàm 4. dicentes tamen proportionem, quam 4. ad 7. Cum itaque proportio numerorum in eo ſita ſit, vt numerus numeri ſit eadem pars, vel partes, quam alter ſimilis eis in proportione eſt pars, vel partes alterius; ſequitur, vt debeat dari aliquis numerus, qui metiatur *Equos*, & *Leones* toties, quoties metitur 4 & 7. Vel ergo ille numerus eſt vnitas, & ita cum vnitas toties capiat in 7. quot ſunt *Equi*, & toties in 4. quot ſunt *Leones*, erunt *Equi* ſeptem, & *Leones* 4. nempe idem numerus, qui 4. & 7. non autem minor, vt volebant aduerſarij. Quod ſi non ſit vnitas; ſed aliquis alius numerus, qui 4. & 7. metiatur, ſicut *Equos*, & *Leones*: iam 4. & 7. non erunt inter ſe primi: nam primi numeri inter ſe ſunt: quorum communis menſura eſt non numerus, ſed tantum vnitas.

THEOR. II. PROPOS XXVII. Euc. 24.

Minimi numeri omnium eorum, qui habent cum ipſis communem rationem primi quoque ſunt inter ſe.

SI dentur 7. & 4 qui dicantur minimi ex omnibus, qui proportionem habent, quam 7. ad 4. *Dicit quod iſti quoque erunt inter ſe primi.*

Probaturque reducendo propoſitionem ad impoſſibile. Nam, ſi non ſunt primi, erit aliquis numerus V. g. *Hominum* communis menſura; ita quod numerus ille *Hominum* capiet toties in 7. quot in ſtabulo ſunt *Equi*, & toties in 4. quot in ſylua ſunt *Leones*. Ergo ſi multiplicetur numerus *Hominum*, per numerum *Equorum* producet numerum 7. & ſi multiplicetur idem numerus *Hominum* per *Leonum* numerū producet 4. Quamobrem ex propoſ. 17. numerus *Leonum* minor, quam 4. & *Equorum* minor quam 7. (cum multiplicati faciant 7. & 4). dicent inuicē proportionē eandē, quam 7 ad 4. Vnde 7. & 4 nō erunt minimi omnium proportionem dicentium, quam 7. ad 4. quòd *Leonum*, & *Equorum* minores numeri eandem proportionem dicant, quod eſt contra præſuppoſitum.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII. Euc. 25.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui vnum eorum metitur, numerus ad reliquum primus erit.

DEntur numeri 8. & 9. qui inuicem primi ſint, & 4. metiatur 8. *Dicit quod 4. ad reliquum 9. primus erit.*

Primi 8 9
4

Probatur. Quia. Si 4 non eſt primus ad numerum 9. metietur eos aliqua communis menſura præter vnitatem. Sit hæc menſura aliquis numerus *Hominum*, quæ metiatur 4. & 9 Hæc etiam ex 11. pronunc. metietur 8. quoniam 4. ex hypotheſi metitur 8., qui numerus 4. à numero *Hominum* metitur: quare numerus *Hominum* erit menſura numeri 9. ex præſuppoſito, & numeri 8,

vt

vt probaui; vnde 9. & 8. non erunt inter ſe primi; cùm habeant aliquem numerum *Hominum* præter vnitatem communi ipſorum menſuram, quod eſt abſurdum, cùm præſupponimus 7. & 9. primos inuicem.

THEOR. IV. PROPOS. XXIX. Eu. 22.

Minimi numeri omnium in ſua proportione æquè metiuntur alios maiores eandem proportionem habentes, minor quidem minorem, & maior maiorem.

DEntur duo numeri 2. & 3. minimi inuicem, alijque duo maiores 4. & 6. eandem proportionem habentes. *Dicit quod 2. minor æquè metitur 4. minorem, ſicut 3. maior quam 2. æquè metitur 6. maiorem, quam 4.*

Probatur. Quoniam ponitur, vt 2. ad 3. ita 4. ad 6 ex prop. 13 viciſſim proportionales erunt; nempe fundamenta proportionis dicent eam proportionem, quam termini, & ita erit quoque 2. ad 4. vt 3. ad 6. Quamobrem iuxta 1. definitionem erunt numeri minores 2. & 3. eadem pars, vel partes maiorum 4. & 6. Vnde eos metientur.

Probatur etiam, quod æquè. Quia non poſſunt eſſe eædem partes: Nam ſi dicatur, quod hoc euenire poſſit, diuidantur in eas partes, quas conficit 2. numeri 3. & ſint tot, quot *Equi* ſunt in agro, & 4. numeri 6. & ſint tot, quot *Oues* ſunt in ſtabulo. Itaque erit numerus 2. iuxta 1. definitionem ad numerum *Equorum* ſimilis in proportione, quam 4. ad numerum *Ouium*. Quamobrem ex 13. propoſ. & viciſſim ita erit numerus *Equorum* ad numerum *Ouium*, vt 2. ad 4. minor autem vtique eſt *Equorum* numerus, quam 3. & *Ouium* quam 4. quod ſint pars, vel partes horum numerorum; eo quod ſint multiplicatores partium eos componentium, & ideo neceſſario minores; quod eſt abſurdum, cùm 2. & 4. ex hypotheſi ſint minimi in hac proportione. Quare 2. erit medietas numeri 4. vel ſi aliquis alius numerus loco exempli ſubſtituatur, erit eius, vel pars tertia, vel quarta, non autem plures partes numeri 4. continebit. Sicut nec 3. numeri 6. alioquin neceſſariò darentur partes minores, quæ eandem rationem poſſiderent contra Hypotheſim.

THEOR. V. PROPOS. XXX. Eucl. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex ijs genitus ad eundem primus erit.

POnantur duo numeri 7. & 4. qui ſint primi ad 9. inuicemque multiplicentur 7. & 4. & fiat numerus 28. *Dicit quòd, & numerus* 28. *erit primus ad* 9.

Probatur reducendo ad impoſſibile. Nam, ſi 28. & 9. non ſunt inter ſe primi, metiatur eos aliquis numerus *Hominũ*, at 28. toties, quot ſũt *Leones* in campo. Itaque numerus *Leonum* multiplicatus per numerum *Hominum*, vel è contra producet 28. qui numerus producitur etiam à 4 & 7. Vnde ex 19. propoſ. reciprocé proportionales erunt, & 4. ad numerũ *Hominũ* erit, vt numerus *Leonũ* ad 7.

Progreſſ. 2. Quoniam autem 4. & 9. ex hypotheſi ſunt inuicem primi, & numerus *Hominum* metitur 9. ex præſuppoſito, ſequetur iuxta propoſ. 28. quòd etiam numerus *Hominum* ſit primus ad numerum 4. & ideo, quòd ſit minimus in ſua proportione iuxta propoſ. 26. Et hinc, quòd in hac proportione ſint numeri maiores 7. & numerus *Leonum*, qui hanc ipſam dicunt proportionem, ex progreſſu 1. Et iuxta propoſ. antecedentem quod æquè metiatur 4. numerum *Leonum* ſicut numerus *Hominum* numerum 7. Cum autem numerus *Hominum* metiatur 9. vt ex hypotheſi, & 7. vt modo ſequeretur, quòd 7. & 9. non eſſent inuicem primi; quòd communi menſura præter vnitatem metiantur contra hypotheſim.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI. Eu. 28.

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtroſque primus ſit: Etiam geniti ex primis duobus erunt primi ad genitos ex poſtremis duobus numeris.

	2	3	15
Primi		Geniti	
	4	5	8

DEntur 2. & 4. primùm, & deinde 3 & 5. Sitque primus 2. ad vtroſque 3. & 5 ſitue, & 4. ad eoſdem vtroſque 3. & 5. primus ex ſtae. Multiplicentur ſimul 2 cum 4 vt fiant 8. & 3. cum 5. vt euadant 15. *Dicit, quod etiam 8. & 15. geniti, erunt primi inuicem.*

Probatur. Nam 2. ponitur primus ad 3. & 5. Ergo ex præced. etiam genitus 15. erit primus ad eundem 2. item, quia 4. eſt primus ad 3. & 5. etiam 4. erit primus ex præced. propoſ. ad 15. Cùm igitur numerus 15. ſit primus ad 2. & 4. Ergo ex præced. etiam erit primus ad genitum ex ipſis 8. & ita 8. ad 15. primus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XXXII. Eu. 29.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſeipſum, fecerit aliquem; Geniti ex illa multiplicatione primi inter ſe erunt. Et ſi rurſus ijdem multiplicent hos Genitos, & alios numeros efficiant. Iſti denuò refecti erunt primi inuicem: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

	2. 3.	9	27
Primi		Geniti	& rurſus Geniti
	2. 3	4	8

SInt 2. & 3. qui ſe multiplicent, & 3. faciat 9. & 2. faciat 4. *Dico primò 4. & 9. eſſe primos inuicem.*

Probatur. Quoniam 2. & 2. ſunt primi ad 3. Ergo ex 30. propoſ. huius, etiam ex illis genitus 4. ad eundem 3. primus erit. Cum ergo ſit 4. primus ad 3. & ideo quoque ad aliud 3. Ergo ſi 3 & 3. ſe multiplicent; 9. Genitus ex propoſ. 30. primus erit ad 4.

Dico 2. Quod ſi rurſus 2. multiplicet 4. & faciat 8. & 3. multiplicet 9. & faciat, 27. eodem mo-

do ſint primi inuicem.

	2	9	27
Primi		ad	Geniti
	3	4	8

Probatur. Nam 2. eſt primus ad 3. ex hypotheſi & 9. eſt primus ad 2. Siquidem 3. & 3. ſunt primi ad 2. Ergo ex propoſ. 30. 9. genitus erit etiam primus ad 2. Sic vt diximus ſupra 4. eſt primus ad 3. & 9. Quare habemus duos numeros, quorum quiſque ad duos alios primus eſt, nempe 2. ad 9. & 3. & 4. ad 9. & 3. Ergo ex præced. geniti ex ipſis nempe 8. ex 4. & 2. ſic 27. ex 3. & 9. erũt inuicẽ primi, & ſic dicendum, etiamſi 2. multiplicet 8. & 3. 27. & ſic eodem modo res ſuccedet, cùm ſemper ſit eadem ratio.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXIII.

Omnem compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

PRobatur. Quia dato numero aliquo, V. g. 24 & datâ eius aliquâ menſurâ, vt 8. vel iſte 8; eſt primus, & iam habemus intentum, vel compoſitus; Si eſt compoſitus, metiatur eum numerus V. g. 2. qui ſimiliter, vel erit primus, vel compoſitus, quod, ſi primus, habemus id, quòd volumus, ſi non primus metietur eum aliquis alius numerus; cùmque in numeris diminuendo non poſſimus progredi in infinitum; tandem in aliquo numero primo quieſcendum erit, vt eſt 2. reſpectu numeri 24.

THEOR. IX. PROPOS. XXXIV.

Omnis numerus, vel eſt primus, vel eum aliquis primus numerus metitur.

PRobatur ex antecedenti, quia ſi non eſt primus erit compoſitus, & ideo aliqua menſura primi alicuius numeri tandem menſurabitur.

PROBL. I. PROPOS. XXXV.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SInt, quotcunque numeri 6. 9. 15. habentes quaſcumque proportiones, ſiue ſit eadem proportio, quæ 6. ad 9 & quæ 9. ad 15 ſiue non: iſti, vel erunt inter ſe primi, & ſic erunt etiam minimi in ea proportione iuxta propoſ 26; vel compoſiti, & ſic iuxta 2. propoſ. reperiemus maximam communem menſuram 3. quæ metiatur eos primum gemina vice ſecundum tricies, tertium quinquies Dico, *quod duenarius ternarius, & quinquenarius ſunt numeri inuicem primi in ea proportione.*

Probatur itaque primò, quod eam proportionem poſſideant.

Quoniam numeri 2. 3. 5. multiplicati per 3. faciunt numeros prædictos 6. 9. & 15. Sequitur ex propoſ. 18. quod habeant geniti qui ſunt 6. 9. & 15. eandem rationem, ac multiplicati 2. 3. 5.

Probatur quoque quod ſint minimi in ea proportione, ſi enim tales non ſunt dabuntur aliqui ipſis minores. Sint itaque tales numerus *Hominum*, *Equorum*, & *Ouium*, qui iuxta propoſ. 28. metietur ipſos 6. 9. & 15. æquè, & ideo per numerum aliquem V. g. *Leonum*. Quapropter numerus *Leonum* multiplicans numerum *Hominum* faciet 6. multiplicans autem numerum *Equorum* faciet 9. & tandem numerum *Ouium* generabit 15. Itaque ex 19. propoſ. h. quoniam duenarius multiplicatus per numerum 3. generat 6. & numerus *Hominum* multiplicatus per numerum *Leonum* generat item 6. Proportionales erunt inuicem hi numeri, & ſe gerent multiplicantes, vt multiplicati reciprocè, & erit 3. multiplicans ad *Leones* numerum multiplicantem, vt *Homines* ad 2. multiplicati, ſed *Homines* ex hypotheſi ſunt minus, quàm 2. numerus. Ergo ex prop. 29. etiã 3. numerus erit minor, quã *Leones*, qui numerus *Leonum* metitur 6. 9. & 15. propoſitos per numeros *Hominum*, *Equorum*, & *Ouium*. Quare numerus *Leonum* erit communis menſura illorum numerorum 6. 9. 15. & maior, quàm eorundem communis menſura 3. contra hypotheſim, quæ maxima ſupponitur. Itaq; alij numeri minores ipſis, nempe duenario, ternario, & quinario, qui eadem proportione potiantur, quam 6. 9. & 15. non poterunt dari.

PROB. II. PROPOS. XXXVI.

Duobus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIt primo exquirendus minimus numerus omnium, quem duo numeri primi inuicem, nempe 3. & 4. metiantur. Multiplicentur inuicem, & procreatus, puta 12. erit numerus, quem metiantur. Nam toties capiet 3. in 12. quot vnitates ſunt in 4 & 4. in 12. quot vnitates ſunt in 3. Quod verò 12. ſit minimus omnium, quem dati numeri metiantur.

Probatur. Nam, ſi fieri poteſt, aliquem alium numerum minorem V. g. *Equorum* menſuret, & numerus quidem 3. toties, quot *Oues* ſunt in campo numerus verò 4. eundem numerum *Equorum* metiatur toties quot *Canes* ſunt in platea. Itaq; multiplicatus 3. per numerum *Ouium* produtet numerum *Equorum*, & hunc eundem numerum producet 4. multiplicatus per numerum *Canum*. Vnde ex 19. pr. reciprocè relationem dicẽt multiplicati 3. ad 4. quam multiplicantes numerus *Ouium* ad numerum *Canum*, & quia etiam 4 & 3. minimi ponuntur in hac proportione metietur quoque 3. numerum *Ouium*, & 4. numerum *Canum* ex 19. propoſ.

Progreſſ. 2. Conſiderandum autem eſt rurſus, quòd numerus 3. multiplicans numerum 4. facit 12. & 4. multiplicans ex hypotheſi numerũ *Ouium* facit numerum *Equorum*; erit ex 17. pr eadem proportio 4 ad numerum *Ouium*, quam 12. ad numerum *Equorum*. Sed ex primo progreſſu 4. metitur numerum *Ouium*, Ergo, & 12. metiretur numerum *Equorum*, quem poſuimus minorem, quam 12. quod eſt abſurdum.

Sint ſecundo dati numeri non primi inter ſe, vt 8. 12. inueniaturque ex prop. 33. h. minimi in ea proportione, vt ſit 2. ad 3. vt 8. ad 12. multiplicenturque iuxta 9. propoſ. extrema proportionum inuicem nempe 2 & 12. rurſuſque media, vt 3. & 8. fiet idem numerus 24. *Dico, quod iſte numerus eſt minimus, quem dati numeri metiantur.*

Quòd

Quòd autem 8 & 12. menſurent 24. clarum eſt cum multiplicati per 3. & 2. ipſum producant.

Quòd verò 24. ſit minimus omnium, quem mẽſurent, probatur eodem tenore argumenti vt ſupra. Nam ſi non eſt minimus dabitur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor ipſo, quem menſurabunt 8. toties, quot *Oues* ſunt in campo, & 12. toties, quot *Canes* ſunt in platea: Quapropter idẽ numerus fiet *Equorum*, ſi numerus *Canum* multiplicet 12. ſicut ſi numerus *Ouium* multiplicet 8. Itaque dicent eamdem proportionem ex 19. propoſ. multiplicantes inuicem, quam multiplicati, reciprocè, & ita erit 8. ad 12. vt ad numerum *Ouium* numerus Canum, & ita pariter erit 2. ad 3. vt numerus *Canum* ad numerum *Ouium* cum 2. ad 3. dicant eandem proportionem, quam 8. ad 12. Quare 2. & 3. (cum poſiti ſint minimi in ea proportione) menſurabunt quoque æquè numerus quidem 2. numerum *Canum*, & 3. numerum *Ouium*.

Progreſſ. 2. Obſeruandum rurſus eſt, quod 8. multiplicans 3. producit 24. Sicut, & numerus idem 8. multiplicans numerum *Ouium* producit numerum *Equorum*: Quare ita 3. erit ad numerum *Ouium* ex propoſ. 17. ſicut 24. ad numerum *Equorum*.

Proptereaq; cùm ex progr. primo 3. menſuret numerum *Ouium*, menſurabit quoque ex propoſ. 20. numerus 24. numerum *Equorum*, Qui poſitus eſt minor; itaque maior metiretur minorem, quod eſt abſurdum.

COROLLARIVM

Hinc fit, quòd ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci minimum numerum, quem illi menſurant. Nam demonſtratum eſt; quòd, ſi primus maior 3. multiplicans 8. compoſitum minorem, & 2. primus minor multiplicans 12. compoſitum maiorem faciunt 24. numerum minimum, quem 8. & 12. metiantur.

THEOR. X. PROPOS. XXXVII.

Si duo numeri numerum quendam menſurent, minimus quoque numerus menſuratus ab ipſis numerum illum menſurabit.

Sit 4. & numerus 6. qui menſurent 36. & numerus minimus menſuratus ab ipſis 12. (Nã 4. & 6. multiplicati per 2. & 3. primos, & minimos in eadem proportione faciunt 12. Dico, *quod hic numerus 12. metitur quoque numerum 36.*

Probatur. Nam, ſi non ita eſt; auferatur à 36. numerus 12. quoties fieri poteſt, & ſit pars ablata numerus, quidam *Hominum*, qui 12. ex æquò continebit, per hanc ablationem neceſſariò ſuperabit aliquid, quod erit minus, quã 12. ex aduerſarijs: Hoc ergo reliquum ſit quidam numerus *Ouium*. Cum itaque 4. & 6. menſurent 12. etiam menſurabũt ablatum *Hominũ*, ex numero 36. & (vt præſupponitur) cũ mẽſurent quoq; totũ 36 menſurabunt, & reliquum numerum *Ouium* ex propoſ. huius 8. itaque numerus 12. contra hypotheſim, non erit minimus, quem 4. & 6. metiantur; cùm metiantur quoq; & reliquũ *Ouium* minus, quàm 12.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

3. 4. 6. metitus 12.

Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri 3. 4. 6. metiantur. Inueniatur ex propoſ. 36. minimus, quem 4 & 3. metiantur, & ſit 12. quem etiam 6. metitur. *Dico, quod 12. eſt minimus numerus, quem 3. 4. & 6. metiantur.* Si enim eſſet aliquis minor, is eſſet V. g. quidam Hominum, ergo numerus Hominum minor, quã 12. menſuraretur quoque à numero 3. & 4. Quare 12. non eſſet minimus, quem 3. & 4. vt repertum ſunt, menſurarent.

Verùm ſi occurrat. Quòd minimus numerus, quem duo numeri menſurant, non menſuretur à tertio, vt eſt 16. qui menſuratur à 4. & 8. ſed non menſuratur à 6. tertio numero. Inueniatur minimus numerus, quem 16. & 12. metiantur, ſitq; 48. *Dico, quod iſte eſt numerus, quem tres 4. 8. & 12. metiantur.*

4. 8. 12. metitus primus 15. metitus ſecundus 48.

Probatur primò. Quod metiantur. Nam 4. & 8. menſurãt 15 hic 16. verò mẽſurat 48. Ergo, & 4. & 8. menſurant 48, ex propoſ. 10 huius.

Probatur ſecundò. Quod ſit minimus omniũ eorum, quos 4. 8. & 12. menſurant. Nam, ſi datur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor, quam 48. quem 4. 8. & 12. menſurent. Sequitur, & quòd eum menſurent 12. & 16. ſiquidem 16. menſuratur à 4. & 8. Quare ex prop. præc. num. *Equorũ* menſurabitur quoque à 16. minimo, quem illi mẽſurẽt. Ergo 48. non erit minimus, quẽ 12 & 16. menſurent contra hypotheſim, cũ 16. ex probatione menſuret numerum *Equorum* minorem, quã 48. & 12. eundẽ menſuret, vtpote tertius numerus eorũ, qui numerũ *Equorũ* ex aduerſarijs mẽſurãt.

COROLLARIVM

Si tres numeri numerum quemplam metiantur, etiam minimum; quem, illi metiuntur, eundem menſurare. Nam ſi numerus 12. & 16. menſurant numerum Equorum etiam numerus 48. ex præced. propoſ. debebit illum menſurare. Cùm à minimis numeris numerus menſuratus, mẽſuret omnem numerum ab illis minimis menſuratum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIX.

Si quiſpiam numerus numerum metiatur, menſuratus habebit partem, vel partes à menſurante denominatas.

Menſuret numerus 3. numerum 12. *Dico numerum 12. habere partes, vel partem à 3. denominatam*; nempe habere tertiam partem.

Oſtenditur. Nam 3. metiatur 12. toties, quot vnitates ſunt in 4. Ergo vt Vnitas metitur 4. ſic 3 metitur 12. Quare ex propoſ. 13. Ita quoque

viciſſim

viciſſim. Vnitas metietur 3. vt 4. 12. Et ideò eadem pars erit Vnitas ipſius 3. quæ 4. ipſius 12. Sed Vnitas eſt pars ipſius 3. à 3 denominata. Ergo etiam 12 habebit partes ab ipſo 3. denominatas; nempe partem tertiam, vel duas tertias partes, & cęt.

THEOR. XII. PROPOS. XL.

Si numerus partem habuerit quamlibet, metitur illum numerus à parte denominatus.

HAbeat numerus 15. partem 5. quæ denominetur à 3. ita, quòd 5 ſit tertia pars numeri 15. Dico, quod 5. menſurabit 15.

Probatur. Nam quot vnitates erunt in 3. tot erunt quinquenarij in numero 15. Ergo numerus quinquenarius à parte tertia denominatus metietur numerum 15.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Numerum reperire, qui minimus cùm ſit habeat datas partes.

SInt datæ partes tertia, quarta, quinta, quas inueniendus aliquis minimus numerus poſſidere debeat. Reperiatur aliquis minimus numerus, quem numerent 3. 4. & 5. iuxta partium datarum denominationem, qui erit 60. Dico numerum 60. eſſe minimum eorum, qui tertiam, quartam, & quintam partem habent.

Probatur. Nam quia 3. 4. & 5. metiuntur numerum 60. clarum eſt, quod numerus 60. ex præced. propoſ. habet partes à 3. 4. & 5. denominatas.

Quod verò ſit minimus eorum, qui tales partes habent.

Probatur. Nam ſi dicatur eſſe numerum aliquem Hominum minorem, qui tertiam, quartam, quintam partem habeat, metietur eum numerus 3. 4. & 5. & ſic non erit 60. minimus numerus, quem 3. 4. & 5. menſuret. Cum menſurent quoque numerum Hominum minorem numero 60.

THEOR. XIII. PROPOS. XLII.

Primis quibuſcumque numeris propoſitis ſemper plures vltra propoſitos poterunt inueniri.

SInt propoſiti numeri 2. 3. 5. primi inuicem. *Dico quòd vltra ipſos inuenietur aliquis alius.* Nam ſit numerus metitus à propoſitis 30. & addatur vnitas, & fiant 31. Iſte numerus, vel eſt primus cùm propoſitis; vel non. Si eſt primus habemus, quod volumus; inueniri nempe alium aliquem primum numerum præter propoſitos, Si non eſt primus ex propoſ. 33. eum aliquis primus numerus metietur. Menſuret eum numerus Equorum. Iſte, vel eſt idem cum primis, & eſt, vel 2. vel 3. vel 5. & ſic menſurabit totum 31. ex hypoteſi, & ablatum 30. vt vnus ex dictis. Ergo & reliquum 1 quòd eſt abſurdum cum numerus vnitatem non metiatur, vel eſt diuerſus à prædictis, & iam intentum habemus.

COROLLARIVM.

ELiceſes modum reperiendi numeros primos; Silicet repetendo primum numerum, quem dati numeri metiātur, & illi repetto addendo vnitatem, nam ille erit primus ad inuentos.

TRACTATVS XI. IN VIII. LIBRVM EVCLIDIS

PARS SECVNDA.

De ſpeciali Numerorum proportione.

HIc liber agit iam non de proportionibus numericis in vniuerſali; ſed de ipſis in particulari: Et primò de proportionibus numerorum ſimplicium. Secundò de proportionibus numerorum figuratorum, quorum inquam vnitates ſi ordine diſponantur, figuram conſtituant. Vnde operæ pretium erit priùs horum numerorum perfectam habere notionem.

EXPENSIO I.

De principijs.

DEFINITIO I.

CVm duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitus numerus planus apellabitur, numeri verò hunc generantes latera dicentur.

Planus

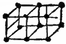
Planus dicitur numerus ortus ex duorum multiplicatione; quia ſecundùm ſuas vnitatea ordine diſpoſitas parallelogrammum conſtituit, vt 3. & 4. faciunt 12. Poteſt verò idem, & vnus numerus plura habere latera; cùm ex pluribus multiplicationibus generari queat, vt 12. babet latera 3. & 4 ſic 2. & 6. vt ex aſteriſmis ordinatis conſtat.

* * * *
* * * *
* * * *

DEFINITIO II.

CVm verò tres numeri mutuò ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus, erit ſolidus dicetur, & generantes tres numeri latera dicentur.

Quia nimirum, ſi vnitates eius diſponantur, vel ſumantur tanquam partes ſolidæ alicuius ſolidi, ſolidum conſtituent, V. g. ſi 2. multiplicet 2. facient 4. & ſi 4. multiplicet 3. facit 12. quæ vnitates ſolidum conſtituunt, vt hìc videre eſt.



DEFINITIO III.

QVadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis, vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

Nam eius vnitates in longum, latumque diſpoſitæ quadratum conſtituunt. Sic numerus 25. ex 5. in 5. procreatus, dicitur numerus quadratus.

Numerus vero generans dicitur latus, ſeu radix quadrata, quæ, vt exquiratur, ſuo loco oſtendendum erit.

DEFINITIO IV.

CVbus numerus eſt, qui æqualiter æqualis æqualiter, vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

V.g. 125. qui ſub tribus 5. ſe multiplicantibus continetur: ſic 5. in 5. producit 25. & rurſus 5. in 25. producit 125. qui numerus cubus appellatur, & numeri producentes dicuntur latera, ſeu radix cubica, de qua ſuo loco agendum.

DEFINITIO V.

SImiles ſolidi numeri, & plani ſunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero ſimilis ſit, non requiritur, quòd omnia eius latera, ex quorum multiplicatione generatur ſint proportionalia omnibus lateribus, ex quibus alius generari poteſt ſic 6. & 24 ſunt proportionales; quòd ita ſit 2. ad 3. latera numeri 6. vt 4. ad 6 latera numeri 24. licet numerus 24. habeat alia latera; nempe 2. & 12. ſic 3. & 8., quæ lateribus 2. & 3. non proportionantur. Sic etiam ſolidus ſolido ſimilis erit; ſi aliqua latera vnius, lateribus alterius proportione reſpondeant, licet alia inueniri poſſint quæ talia non ſint; ſic 24. & 192, ſimiles ſunt, quòd latera 24. numeri ſint 2. 3. 4. quæ ita ſunt inuicem, vt 4. 6. 8 latera numeri 192. licet adſint alia latera numeri V. g. 192. quæ non ita ſe habeant; vt 6. 8. 4.

EXPENSIO II.

De minimorum numerorum proportionibus.

QVia omnes numeri licet ratione non tamen proportione correſpondent. Ideo primo videndum quinam numeri inter ſe primi ſint, quibus poſſint inueniri numeri proportionales, & etiam tradere modum illos inueniendi, quod in hac Expenſione operi demandatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales: extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint, ipſi omnes minimi in ea proportione erunt.

SInt numerorum deinceps proportionalium nempe continuè 8. 12. 18. 27. Dico quòd *ſi extremi* 8. *&* 27. *ſint primi inuicem: quòd etiam erunt dati omnes numeri minimi in ea proportione.*

Probatur. Nam dentur 4. numeri minores ipſis, ſi id eſſe poteſt *Hominum*, *Equorum*, *Ouium*, & *Leonum*. Nam cum dicant eandem proportionem inuicem etiam extrema eorum ex propoſ. 14. ſept. ex æqualitate in eadem ratione erunt, & ita erit numerus *Hominum* ad numerum *Leonum*, vt 8. ad 27. Quare cum 8. & 27. ſint primi inuicem ex hypotheſi menſurabunt ex 29. propoſ. ſept. 8. quidem *Homines*, & numerus 27. *Leones*: nempe maior, vt ponitur 8. *Homines* numero minores, & 27. maior *Leones*, qui ſupponuntur pauciores.

PROBL. I. PROPOS. II.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos in datâ ratione, quotcunque iuſſerit quiſpiam.

SIt data ratio, quam habet 2. ad 3. Et iubeamur primo inuenire tres numeros minimos ſucceſſiuè proportionales in illâ datâ proportione. Numerus 2. multiplicetur in ſe, & fiat 4. Deinde cum numero 3 & fiant 6, tandem 3. in ſe, & fiat 9. Dico 4 6 9 eſſe minimos in ea ꝓportione.

Probatur autem primò. Quòd ſint proportionales. Nam, enim numerus 2. multiplicet ſe, & 3. ex propoſ. 17. ſept. erit, vt ipſe 2 ad 3 ita producti 4. ad 6. Item cum numerus 3. multiplicet 2. & ſe erit vt 2. ad 3. multiplicantes, ita in proportione erunt producti 6. & 9.

Probatur ſecundò. Quod etiam ſint inuicem primi ex propoſ. 32. lib. ſept. Nam extremi 4. & 9. procreati ſunt ex numeris primis inuicem, cum minimi ſint in ea proportione multiplicati in ſe. Ergo, & extremi 4. & 9. erunt primi, & ideo minimi in ea proportione. ex propoſ. ant. Quare etiam medij erunt minimi in ea proportione ex eadem propoſ. anteced.

Iubeamur ſecundo ex ijs repertis, inuenire alios minimos in ea ꝓportione fiant ex 2. in tres inuentos 4. 6. 9, multiplicato, numeris 8. 12.

& 18. Deinde ex 3. in vltimum 9. fiat 27. Dico *rurſus* 8. 12. 18. 27 *eſſe minimos in ea proportione*.

Probatur primò. Quod ſint proportionales. Nam ex propoſ. 17. ſeptimi, numerus 2. multiplicans 4 6. & 9. facit aliquos 8. 12. 18. ipſi geniti in eadem ratione erunt, quam 4. ad 6. & 6. ad 9. quæ quoque eſt eadem, quam dicit 2. ad 3. Sic pariter 3. multiplicans 9 fecit 27 & 2. multiplicans item 9. fecit 18. ex eadem propoſ. 18. & 27. in eadem ratione erunt, quam 2. ad 3. Ergo omnes quatuor numeri nuper reperti 8. 12. 18. 27. in eâdem ratione ſunt, quam 2. ad 3.

Probatur ſecundo, quod minimi, quoque ſint. Nam 2. & 3 cum ſint primi, minimi ſunt in ea proportione, & in eadem extremi ſunt, 8 & 27. geniti ex 2. & 3 gemina vice in ſe. Quare ex pr. 32. ſept. erunt quoque primi. Quare erunt minimi in ea proportione ex propoſ. ant. quam 2. ad 3. & ſic ſemper ſuccedet, ſi in infinitum ſequaris.

COROLLARIVM I.

HInc deducitur. Quod ſi tres numeri minimi ſint continuè proportionales extremos quadratos eſſe. Nam ſunt ex definitione 18. æqualiter æquales, ſiquidem extremi, vt 4. & 9. ſunt facti, ex multiplicatione minimorum 2. & 3. in ſe.

COROLLARIVM II.

DEducitur quoque quatuor nomerorum inuentorum, ſi minimi ſint, extremos cubos eſſe, nempe 8. & 27. Nam 8 fit ex multiplicatione 2. in 2 & rurſus ex multiplicatione 2. in genitũ 4. Sic 27. fit ex moltiplicatione 3 in 3. & rurſus ex multiplicatione 3. in genitum 9. Quarè 8. & 27. ſunt numeri æqualiter æquales æqualiter. Si verò eſſent quinque, extremi eſſent quadrati quadratorum, & alij qui in Algebra explicantur.

COROLLARIVM III.

EXtremi quoque ſecundùm hanc regulam inueniri, vt 4. & 9. ſic 8 & 27. ſunt primi inuicem, vt ex 32. propoſ. lib ſept. conſtat. Nam conſurgit 4. ex multiplicatione numeri 2. in ſe. Sic 9. ex multiplicatione 3 in ſe. Quare erunt primi ad inuicem. Sic 8. & 27. conſurgunt ex multiplicatione 2. rurſus in 4. & 3. rurſus in 9.

COROLLARIVM IV.

COnſtat etiam duos minimos numeros in aliquâ ratione metiri alios quoſcunque in eadem ratione. Quia ſcilicet producuntur ex eorum multiplicatione.

PROBL. II. PROPOS. III. Euc. 4.

Ratianibus datis quotcumque in minimis numeris reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SInt datæ duæ rationes 2. ad 3. & 5. ad 6. Oporteatque reperire tres numeros minimos deinceps proportionales in datis rationibus, quod ſilicet primus ad ſecundum ſit, vt 2. eſt ad 3. & ſecundus ad tertium, vt 5. eſt ad 6. Ita fiet. Reperiatur minimos numerus ex propoſ. 36. ſept. quem metiuntur 3. & 5. ſecundus, & tertius, & fit 15. exortus ex multiplicatione 3. cum 5. quia ſunt primi inuicem; at ſi non eſſent primi, eſſet operandum, vt in ſecunda parte eiuſdem propoſ. iubemur.

Rationes	2.	3.		5.	6.
Continuè in illis	10.		15.		18. Proportionales.

Deinde tertius 5. multiplicet primum 2. & fiant 10. ſicut ſecundus 3. multiplicet vltimum 6 & fiant 18. *Dico tres inuentos* 10. 15. 18. *eſſe in ea proportione, quam poſſident* 2. *ad* 3. *&* 5. *ad* 6. *nimirum eſſe* 10. *ad* 15. *vt* 2. *ad* 3. *&* 15. *ad* 18. *vt* 5. *ad* 6.

Probatur primo, qood eandem proportionem dicant. Nam numerus 2. & 3. multiplicando 5. fecerunt aliquos; nempe 2. ex 5. numerum 10. ſicut 3. ex 5. numerum 15. Ergo ex prop. 17. ſept. erunt in eadem proportione 2. ad 3 vt 10. ad 15. ſic numerus 7. & 6. multiplicando 3. fecerunt 15. & 18. Ergo erunt in eadem proportione, ex eadem propoſitione, 5. ad 6. vt 15. ad 18.

Probatur ſecundò Quod *ſint minimi in datis rationibus*. Nam progreſſ. primo ſi non ſunt minimi erunt aliqui numeri minores ſinguli, ſingulis Qui in datis rationibus exiſtant. Sit ergo numerus *Equorum* minor, quam 10, qui ſit ad numerum *Ouium*, minorem quam 15 vt 2. ad 3. cum ergo 2 & 3. ex hypotheſi minimi ſint in ea proportione ex prop 21. ſept. metietur 2. numerum *Equorum* ſicut 3 numerum *Ouium*.

Progreſſ. 2 Pariter dabitur quoque numerus *Ouium* minor, quam 15. & numerus *Leonum* minor, qoam 18 qui ſint in eadem proportione, qua 5. ad 6. Quare 5. metietur *Oues* & 6 *Leones* ex citata prop. 29. ſept. Vnde 5. & 3. metientur numerum *Ouium* minorem, qoam 15. numerus quidem 5. vt modo probauimus: numerus verò 3. ex præc. progreſſu.

Quamobrem cùm 5 & 3 menſurent quoque 15. minimum, quem metiuntur. Sequetur, quòd numerus 15. ex propoſ. 37. metietur numerum Ouium minorem: quam 15. Cùm 15. ſit minimus eorum ex effectione, quem 5. & 3. menſurent. Quòd verò numerus maior metiatur minorem, hoc eſſe nequit.

Sint deinde ſecundo caſu tres rationes in minimis numeris 3. ad 4. prima, ſecunda 5. ad 6 tertia 2. ad 7. Et ſint inueniendi quatuor numeri in datis rationibus deinceps, ideſt continuè proportionales.

Rationes	3.	4.	5.	6.	2.	7.
Continuè proport. 15.			20.		24.	84.

* Equi, Boues, Leones n. minores

Inueniatur minimus numerus, quem menſuret numerus ſecundus 4 & tertius 5. & erit 20. Deinde multiplicetur tertius 5. cùm primo 3. nempe per vices, iuxta qoas 4. capit in 20. & gignetur numerus 15. Rurſus multiplicetur 4. cum quarto 6. nempe per eaſdem vices, penes quas 5. capit in 20 & producetur numerus 24. Erunt itaque 15 20. 24. tres numeri in data ratione continuè proportionales. Videatur igitur, an quintus numerus 2. menſuret 24. Quod ſi metiatur, vt facit 2. propoſitus, qui capit 12. vicibus in 24. per has vices multiplicetur 7. & erunt 84. Dico itaque, quod 15. 20. 24. 84. habent datas rationes.

Probatur primò. Quod ſint in datis rationibus,

bus, & quidem de tribus primis 15. 20. 24. conſtat, eum eodem modo executioni problema mandatum ſit, ac in primo caſu. De tertio verò, qui ſit ad quartum vt 2. ad 7. ſic conſtat. Nam 2. metitur 24. tot vicibus, quot 7. metitur 84. cum ambo multiplicati per 12. eos gignant. Ergo 24. & 84. ex propoſ. 18. ſeptimi erunt in iiſdem rationibus 2 ad 7.

Probatur ſecundo. Quod ſint minimi, & etiam de tribus primis res conſtat ex primo caſu. De numeris verò 24. & 84. tertiam proportionem facientibus clarum eſt, quia minor numerus dari nequit, quàm 84. qui capiat 12. vicibus 7. vt 24. capit 12. vicibus 2.

Nam ſi 20. 24. & 84. non ſunt minimi in datis rationibus 5. ad 6. & 2. ad 7. Dabitur itaque numerus quidam *Equorum*, qui ſit ad *Bouum* numerũ vt 5. ad 6. & ſit numerus Bouum ad Leones, vt 2. ad 7. qui tamen ſinguli eſſent minores, quam 20. 24. 84. Quare ex propoſ. 29. ſeptimi 5. metietur *Equos*, & 6. *Boues*. Et ea eâdem 29. propoſ. 2. metietur quoque *Boues*, vt 7. *Leones*. Quia dati numeri 2. 7. & 5. 6. minimi ſunt in datis rationibus. At 2. & 6. menſurant quoque 24. ex effectione minimum, quem poſſint metiri: ergo 24. menſurabit quoque *Boues* numerum ſe minorem ex propoſ. 37 ſeptimi, quod eſt abſurdum.

Tertius caſus eſt, ſi quintus numerus non caperet æquè in 24. vt ſi eſſet tertia propoſita proportio A 5. ad 7. reperiatur *minimus numerus*, quem A 5. & 24. metiuntur, & ſit 120. Quoties ergo 24. metitur 120. quæ vices ſunt 5. toties 15. primus numerus metiatur alium numerum nempe multiplicetur 5. per 15 & fiet 75. Item quoties 24. metitur 120. toties 20. ſecundus numerus alium numerum multiplicatus per eas vices, quæ ſunt quinque, metiatur, & erit 100. At quoties 5. metitur 120. quæ ſunt 24 toties 7. alium numerum metiatur, & ita 7. multiplicatus per 24. producet 168. Itaque 75. 100. 120. 168. erunt minimi in datis rationibus. Quod enim habeant datas rationes oſtenditur. Quia enim 15. 20. 24. metiuntur 75. 100. 120. per eundem numerum A 5. erit eadem proportio inter hos quoque, quæ erat inter illos. Illi autem 15. 20. 24. eas rationes habebant, quæ 3. ad 4. & 5. ad 6. Ergo eaſdem habebunt 75. 100. & 120

Deinde, vt 5. metitur 120. vicibus viginti quatuor, ita, & 7. metitur 168. Ergo inter 120. & 168. erit eadem proportio, quæ inter 5. & 7.

Prob. 2. Quod ſint minimi. Nam Progr. 1. ſi non ſunt tales. Dabitur aliquis numerus *Equorum* minor, quam 100. *Bouum* minor, quam 120. & *Leonum* minor, quam 168. qui tamen habebunt datas rationes.

				A	
Rationes	3. 4.	5. 6.		5.	7.
Continuè Prop.	15.	20.	24.		
Continuè Prop.	75.	100.	120.		168.
ſecundo inuenti		Equi, Boues, Leones n. minores, quam immediatè ipſis ſuperpoſiti.			

Numerus *Equorum* eſt ad numerum *Bouum*, vt 5. ad 6. & ideo 5. metietur numerum *Equorum* ex propoſ. 29. & quia & 5. & 4. metitur 20. minimum, quem poſſent metiri ea effectione, metietur quoque 20. ex propoſ. 37. ſeptimi numerum *Equorum*.

Progreſſ. 2. Quia verò oſtenſum eſt, quod ſicut 20. eſt ad 24. ſic 100. ad 120. Et ita quoque ex aduerſarijs *Equi* ſunt ad *Boues*, vt 100. ad 120. Ergo ex *Æquo*, vt 20. ad 24. ſic *Equi* ad *Boues*: Quare permutando, vt 20. ad *Equos*, ſic numerus 24. ad *Boues*. Quare ſicut ex 1. Progreſſu 20. metitur *Equos* ſic 24. metietur *Boues*.

Sed 5. menſurat etiam ipſos Boues, eo quòd præſupponatur ab aduerſarijs, quod ita ſit 5. ad 7. ſicut *Boues* ad *Leones* iuxta propor. 29. ſept. Cum itaque 24. & 5 menſurent *Boues* menſurabit quoq; & numerus 120. ex propoſ 37. ſept. quem illi minimum menſurant numerum (qualem reperimus ipſũ 120. ab initio) ipſos *Boues*: At *Boues* dicũtur minus eſſe numero, quàm 120. Ergo numerus maior 120. metietur minorem *Bouum*, quod eſſe nequit.

THEOR. II. PROP. IV. Eu. 16. l. 9.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, non erit, vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

Sint primi inter ſe 6. & 7. Dico, quod non poteſt eſſe, vt 6. ad 7. ita 7. referatur ad alium quempiam V.g. ad numerum *Ouium*.

6	vt	7
7		Oues

Probatur. Quia ex propoſ 29. ſept. Si 6. eſſet ad 7. vt 7. ad numerum Ouium oporteret, quod 6. metiretur 7. æquè, vtpote fundamentum ſecundæ proportionis 7. quẽadmodum idem 7. terminus primæ metiretur numerum Ouium, quòd eſſe nequit; cùm 6. & 7. ſint inuicem primi.

THEOR. III. PROPOS. V. Euc. 17. l. 9.

Si ſint quocumque numeri deinceps proportionales: Extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint; non erit, vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

	4	9
ad	6	Equos

Dentur 4. 6. 9. continuè proportionales quorum extremi 4. & 9. primi ſint inuicem. Dico, quòd non eſt, vt 4. ad 6. ita 9. ad alium quempiam V. g. numerum *Equorum*.

Probatur. Nam ſi ita eſſet 4. ad 6., ſi, 9. ad numerum *Equorum* permutando eſſet quoque 4. ad 9. vt 6. ad numerum *Equorum*. Quare, cùm 4. & 9. ſint primi inuicem in ea proportione 4. æquè metiretur 6 ex propoſ. 29. ſept. & 9 Equos. Quia ergo 4. menſurat 6. & ponitur, vt 4. ad 6. ita 6. ad 9. metietur quoque 4. ipſum 9. æquè ex prop. 18. tr. 8. quod eſt abſurdum.

PROBL. III. PROP. VI. Euc. 18. l. 9.

Duobus numeris datis conſiderare; an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

Sint dati numeri 4. & 7. Videndum eſt; ſi ſint primi inuicem, ſi primi ſunt, vt aſſignati. Ex propoſ. 4. huius euidens eſt, quod illis tertius proportionalis nequeat inueniri.

Quod ſi non ſint primi, vt 4. & 6. multiplicetur in ſe numerus ſecundus, vt 6. & fiant 36. Videaturque an numerus primus 4. menſuret 36. ſi menſurat, vt aſſignatus 4. qui metitur 36. per 9. dicendum eſt; quòd habeat tertium proportionalem, & quod iſte ſit numerus ille 9. per quem primus 4. menſurat genitum 36. ex multiplicatione numeri 6. in ſe.

Probatur, quod ille 9. ſit tertius proportionalis ex propoſ. 20. ſept. Nam idem numerus 36. producitur, tam ex multiplicatione numeri medij 6. in ſe, quam ex multiplicatione 4. & 9. inuicem, qui ſunt numeri extremi; ſiquidem, vt ſupponitur 4. per 9. menſurat 36. Vnde ex illa prop. 20. erit, vt 4. ad 6. ſic 6. ad 9. Quod ſi non menſurat genitum ex multiplicatione ſecundi in ſe numerus primus, vt ſi dati fuiſſent 2. & 3. & genitus ex 3. eſſet 9. quem 2. non menſurat, dicendum; tertium proportionalem non poſſe illi inueniri.

Probatur. Nam ſi ille eſſet. Eſſet V. g. numerus *Equorum*: Quare cum ponatur, vt 2. ad 3. ita 3. ad *Equos*, ex propoſ. 20 produceretur idem numerus ex multiplicatione 3. in ſe, nimirum 9. & ex multiplicatione 2. per numerum *Equorum*. Quamobrem 2. metiretur 9. mediante numero *Equorum*; quod eſſe nequit, cùm ponatur non metiri 2. ipſum 9.

PROBL. IV. PROP. VII. Euc. 19. l. 9.

Tribus numeris datis conſiderare, an poſſit illi quartus proportionalis inueniri.

SInt dati 3. numeri, quorum extremi, ſi ſunt primi: Iam nequit quartus proportionalis inueniri ex propoſ. 5.

8. 12. 18. 27.

Si verò non ſint primi, vt 8. 12. 18. multiplicandi ſunt 12. & 18. vt fiant 216. & diuidendus eſt numerus 216. per 8. vt videamus; an ex æquo menſuret 8. primus numerus numerum 216. genitum ex medijs; Si menſurat, vt in aſſignato exemplo; videndum, per quem numerum id fiat, V. g. per 27. Et tunc dicendum: tribus numeris 8. 12. 18. quartum proportionalem inueniri poſſe; ipſumq; eſſe numerum 27.

Probatur ex propoſ. 19. ſept. Nam idem numerus fit ex multiplicatione mediorum 12. & 18. qui ex multiplicatione extremorum 8. & 27. cùm 8. multiplicando 27. generet 216. ſiquidem 8. ipſum metitur per 27. ex pronunc. 7. tr. 8.

Quare 8. 12. 18. 27. erunt inuicem proportionales.

Si verò primus datus numerus non menſuret genitum ex medijs, vt ſi eſſent dati 3. 4. 10. Nam 3. primus numerus non menſurat ex æquo 40, numerum ortum à multiplicatione numerorum reliquorū 4. & 10. Tunc dicendum quartum proportionalem prædictis numeris inueniri nequaquam poſſe.

Probatur. Quoniam, ſi inuenitur, ſit illis numerus *Ouium*. quartus proportionalis. Numerus 3. 4. 10. & numerus *Ouium* ſunt proportionales: Ergo ex 19. propoſ. ſept. medij 4. & 10. producerent inuicem multiplicati 40. Et idem numerus produceretur ex multiplicatione extremorum 3. & Ouium numero; Quare 3. per numerum Ouium metiretur 40. quod eſt abſurdum cùm ponamus 3. non metiri 40.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum non primorum.

ALiqua etiam de quibuſcunque numerorum proportionibus ſunt delibanda, eaque, quę elementi vim habeant, deſeruiantque ceteris, de quibus agendum eſt.

THEOR. I. PROPOS. VIII. Euc. 8.

Si inter duos numeros medij continua proportione numeri cadant; etiam inter alios eandem rationem cum ipſis habentes totidem continua proportione cadunt numeri.

DEntur 10. & 80. inter quos medij continua proportione cadant 20. & 40. ita, quòd ſint continuè proportionales 10. 20. 40. 80. Sintque alij duo numeri, qui eandem proportionem dicant 6. & 48. quam 10. ad 80. Dico, *quò ſicut inter* 10. *&* 80. *cadunt duo medij proportionales* 20. *&* 40. *ita cadere inter* 6. *&* 48.

10. 20. 40. 80.

Quod, vt oſtendatur, aſſumantur minimi, quatuor numeri in ea proportione, in qua ſunt 10. 20. 40. 80. & ſint 1. 2. 4. 8. eritque, vt 10. ad 20. ita 1. ad 2. & ſicut 20. ad 40. ita 2. ad 4. & ſicut 40. ad 80. ita 4. ad 8. Quare ex *Æquo*, vt 10. ad 80. ſic 1. ad 8. & ita 6. ad 48.

Cumque ſint 1. & 8. minimi in ea proportione, ita menſurabit 1. numerum 10. ſicut metitur 8. numerum 80. ex propoſ. 19. l. ſept. & ex eadem propoſ. metietur etiam numeros 6. & 48. habentes eandem proportionem cum ipſis.

Quoties igitur 1. metitur numerum 6. & 8. numerum 48. toties intermedij minimi numeri 2. & 4. metiantur aliquos alios, & quia 1. metitur 6. ſex vicibus, & 8. numerum 48. vicibus item ſex, producet 2. intermedius minimus multiplicatus per eaſdē vices numerū 12. & 4. alter intermedius, item per 6. ductus numerum 24. Quamobrem geniti in eadem proportione erunt ex propoſ. 17. ſept. ac generantes per eundem numerum ſenarium multiplicatos, & ita erit 12. ad 24. vt 2. ad 4. quæ eadem eſt, ac 1. ad 2. & quæ 4. ad 8. Erunt itaque continuè proportionales 6. 12. 24. 48. vt ſunt 1. 2. 4. 8. & ideo, vt ſunt 10. 20. 40. 80. Cumque multitudo numerorum intermediantium, qui reperti ſunt 12. & 24. ſit æqualis multitudini numerorum mediantium 20. & 40. patet propoſitum: Quod tot numeri medij proportionales cadent inter duos numeros 6. & 48. quot inter 10. & 80. eandem proportionem cum eis habentes.

COROLLARIVM

HInc eſt, quod neque inter numeros duplæ proportionis, neque ſuperparticularis, neque ſuperbipartientis poſſit cadere medius proportionalis, quia caderet etiam inter numeros minimos ſimilis proportionis. Illi autem medium proportionalem recipere nequeunt. Nam dupla proportio minimorum eſt inter 1. & 2. ſuperparticularis verò inter numeros ſola vnitate diſſitos, inter quos nullus numerus cadit, vt 2. &

3. ſu-

3. ſuperbipartiens verò inter numeros, qui dualitate differunt, vt 5. & 7. inter quos ſola vnitas intercipitur, quæ eſſe nequit medius proportionalis.

Nam ſint 3. & 5. minimi in aliqua proportione ſuperbipartiente, & ſit numerus inter eos 4. qui dicatur medius proportionalis. Ergo erit 3. ad 4. vt 4. ad 5. quare ex pr. 22 l. 5. & 3. ablatus à 4. ita erit ad 4. ablatum à 5. vt reſiduum 1. à 4. ad reſiduum 1. à 5. & ideo 3. eſſet ad 4. vt vnitas ad vnitatem, quod eſt falſum, quia eſſet vt inæqualis ad inæqualem, ita æqualis ad æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IX. Euc. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continua proportione ceciderint numeri; quot inter ipſos, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri totidem, & inter ipſos medij continua proportione cadent.

16. 40. 100. 250. 625.
8. 20. 50. 125.
4. 10. 25.
2. 5.
5.

Sint numeri proportionales 16. & 625. & inter primum, & vnitatem tres medij proportionales cadant 2. & 4. & 8. ſicut, & inter ſecundum 625. & vnitatem cadant tres medij proportionales 5. & 25. & 125. *Dico, quòd, & inter ipſos, tres pariter medij proportionales inuenientur.*

Nam duo minores numeri interpoſiti 2. & 5. ſe mutuò multiplicēt, procreabunt 10. minor autem eorum 2. multiplicet tum modo factum 10. & faciet 20. tum mediocrem alterius ſeriei, nimirum 25. & faciet 50. Tandem idem numerus 2. multiplicet hos factos nimirum factum 20. & faciet 40. ſic, & factum 50. faciet 100. & tandem maiorem alterius ſeriei 125. & faciet 250. *Dico hos poſtremo factos eſſe inter datos 16. & 625. medij tres proportionales.*

Obſeruandum verò eſt in primis: Cùm 1. 2. 4. 8. & cęt. ſicut 1. 5. 25. 125. dicuntur proportionales ab vnitate, quòd ſicut vnitas metitur bis 2. ſic 2. metitur 4. & 4. 8. & cęt. ſicque vnitas metitur 5. quinq; vicibus, vt 5. 25. & 25. metitur 125. & cęt. Quia ita ponitur 1. ad 2. vt 2. ad 4. & ſic ponitur 1. ad 5. vt 5. ad 25. & cęt.

Probatur. Quia omnes 16. 40. 100. 250. & 625. habent eandem proportionem, quam 2. ad 5. Ergo ſunt continuè proportionales. Quod verò eam proportionem habeant, quam 2. ad 5. Patet nam 16. 40. 100. & 250. eandem proportionem habent ex propoſ. 17. quam multiplicati ea quibus prodiere 8. 20. 50. cùm fuerint multiplicati per eundem numerum 2. Iſti verò 8. 20. 50. eandem habent ob eandem rationem, quam 4. & 10. cum fuerint multiplicati per eundem 2. Et rurſus iſti 4. & 10. eandem, quam 2 & 5. quod hi per 2. fuerint multiplicantes, ex 18. propoſ. Et ob eandem rationem quoque 250. & 625. quem primo poſthabuimus, erunt in eadem proportione, quam 2. ad 5. cum 125 multiplicatus per 2. fecerit 250. minorem, & multiplicatus per 5. fecerit 625. Vnde omnes quinque 16. 40. 100. 250. & 625. erunt continuè proportionales, nimirum in eadem proportione, qua 2. ad 5.

EXPENSIO IV.

De numeris planis, & ſolidis.

Cvm numeri plani, & ſolidi multas inſignes proprietates conſequantur, quę maximè deſeruiunt in Arithmeticis operationibus, & lib. 10. neceſſariç ſint, ad cognoſcendam diuerſitatem quantitatis diſcretę à continua hinc, eſt quod viſa proportionibus numerorum ſimplicium; hic debeamus agere de numeris figuratis, nempe planis, vel ſolidis, & eorum proportiones agnoſcere.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 5.

Plani numeri inter ſe rationem habent ex lateribus compoſitam.

Plani	8	15
Latera	2. 4.	3. 5

Sint duo numeri plani 8. & 15. & latera primi 2. & 4. ſecundi 3. & 5. *Dico proportionem 8. ad 15. eſſe compoſitam ex proportione laterum.*

Prob. Faciant latus primi 2. & latus ſecundi 3. numerum 6. ſe mutuò multiplicando. Itaque habemus, quod numerus 2. multiplicando 4. fecit planum 8. & multiplicando 3. latus alterius plani, numeri 15. facit 6. & ideo ex propoſ. 17. l. ſept. laterio 4. ad 3. vt 8. ad 6.

Progreſſ. 1. Eadem quoque ratione, quam 3. multiplicans 2. facit 6. & multiplicans 5. fecit 15. erit eadem ratio ex citi propoſ. 2. ad 5. qua 6. ad 15. refertur. Quare 8. 6. 15. ſunt deinde proportionales in proportionibus, quibus refertur 4. ad 3. & 2. ad 5. Nam tribus iis numeris ordine poſitis, ita refertur 8. ad 6. vt latus 4. ad latus 3. & ita reſpondet in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5.

Plani numeri	8		15
Latera	4. 2		3. 5
		6 numerus ex 2 & 3	

Ita refertur 4. ad 3. & 2. ad 5.

Vt 8. ad 6. & 6. ad 15.

Sed ſi ordo laterum inuertatur, & diſponatur hoc ordine.

Plani	8		15
Latera	2. 4.		5. 3
		20	

Vt refertur 2. ad 5. & 4. ad 3

Sic 8 ad 20, vt 20 ad 15

Erit adhuc eadem ratio 8. ad 20. quæ eſt 2. ad 5. & 4. ad 3. quæ eſt 20. ad 15. Ita ſi quocunque alio ordine ea latera collocet V. g. 4. 2. 5. 3. aut 2. 4. & 3. 5. Nam 10. aut 12. producti ex medijs laterū numeris erunt ad extremos proportionales velut latera, & ita referretur 4. ad 5. vt 8. ad 10. & 10. ad 15. vt 2. ad 3. Sic referretur 2. ad 3. vt 8. ad 12. & 12. ad 15. & 4 ad 5. Ergo, cùm proportio 8. ad 15. ſit effecta ex proportione V. g. 8. ad 12. & 12. ad 15. aut ex proportione 8. ad 10. & 10. ad 15. aut ex proportione 8. ad 20. & 20. ad 15. aut ex 8. ad 6. & 6. ad 15. & hæ omnes ſint proportiones laterum diuerſimodè collatorum; patet ex def. 8. tract. 9. part. 1. proportionem planorum 8. ad 15. componi ex proportione laterum, quod, & de omnibus alijs planis valet.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Duorum ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus, & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint duo plani numeri ſimiles, ſcilicet habentes latera proportionalia aliqua. V. g. 6. & 24. Nam latera aliqua numeri 6. quę ſunt 2. & 3. ſunt proportionalia aliquibus lateribus numeri 24. nempe 4. & 6. licet, & alij ſint numeri, qui ex mutua multiplicatione producunt 6. & 24. qui proportionem non dicunt, vt eſſent 2. & 12. aut 3. & 8. latera quoque numeri 24.

Plani ſimiles 6. 24. Medius 12.
Latera 2. 3. 4. 6.

Latera itaque numeri 6. ſunt 2. & 3. & numeri 24 ſunt 4. & 6. & eadem proportione gaudet 2. ad 3. vt 4. ad 6.

Dicit, quòd inter 6. & 24. cadit medius proportionalis numerus aliquis. Nam multiplicentur terminus 3. primæ combinationis extremo, cum 4. alterius proportionis, producetur 12. *Dico hunc eſſe proportionalem medium.*

Probatur. Progreſſus 1. Quoniam ita referuntur 2. ad 3. vt 4. ad 6. permutando ita quoque erit 2. ad 4. vt 3. ad 6.

Progreſſus 2. Quoniam 3. multiplicans 2. fecit 6. & 4. fecit 12. erit eadem proportio 2. ad 4. quam 6. ad 12. & ſic quia 4. multiplicans 3. fecit 12. & multiplicando 6. fecit 24. erit eadem proportio 3. ad 6. quæ 12. ad 24. Quare proportionales ſunt numeri 6. 12. & 24. Ergo 12. eſt medius proportionalis.

Probatur ſecundo: Quòd habeat 6. ad 24. duplicatam lateris homologi ad latus homologum rationem. Latera homologa illa ſunt, quæ vtraque in eadem quantitate ſunt, fundamenta proportionis, vel termini; ita eruſt in hac 2. & 4. fundamenta, & 3. & 6. ambo termini; patet autem ex prima probatione, quod ita eſt 6. ad 12. vt 2. ad 4. & 12. ad 24. vt 3. ad 6. Quare cum 6. ad 24. eam proportionem obtineat, quæ eſt 6. ad 12. & 12. ad 24. eſt duplicata cum gemina vice repetatur eadem proportio, & eſt etiam ea, quæ laterum homologorum 2. ad 4. vt 3. ad 6. Poſſent tamen etiam alio pacto diſponi latera, vt in præc.

THEOR. III. PROPOS. XII. Euc. 19.

Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri; & ſolidus ad ſolidum triplicatam habet rationem, quam habet latus homologum ad aliud latus homologum.

Solidi 48. & 162.
Latera 2. 4. 6. & 3. 6. 9.

Sint duo numeri ſolidi ſimiles 48. & 162. & primi latera ſint 2. 4. & 6. Secundi verò 3. 6. 9. ſunt autem ſimiles; quod latus 2. ita refertur ad 4. primi, vt latus ſecundi 3. refertur ad 6. & ita latus 4. primi refertur ad 6. vt latus 6. ſecundi refertur ad 9. *Dico, quòd inter hos numeros ſolidos 48. & 162. duo medij proportionales cadunt numeri.*

Notandum verò eſt in primis; quod quia ponitur 2. ad 4. vt 3. ad 6. erit etiam permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6. & quia ponitur 4. ad 6. latus primi ſolidi, vt 6. ad 9. latus ſecundi, erit etiam permutando 4. ad 6. vt 6. ad 9. quare erit eadem proportio, vel 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. nimirum latera vnius ſolidi ad latera alterius ſolidi collata, cùm conueniant in intermedia proportione 4. ad 6.

Nunc, vt probetur propoſ. diſponantur latera in ordinem, vt placet; dummodo proportiones ſimiles in loco correſpondente ſint, vt vides.

8			48
2	4	6	72
12			
3	6	9	108
18			162

Deinde multiplicandi ſunt 2. cum 4. latera primi fient 8. ſicut 3. cum 6. latera ſecundi, & fient 18. plani numeri. Deinde terminus primi, vel conſequens 4. muliplicandus eſt cum fundamento relationis, vel cum antecedente ſecundi, qui eſt 3. & fient 12. Tandem 6. primi, & 9. Secundi hunc 12. multiplicent, & facient 72. & 108.

Probatur itaque primo: Quod hi numeri 72. & 108. ſint duo medij proportionales inter 48. & 162.

Progreſſ. 1. Quoniam itaque 4. multiplicauit 2. & 3. ſequitur ex propoſ. 17. ſeptimi; quòd eadem proportio ſit inter genitos 8. & 12. quæ eſt inter multiplicatos 2. & 3.

Progreſſ. 2. Iterum, quia 3. multiplicauit 4. & 6. ſequitur ex eadem propoſ. quòd ſint 4. ad 6. multiplicati fient 12. & 18. geniti. Quare 8. 12. & 18. ſunt continuè proportionales.

Progreſſ. 3. Solidus quoque numerus 48. reſultauit ex multiplicatione 2 in 4. ex qua prodijt numerus 8. & rurſus ex multiplicatione 6. in 8. Vnde factus eſt numerus ipſe ſolidus 48. Sic dicendum eſt de numero ſolido 162.

Progreſſ. 4. Numerus itaque 6. latus primi ſolidi multiplicans ex effectione 12. fecit 72. itaque ex cit. propoſ. 17. ita erit 48. ad 72. geniti, quæ eſt 8. ad 12. quæ eſt ex 1. progreſſu 2. & 3.

Progreſſ. 5. Sit quia numerus 9. latus tertium ſecundi ſolidi multiplicauit ex 3. progr. 18. & fecit 162. & ex effectione multiplicans 12. fecit 108. ſit vt eadem proportio ſit inter multiplicatos 12. & 18. quæ inter genitos 108. & 162. quæ vero eſt inter 12. & 18. eſt illa, quę eſt inter 4. & 6. ex 2. progreſſu.

Progreſſus 6. Tandem, quia latus tertium 6. primi ſolidi 6. & 9. latus tertium ſecundi ſolidi multiplicando 12. fecerunt 72. & 108. Sequitur ex cit. propoſ. 17. quò eadem proportio ſit inter 6. & 9. quæ eſt inter 72. & 108. Quamobrem

Concluditur: Quod ita ſit in proportione ſolidus primus 48. ad 72. quæ eſt 2. latus prioris ſolidi ad 3. latus poſterioris ex 4. progreſſu. Et quod 72. ad 108. ſit in eandem proportione, quam habet 6. latus tertium primi ſolidi ad 9. latus tertium ſecundi ſolidi ex 6. Progr. Tãdem quod 108. ſit ad 162. ſolidum poſterius, quæ eſt inter 4. latus ſecundum primi ſolidi ad 6. latus ſecundum poſterioris ſolidi ex Progr. 5. quare continuam proportionem habebunt 48. ad 72. & hic ad 108. & iſte ad 162. quam habet 2. ad 3. & 6. ad 9. & 4. ad 6. nimirum laterum vnius ad latera alterius,

quæ

quæ vt prænotauimus eſt eadem proportio.

Probatur ſecundò. Quod ſit proportio triplicata inter ſolidos 48. & 162. nam vt probatum eſt, eadem proportio 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. repetita in quatuor numeris 48 72. 108. & 162. triplicatur, & ita eſt 48. ad 72: vt 72. ad 108. & 108. ad 162.

PROBL. III. PROPOS. XIII. Eu. 20.

Si inter duos numeros cadat vnus medius proportionalis numerus, ſimiles plani erunt illi numeri.

CAdat inter 18. & 32. numerus medius proportionalis 24. *Dico 18. & 32. eſſe ſimiles planos numeros.*

Progr. 1. Sumātur duo numeri minimi in ratione, qua refertur 18. ad 24. aut quę eſt eadem 24. ad 32. ex propoſ. 35. & ſint 3. & 4. ex propoſ. 39. ſept.

18 24 32

3 4 6 8

3. & 4. metientur 18. & 24. æquè, ideſt per æqualem numerum; metiantur per 6: ideoque 3. & 6. erunt latera numeri 18.

Progreſſ. 2. Sic quoq; 3.4. metientur ea eadem propoſ. numeros 24. & 32. æquè, ideſt per ęqualem numerum 8. ideoque 4. & 8. erunt latera numeri 32.

Obſeruandum eſt autem quod idem numerus 4. in primo progr. multiplicans 6. fecit 24. & ex 2 pr. idē 4. multiplicans 8. fecit 32. Vnde 6. & 8. habebunt eandem rationem, quam 24. ad 32. quæ eſt 3. ad 4. ex 17. ſeptimi. Poterimus itaque vti permutatione. Cùmque ſit 3. ad 4. vt 6. ad 8. etiam erit 3. ad 6. vt 4. ad 8. Iam ergo patet numeros 18. & 32 eſſe ſimiles planos. Planos quidem; quia habent latera 3.4. & 6.8. ſimiles verò, quia latera, vt requirit def. 21. h. planorum numerorum, ſunt proportionalia, & eſt 3. ad 6. latera plani 18. vt 4. ad 8. plani 32.

THEOR. XI. PROPOS. XIV. Euc. 21.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales numeri; ſimiles ſolidi ſunt illi numeri.

8 12 18 27

4 6 9

2 A 2 3 B 3

CAdant inter 8. & 27. duo numeri proportionales 12. & 18. *Dico 8. & 27. ſolidos eſſe.* Sumantur tres numeri minimi in ratione 8. ad 12. vel quæ eadem ſunt 12. ad 18. vel 18. ad 27. ex propoſ. 35. ſeptimi, & ſint 4. 6. 9.

Progreſſ. 1. Quia itaque inter 4. 9. aſſumptos numeros minimos cadit vnus medius proportionalis 6. erunt 4. & 9. aſſumpti minimi in ea proportione ex præced. prop. plani. Lateraque eorum erunt ſilicet 2. & 2. latera numeri 4. & 3. 3. latera numeri 9.

Progreſſ. 2. Quia 4.6.9. aſſumpti minimi ſunt in ea proportione metientur ex propoſ. 39. numeros primò propoſitos 8.12.18.27. qui habent eandem rationem cum ipſis, & numeri quibus metiūtur erunt A 2. & B 3. Itaque 4. & 6. menſurabunt 8. & 12. per A 2. eos multiplicando & 6. cum 9. menſurabunt 18. & 27. per B 3. eos multiplicando.

Progreſſ. 3. Sed 2.2. latera numeri 4. plani ſe ſe multiplicando faciunt 4. rurſus 4. per A 2. ex ſecundo progreſſu multiplicando 4. facit 8. cùm, vt ibi 4. metiatur 8. multiplicatus per A 2. Itaque 8. numerus ſolidus erit, cuius latera erunt 22. & A 2. Sic, & 27. Nam 9. per B 3. multiplicatus ex ſecundo progreſſ. producit 27. At ipſa 9. numerus planus producitur ex multiplicatione ſuorum laterum 3. & 3. Ergo 27. erit, ſolidus ex definitione 2. h. cuius latera erunt 3. 3. & B 3.

Probatur verò; Quod ſint ſolidi ſimiles. Nam illi ſunt ſolidi ſimiles, quorum vnius latera tria tribus alterius ſunt proportionalia.

Sed talia ſunt 2.2.2. reſpectu laterum 3. 3. 3. Ergo ſolidi ſimiles erunt.

Progreſſ. 4. Quod vero talia ſint. Probatur. Nam ex 2. progr. A 2. multiplicans 6. produxit 12. & B 3. multiplicans 6. item produxit 18. Ergo erit 2. ad 3. vt 12. ad 18.

Progreſſ. 5. 12. verò, & 18. ſunt in eadem ratione, quæ 4. & 6. quia multiplicati per 3. fecerunt ipſos 12. & 18. & ideo, vt A 2. ad B 3.

Progreſſ. 6. Quia verò aſſumpti minimi ſunt extremi eorum 4. & 9. erunt quadrati ex Coroll. 1. 2. propoſ. huius, & ideo plani ſimiles, & hinc ex propoſ. 9. cadet inter illos medius proportionalis 6. in proportione laterum homologorum.

Propterea latus 2. primi ſolidi 4. & aliud latus 2. eiuſdē, dicent eandem rationem ad 3. & 3. latera ſecundi ſolidi 9. vt 4. ad 6. quæ eadem ex 5. progr. quæ 2. A ad B 3. numeros menſurantes, & latera tertia ſolidorum. Quamobrem ſi eſt 2. ad 3. vt 2. ad 3. vt 2. A ad B 3. poterimus vti *Permutatione*, & dicere, quod erit latus 2. primi ſolidi ad 2. vt latus 3. ad latus 3. ſecundi, & ita latus 2. ad A 2. tertium latus eiuſdem primi ſolidi, vt latus 3. ad latus tertium B 3. ſecundi ſolidi; quapropter ſimiles erunt iſti ſolidi.

Non potuimus autem aſſumere minimos 4. 6. 9. in proportionibus numerorū 8, 12, 18. 27. niſi extremi eſſent quadrati; quia trium minimorum numerorum in eadem proportione continuantium extrema quadrata ſunt ex Coroll. 1. propoſ. 2. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Similes plani numeri inter ſe rationem habent, quam quadratus numerus aliquis ad aliquem quadratum numerum.

DEntur duo plani ſimiles 8, & 18. Dico, *quod ſicut eſt 8. ad 18. ita ſit aliquis quadratus ad aliquem numerum quadratum.*

Probatur. Nam 8. & 18. ſunt plani ſimiles ex hypotheſi. Quare mediabit inter eos aliquis numerus proportionalis, iſte mediet, & ſit 12. Reperiāturque minimi in eadem proportione, & ſint 4.6.9. Horum extremi ex Coroll. 1. prop. 2. h quadrati erunt. Quamobrem erit, vt quadratus 4 ad quadratum 9. ita 8. ad 18.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVI. Eu. 27.

Similes ſolidi inter ſe rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

PRobatur. Nam inter 16. & 54. vtpote inter ſolidos numeros ſimiles interponantur duo medij proportionales ex propoſ. 12. huius. Eruntq; V. g. 24. & 36. Sumptis ergo quatuor numeris minimis in ea proportione, quę eſt 16. ad 24. item 24. ad 36. & tandem 36. ad 54. qui ſint 8. 12. 18. 27. vt ex Coroll. 2. propoſ. 2. huius habemus, 8. & 27. Cubi erunt. Igitur 16. ad 54. ſolidi numeri habebunt eandem rationem, quam Cubus 8. ad Cubum 27.

COROLLARIVM I.

COlligitur ex prædictis omnibus. Nullos numeros eſſe planos, vel ſolidos ſimiles, inter quos medius proportionalis cadere nequeat. Quare nulli numeri primi V. g. 11. & 17. poſſunt eſſe ſolidi ſimiles; Quia latera non obtinent, præter vnitatem, & ſe ipſum (quis V. g. ex 1. & 11. fit 11. quæ latus non ſunt, niſi impropriè, nec inter eos medius proportionalis cadere poteſt. Sic nec numeri inter ſe primi; qui quadrati non ſint, aut cubi ſimiles ſunt. Quòd, ſi dicantur eſſe planos ſimiles, cadet inter eos medius proportionalis; vel vnus, vel duo Quare cum ſint primi inuicem, & ſint tres, vel quatuor continua proportione hi erunt Quadrati, vel Cubi ex Coroll. 1. vel 2. propoſ. 2. huius, quod eſt contra poſitionem.

COROLLARIVM II.

SIc nec numeros, quorum minor primus ſit, qui ab vnitate ſolùm menſuretur, vt 3. 5. vel 7. non poſſe eſſe planos, vel ſolidos ſimiles, niſi minor menſuret maiorem; Nam, ſi non menſuret eſſent primi inuicem, & ideo non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles ex præced. Coroll.

COROLLARIVM III.

SIc, neque plani ſimiles poſſunt eſſe ij, quorum vnus Quadratus, vel Cubus ſit alter nequaquam, vt 4. & 5. vel 16. & 26. aut 8. & 10. Nam, ſi eſſent plani ſimiles haberent proportionem, quam quadratus, vel cubus numerus ad Quadratum, vel Cubum numerum. ex propoſ. 11. quod eſt contra hypotheſim.

COROLLARIVM IV.

VNde facilis eſt inuentio numerorum non ſimilium. Nam omnes numeri primi inter ſe vt 3. 5. 7. 13. Sic numeri primi inuicem 2. & 3. Sic, & numeri, quorum vnus primus eſt, & alium non metitur, vt 5. & 8. Sic, & numeri quorum vnus Cubus ſit, vel Quadratus, alter verò nequaquā, non poſſunt eſſe, aut plani, aut ſolidi ſimiles.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Duos numeros planos ſimiles inuenire.

ACcipiantur quatuor numeri proportionales, & ſit 2. ad 5. vt 8. ad 20. ſeque multiplicent fundamenta cum terminis proportionum: 2. cum 5. & procreent 10. & 2. cum 8. & producant 80. *Dico hos eſſe planos ſimiles.*

Probatur, quia illi ſunt ſimiles, qui habent latera proportionalia ex defin. talia verò ſunt ex conſtructione 10. & 80.

EXPENSIO V.

De Quadratis, & Cubis.

NVmeri Cubici, & Quadrati quædam ſpecies ſunt numerorum ſimilium planorum, & ſolidorum. Vnde viſis eorum genericis proprietatibus, nunc etiam ſpecies ipſorum conſiderandæ.

THOR. I. PROPOS. XVIII. Eucl. 11.

Duorum Quadratorum numerorum vnus proportionalis numerus medius. eſt, & Quadratus ad Quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SInt duo Quadrata 9. & 49. quorum latera ſint 3. & 7. Dico primo *inter eos cadere aliquem numerum medium proportionalem.*

Probatur. Nam duo Quadrata ſunt duo ſolidi ſimiles; ſiquidem eorum latera 3. 3. & 7. 7. ſunt equalia. Vnde eadē proportio eſt 3. ad 3. quę alterius laterū 7. ad aliud latus 7. Ergo ex prop. 5. inter eos aliquis medius proportionalis cadit.

Quadratum quoque duplicatum habet lateris ad latus rationem. Nam ea proportio, quæ inter 3. & 7. gemina vice in vno quoque quadrato repetitur, ob multiplicationem laterum in ſe.

THEOR. II. PROPOS. XIX. Eu. 28.

Duorum Cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri, & Cubus ad Cubum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

PRobatur. Nam duo Cubi ſunt duo ſolidi ſimiles ob laterum ſuorum æqualitatem. Sic Cubi 27 latera 3. 3. 3. ad Cubi 64. latera 4. 4. 4. eadem proportione referuntur, & eſt primus 3. ad ſecundum 3. & primus 4. ad ſecundum 4. & ſecundus 3. ad tertium 3. vt 4. ad 4. ſed inter ſolidos ſimiles ex propoſ. 6. duo medij proportionales numeri cadunt. Ergo etiam inter Cubos.

Solidi quoque habent duplicatam lateris ad latus rationem. Quare etiam Cubi eo, quòd ſint ſolidi ſimiles. Sic 27. & 64. habent duos medios proportionales 36 & 48. & latus 3. cubi 27. prius in ſe, deinde in productū 9. ductus facit 27. Sicut, & latus 4. cubi 64. prius in ſe, deinde in productum 16. ductus facit 64. Vnde proportio, quæ eſt inter 27. & 64. eſt illa ipſa, quæ eſt inter 3. & 4. ſed triplici vice repetita.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XX. Eucl. 22.

Si tres numeri deinceps ſint praportionales; primus autem ſit quadratus, & tertius quadratus erit.

SInt 9. 36. 144. continuè propoitionales. *Dico quod ſi 9. eſt quadratus, & tertium 144. eſſe quadratum.*

Quia eum inter 9. & 144. cadat vnus medius proportionalis erunt plani ſimiles ex propoſ. 11. huius, & ita ex definitione proportionalia habebunt latera; Quare ita erit 3. ad 3. vt latus alius 144. ad ſui ipſius alterum latus: ſed 3 & 3. ſunt æquales: Ergo, & latera numeri alius 144. erunt æqualia 12. & 12., quare quadratus erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXI. Eu. 23.

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, & primus ſit Cubus; quartus etiam Cubus erit.

SInt qoatuor numeri 27. 45. 75. & 125. continuè proportionales. Dico, *quod ſi primus ſit Cubus, & vltimum quoque cubum eſſe.*

Probatur. Nam erunt ſimiles ſolidi primus 27. & quartus 125 eo quòd inter eos duo medij proportionales numeri intereipiaotur ex prop. 12. Quare ex definitione ita erit 3. ad 3. & hic ad 3. vt latus primum ad latus ſecundum, & hoc ad latus tertium numeri 125. Sed 33. & 3. ſunt numeri æquales. Vnde latera numeri 125. erunt inuicem æqualiter æqualia, quare cubus erit.

THEOR. V. PROPOS. XXII. Euc. 24.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam quadratus ad quadratum, ſi primus quadratus ſit, etiam ſecundus talis erit.

SI ſit 36. quadratum ad 64. numerum; vt quadratum 9. ad quadratum 16. *Dico etiam numerum 64. eſſe quadratum.*

Probatur. Quia inter quadratos 9 & 16. cadit vnus proportionalis numerus V. g. 12. ex propoſ. 11. huius, ſed ita eſt quadratus 36. ad numerum 64. Ergo ex propoſ. 18. etiam inter 36. & 64. cadet vnus medius proportionalis. Videlicet 48. Ergo ex propoſ. 20. huius. Si 36. eſt numerus quadratus, talis erit, & 64.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII. Eu. 25.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, ſi primus ſit cubus, talis quoque erit ſecundus.

SInt 64. & 116. numeri, qui habeant rationem eam inter ſe, quam 8. obtinet comparatus ad numerum 27. ambo cubos. *Dico, ſi 64. eſt Cubus, quòd talis quoque erit 116*

Probatur, quia inter 8. & 27. vtpote inter numeros Cubos ex propoſ. 19. huius duo proportionales cadunt numeri: Quapropter ex propoſ. 8. cadent quoque tales numeri duo proportionales inter 64. & 119. Quare ex propoſ. 21. cum 64. Cubus ponatur, talis quoque erit numerus 116.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps ceps ſint proportionales. Tertius ab vnitate quadratus erit, & vno intermiſſo quilibet ſequens. Quartus autem Cubus, & duobus intermiſſis quilibet alius. Septimus autem Cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermiſſis omnes alij.

SInt ab vnitatu continuè proportionales.

A B C D E

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512

1024. 2048. 4096. F

Primò *Dico tertium 4. eſſe quadratum, & intermiſſo vno, ſextum 16. eſſe quoque quadratum, & intermiſſo vno, octauum 64. eſſe quadratum,* & ſic ſequendo.

Probatur. Nam: Quod 4. ſit Quadratus numerus, inde patet; quia ſub duobus æqualibus numeris 2. & 2. continetur ex definit. 4. Siquidem Vnitas eſt ad 2. vt 2. eſt ad 4. ſed vnitas metitur 2. per ſe ipſam, ergo, & metietur numerus 2. numerum 4. per ſe ipſum, nempe per 2. Quod autem, & alij, qui intermiſſo vno ſuccedunt ſint quadrati, etiam patet ex propoſ. 20. eò quia intermediet inter vtrumque medius proportionalis V. g. inter 4. & 16. numerus 8. At 4 eſt Quadratus quapropter, & 16. erit quadratus ex pa. 22. h.

Secundo Dico, quod quartus ab vnitate Cubus ſit. Nam Vnitas eſt ad 2. vt 4. ad 8. eodemque modo vnitas menſurabit 2. vt 4. numerũ 8. Sed iam ex primę partis probationę 2. multiplicans 2. & per ſe ipſum generat 4. Ergo etiam modo 2 multiplicans 4. faciet 8. Ergo 8. Cubus erit. Quod autem intermiſſis duobus, omnes alij ſint Cubi, patet ex 19 propoſ. quia inter 8. & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur.

Tertiò Septimus ab vnitate oſtenſus eſt cubus, vt patet ex numero D, quia occupat eum locum poſt primum cubum intermiſſis duobus: Eſt quoque Quadratus: quia poſt primum, & ſecundum Quadratum intermiſſo vno occurrit: Ergo ſimul erit Cubus, & Quadratus.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si ab vnitate quotcumque numeri proportionales deinceps fuerint; qui verò poſt vnitatem Quadratus ſit, & reliqui omnes Quadrati erunt, & ſi qui poſt vnitatem ſit Cubus, & reliqui omnes Cubi erunt.

SI ſint ab vnitate continuè proportionales numeri 2. 4. 16 64. 256. 1024. & primus 4. ſit Quadratus. *Dicit reliquos omnes eſſe quadratos.*

Probatur. Quia; cùm ſint tres proportionales 4. 16. 64. primuſque 4. ſit quadratus, & tertius quadratus erit; Eodem modo, cum 16. 64. & 256. ſint continuè tres proportionales, & 16. ſit quadratus ergo ex propoſ. 20. huius, & 256. erit quadratus, & ſic de reliquis. Nam numerus 4. ex hypotheſi, numerus verò 16. quadratus eo, quòd ex prop. præc. ſit quintus ab vnitate.

Probatur quoque de cubis eodem modo. Nam

2. 3. 4. 5. 6 7

ſi ſint 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144. quartus ab vnitate 512. Cubus erit ex propoſ anteced. & duobus intermiſſis ex propoſ. 19. 262144. erit quoq; Cubus. Sic quia primus 8. ex hypotheſi eſt Cubus: Ergo ex prop. 29. numerus quoq; 4096. Cubus erit ob duos proportionales intermedios 64. & 512. Cum autem 512 quartus, & quintus 4096. ſint cubi, & ita ſit tertius 64. ad quartum 512. vt 512. ad 4096. ex propoſ. 21 huius, tertius quoque 64. erit Cubus. Cùm verò tertius 64. ſit cubus, etiam ob duos proportionales intermedius. Sextus 32768. & ſic de reliquis.

TRACTATVS XI.

IN IX. LIBRVM EVCLIDIS

PARS TERTIA.

De Planorum, Solidorumque generatione, & inuentione.

HIc agit Euclides de planis, ſolidiſque numeris inueniendis, etiam Quadratis, & Cubis; & quærit, qui numerus multiplicans alium Cubum, vel Quadratum efficiat, aut etiam numerum ſolidum aut planum: Reliqua verò de quibus pertractat de numeris paribus, & imparibus, & de perfectis, & imperfectis, non putauimus inter elementa neceſſariò collocanda. Cùm nomen vix conſequantur in alijs partibus mathematicis; ſubſtituimus autem Expenſionem de æquipotentia numerorum, & inuentione Quadratorum, qui tractatus lib. 10. deſeruiunt, & abſolutè neceſſarij ſunt.

EXPENSIO I.

De numerorum æquipotentia ad gignendos æquales planos.

SIcut lineas lib. 2. Euclidis oſtendimus æquipotentes, & in diuerſas partes ſectas, poſſe æquiualere quadrato totius. Sic nunc idem videndum eſt de numeris, Cū Euclides de his non agat; ſed acutiſſimè Clauius, verùm cum eius oſtenſiones viſæ nobis ſint difficiles, alias attulimus, quæ faciliori pede percurri poſſint.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si numerus aliquis in duas partes ſecetur Planus numerus totius, partiſque multiplicatione conſurgens æquatur quadrato, eiuſdem partis, partiumque plano.

7

3 4

12 9 21

SIt numerus 7. qui diuidatur in duas partes in 3. & 4. multipliceturque totus per 3. & fiant 21. deinde ducatur 3 in ſe, & fiat quadratum 9. in alteramque partem, & fiat 12. *Dico, quòd planus numerus 12. & quadratus 9. æquantur plano 21.*

Probatur. 3. multiplicauit 4. & fecit planum 12. & ſe, & fecit 9. Ergo ex propoſ. 17. ſept. ita erit 3. ad 4. vt 9. ad 12. Rurſus idem 3. multiplicauit ſe, & fecit 9. multiplicauit quoque 7. & fecit 21. Ergo ex eâdem, ita ſe habet 3. ad 7. vt 9. ad 21. Quia ergo eſt 3. ad 4. vt 9. ad 12. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. ſimul, vt 9. ad 9. & 12. ſimul; ſed eadem proportio eſt 3. ad 3. & 4. ſimul, quæ 3. ad 7. & eadem proportio, quæ eſt 3. ad 7. vt dixi eſt 9. ad 21. Ergo eadem proportio erit 9. ad 9. & 12. quæ 9. ad 21. quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æquales inter ſe 9. & 12. ſimul, ac 21. quod eidem 9. eandem dicant proportionem: hæc propoſ. oſtenditur de lineis propoſ. 4. l. 2.

COROLLARIVM I.

HInc educitur; quod idem dicendum de alis parte. Nam totus 7. multiplicatus per 4. nempe 28. æquabitur quadrato ipſius 4. nempe numero 16. & plano partium hoc eſt, numero 12. In quo conſiderandum eſt, quod partiũ numerus eſt in vtroque idem, nempe 12. quoniam partes ſunt eædem 3. & 4. quæ ſe inuicem multiplicant.

COROLLARIVM II.

HInc etiam eſt, quòd ſi aſſumatur aliquis alius numerus præter partes, & ipſæ partes; totumque multiplicetur; planus numerus partium, per illum, alium numerum multiplicatus æquabitur totius plano ex eo alio numero conſurgente; Sic 3. & 4. partes numeri 7. ſi multiplicentur per 5. alium numerum, dabunt planos numeros 15 & 20, ſimul æquales plano 35. ex 5. per 7. genito: Ratio verò eſt eadem: Nam ita eſt 15. ad 20. vt 3. ad 4. ob numerum 5. multiplicantem & 15. ad 35. vt 3. ad 7. ob eundem 5. multiplicantem ex 17. ſeptimi. Quaderè, ſi eſt 15. ad 20. vt 3. ad 4. erit etiam componendo 15. ad 15., & 20. ſimul, vt 3. ad 3. & 4. ſimul; ſed 3. ad 3. & 4 ſimul eſt eadem, quam 3 ad 7. & 3. ad 7. eadem, quæ 15. ad 35 vt dixi. Ergo proportio 15. ad 15. & 20. ſimul erit eadem, quæ 15. ad 35. Ideoque ex prop. 9 lib. 5. æquales erunt numeri 15. & 20. ſimul, ac 35. cum ad eoſdem, 15. numerus eandem dicat proportionem. Hoc etiam oſtenditur de lineis lib. 2. propoſ. 4.

COROLLARIVM III.

ELlicito. Quod etiam ſi numerus in plures partes, quam 2. ſecetur, idem tamen erit, vt ſi 7. ſecetur in 3. 2. & 2. Nam totus numerus per aliquam partem V. g. 3. vel aliquem alium numerum multiplicatus, æquabitur ſingulis partibus per eundem numerum multiplicatis; & ſimul ſumptis eadem ratione, ſic ſi 3. 2. & 2. multiplicentur per 3. hi facient 9. 6. & 6. qui æquabunt 21. numerum conſurgentem ex 7. in 3. ducto.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si numerus in duas partes diuidatur, plani duo ſub partibus, & toto comprehenſi æquantur quadrato totius.

SIt numerus 7. diuiſus in duas partes 3. & 4. & ex toto 7. & 3. fiat planus 21. & ex 7. & 4. planus 28. Dico *has duo plana æquari totius quadrato 49.*

7

3 7 4

21 49 28

PRobatur. Nam quia 7. multiplicat 7. & 3. & facit 49. & 21. erit 3. ad 7. vt 21. ad 49. Sic quia multiplicat ſe, & 4 erit 4. ad 7. vt 28. ad 49. ex propoſ. 17. l. oct. cumque 7. multiplicet 3. & 4. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 21. ad 28. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. ſimul, quæ 21. ad 21. & 28. ſimul. Sed proportio 3. ad 3. & 4. ſimul eſt eadem; quæ 3. ad 7. & 3. ad 7. quæ 21. ad 49. ergo ita erit 21. ad 21. & 28. ſimul vt 21. ad 49. quare ex propoſ. 9. l. 5 erunt æquales 21. & 28. ſimul ipſi 49. Id oſtend. propoſ. 3. l. 2. de lineis.

THEOR. III. PROPOS. III.

Duo quadrata, cum duobus numeris planis, ex lateribus eorum effecta, æquantur quadrato, ex duobus lateribus tanquam vno aſſumpta.

SIt quadratum 16. & quadratum 9. quorum latera ſint 4. & 3. & duo plani ex eorum lateribus 4. & 3. effecti, qui erunt 12. & 12.

3 4

21 7 28

9 12 12 16

49

D'co, *quod hæc omnia ſimul æquantur quadrato totius numeri* 3 & 4. vt vno latere aſſumpti nempe 7. cuius quadratum eſt 49.

Probatur. Duo plani ex toto 7. & partibus 3. & 4. producti nempe 21. & 28. ex præced. æquantur quadrato totius 7. Sed ex 1 huius planus numerus ſub toto comprehenſus, & parte, vt 21 & 28, æquatur quadrato ea parte illa comprehendente, & plano numero à partibus comprehenſo, & ideo planũ 21. æquatur quadrato 9. ex 3 & plano numero 12, ex 3. & 4 multiplicatione effecto, ſicut planus 28. æquatur quadrato 16. ex 4. & plano eidẽ 12. Ergo quadratum 16. & 9. cum planis numeris 12. & 12. ex lateribus eorum 3. & 4 æquabunt quadratum ea ijs lateribus, vt vno hoc eſt 7. quod eſt 49 cùm æquent planos 21. & 28 æquantes ſimul quadratum totius 7. Oſtenditur de lineis propoſ. 6.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si numerus bifariam ſectus ſit, & quidam numerus ei additus. Quadratum dimidij cum numero adiecto æquat planum numerum ex toto, & adiecto per adiectum multiplicato, & quadratum dimidij.

8

4 4 3

SIt numerus 8. & diuidatur bifariam, & ſit 4. addaturque 3. & ſint 7. & 3. cum 8 toto ſint 11. ex quo 11. toto cũ addito 3. fiat planus numerus 33. Inde ex dimidio 4. fiat quadratum 16. *Dico, quod planus numerus 33. & quadratum 16. æquant 49. quadratum lateris 7. dimidij 4 cum adiecto 3.* Quod, & oſtenditur propoſ. 8. de lineis l. 2.

Probatur. Nam planus ex 11. & 3. æquat ex Coroll. 3. propoſ. 1 duos planos ſub medietate duplici 4. & 4 & 3. adiectâ comprehenſos; nempe 12. & 12. & quadratum ex 3. nempe 9. Si ergo addamus etiam quadratum ea 4. hoc eſt 16. habebimus duos planos numeros ex lateribus quadratorum, & duo quadrata. Sed duo quadrata, & duo plani ea lateribus quadratorum æquant quadratum ex lateribus pro vno latere ſumptis ex 3. pro-

poſ. huius. Quare æquabunt quadratum 49. ex dimidio cum adiecto numero: Siquidem duo plani ex lateribus, non ex toto numeró, & vnico 8. ſed ex dimidio, eius facti ſunt, vt duo eſſe poſſint, & ideo hi plani obtinent latera ex dimidio numero 4. pro latere, & pro alio ex adiecto 3. conſtituta, quæ ſimul addita vt ſint 7. faciunt quadratum 49. cui duo quadrata 16. & 9. & duo plani ex ipſorum lateribus 12. & 12. æquantur ex propoſ. 3. huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si numerus ſecetur in partes æquales, & inæquales numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus vna cum quadrato, quo maior pars dimidiam ſuperat, æquatur quadrato, qui ex dimidio enaſcitur.

*SIt numerus 10 & ſecetur in partes æquales in 5. & 5. & inæquales in 7. & 3. & numerus, quo 7. maior pars ſuperat dimidiam 5. ſit 2. *Dico, quod planus numerus* 21. *ex* 3 *in* 7. *productus* vnà cum quadrato ex 2. hoc eſt 4 æquat quadratum 25. ex medietate numeri 10. hoc eſt 5.

* Probatur. Quia ex 1. huius Coroll 3. planus numerus 21. ex 3 & 7. inæqualibus partibus, æquat duos planos numeros, ex 2. & 2. per 3. genitos, nempe 6. & 6. & quadratum 9. ex 3. prodictem, ſi ergo addamus quadratum 4. ex 2. erunt duo quadrata 4. & 9. cum duobus planis 6 & 6. æqualia quadrato 25. ex eorum lateribus conſurgente, vt vno ſumpto ex prop. 3. quæ ſunt 2. & 3. & faciunt 5. Quod verò planus numerus 21. ex 3. & 7. genitus duos planos 6 & 6. cum quadrato 9. ex 3. exequet; patet ex Coroll. 3. propoſ. 1. nam 7. in tot partes diuidi poteſt, hoc eſt in partem, quâ medietatem ſuperat 2. & in partem, qua medietas ſuperat minorem 2. & in ipſam minorem 3. ſiquidem tanto deficit minor pars à medietate, quanto maior ſuper medietatem augeſcit, & 7. maior eſt medietate numero 2. ſicut 3. eſt minor medietate eodem numero 2. Oſtenditur prop. 7. lib. 2. de lineis.

EXPENSIO II.

De Planorum, Solidorum, Quadratorum, & Cuborum generatione.

MVltiplicatio eſt illa, quæ generat numeros planos, vel ſolidos. Vnde hic quæritur; quinam numeri inuicem multiplicati, Quadratos, & Cubos, ſeu Planos, Solidoſque numeros efficere poſſint.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Si duo plani ſimiles numeri multiplicantes ſe mutuò, fecerint quendam numerus productus Quadratus erit.

SInt duo plani ſimiles 6. & 24. qui ſe mutuò multiplicent, & generent 144. Dico *hunc numerum eſſe quadratum*. Quod, vt oſtendatur, multiplicandus eſt numerus 6 in ſe, & faciet 36. & ſic 6. numerus multiplicabit ſe, & numerum 24. vnde ex propoſ. 17. ita erunt multiplicantes 6. ad 24 vt geniti 36. ad 144. ſed ex propoſ. 11. lib. 8. Inter planos ſimiles vnus medius proportionalis cadit numerus V. g. Inter 6. & 24. cadit 12. Ergo etiam ex propoſ. 8. lib. 8. cadet inter genitos, & eâdem proportione gaudentes 36. & 144. Cadat igitur, & ſit 72. Cum igitur 36. 72. & 144. ſint tres continuè proportionales, primuſque 36. ſit quadratus ex propoſ. 20. lib. 8. & ſecundus 144. quadratus erit, quod oportebat oſtendere.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Si duo numeri ſe ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum, ſimiles plani erunt.

SInt 6. & 24. qui faciant ſe inuicem multiplicantes quadratum 144. Dico, *quod iſti numeri* 6. & 24. *ſimiles plani erunt*. Nam primus 6. multiplicet ſe, & faciat 36. Erunt duo numeri quadrati 144. & 36. inter quos interueniet aliquis proportionalis numerus medius ex propoſ. 18. l. 8. Et quia 6. multiplicando ſe, & 24 facit 36. & 144. erunt in eadem proportione geniti, & generantes 6. & 24. Vnde etiam inter iſtos cadet ex propoſ. 8. lib 8. aliquis proportionalis numerus 12. Quapropter ex propoſ. 13. erunt ſimiles plani 6. & 24.

COROLLARIVM I.

ELlicitur. Quod ſi duo numeri quadrati etiam æquales faciant quendam, iſte factus erit quadratus. Quòd duo quadrati facientes ſint plani ſimiles, eo quià quadrati ponantur, vt diximus in oſtenſione propoſ. 18. l. 8.

COROLLARIVM II.

ELlicitur quoque quod, ſi quis numerus quadratus alium multiplicans faciat quadratum, iſte alius multiplicatus quadratus erit. Erunt enim ex hac 7. propoſ. plani ſimiles. Vnde inter eos medius proportionalis cadet aliquis numerus; quà ex re ex propoſ 20. lib. 8. ſi primus ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

THEOR. III. PROP. VIII.

Si compoſitus numerus aliquem multiplicans creet aliquem alium, productus ſolidus erit.

NVmerus compoſitus 6. multiplicans quemlibet alium numerum 4. faciet alium aliquem puta 24. *Dico genitum* 24. *eſſe Solidum*.

Probatur numerus 6. dicitur compoſitus. Itaq; metietur eum aliquis numerus præter vnitatem. Sit ergo 2. qui metiatur 6. per 3. ideſt ter replicatus. Proptereàque 2 multiplicans 3. facit 6. & 6. multiplicans 4. procreat 24. cùm ergo 24. conſurgat à multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4. ex definitione 4. lib. 8. factus 24. ſolidus numerus erit.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. IX.

Si Cubus numerus ſe ipſum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

NVmerus Cubus 64. ſe multiplicando procreet aliquem nempe 4096. Dico *hunc quoque eſſe Cubum*. Repertum ſit latus Cubi 64. quod eſt 4. & ex hoc 4. in ſe fiat 16. & deinde 16. multiplicetur per 4. erunt 64.

Progreſſ. 1. Idem 4. ſe multiplicando fecit 16. & multiplicando 16. generauit 64. Quapropter ex prop. 17. ſept. eadem proportio erit inter 4. & 16. quæ eſt inter 16. & 64. Sed vt 4. metitur 16. per 4. & 16. 64 ita vnitas metitur 4. per 4. ideſt vnitas quater accepta facit 4. ſicut 4. quater acceptus componit numerum 16. & 16. numerum 64. Quamobrem eadem pars erit vnitas numeri 4. quæ 4. numeri 16. & quæ 16. numeri 64. Vnde inter vnitatem, & numerum 64. duo medij proportionales cadunt numeri 4 & 16.

Progreſſ. 2. Conſiderandum verò eſt, eſſe ita vnitatem ad 64. vt 64 ad 4096. Quoniã 64. multiplicando ſe, ideſt ſexaginta quatuor vicibus acceptus generat 4096. ſicut vnitas 64. vicibus accepta facit 64. Quare eadem proportio erit inter vnitatem, & 64. quæ eſt inter 64. & 4096.

Sed ex primo prog. inter vnitatem, & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur; Ergo quoque ex propoſ. 8. lib. oct. cadent inter 64. & 4096. etiam duo proportionales numeri intermedij. Quaderé ex prop. 21. l. oct. cum 64. ſit Cubus, talis quoque erit numerus 4096.

THEOR. V. PROPOS. X.

Si Cubus numerus Cubum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

SIc Cubus 8. qui multiplicet Cubum 27. & faciat 216. Dico *hunc quoque eſſe Cubum*.

Probatur. Nam ſi 8. multiplicet ſe productus 64. cubus erit ex præced. & quia 8. multiplicauit duos numeros 8. & 27. & generauit 64. & 216. eadem proportio erit ex 17. l. ſept. inter genitos 64. & 216. quæ eſt inter generantes 8. & 27. ſed inter iſtos duo medij proportionales cadunt numeri, cùm ſint cubi ex propoſ. 19. l. oct. Ergo ex propoſ. 8. inter 64. & 216. Quapropter ex prop. 21. l. oct. cum primus 64. ex præced. ſit Cubus etiam ſecundus 216. Cubus erit.

THEOR. VI. PROP. XI.

Si Cubus numerum aliquem multiplicans faciat Cubum, ille multiplicatus Cubus erit.

CVbus numerus 27. multiplicans aliquem v. g. 8. faciat Cubum 216. Dico 8. *quoque cubum eſſe*.

Probatur eodem argumenti methodo: Nam 27. multiplicet ſe, & faciat 729. Itaque, quia 27. multiplicauit 27. & 8. generantes, & protulit genitos 729. & 216. eadem proportio erit ex propoſ. 17. ſept. inter 27. & 8. quæ reperitur inter 729. & 216. Verùm 729. & 216. ſunt Cubi; hic quidem ex hypotheſi, ille autem ex propoſ. 9. & hac de cauſa ex propoſ. 19. lib. oct. inter eos duo medij proportionales interponuntur. Ergo etiam ex 8. lib. 8. inter 27. & 8. Vnde ex propoſ. 21. l. 8. cum primus 27. ex hypotheſi ſit cubus, etiam ſecundus 8. cubus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XII.

Si numerus quiſpiam ſe multiplicet, & genitus ſit Cubus, generans quoque Cubus erit.

SI 64. genitus ex multiplicatione 8. in ſe Cubus eſt. Dico, *& numerum 8. qui fuit in ſe multiplicatus Cubum eſſe*.

Multiplicetur rurſus 64. per 8. & fiant 512. qui cubus erit; quia eſt productus ex multiplicatione numeri 8. in ſe, rurſus numeri 8. in productum 64 ex ſui multiplicatione exortum. Quare ex 10. cùm numerus 64. numerum aliquem multiplicans generet Cubum, multiplicatus 8. ex præc. propoſ. Cubus erit.

EXPENSIO III.

De numeris quadratis inueniendis.

AD libri 9. demonſtrandas propoſitiones iſta omninò Expenſio eſt neceſſaria, cùm enim ibi agatur de inuentione irrationalium multarum, inter eas quædam ſunt, quarum inuentio in inuentione numerorum, qui cum alijs numeris, vel quadratum efficiant, vel etiam non efficiant, prout res poſtulauerit, conſiſtit.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus quoque ſit.

EX propoſ. 17. lib. 8. reperiantur duo numeri plani ſimiles, quorum vterque, vel par ſit, vel impar V. g. 10. & 40. detrahaturque minor à maiore, & reliquus par erit, nam etiam detracto impare, ab impari reſiduus numerus par reperitur, quia auferendo impar aufertur differentia vnitatis, quà differebat maior à pari, & ſic relinquitur par. Quare cum reſiduum ſit par ſ. 30. diuidatur per medium, vt ſit 15. Si ergo 40. planus numerus maior multiplicet minorem planum 10. fiet numerus quadratus 400. ex 6. propoſ. h. Deinde multiplicetur 15. in ſe, medietas reſidui, & fiet quadratus 225. Dico igitur, quod ſi duo hęc quadrata addantur ſimul, *Quod fiet numerus quadratus, qualis eſt* 625.

40. ablatus 10, Reſid. 30. med. 15.
10. in 40. dat 400. 15. in 15. dat 225.
Addite 225. & 400. Sunt 625. quad. cuius radix 25. ideſt 10. & 15.

Prob. ex propoſ. 4. huius. Nam ibi oſtendimus, quod ſi aliquis numerus dimidius ſit, cui addatur aliquis numerus, & ſumma in ſe multiplicata faciat quadratum, quod hoc erit æquale quadrato ex ipſius dimidio, ſine adiectione ſumpto, & plano numero conſurgenti ex ſumma adiecti,

addiecti, & totius pro vno latere, & adiecti tantùm pro alio.

Sic itaque hic fecimus. Sumpſimus numerum 30. addidimuſque 10. planum numerum, & fecimus planum 40. conſtitutumque eſt ex 10. ipſo adiecto, & multiplicato in 40. (nempe in totum 30. cum adiecto 10.) numerum 400. Deinde aſſumpta eſt medietas 15. numeri 30. & factum eſt quadratum 225. Quare, ſi addamus 400. & 225. fiet quadratus numerus; Erit enim ille numerus æqualis quadrato ex medietatis 15. & adiecti 10. ſummâ 25. in ſe multiplicata conſurgens, qui eſt 625. Numeri verò coniuncti ſimul 400. & 225. ſunt quadrati, & 225. quidem ex effectione, & 400. ex 6. huius; quòd duos numeros ex quorum multiplicatione generatur, aſſumpſerimus planos ſimiles.

PROB. II. PROPOS. XIV.

Numerum quadratum inuenire, qui ſubductus ab altero quadrato, relinquat quoque quadratum numerum.

Conſtruantur omnia, vt ſupra, nimirum aſſumantur duo plani ſimiles 10. & 40. pares ambo, vel ambo impares, & ſubducatur alter 10. ab altero 40. & reſiduum 30. bifariam ſecetur, & ſit medietas 15. & habebimus duos numeros requiſitos 15. nimirum medietas, & 25. eadem numeri 30. medietas cum addito 10. multiplicentur in ſe numeri 15. & 25. & ſint 225. & 625. geniti. Dico, *quod ſi minor 225. ſubducatur à maiore 625. relinquet 400. qui eſt numerus quadratus.*

Prob. Nam ſubducto quadrato 225. à quadrato 625. relinquitur planus numerus ex toto 30. cũ addito 10. & additi 10. multiplicatione generatus ſ. 400. ex præc. Sed totus, cum addito nempe 40. & additus 10. fuerunt duo plani ſimiles ex conſtructione, ergo planus numerus ex eorum multiplicatione progeneratus erit quadratus ex 6. huius.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Inuenire duos numeros quadratos, quorum exceſſus non ſit quadratus.

Elige duos planos non ſimiles, V. g. 8. & 30. nempe totum 22. cum addito 8. qui multiplicati inuicem dabunt numerum planum non quadratum 240. medietas verò numeri 22. nempe 11. multiplicetur in ſe, fiet numerus quadratus 121. qui ſimul additi, vt ſint 361. ex propoſ. 7. huius, erunt æquales quadrato ex medietate 11. & addito 8. nempe numero 19. quod quadratum eſt 361. Ergo 361. & 121. erunt duo quadrati numeri, quorum minor ſubductus à maiore relinquet pro exceſſu numerum non quadratum 240.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Duos numeros quadratos inuenire ita, vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

18. Ablat. 8. Reſid. 10. Med. 5.
8. in 18. dat 144. * 5. in 5. dat 25.
Additi 144. & 25. dant Quad. 169.
Cuius radix 13. ideſt 5. & 8.

Præceptum 1. Eadem conſtructio fiat, quæ priùs & aſſumptis duobus planis ſimilibus paribus, vel imparibus, vt 8. & 18. quorum latera ſunt proportionalia 2. & 4. primi, & 3. atq; 6. ſecundi. Subducaturq; alter ab altero, & reſiduetur 10. qui diuidatur per medium, & ſit medietas numerus 5. Eritque quadratum 25. ex multiplicatione numeri 5. in ſe, ſimulque planus numerus 144. ex 8. in 18 æqualis quadrato ex ſumma 13. numerorum 5. & 8 qui eſt 169. quadratus.

Auferatur deinde ex latere 5. vnitas, & relinquuntur 4. fiatque quadratum A 16. Dico, *quod hic numerus 16. compoſitus cum quadrato 144. non facit numerum quadratum, nimirum eorum quadratorum ſummam 160. non eſſe quadratum.*

Totum D 16. Ablat. 8. B. Reſid. 8. E Med. 4.
B 8. in D 16. dat G 128. * 4. in 4. dat 16. Quad.
Additi 128. & 16. æquant Quad. 144. C.
Cuius Radix 12. ideſt B 8. & 4.

Præceptum 2. probationis gratiâ. Aſſumatur duplum numeri 4. & fiant 8. & iuxta conſtructionem præcedentem adiciatur numerus 8. vt priùs, & fiat totum D 16. Itaque habemus numerum totum 16. D. ideſt B 8. cum adiecto 8. E, Diuidantur per medium B 8. & fit 4. Deinde multiplicetur 4. in ſe, & ſit quadratus 16. & multiplicetur poſtea totus numerus B 8. & E 8. adiectus in vnam ſummam redacti hoc eſt 16. D, per ipſum E 8. adiectum, & erunt G 128. qui duo numeri quadratus 16. & 128. planus numerus ex 6. huius æquabunt quadratum 144. C numerum, ex ſumma dimidij 4. & adiecti E 8. nempe 12. ſe multiplicantis, qui quadratus numerus 144 C appelletur ob diſtinctionem quadrati item 144. prioris præcepti.

Itaque aduertendum eſt quadratum 16. coniunctum cum plano ſecundi præcepti G 128. minore, vtpote à minori latere 16. per multiplicationẽ 8. producto æquat quadratum C 144. & coniunctus cum plano maiore 144. primi præcepti effecto, qui à lateribus 8. & 18. prouenit æquat numerum 160.

Obſeruandum quoque eſt, quod quadratum 144. C & anteced. præc. 169. habent latera, quæ ſola vnitate differunt nimirum 12. & 13.

Prob. Nunc propoſ. Itaque numerus A 16. eſt quadratus, vtpote ex 2. præc. productus ex multiplicatione 4. in ſe, ſic 144. quadratus eſt, quòd ſit productus ex duobus numeris planis ex propoſ. 6. huius, qui ſimul additi faciunt numerum 160 non quadratum. Si enim numerus 160. quadratus, foret aut eſſet æqualis quadrato 169. prioris præcep. aut eo maior. Seu eſſet æqualis quadrato poſterioris præcepti C 144. aut ipſo minor, aut eſſet quadratum quoddam inter hos numeros quadratos medium: ſed neutrum ex iſtis eſſe poteſt; Ergo non erit quadratum.

Singulæ itaq; propoſitiones oſtenduntur. Non poteſt eſſe æqualis quadrato 169. vel ipſo maior, eo quod ex 1. præcept. planum ex lateribus 8. & 18. conſurgens 144. & quadratum 25. naſcens ex latere 5. ei ſit æquale. Hic verò numerus 160. generatus eſt à dicto plano, ſed quadrato 16. cuius latus eſt tantummodo 4. & ideo minor, quam quadratus 25. cuius latus eſt 5.

Non poteſt eſſe minor hic numerus 160. quadrato C 144. nec ei æqualis; Eo quia huic numero eſt æquale planum 128. à lateribus 8 & 16. exurgens ex poſteriori præcept. vna cum quadrato 16. cuius latus eſt 4. hic verò numerus 160. naſcitur

à dicto

à dicto quadrato 16. Sed plano 144. cuius latera ſunt maiora 8. & 18. & ideo etiam ipſum 160. neceſſe eſt, quòd ſit maius.

Tandem. Non poteſt eſſe quid medium. Quoniam ſi eſſet quadratum medium inter quadrata 169. prioris præcepti, & quadratum c 144. poſterioris præcepti conſequeretur latera media inter latus huius, & latus alterius. Sed id non poteſt eſſe: Idcirco neque poteſt eſſe quadratus numerus medius. Quod oſtenditur: Nam vt præ. aduertimus, latera horum duorum quadratorum 169. & c 144. ſunt 13. & 12. qui ſola vnitate ex conſtructione differunt: Vnde nullus numerus inter eos intercipi poteſt, ex quo conſurgat tanquam à latere medio quadratum 160. Quamobrem non erit quadratum.

COROLLARIVM

E Ducitur hinc compoſitum hoc modo ad illos duos quadratos non habere proportionem, quam quadratus ad quadratum; Quia ex propoſ. 22. lib. 8. cùm componentes ſint quadrati, ob proportionem eam quadrati ad quadratum ipſe quoque compoſitus quadratus eſſet.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Numeros non quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis ſit quadratus.

S Ecetur numerus quadratus in duas partes non quadratas, & erit factum, quod quæris; ſiquidem illæ duæ partes non quadratæ erunt tales, quæ compoſitæ rurſus numerum quadratum efficient.

PROBL. VI. PROPOS. XVIII.

Inuenire numerum, qui ad numerum quadratum, & ad alterum non quadratum, non habeat proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

N Vmero non quadrato addenda eſt vnitas, ita tamen, vt per hanc vnitatis additionem nõ reddatur numerus quadratus, vt ſi ſint 4. quadratus, & 5. non quadratus, adde vnitatem numero 5. & fiant 6. & quia 6. non eſt quadratus habebis numerum, quem quæris: ſi quidem neque ad 5. neque ad 4. proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. At ſi daretur numerus talis, cui addita vnitas faceret quadratum, vt 8. cui additus 1. facit 9. tunc deme vnitatem, vt ſit 7. & obtinebis, quod deſideras. Dico itaque, quod iſte numerus 6. aut 7. proportionem non habet cum numero 4. & 5. quam quadratus ad *quadratum numerum*.

Nam talem non habet reſpectu numeri non quadrati; quoniam non poteſt cadere inter eos aliquis numerus, qui ſit medius proportionalis; cùm ſola vnitate differant; & ideo nullus numerus inter eos cadere poſſit; ſed nec cùm numero quadrato 4. hac de cauſa; quod ſi cõſequeretur eam proportionem, cum primus 4. ſit quadratus ex 22. propoſ. lib. 8. eſſet quoque quadratus ipſe, ſeu 6. ſeu 7.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Duos numeros non quadratos inuenire, vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus, neque cum ipſis proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

I D faciliter ſit, ſi diuidatur numerus quilibet non quadratus, vt 14. in duos numeros inter ſe primos 3. & 11. & erunt numeri quæſiti. Nam cũ primi ſint inter ſe proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum numerum, & cum numerus 14. ex quo per diuiſionem euenere non ſit quadratus; neque ipſi ſunt; aut poſſunt eſſe quadrati; ideoq; nec ad eos habere proportionem quadrati ad quadratum.

TRACTATVS XII.

IN X. LIBRVM EVCLIDIS

De Lineis irrationalibus.

VT Tractatus linearum irrationalium intelligeretur, neceſſe fuit priùs aliqua ſaltem de numeris cognoſcere. Vnde tres de numeris libri huic libro præmittendi fuerunt; nulloque modo fieri potuit, vt immediatè hæc tractatio ſuccederet, aut ſexto libro, aut præcedentibus. Cognitio verò harum linearum eſt etiam elementaris. Siquidem cũ ſint complurimę magnitudines latera irrationabilia obtinentes, tàm planę, quàm ſolidæ; multoties, quis errorem acciperet, dum putat lineam, ſeu latus alicuius figuræ ſe poſſe numeris exprimere, quòd inexprimibile eſt; & quia inſuper oſtendit Euclides ſpatia quædam æqualia quadratis irrationabilibus, V. g. parallelogramma applicata lineæ rationali alterum latus irrationale efficere talis, vel talis rationis: nos illam cognitionem tanquam minus neceſſariam ab elementis ablegauimus ſola generica cognitione contenti.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam ipſum de incommenſurabilibus librum aggrediamur, quædam principia ad eum ſpectantia præcognoſcere oportet; hæc autem ſunt.

DEFINITIO I.

COmmenſurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur

Sint lineæ altera quatuor palmorum, altera ſeptem palmorum; quia palmus metitur vtraſque commenſurabiles appellantur.

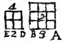
DEFINITIO II.

INcommenſurabiles verò, quarum nulla communis menſura contigit reperiri. Ergo duę lineæ tales eſſent, quarũ vna ſex palmos contineret, altera verò, nec palmo ex æquo menſurari poſſet quantumcumque multiplicatis ipſius partibus aliquotis, nec ſemipalmo, nec quarta palmi, nec ſeptima, nec octaua, nec decima, nec quacunque alia; illa linea irrationalis reſpectu lineæ ſex palmorum appellatur; cum tamen reſpectu alterius lineæ, rationalis eſſe queat. Vnde irrationabilitas alicuius lineæ, ſeu quantitatis ſemper reſpectiuè ſumitur.

DEFINITIO III.

REctæ lineæ potentia commenſurabiles ſunt; cum quadrata earum idem planum metitur.

Sint duo quadrata primum AB. quod capiat nouem quadrata, alterum ED quatuor, hæc quadrata dicentur commenſurabilia, & latera eorum, potentiâ commenſurabilia. Sunt verò lineæ, vt infra oſtendam, quæ longitudine, & potentiâ commenſurabiles ſunt; aliæ ſolum potentiâ, quòd quidem earum quadrata aliquâ communi menſurâ dimetiri poſſint; ſed non ipſę lineæ, & iſtæ vocantur potentiâ tantùm commenſurabiles.



DEFINITIO IV.

INcommenſurabiles lineæ potentia ſunt, cum quadrata earum nulla communi plana menſura menſurantur.

DEFINITIO V.

ALicui lineæ, aliquæ erunt longitudine commenſurabiles; aliæ potentia tantùm; aliæ erunt quæ incommenſurabiles omninò.

Hæc itaque linea, cui aliæ ſecundùm commenſurabilitatem, & incommenſurabilitatem comparantur, dicenda eſt *Rationalis*. Itaque tota rationalitas, & irrationalitas ſumitur relatiuè ad aliquam lineam propoſitam; cùm alioqui etiam irrationales illi propoſitæ, alijs lineis ab illa diuerſis, rationales dici poſſint.

DEFINITIO VI.

ET huic commenſurabiles, ſiue longitudine, ſiue potentia tantùm, Rationales dicantur.

DE-

DEFINITIO VII.

VT illi omninò incommenſurabiles, irrationales. Nimirum tùm potentiâ, tum longitudine.

DEFINITIO VIII.

ET quadratum, quod à propoſita recta linea fit, dicatur Rationale.

Quemadmodum linea dicitur Rationalis, quæ notæ quantitatis eſt, ſic quadratum ab ea deſcriptum rationale dicitur, & reſpectu eius cæteræ planitita commenſurabilea, ſeu locommenſurabiles dicuntur, ſi nulla plaoitie, quæ communis menſura ſit tum propoſitæ planitiei, tum alterius reperiatur.

DEFINITIO IX.

ET quadrata huic commenſurabilia rationalia.

DEFINITIO X.

ET huic incommenſurabilia pariter irrationalia appellantur, ſiue ſint quadrata, ſiue alicuius alterius figura.

DEFINITIO XI.

REcta verò, quæ illis quadratis irrationalibus latera ſunt, vel quadratis quibuſcumque æqualibus ſpatio irrationali cuiuſcumque figura ſit, illa dicantur irrationales.

Si ſpatia itaque incommenſurabilia fuerint, quadrata: latus illorum irrationalis eſt linea, ſi quadrata non fuerint, tunc illis figuris Irrationalibus quadratum æquale, habebit latus, quod linea irrationalis appellanda eſt.

AXIOMATA I.

MAgnitudo quamcumque magnitudinem menſurans, etiam compoſitam ex ipſis magnitudinibus menſuratis, menſurat.

II.

Magnitudo menſurans, aliquam, menſurat quoque omnem aliam, quam illa menſurata menſurat.

III.

Magnitudo menſurans totam, & ablatam; menſurat quoque reliquam magnitudinem.

EXPENSIO II.

De commenſurabilibus quantitatibus.

VT irrationales quantitates euidentiùs innoteſcant, prius de rationabilibus, & earum commenſurabilitate agendum, & ad numeros habitudine. Quare id præſenti expenſione præſtabimus.

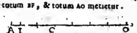
PROBL. I. PROP. I. Euc. 2.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram reperire.

DVÆ magnitudines dentur, quæ ſint commenſurabilea, quarum oporteat maximam menſuram reperire.

Linea detur punctata BF, & alia continua linea OA: Detrahaturque minor punctata à maiore, quoties fieri poteſt, & remaneat AC, quæ iterum ſubducatur à punctata FB, quoties fieri poteſt, vel totam auferet, & ſic AC erit maxima communis menſura, vel non, ſed remanebit aliquid ſ. EB: Hoc iterum ſubducatur ab AC, & remaneat IA: Iam tandem, cùm ſit, commenſurabilis, aliquod reſiduum adæquatè menſurabit præcedentē magnitudinem; Et ſic *hæc erit maxima communis menſura, qualis eſt in datis lineis* IA, quæ menſurat EB diuidens eam in duas partes nihilo remanente.

Probatur primò, quòd IA metiatur vtramque. Nam IA metitur BE, ſed BE metitur IC: Ergo, & IA metitur IC ex 3. Axiomate. Rurſus IC metitur EF; Sed IA, vt modo probatum eſt, metitur IC; Ergo ex eodem principio metitur quoque IA partem EF; Sed metiebatur EB quoque alteram partem, ergo totam BF metitur. Sed hæc partem CO in linea continua metitur; Ergo, & IA metitur CO. Sed metiebatur etiam CI compartem, & IA ſe ipſam; quæ ſimul componunt totam AO. Ergo IA totam lineam continuam metitur; igitur AI totum BF, & totum AO metietur.



Probatur quoque, quòd ſit maxima communis menſura? Nam ſi adeſſet alia maior; hæc metietur IA minorem, quòd fieri nequit; Nam metietur AO, & BF, hæc autem metitur CO, ergo hæc aſſignata metiretur CO; ſed metiebatur ex ſuppoſito totam AO; Ergo, & reſiduum CA ex 2. princ. Sed reſiduū CA ſ. IA, & IC menſurat FE; Ergo hæc aſſignata metiretur quoque EF; quare, & reſiduum EB; ſed EB menſurabat CI, Igitur EB metiretur CI; quare, & reſiduum IA; ergo illa maior, quæ aſſignaretur, menſura metiretur tandem IA minorem, quod eſſe nequit.

COROLLARIVM

HInc patet. Quod magnitudo aliqua metiens duas magnitudinea, metitur etiam earum communem menſuram: Nam aſſignata illa maior, ad hoc, vt ambas totas poſſet menſurare, debebat, & earum maximam communem menſuram tandem menſurare; vt in demonſtratione oſtenſum fuit.

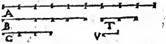
Non ponimus hic duas primas propoſitiones Euclidis: Quoniam ſine ipſis poſſumus omnia oſtendere, quæ In hoc libro aſſumpſimus oſtendenda: & alioquin in ſecunda propoſit. ponat id, quod fieri poſſe, aliqui dubitent, nempe perpetuam detractionem ab aliqua quantitate. Illam autem ponimus alibi ex Ambroſio à Sancto Vincentio

centio efficatiùs demonſtratam Tract. de progreſſionibus linearum.

PROBL. II. PROPOS. II.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

SInt datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C. Sitq; ex præced. I. propoſ. reperta maxima menſura duarum A, & B, quæ ſit T, ſi ergo T metiatur quoque C; habebimus maximam menſuram omnium trium A, B, & C; quòd ſi non metiatur ſaltem B, & T ex præced. Coroll. commenſurabiles erunt, & dabitur aliqua magnitudo, quæ menſurabit A, B, & E cum ſint commenſurabiles; Quamobrem & menſurabit quoque T duarum A, & a maximam communem menſuram. Inueniatur ergo ex præced. propoſ. maxima menſura ipſarum C, & T, & ſit V. Dico *magnitudinem* V *eſſe trium* A, B, C *maximam communem menſuram*.



Probatur, quod ſit menſura: Nam V eſt menſura magnitudinis T, & C; Ergo ex 3. pron. & magnitudinum B, & A, quas T menſurat.

Probatur quoque. Quòd ea ſit maxima; Nam aſſignata quædam V. g. palmus, vel quælibet alia; quæ maior dicatur, quam V. Menſurabit B, & A; Quare, & maximâ earum menſuram T ex Coroll. præced. Metitur quoque C. Quare, & earum T, & C menſuram communem V. Ergo palmus maior, quam V, metiretur lineam V; quod fieri nequit.

COROLLARIVM

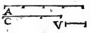
COlligitur hinc quoque; Quòd magnitudo metiens tres magnitudines, & earum maximam communem menſuram metitur. Nam palmus, ſi metiretur tres A, B, C, metiretur quoque menſuram communem V. Quod ſi darentur quatuor magnitudines. Repertâ trium ex præced. probl. communi menſurâ maximâ; deinde huius menſuræ repertæ, & quartæ maxima communis menſura reperiri deberet, quæ eſſet omnium quatuor maxima menſura communis, & ſic de alijs pluribus in infinitum.

THOR. I. PROPOS. III. Eucl. 5.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum: Et ſi hanc obtineant commenſurabiles erunt.

Sicut incommenſurabiles proportionem non habent, quam numerus ad numerum; Et ſi hanc non habeant, incommenſurabiles erunt.

PRobatur prima pars. Nam ſi A, & C ſunt commenſurabiles. Inueniatur earum communis menſura V, Quotieſque ea repetita metitur A toties vnitas repetatur, & faciat numerum æqualem numero V. g. 4. partium; idemq; fiat menſurando C, & faciat 3. Tot itaque menſuras continet A, quot vnitates ſunt in numero 4. & tot C, quot vnitates in numero 3. Cum ergo æquè vnitas menſuret



numerum 4. & 3. vt V metitur A, & C proportionem eandem habebit A ad C, quam 4. ad 3. & ideo, quam numerus ad numerum.

Probatur ſecunda pars. Nam ſi duæ magnitudines A, & C, proportionem habeant, quam 4. numerus ad numerum 3 quot vnitates ſunt in 4. In tot partes æquales ſit diuiſa magnitudo A, quarum vna ſit V; Erit itaque magnitudo A ad V, vt numerus 4. ad vnitatem; Sed vt 4. ad 3 ita ponitur A ad C. Ergo C tot partes obtinebit ex ijs, quibus conſtat A, nempe ex partibus V, quot vnitates ſunt in 3.. Nam menſura communis menſurans 4. & 3. iuxta quam proportionem dicunt, eſt vnitas. Ergo etiam erit V communis menſura, iuxta quam A, & C proportionem dicunt.

Probatur tertia pars. Nam, ſi aliquæ quantitates, quæ dicuntur incommenſurabiles, proportionem haberent, quam numerus ad numerum ex probatione ſecundæ partis, commenſurabiles eſſent.

Probatur quarta pars. Nam ſi proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, & tamen commenſurabiles credantur; ex primę partis probatione habebunt quoq; proportionem, quam numerus ad numerum contra Hypotheſim.

THEOR. II. PROPOS. IV. Eu. 9.

Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, inter ſe proportionem habent, quam quadratus ad quadratum numerum.

Et quadrata proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine, commenſurabilia.

Quæ verò à rectis lineis longitudine non commenſurabilibus fiunt quadrata, non habent inuicem proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

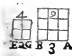
Sicut quadrata proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nec latera habebunt longitudine commenſurabilia.

PRobatur prima pars; Nam lineæ commenſurabiles proportionem habent, quam numeri: Sed ex 18. lib 8. numerorum quadrata ſunt in duplicata proportione laterum. Sic quoque linearum quadrata ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum ex 20. ſexti libri. Ergò quadrata linearum, & quadrata numerorum ſunt in duplicata proportione laterum: Quare ſunt in ſimili pro-

por-

portione, nempe duplicata laterum ſuorum.

Probatur ſecunda pars. Nam ex iiſdem citatis propoſitionibus eſt quadratum numerorum, ſicut & linearum in duplicata proportione laterum: Sed numerorum quadratorum latera ſunt numeris exprimibilia; Ergo, & partes linearum, quæ latera iis quadratis contexunt: vt G B, & A B tales erunt.



Probatur tertia pars. Nam ſi lineæ ſunt incommenſurabiles; quadrata earum non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Siquidem ex prima probatione quadrata, quæ proportionem obtinent, quam quadratus numerus ad quadratum, latera quoque obtinent longitudine commenſurabilia; & ideo illæ lineæ contra Theſim eſſent commenſurabiles.

Probatur quoque 4. pars eodem tenore. Nam quadrata, quæ referuntur ad aliud vt quadratus numerus ad quadratum numerum, latera obtinent commenſurabilia; & ideo illa quadrata, quæ non referuntur proportione eâ, vt quadratus numerus ad quadratum numerum longitudine latera incommenſurabilia poſſidebunt. Alioquin ſi latera eſſent commenſurabilia, & ipſa quadrata ſe haberent, vt quadratus ad quadratum numerum contra hypotheſim.

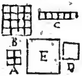
COROLLARIVM

Sequitur. Lineas longitudine commenſurabiles tales quoque eſſe potentiâ: Nam poſſunt conſtituere quadrata inuicem commenſurabilia.

Lineas verò potentiâ commenſurabiles; nimirum quorum quadrata commenſurabilia ſunt, poſſe quidem & longitudine eſſe commenſurabiles, ſed non ſemper. Nam poteſt V. g. dari quadratum, quod ſit tertia pars alterius, & proportionē habeat, quam numerus ad numerum, vt 1 ad 3. quorum latera erunt incommenſurabilia omnino cum quadrata non ſint inuicem, vt numerus quadratus ad quadratum. Si verò detur quadratum, quòd ad aliud proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, illud ſemper ea propoſ. præced. habebit latera commenſurabilia reſpectu alterius. Lineas verò longitudine incommenſurabiles, quandoque eſſe; & potentiâ incommenſurabiles, quandoque verò nequaquam: Quia eorum quadrata poterunt habere proportionem V. g. quod vnum ſit duplum alterius, nimirum, quam numerus ad numerum, vt 4. ad 9. vel 10. ad 11. licet non eam, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quæ requiritur, vt etiam latera ſint commenſurabilia. Lineas verò incommenſurabiles potentiâ longitudine quoque ſemper eſſe incommenſurabiles.

Verùm dices. Cùm omnes numeri plani, & ſolidi proportionē conſequantur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ea propoſ. 12. l. 8. vt 6. & 24. qui proportionem habent, quam 1. ad 4. vel 4. ad 16.

An hæc quadrata, quæ inuicem hanc proportionem dicunt, innitantur quoque lateribus longitudine commenſurabilibus, & Reſp. affirmatiuè; Licet enim non poſſent diuidi in eas partes, in quas latus quadrati 4. & 16. diuiditur: poſſent tamen diuidi in alias partes V. g. ſi latus quadrati 6. diuiditur in duas partes latus quadrati 24. poſſet diuidi in quatuor. Nam cùm quadrata ſint in duplicata proportione ſuorum laterū, ſi ſe habent quadrata, vt 1 ad 4. latera erunt, vt 1 ad 2. & ſicut latus ſic, & quadrata ipſa poterunt diuidi: vnum quidem in 4. alterum verò in 16. partes, non tamen commenſurabiles illis, quæ 6. plana ſimilia, & 24. conſtituunt.



Sic ſi ſit quadratum partium quatuor A, & aliud partium 16. vt B, & parallelogrammum 6. ex dictis partibus complectens; cui ex documentis primi libri fiat quadratum æquale D, & huic quadrato D fiat quadratum quadruplo maius, E Quadratum D erit 6. partium reſpectu quadrati A, & B, & parallelogrammi C, cum huic ſit æquale, & quadratum E conſequenter partium 24. & ideo latera horum quadratorum; ſi ſumantur, vt conſtituta partibus 6. & 24 nullis numeris effari poſſunt, cùm non ſint 6. & 24. numeri quadrati; Verùm abſolutè, cùm ex aliis partibus quadrata D, & E conſtitui poſſint V. g. D ex 4. & E ex 16. erunt eorum latera commenſurabilia. Vnde colligitur omne quadratum, quod proportionē obtineat, quam ſimiles numeri plani, habere latera longitudine commenſurabilia: Si quidem ex propoſ. 12. l. 8. omnes numeri ſimiles proportionem inuicem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

EXPENSIO III.

De comparatione linearum rationalium, & irrationalium.

Docet hæc expenſio modum argumentandi in lineis rationalibus, & irrationalibus; & quomodo argumenta valeant, & deductiones de commenſurabilibus, vel è contrà. Vnde ſine hac expenſione irrationales magnitudines impoſſibile eſt cognoſcere in ſpetie.

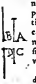
THEOR. I. PROPOS. V.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & fundamentum primæ combinationis ſuo termino ſit commenſurabile; fundamentum quoque ſecundæ combinationis ſuo termino erit commenſurabile; & ſi è contra fundamentum illud primæ ſuo termino ſit incommenſurabile; tale quoque erit fundamentum ſecundæ combinationis reſpectu ſui termini.

Sint quatuor magnitudines proportionales, ita quod ſit A ad B, vt C ad D; ſ. A fundamentum primæ combinationis ſit ad ſuum terminum B, vt

fundamentum C ad terminum D. Dico, *quod ſi fundamentum A commenſuraretur termino B; fundamentum quoque alterum C ſuo termino D commenſurabile eſſe.*

Probatur. Erit enim A ad B in proportione, vt numerus V.g. 8. ad numerum 4 ex propoſitione 3. huius, ſed eandem proportionem dicit quoque C ad D; quare ex eadem propoſitione erit quoque commenſurabilis C cum ſuo termino D, cum ſit, vt A ad B, & ideo vt 8. ad 4 hoc eſt, vt numerus ad numerum.



Si verò ſit incommenſurabilis A fundamentum reſpectu termini B. Dico, *nec eſſe commenſurabilis magnitud. & fundamentum C reſpectu termini D.*

Probatur quoque ex eadem propoſitione ſic. Nam ſi A eſt incommenſurabilis ipſi B. Ergo non dicet proportionem, quam numerus ad numerum. Sed tali quoque in proportione eſt magnitudo C reſpectu magnitudinis D; ergo neque ipſa dicet proportionem, quam numerus ad numerum, ideoque incommenſurabilis erit C ipſi D.

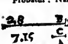
Hoc autem intelligitur non de commenſurabilitate longitudinis tantùm, ſed etiam potentiæ tantùm. Nam ſit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus 8. ad numerum 4. quia ponitur A ad B, vt C ad D, & ideo ob ſimilitudinem figurarum ex propoſitione 26. l. 6. vt quadratum ex A ad quadratum ex B, ſic quadratum ex C ad quadratum ex D; erunt quoque, vt 8. ad 4. ſic quadratum ex C ad quadratum ex D, quare cum quadrata linearum C, & D ſint vt numerus ad numerum erunt ipſæ potentiâ tantùm commenſurabiles ex pr. 4. huius.

THEOR. II. PROPOS. VI. Enc. 12.

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

DEtur magnitudo A, & B, quæ magnitudini C commenſurabilis exiſtat. Dico, *eas magnitudines inuicem eſſe commenſurabiles.*

Probatur. Nam cum magnitudo A ponatur commenſurabilis magnitudini C, erit, vt numerus V.g. 10. ad numerum 15. Et eadem ratione, quia magnitudo B ponitur quoque commenſurabilis magnitudini eidem C, erit ad magnitudinem eam C vt numerus aliquis V.g. 28. ad 7. & ideo conuertendo C erit ad B, vt numerus 7. ad alium 28. Reperiantur itaque tres numeri continuè proportionales in datis rationibus 10 ad 15. & 7 ad 28. ex propoſitione 3 l. 8. & ſint 2.3 12. ita quod linea A ſe habeat ad C, vt 2. ad 3 & C ad B, vt 3 ad 12.



Quo poſito erit quoque ex æquo A ad B, vt 2. ad 12 & ideo A erit commenſurabilis ipſi B, quia ſe geret A magnitudo ad B magnitudinem, vt numerus ad numerum.

Quod & intelligitur, ſi duæ A, & B ſint ſolum commenſurabiles, cuidam tertiæ potentiâ. Nam tunc erit V.g. quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus 10. ad numerum 15. & quadratum ex B ad quadratum ex C, vt 28. ad 7. Repertis ergo tribus numeris 2.3. 12. in continua proportione ex 3 l.8. erit quadratum ex A ad quadratum ex C, vt 2 ad 3. & quadratum ex C idem ad quadratum ex B. vt 3. ad 12. ideoque ex æquo erit, vt 2 ad 12. ſic quadratum ex A ad quadratum ex B: cum quæ ſit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum; ipſæ lineæ ex 4. huius erunt tantùm potentiâ commenſurabiles.

THEOR. III. PROPOS. VII. Enc. 13.

Sint duæ magnitudines; & altera quidem ſit commenſurabilis cuidam tertiæ, altera verò incommenſurabilis; illæ magnitudines inuicem erunt incommenſurabiles.

SIt A lineæ C commenſurabilis, ſeu longitudine, ſeu potentiâ, & eidem C linea altera D incommenſurabilis. Dico *eas nempe A, & D eſſe inuicem incommenſurabiles.*

Probatur. Nam ſi D eſt commenſurabilis magnitudini A, cum eidem quoque A ponatur commenſurabilis C: Sequeretur, quòd, cùm D, & C vni tertiæ A ſint cõmẽſurabiles ex propoſ. antec. contrà Theſim inuicem cõmenſurationem haberent, ſeu longitudine, ſeu potentiâ.



THEOR. IV. PROPOS. VIII. Eu. 14.

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles: altera verò ipſarum cuidam incommenſurabilis ſit, & reliqua eidem incommenſurabilis erit.



PRob. eodem argumẽto, ac præcedens, quia magnitudo A potẽtiâ tantũ, ſeu lõgitudine, & B cõmẽſurabiles eſſent inuicẽ, & tamen A exiſtente cum aliâ magnitudine, quapiam C incommenſurabili eſſet nihilominus magnitudo B eidem ipſi C commenſurabilis.

Iam magnitudo A, & magnitudo C magnitudini B eſſent commenſurabiles. Quamobrem ex propoſit. 6. huius inter ſe quoque A, & C eſſent commenſurabiles contra id, quod præſupponitur.

COROLLARIVM

QVæ incommenſurabilibus inuicem ſunt commenſurabiles, ſunt inter ſe etiam incommenſurabiles, quia eadem militat ratio de duabus, aut pluribus, & de vna, vt patet.

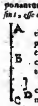
THEOR. V. PROPOS. IX. Eucl. 17.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique earum commenſurabilis erit.

Quòd, ſi tota magnitudo vni earum commenſurabilis ſit, & magnitudines, quæ compoſitæ à principio fuerunt, commenſurabiles erunt.

DEntur A B, & B C magnitudines, quæ compo-

ponantur in D: *Dico eas, vt priùs, licet compoſita ſint, eſſe comm nſurabiles.*



Nam eadem communis menſura D metitur vtraſque diuiſas. Ergo etiam compoſitas metietur ex pronunciato 1. Quare cum diuiſæ, & compoſitæ habeant eandem communem menſuram erunt AB, BC, & tota AC commenſurabiles.

Probatur ſecunda pars, quia ſi tota AC commenſurabilis erit vni ipſarum V. g. magnitudini BC, ergo eadem communis menſura D, metietur totam, & ablatam BC: Quare, & reliquam BA ex 3. pronunc. & ideo BA erit commenſurabilis toti AC.

COROLLARIVM.

HInc ſequitur. Quod ſi tota magnitudo ex duabus compoſita cõmenſurabilis ſit vni ex ſuis partibus; quòd etiam reliquæ cõmenſurabilis ſit: Nam menſura, quæ metitur totum, & ablatum metitur, & reliquum ex pronunc. 3.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Si duæ magnitudines inuicem incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit, & quæ a principio compoſitæ magnitudines, inuicem erunt incommenſurabiles.

PRobatur prima pars. Quia ſi detur aliqua menſura metiens totam AC, & ablatam AB. in ſchemate præced. propoſ. metiretur quoque, & reliquam BC, ex pronunc. 3. quòd eſt contra hypoth. ponuntur enim AB, & BC incommenſurabiles.

Probatur ſecunda pars; Quia ſi ab initio magnitudines, quæ fuere compoſitæ dicantur commenſurabiles; ſequitur, quod ſi tota magnitudo AC vni ipſarum ſit commenſurabilis, quod etiam ſit alteri, ex propoſ. præced. contra Theſim.

COROLLARIVM

HInc ſequitur. Quòd, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita ſit incommenſurabilis alteri partium componentium, hæc etiam erit incommenſurabilis reliquæ; Nam ex Coroll. præc. ſi eſſet commenſurabilis vni eſſet, & alteri.

Magnitudines autem, quæ componuntur, debent eſſe re ipsâ commenſurabiles, quę nempe poſſint dimetiri communi menſura maxima; alioquin ratio non valeret, quæ à communi menſura deſumitur, vnde non intelligitur de lineis potentiâ commenſurabilibus.

EXPENSIO IV.

De inuentione linearum rationalium.

ANtequam irrationales inueniantur, priùs de inuentione rationalium agendum eſt; ex harum enim cognitione gradus ſternitur ad irrationales diuerſas inueniendas. Vnde in primis diuerſas ſpecies harum linearum, vt ſingulas deinde doceamus inuenire; diſtinguere opus eſt.

Rationales inuicem lineæ in plura genera ſeiunguntur ſecundùm diuerſam comparationem, quã cum linea aliqua tertiâ conferuntur, quæ dicitur ob id Rationalis, nempe illa, ex qua cæterarum menſuræ aſſumuntur, & eſt velut Cubitus, ſeu Pes in vſitata rerum vendibilium menſuratione. Nam aut hæ lineæ comparatæ cum illâ ſunt inuicem longitudine commenſurabiles quatenùs ex eius partibus, vel vna, vel ambæ integratæ inuicem quoque conſentiunt longitudine vel non, ſed ſolùm potentiâ. Si longitudine commenſurabiles, tunc poteſt accidere, quòd vna ex iſtis ſit Rationali æqualis; & ecce *primum genus*, quòd ſi omnes ſint inæquales illi, ſed ſolum ſecundum partes in linea Rationali exiſtentium longitudine commenſurarentur. Erit *ſecundum genus*: Si verò inuicem ſunt ſolùm potentiâ commenſurabiles, tunc altera ex iſtis poteſt reperiri, vel æqualis, vel ſaltem commenſurabilis lineæ Rationali, ſi æqualis reperitur erit *tertium genus*, ſi inæqualis, ſed tamen commenſurabilis erit *quartum genus*. At ſi ne dum inuicem; ſed etiam cùm linea Rationali comparatæ ſunt, tantùm potentia commenſurabiles erit *quintum genus*. Et tandem poteſt accidere, quod hæ lineæ ſint commenſurabiles inuicem, ſed cùm linea Rationali comparatæ, illi ſolùm ſint potentia commenſurabiles, & erit *ſextum genus*.

Primum genus, vt docebimus reperitur ex Corollario propoſ. 11. ſicut, & ſecundum.

Tertium verò genus, & quartum reperitur, ſi primo inueniatur rationali alicui commenſurabilis aliqua, vel æqualis ex propoſ. 11. ſequentis Corollario, & huic reperiatur alia potentiâ tantum commenſurabilis, ex propoſ. 12. nam duæ repertæ erunt inuicem potentiâ tantùm commenſurabiles, ſed altera ex iſtis erit lineę Rationali cõmẽſurabilis, altera verò potentia tantũ, ex prop. 7.

Quintum genus reperitur ex propoſ. 12. ſi nempe expoſitæ Rationali A inueniatur aliqua potentia tantum commenſurabilis B, & huic inuentæ alia item reperiatur potentiâ tantum commenſurabilis C, nam, cum rationalis A, & hæc ſecundo inuenta C primo inuentæ B ſint potentiâ tantum commenſurabiles erunt, inuicem potentiâ tantùm cõmenſurabiles ex propoſ. 6.

Sextum verò genus reperitur ex Corollario propoſ. 12.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Inuenire rectam, ad cuius quadratum, ita ſe habeat quadratum alterius, vt numerus ad numerum.

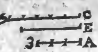
SInt duo numeri 3. & 5. & linea A. Debeamuſque inuenire lineam aliquam, cuius quadratum, ita ſit in proportione, cum lineæ E quadrato, vt eſt numerus 3. ad numerum 5.

Diuidatur linea A in tot partes, quot habet numerus oblatus 3. V. g. in tres partes; deinde aſſumatur linea C, quæ quinque partes æquales illis, obtineat, eritque linea A, ad lineam C, vt numerus 3. ad 5.

Inter iſtas autem lineas media proportionalis inueniatur ex 13. propoſ. lib. 6. quæ ſit E. Dico quadratũ ex A ad quadratum ex E eſſe ſicut 3 ad 5.

Probatur ex Corollario propoſ. 21. lib. 6. Nam

A, E, C. tres lineæ ſunt continuæ proportionales, & ideo, cum quadrata omnia ſint ſimilia, ſimiliter;



que deſcripta erit, vt latus A ad latus C, ita quadratum factum ex A ad quadratum factum ex E ob proportionem laterum duplicatam; Sed A ſe habet ad C, vt 3. ad 5. Ergo, & quadratum ex A ad quadratum ex E ſe habebit in proportione, vt 3. ad 5.

COROLLARIVM

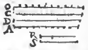
HInc enaſcitur modus inueniendi lineas longitudine alteri commenſurabiles. Nam nihil aliud agendum, quam diuidere datam A, (quæ quoniam ab ea cæterarum menſuræ deſumũtur, vocatur Rationalis,) in partes, quas voles, & ex illis partibus alias componere lineas, ſiue alias æquales Rationali in diuerſas partes diuidere, & eas partes, tanquam lineas aſſumere, omnes enim datæ Rationali A, erunt ſimiliter Rationales.

PROB. II. PROPOS. XII.

Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentiâ.

SIt recta propoſita A, cui inuenienda primo ſit linea incommenſurabilis longitudine tantùm. Inueniantur duo numeri proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum V. g. 10. & 11. ex propoſ. 19. lib. 9. vel ex 16. pr. Coroll. 4 l. 8. Deinde ex præced. inueniatur linea, cuius quadrato ita ſe gerat in proportione quadratum ex C confectum, vt 10. ad 11. numeri, vel vt linea A ad O lineam. *Dico eſſe C lineam lineæ A incommenſurabilem potentia tantùm.*

Probatur primo, quod ſit incommenſurabilis longitudine. Nam ea quadrata habent etiam latera longitudine cõmenſurabilia, quæ proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum ex propoſ. 4. huius. Sed quadratum factum ex A ad quadratum ex C, illam non habet proportionem, cùm ſit ſolùm proportio, quam habet numerus 10. ad numerum 11. non quadratos: Ergo eorum latera, nempe linea A, & C, erunt incommenſurabilia.



Probatur ſecunda pars, nempe quod ſit tantùm longitudine incommenſurabilis. Nam earum quadrata commenſurantur, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum.

Secundò ſit inuenienda altera linea D, quæ ſit quoque potentiâ incommenſurabilis. Inueniatur linea D inter duas A, & C longitudine incommenſurabiles media proportionalis ex 13. lib. 6. Dico D eſſe incommenſurabilem, tum longitudine, tum potentia lineæ A primo poſitæ.

Probatur ex propoſitione 21. lib. 6. Nam ea proportio intermediat, inter quadratum ex A factum, & quadratum ex D, quæ eſt inter lineas, & latera A, & C. Sed illæ ſunt incommenſurabiles. Ergo etiam quadrata ex propoſ. 9. huius erunt incommenſurabilia, & ideo ipſæ rectæ incommenſurabiles erunt potentiâ: Vnde, & longitudine ex prop. 4. huius.

COROLLARIVM

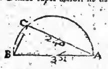
COllige modum, quo, & plures lineæ inueniantur datæ rationali potentiâ tantùm incommenſurabiles. Nam ſufficit huic inuentæ C reperire alias longitudine commenſurabiles V. g. R, vel S ex Corollario præcedenti: Nam erunt etiam datæ Rationali potentiâ tantùm commenſurabiles.

Siquidem A eſt longitudine incommenſurabilis C, cui tertiæ ſunt commenſurabiles lineæ inuentæ R, & ſ; Quare ex propoſ. 7. linea Rationalis A, & inuentę R, aut S erunt inuicem incommenſurabiles.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Inuenire duas rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior poſſit efficere quadratum maius, quàm linea minoris, quorum differentia, ſeu exceſſus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine commenſurabile.

PRoponatur aliqua linea Rationalis A a, & inueniantur ex propoſ. 15. lib. 9. duo numeri quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus, vt 361. & 121. quorum exceſſus 240. non eſt quadratus. Deinde ex propoſ. 11. reperiantur duæ lineæ AB, & CB potentiâ tantùm commenſurabiles, quorum nimirum quadrata ſe habeant, vt numerus 361. quadratus, ad numerum non quadratum 240. Deinde ſuper maiori AB fiat ſemicirculus,



alteraque AC accommodetur in ſemicirculo, connectaturq; recta CB. *Dico AB plùs poſſe, quàm AC, ambæ ex* conſtitutione potentiâ tantùm commenſurabiles, quadrato rectę lineæ C B, quæ ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis.

Probatur. Nam quadrata linearum AB, & AC ſunt æqualia quadrato ex linea AB confecto ex propoſitione 11. lib. 2. ſed vt numerus 361. ad 240. ita eſt quadratum lateris AB ad quadratum lateris AC. Ergo *per conuerſionem rationis* erit 361. ad 121. complementum numeri 240. vt ſit æqualis numero 361. ita quadratum ex latere AB ad quadratum ex latere CB, quod cum quadrato AC, ſit æqualis quadrato ex latere AB, ſed quadrata numerorum 361. & 121. habent latera commenſurabilia, alioquin non eſſent numeri quadrati, ergo,

&

& latus AB, cum latere CB erit commenſurabile ex propoſ. 5. huius.

PROBL. IV. PROPOS. XIV.

Inuenire duas rectas potentiâ tantùm commenſurabiles, quarum maior poſſit efficere quadratum maius, quàm efficiat minor; quorum differentia, ſeu exceſſus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine incommenſurabile.

SIt linea rationalis AB, inueniantur ex propoſ. 16. lib 9. duo numeri quadrati 16. & 144. ita quod compoſitus ex ipſis, nempe 160. non ſit quadratus. Fiatque, vt compoſitus non quadratus 160. ad quadratum V. g. 144. ita linea AB ad aliam AC, ex propoſ. 11. huius. Deinde ſuper maiorem AB fiat ſemicirculus, accommodeturque AC in eo à puncto A, connectaturque recta CB. *Dico* CB *eſſe lineam lineæ* BA *longitudine incommenſurabilem latus quadrati, quo* A *ſuperat* AC *quad.*



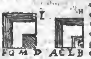
Probatur. Quia BA eſt ad AC, vt non quadratus numerus 160. ad quadratum 144. Ergo quadratum ex AC, erit ad AB, vt compoſitus non quadratus 160. ad quadratum numerum 16. per conuerſionem rationis. Quoniam quadrata duo ex BC, & CA ex propoſ. 11. lib. 2. æquant quadratum ex BA, ſicut quadratus numerus 144. & 16. æquant numerum 160. quare ita ſe habebit, vt numerus 160. ad 16. ita BA ad BC. Sed 160. ad 16. cum non ſit quadratus, nõ habet proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo neque latera BA, & CB ex propoſ. 11. huius, & ideo non erunt cõmenſurabilia. Quare quadratum ex BA ſuperabit AC quadratum, & exceſſus quadrati latus BC incommenſurabile erit.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Si quatuor lineæ ſint proportionales, & fundamentum relationis, ſeu antecedens in prima combinatione ſuperet conſequentem, & terminum quoad potentiam quadrato, cuius latus ſit fundamento illi commenſurabile: Alterum quoque proportionis fundamentum in ſecunda combinatione eodem exceſſu ſuperabit ſuum terminum: At ſi exceſſus primæ combinationis fuerit lateris incommenſurabilis, talis quoque erit exceſſus in altera combinatione fundamenti reſpectu ſui termini.

SIt BA ad BC, vt DF ad DG. Dicò, quod ſi quadratum BA ſuperet quadratum BC, & exceſſus, ſeu gnomon niger ſit tale ſpatium, quod in quadratum redactum latus eius fundamento lineæque maiori BA ſit commenſurabile; taleque quoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF. Quòd illud quadratũ ſi gnomoni nigro in AB quadrato æquale, habeat latus incommenſurabile ipſi BA, tale quoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF.

Probatur, vt eſt BA ad BC, ita DF ad DG. Ergo ex 26 lib. 6. vt eſt quadratum ex BA ad quadratum ex BC, ita aſſimilatur in proportione ob ſimilitudinem figurarum, (quia omnia ſunt quadrata,) quadratum ex DF ad quadratum ex DG. Ergo conuertendo erit etiam totum quadratũ ex BA ad aliam compartem, nempe gnomonẽ nigrum, & exceſſum ſuum BA, ſic quadratum ex DF ad aliam compartem, & exceſſum ſuum gnomonem nigrum FI; Ergo, & ad quadrata gnomonibus æqualia, eritque quadratum ex BA ad quadratum nigrum BL æquale gnomoni nigro AH, vt quadratum ex DF ad quadratum nigrum DM æquale gnomoni nigro FI, ideoque erit quoque latus BA ad latus BL illius quadrati nigri, vt latus DF ad latus DM huius quadrati nigri ex 26. lib. 6. ſi ergo BA, & LB ſint lineæ commenſurabiles, tales quoque erunt DF, & DM; quod ſi fuerint incommenſurabiles longitudine BA, & BL tales quoque erunt DF, & DM longitudine incommenſurabiles ex propoſ. 5. huius.



EXPENSIO V.

De Binomijs.

AGitur de compoſitione linearum potentiâ tantùm commenſurabilium in vnam lineam coaleſcentium, ex quarum compoſitione reſultat linea tota, quæ Binomium appellatur, vel ex Binis nominibus: eo quia reſultet à compoſitione duarum linearum potentiâ commenſurabilium: Eſt quæ primum genus linearum irrationalium. In quatuor enim genera ſecedunt irrationales lineæ. Aliæ enim exoriuntur ex cõpoſitione, vt prędictę. Aliæ à ſubtractione, vt Apotome, duarum linearum potentiâ tantùm commenſurabilium. Alię irrationales procedunt à proportionali interpoſitione mediæ alicuius proportionalis inter duas commenſurabiles potentiâ tantùm. Et vocantur Mediæ; Aliæ tandem ex diuiſione lineę in partes irrationales, & ab irrationalibus ſimpliciter exoriuntur, quæ poſtrema duo genera, & per ſubductionem alias producunt pariter irrationales. Agemus autem primo de Binomijs, vtpote de facilioribus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si duæ rationales potentiâ tantùm inuicem commenſurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex Binis Nominibus.

COmponantur duæ rationales AB, & BC potentiâ tantùm inuicem commenſurabiles ex propoſ.

propoſ. 12. huius inuentæ. *Dico totam ac irrationalem eſſe.*

Probatur. Quoniam enim ex propoſ. 1. lib. 6. rectangulum ſub AB, & BC; quale eſt album ad quadratum BC nigrum ſe habet, veluti reſpicit baſis AB baſim BC: Quoniam ea rectangula ſunt eiuſdem altitudinis: ſequitur, quòd ſint incommenſurabilia, qualiter ſunt ipſæ baſes. Addatur rectangulo eius duplum, quòd certè ei commenſuratur, & fient duo rectangula æqualia alba. Addatur quoque quadrato nigro aliud nigrum ex AB, eruntque quadrata inuicem commenſurabilia; quòd lineæ AB, & BC ex hypotheſi ſint inuicem potentiâ commenſurabiles. Nam factâ hac compoſitione ex propoſ. 10. duo rectangula à duobus quadratis incommenſurabilitate diſſidebunt; quia magnitudinibus, quæ priùs erant incommenſurabiles, vt rectãgulo albo, & quadrato nigro commenſurabiles, quælibet ſuę magnitudines addidimus, quadrato quidem nigro quadratum aliud nigrum ſibi cõmenſurabile, rectangulo verò aliud rectangulum ſibi æquale. Sed componantur ſimul hæc duo rectangula, quæ incommenſurabilia ſunt quadratis, & ipſa duo quadrata; ex propoſ. 10. tota magnitudo CB incommenſurabilis erit, cum alterâ magnitudine partium incommenſurabilium; & ideo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris ſimul erunt incommenſurabilia ipſis met quadratis nigris ſeorſim ſumptis.



Verùm duo rectangula prædicta cùm duobus quadratis nigris ex propoſ. 6. lib. 2. ſunt æqualia quadrato ex tota AC, tanquam vna linea. Hoc itaque quadratum maximum ex tota AC erit incõmenſurabile duobus quadratis altero ex AB, altero ex BC: cum ergo quadratum ex tota AC ex duabus AB, & BC coalitâ ſit irrationale quadratis ipſorum componentium AB, & BC; etiam ipſa tota AC erit irrationalis ex propoſ. 9. huius, ipſis partibus componentibus AB, & BC. Cuius nomen erit Binomium, quia ex duabus integratur.

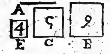
Quod præcedenti propoſ. explicauimus Binomium, eſt genus quoddam, quod ſex differentias Binomiorum ſub ſe complectitur. Illæ verò exoriuntur à comparatione duarum, ex quibus componuntur potentiâ tantùm ſibi inuicem commenſurabilium comparatarum lineæ Rationali, reſpectu, cuius dicuntur rationales, ſeu longitudine, ſeu potentiâ; & quia in ſuperioribus vidimus duas differentias linearum commenſurabilium potentiâ tantùm, primam propoſ. 13. nempe, cùm maior excedit minorem in quadrato ſuo conſtituendo ſpatio tali, quòd ſi in quadratum redigatur, latus eius ſit longitudine maiori commenſurabile; inde eſt, quòd, ſi hoc primum genus lineæ Rationali comparetur, & maior illi Rationali ſit longitudine commenſurabilis hinc prima differentia conſtituatur; Quod ſi minor ſit Rationali commenſurabilis iam ſecundam differentiam obtineamus. Quod ſi, nec maior, nec minor, ſed ſicut ſunt incommenſurabiles inuicem, ita quoque ſint Rationali, & tertia differẽtia habetur.

Secundum verò genus linearum ſibi inuicem incommenſurabilium eſt; quando vna alteram excedit tali ſpatio quadrato, quod habeat latus eidem maiori incommenſurabile ex propoſ. 14. & eodem ordine dat tria alia Binomia. Nam vel maior linea, ſeu Nomen eſt commenſurabile datę Rationali, & ecce. Quartũ, vel minor ei commenſuratur, & ecce Quintum; vel neutra incommenſurabilium, ei commenſuratur, & ecce. Sextum; Docebimus itaque modum in ſequentibus reperiendi hæc omnia Binomia, ob quæ neceſſarium eſt priùs refricare memoriam eorum, quæ diximus lib. 9. Expenſ. vltima.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Inuenire ex Binis Nominibus primam.

Oportet primò reperire duas lineas longitudine commenſurabiles A, & B ex Corollario propoſ. 11. huius, quarum prima A ſtatuatur pro Rationali. Alteri verò B inueniatur altera C longitudine ſolùm incommenſurabilis, & gaudeat conditionibus, quas aſſignauimus propoſ. 13. hu. nempe repertis duobus numeris quadratis 4. & 9.



quorum exceſſus 5. non ſit quadratus. Maioris B quadratum obtineat ad minoris C quadratum eam proportionem, quam maior quadratus numerus 9. ad exceſſũ 5. non quadratũ. Nã ſi duę iſtæ potentiâ tantùm commenſurabiles componantur; linea tota ex illis duabus coaleſcens, erit primum Binomium.

Probatur. Nam potitur duabus conditionibus ad primum Binomium requiſitis. Prima eſt, quòd rationali A ſit maius nomen B commenſurabile, vt ex conſtructione conſtat.

Secunda eſt, quòd eſt de genere illarum linearum potentiâ tantùm commenſurabilium, quarum quadratum, quod poteſt efficere, maior B excedit minoris C quadratum exceſſu quodam quadrato; quòd habet latus commenſurabile ipſi maiori, cùm eius B quadratum, quod eſt, vt numerus 9. ſit ad quadratum minoris C, vt numerus 5. ex propoſ. 11. huius, & ideo exceſſus E ſit vt 4. numerus quadratus ad ipſum 9. numerum quadratum, Vnde latus illius exceſſus, in quadratum redacti ad quadratum ipſius B, maioris erit commenſurabile ex propoſ. 4. huius. Si ergo B, & C componantur ex 16. efficient Binumium, quod ex dictis requiſitis erit primum.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Inuenire ex Binis Nominibus ſecundam.

Sit Schema præcedens; Et ſumantur, vt priùs duæ commenſurabiles A, C, & A ſtatuatur pro Rationali; huic verò C inueniatur potentiâ tantũ commenſurabilis B eadem arte, ac modo, quo propoſ. 13. huius; ſed cum hac differentiâ ab anteced. quod vt exceſſus numeri 5. non quadratus, ad quadratum numerum maiorẽ 9. ſic quadratum ex C minori, & commenſurabili linea ipſi Rationali ad quadratum ex B maiori erectum. *Latera enim horum quadratorum in vnam lineam compoſita*

ta exhibebunt Binomium ſecundum.

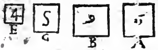
Probatur. Nam minus nomen, nempe latus minoris quadrati c eſt ex conſtructione commenſurabile Rationali datæ A, eſt autem minus latere B, quod ſit quadratum ex c ad quadratum ex A, vt exceſſus non quadratus, & reliquus 5. ad numerum excedentem, & totum 9. & ideo ad maiorem. Quare, & latus c, vtpote quadrati minoris erit minus latere B.

Secundam verò conditionem ex effectione propoſ. 13. adipiſcitur, cùm non obtineant proportionē earũ quadrata, vt numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Et quadratũ maius B ſuperet c quadrato E ſibi B in latere commenſurabili, vt propoſ. 13. oſtenſum eſt; Vnde ſi componantur B, & c ex 36. efficient Binomium, quòd erit ex dictis ſecundum.

PROBL. III. PROPOS. XIX.

Inuenire tertium Binomium.

PRæcept. 1. Inuentis duobus numeris quadratis 4. & 9. eá conditione, qua propoſ. 13. vt exceſſus 5. non ſit quadratus; Sumatur ex prop. 18. l. 9. numerus alius, qui ad neutrũ eorum 5. & 9. proportionem dicat, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum, qui ſit 6. Deinde vt eſt numerus non quadratus 6. ad quadratum 9. ſic quadratum Rationalis A ad quadratum, cuius latus B; nec ſit quadratum Rationalis A proportionatus ad quadratum ex B, vt quadratus numerus ad numerum quadratum. Ideoque licet quadrata ſint rationalia; quia ſunt, vt numerus ad numerum; ipſa tamen latera A, & B potentiâ tantùm erunt commenſurabilia, non longitudine ex propoſ. 4. huius.



Præcept. 2. Deinde fiat iuxta propoſ. 13. huius vt quadratus numerus 9. ad ſuum exceſſum 5. non quadratum: ita quadratum eiuſdem rationis, cuius latus B, ad aliud quadratum ex propoſ. 11. huius, & ſit huius quadrati latus c. *Dico, quod ſi c & B componantur erit Binomium tertium.*

Prob. Progr. 1. Quoniam primam conditionē genericam conſequitur ex conſtructione. Quia quadratum B ſuperat quadratum c quadrato quodam E, cuius latus eſt maiori B commenſurabile, quia eſt vt 9. ad 5. cuius reſiduum vſque ad 9. eſt 4. numerus quadratus, & ideo etiam quadratum c habet reſiduum, cum quo æquat quadratum B, vt numerus quadratus 4 & 5. numerum quadratum 9. ex propoſ. 13. Vnde ex propoſ. 4. latus exceſſus E erit commenſurabile lateri B.

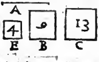
Progreſſ. 2. Habet quoque conditionem ſpecificam nempe, quod ambæ B, & c ſint incommenſurabiles Rationali A: Et B quidem ex Præcept. 1. id conſequitur. De linea verò c oſtenditur; Quadratum ex A eſt ad quadratum ex B, vt 6. ad 9. ex effectione, nempe non dicit proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: At quadratum ex B dicit proportionem ad quadratum ex c, quam 9. ad 5. ſ. non eam quam quadrati numeri ad numerum quadratum. Ergo ex æquo erit vt 6. ad 5. ita quadratum ex A ad quadratum ex c, & ideo non erit illa, quam quadrati numeri ad quadratum numerum. Vnde nec lineæ A, & c inuicem commenſurabilitatem conſequentur. Cum ergo B, & c ad Rationalem A ſint incommenſurabiles, maiorque B ſuperet minorem c quadrato E, ſibi maiori commenſurabilis lateris, facient, ſi componantur Binomium quod ex 36. propoſ. huius, & ex alijs conditionibus erit tertium.

PROBL. IV. PROP. XX.

Inuenire ex Binis Nominibus quartam.

VSque adhuc vſi ſumus pro fundamento Binomiorum propoſ. 13. huius: nunc vtendum eſt propoſ. 14 Iuxtaque ipſius documenta duo numeri quadrati aſſumendi ſunt, ita quòd compoſitus ex ipſis non ſit quadratus, vt 4. & 9. cuius compoſitum eſt 13. non quadratus; ideoque nec proportionem dicit, quam quadratus ad numerum quadratum ex prop 26. lib. 9. Deinde reperiatur A Rationalis, & c ei commenſurabilis. Fiatque vt compoſitus non quadratus 13. ad quadratum alterum ex componentibus, puta 9. ex propoſ. 11. huius; ita quadratum commenſurabilis c ad quadratum alterius B componatur que B, & c, *& erit Binomium quartum.*

Probatur. Nam B, & c ſunt commenſurabiles ſolùm potentiâ, cùm eorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum.



Sibi verò vindicant conditionem genericam Binomiorum. Quoniam maius Nomen c, vtpote latus maioris quadrati ſuo quadrato ſuperat quadratum minoris lateris B quadrato quodam ſibi longitudine incommenſurabili, vt oſtenditur citata propoſ. 14.

Obtinent quoque requiſitum ſpecificum: Etenim c maius nomen acceptum eſt ex effectione commenſurabile Rationali A. Cum ergo c ſit cōmenſurabilis rationali A & potentiâ tantùm commenſurabilis reſpectu B, quam ſuperat ſuo quadrato, exceſſu tali quadrato E, cuius latus ſibi eſt longitudine incommenſurabile, ſed ſolùm potentiâ: Si hæ duæ lineæ B. & c coniungantur, efficient ex propoſ. 36. Binomium, & hoc ex requiſitis præællegatis eſſe quartum.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Inuenire ex Binis Nominibus quintam.

ADhibeatur idem Schema, & repertis duobus numeris, vt priùs, eadem fiat conſtructio numerica, vt in antecedenti, vel 14. prop. h. Deinde accepta quadam Rationali A ipſi commenſurabilis inueniatur B; fiatque deinde, vt numerus quadratus V. g. 9. ad compoſitum ex duobus quadratis non quadratum 13. ſic ex propoſ. 11. huius quadratum ex B, quod erit minus ad quadratum alterum, cuius latus c, quod erit maius, vt numerus quadratus eſt minor compoſitorum quadrato, *& B, & c latera in vnam lineam conflata faciet Binomium quintum.*

Pro-

Probatur. Quoniam obtinent conditionem genericam Binomij: quia eadem constructio facta eſt, quæ propoſ. 14. & ideo B ſuperat C quadrato quodam E, cuius latus ſibi maiori B eſt longitudine incommenſurabile: Lineæ quoque B, & C ſunt potentiâ tantùm commēſurabiles; eò quòd earum quadrata ſint, vt numerus ad numerum, hoc eſt, vt 9. ad 13.

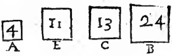
Et tandem obtineat conditionem ſpecificam: nā, & Minus Nomen B eſt ipſi Rationali A ex conſtructione commenſurabile, ideoque B, & C compoſitæ faciunt Binomium, ex 16. h. & hoc quintum erit.

PROBL. VI. PROPOS. XXII.

Inuenire ſextam ex Binis Nominibus.

REperiendi ſunt duo numeri non quadrati ex propoſ. 16. lib. 9. V. g. 11. & 13. qui compoſiti faciant numerum non quadratum 24. Idcircoque, nec cum eo, quod componunt, nec inuicem dicant proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Aſſumaturque quilibet numerus, qui ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum, vt eſt quilibet quadratus. V. g. 4. Sumatur deinde Rationalis A, & vt 4. ad 24 ſic fiat quadratum ex A ad quadratum ex alia aliqua V. g B ex propoſ. 11. huius: eruntque B, & A tantùm potentiâ commēſurabiles. Deinde fiat, vt 24. ad 13. ita quadratum ex B ad quadratum ex alia C: eruntq; latera longitudine incommenſurabilia B, & C, quia eorum quadrata ſe habent, vt numerus ad numerum.



Ita quoque ſe habent incommenſurabiliter cum Rationali A: & quidem B, vt diximus: Linea verò C ex hac ratione. Nam vt 4. ad 24. ſic A, quadratum Rationalis ad quadratum B, & vt 24. ad 13. ita quadratum B ad quadratum C. Ergo ex æquo, vt 4. ad 13. ita quadratum A ad quadratum C, nimirum, vt numerus ad numerum, & ideo linea Rationalis A, & C erunt inuicem incommenſurabiles, & hæc eſt conditio ſpecifica harum linearum B, & C ad Binomium requiſita. Obtinent quoque conditionem genericam. Nam quadratum ex B quadratum ex C ſuperat quadrato quodam E, quod eſt, vt 11. ad 24. tanquam numerus ad numerum, ideoque ſibi maiori B longitudine incommenſurabile. Quare ſi B, & C componantur ex propoſ. 16. facient Binomium, quod ex prædictis conditionibus erit ſextum.

EXPENSIO VI.

De lineis Apotomis.

COmpoſuimus vſque adhuc lineas irrationales addendo inuicem duas rationales potentiâ tantū commenſurabiles. nunc verò auferendo vnam ab aliâ generabūtur irrationales eodem ordine, ac in præced. Expenſione.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentiâ tantùm commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis erit, vocatur autem Apotome.

DEtrahatur à Rationali AC Rationalis BC, quę ipſi AC toti potentiâ tantùm ſit commenſurabilis. Dico *reliquam AB eſſe irrat. eandem reſpectu lineæ AC, & BC.*



Probatur ferè eodem argumento, quo propoſ. 16. Rectangulum AI ſub AC, & BC cōtentum, cùm AC, & CB ponantur longitudine incommenſurabiles ex 1. l. 6. erit incommenſurabile quadrato nigro, ex BC conſtituto; etenim, cum ſint eiuſdem altitudinis, ſunt inuicem, vt baſes.

Progreſſ. 2. Addatur rectangulo eiuſdem AI ſeminigro duplum, & ſint duo rectangula ſeminigra AI, & BH æqualia, & ideo inuicem ſibi commenſurabilia pro vna parte. Pro alia verò addatur quadrato nigro ex BC aliud. quadratum AB ex tota AC, quod ei vtique eſt commenſurabile, cum lineæ ipſæ ponantur commenſurabiles potentiâ. Factaque hac additiône ex propoſ. 8. huius manebunt duo rectangula ſeminigra ſumpta, vt vna quantitas, & duo quadrata nigrum ex CB, & AC ex tota pariter vt vnum quid ſumpta inuicem incommenſurabilia, vt erant prius.

Progreſſ. 3. Addatur rurſus rectangulis quadratum nigrum ex AB: Efficiemuſque magnitudinem ex tota AC, & ex quadrato nigro BC, ex 9. l. 2. quare magnitudo tota ex rectangulis ſeminigris duobus, & quadrato nigro BA erit tunc commenſurabilis, vtpote illi æqualis, quantitati ex duobus quadratis nempe ex tota AC, & parte BC conſtitutis, & ideo cum illa ex progr. 2. ſit rectangulis incommenſurabilis etiam hæc incommenſurabilis parti componenti, nempe rectangulis iiſdem duobus ſeminigris erit. Cum itaque tota magnitudo ex rectangulis compoſita, & quadrato AB nigro ſit incommenſurabilis vni parti componenti, nempe rectangulis duobus ſeminigris; erit etiam incommenſurabilis alteri ex Coroll. propoſ. 10. huius, ſcilicet quadrato ex AB. Et ideo etiam quadratum ex tota AC, & quadratum ex parte BC æqualia rectangulis, & quadrato alteri ex AB, erunt eidem nigro ex BA incommenſurabilia, & inſuper cum quadrata AC, & ex parte BC ex hypotheſi ſint inuicem commenſurabilia, quòd lineæ AC, & BC ſint potentia commenſurabiles, & ideo etiam toti ex propoſ. 9. huius, erit etiam vnumquodque eorum eidem quadrato, ex BA incommenſurabile ex prop. 8. h.

Igitur

Digitized by Google

Igitur, cùm quadrata ex BC, & AC ſint incommenſurabilia, quadrato ex AB; Lineæ ipſæ, & latera erunt irrationalia ex propoſ. 4. huius. Vnde ablata BC ex AC relinquet reſiduum AB incommenſurabile, & toti AC, & ablato BC, & ideo dicetur Apotome.

Sex ſpecies Apotomarum, quæ exoriuntur à lineis potentiá tantùm commenſurabilibus, vt Binomiorum, reperiuntur.
Nam, vel maior plùs poteſt, quàm minor linearum potentiá tantùm commenſurabilium, & differentia potentialis eſt quadratum, cuius latus maiori eſt commenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum, prout comparantur cum aliá quadam Rationali. Nam ſi maior ſit Rationali commenſurabilis eſt prima Apotome, ſi minor exoritur ſecunda Apotome, ſi nec vna, nec altera oritur tertiá Apotome dummodo minor harum linearum ad Rationalem comparatarum auferatur á maiore, vt Reliqua Apotome ſit.

Secundum genus linearum potentiá tantùm commenſurabilium explicatum propoſ. 14. ex illud, quarum vna poteſt magis, quàm alia, & differentia eſt quadratum quoddam, cuius latus eſt maiori incommenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum eodem ordine. Nam vel maior eſt commenſurabilis expoſitæ Rationali, & obtinemus quartam ſpeciem, vel minor, & conſequimur quintam, vel nulla Rationali commenſuratur, & ſextam Apotome habebimus.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Apotomum ſex ſpecies reperiuntur.

REperiuntur eodem modo, ac Binomia, ſolumque in hoc differentia, quòd repertis lineis duabus nempe maiori, & minori Nomine; deinde, vt Binomium efficiatur, coniunguntur ſimul. Hic verò minor linea, quæ dicitur Congruens, ſubducitur á maiori, quæ dicitur Tota, & quod reſtat, vocatur Apotome, ſeu Reliquum. Ita primum Binomium paritur per coniunctionem duarum linearum ex propoſ. 17. quarum minor, ſi ſubducatur à maiori efficitur Apotome prima, & ſi duæ lineæ repertæ propoſ. 18. coniunctæ faciunt Binomium ſecundum, ſi minor earum ſubducatur à maiori faciet Apotomem ſecundam. Sic dicas de aliis; Vnde ſingulas propoſitiones non replicabimus; ſed propoſ. 19. dabit Apotomem tertiam, propoſ. 20. Apotomem quartam. prop. 22. Apotomem quintam. Tandem propoſ. 21. Apotomem ſextam docebit inuenire.

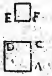
EXPENSIO VII.

De Irrationalibus Medijs.

HIc agimus de lineis irrationalibus, quæ reſultant per relationem ad alias, & proportionem, & in duplici genere ſunt. Vel enim ad lineas, quæ potentiá tantùm ſunt inuicem commenſurabiles referuntur, & vocantur mediæ, eò quòd ſint medium proportionale inter duas potẽtiá tantùm commenſurabiles. Vel non ſunt mediæ inter duas incommenſurabiles, ſed naſcuntur per æquipotentiam ad ſpatia irrationalia; & hoc ſecundum eſt genus, quod ſub ſe habet ſpecies de quibus infra. Porrò Mediæ in duplicem ſpeciem ſecernuntur, Aliæ enim ſunt, quarum duæ ſumptæ faciunt rectangulum ſub ipſis contentum Rationale, licet ſingularū quadrata ſint irrationalia Quadrato Expoſitæ Rationalis, quas explicamus 29. & aliæ quarum rectangulum eſt irrationale, quas docemus inuenire propoſ. 30.

THEOR. I. PROPOS. XXV.

Recta linea potens quadratum irrationale, irrationalis eſt.



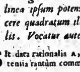
POſſit recta AB quadratum ABCD, ſcilicet ex ea fiat, vel factum ſupponatur, & hoc ſit irrationale ſcilicet comparatum, cum quadrato alicuius lineæ FE, ſit irrationale, nullíque communi menſurá dimetiri poſſit. *Dico, quod etiam linea* AB *ſit irrationalis comparata cum linea* FE.

Probatur. Nam ſi dicitur rationalis eius quadratum erit rationale: ex propoſ. 4. hujus, quòd eſt contra Theſim.

THEOR. II. PROP. XXVI.

Quod ſub rationalibus potentiâ ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt, & recta linea ipſum potens; nempe potens efficere quadratum illi æquale, irrationalis. Vocatur autem Media.

SIt data rationalis A, cui adſint duæ aliæ potentia tantùm commenſurabiles BC, & CD, ex quibus rectãgulum nigrum componatur. Dico, *quod hoc rectangulum eſt irrationale comparatum cum quadrato lineæ* A. Inſuper, & aſſero, quòd, ſi fiat quadratum H æquale dicto rectangulo, *linea recta latus huius quadrati erit irrationalis reſpectu lineæ* A, & quòd vocanda ſit *Media*.



Probatur prima pars. Nam deſcripto quadrato ex altera illarum, & ex DC, quod erit rationale, & quadrato lineæ A commenſurabile; cum lineæ datę BC, & CD ſint ei potentiá commenſurabiles; Ideſt earum quadrata ſint commenſurabilia, eritque inſuper eiuſdem altitudinis ob latus idem CD, quare ex 1. lib. 6. erunt in eadem proportione ita latera, vt quadrata, & eodem modò referentur latus CB lateri EC, vel æquali DC, vt rectangulum nigrum ad quadratum album; ſed hæ lineę, lateraque ſunt incommenſurabilia Idcircò etiam incommenſurabilia erunt rectangula album, & nigrum ex propoſ. 5. huius. Sed quadratum DE album eſt commenſurabile quadrato ex Rationali A conſtructo; Ergo rectangulum nigrum erit eidem quadrato Rationalis incommenſurabile ex propoſ. 7. huius.

Probatur ſecunda pars. Nam cum rectangulum nigrum fuerit oſtenſum irrationale, etiam quadratum H; quod ei ſupponitur æquale, erit irrationale comparatū quadrato Rationalis A, & ideo latus eius ex anteced. propoſ. erit irrationale.

Probatur tandem latus huius quadrati H ſit vocandum Linea Media. Nam ex propoſ. 19. lib. 6. illa lines media proportinalis eſt inter alias duas, cuius quadratum eſt æquale rectangulo ab illis duabus conſtituto. Quare cum quadratum H ſit æquale rectangulo nigro lineis BC, & CD conſtituto, erit latus eius media proportionalia, inter huius rectanguli latera BC, & CD.

COROLLARIVM I.

HInc videre eſt ſpatium medio ſpatio commenſurabile medium eſſe, ideſt irrationale. Nam poſtquam demonſtratum eſt ſpatium DA incommenſurabile eſſe ſpatio DE; oſtenſum quoque eſt medium eſſe, cum ipſum potens ſit media ſilicet latus quadrati H.

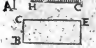
COROLLARIVM II.

HInc quoque educes omnis ſpatia ſub irrationalibus duabus, ſeu longitudine, ſeu potentiá contenta eſſe vni earum quadrato incommenſurabile; & irrationalia, quod, ita ſint quadratum DE ad rectangulum DB, vt ipſæ lineæ, EC ad CA; ſed ipſæ ponuntur irrationales. Quare etiam rectangulum nigrum albo quadrato erit irrationale.

THEOR. III. PROP. XXVII.

Si ex Rationali fiat rectangulum æquale quadrato Mediæ; alterum latus erit ei Rationali potentiâ tantùm commenſurabile.

SIt data Media A, & Rationalis BC, ſiue longitudine, ſiue tantùm potentiá, ex qua tanquàm ex vno latere, vel per propoſ. 43. lib. 1. vel reperiendo extremam BC, & A lineis proportionalem CE. Nam rectangulum ex 9. lib. 6. ex extremis CE, & CB conſtitutum erit æquale quadrato mediæ A. Dico, *quod hæc tertia proportionalis* CE *eſt Rationalis potentia tantum Rationali* BC *commenſurabilis*.



* Probatur. Nam quadratum ex Media eſt æquale rectangulo ſub duabus rectis lineis potentiá tantùm commenſurabilibus comprehenſo, vt ex propoſ. ant. Sit ergo illud GI habens lateri CB, latus HI potentiá tantùm cōmenſurabile. Modo ſic arguo. Rectangula EB, & GI ſunt æqualia, vt pote vni tertio æqualia; nimirum quadrato ex media A. Ergo habebunt latera ex propoſ. 10. l. 6. reciprocè proportionalia. Quare eandem proportionē dicet HI ad CB, quā CE ad GH: Sed HI, & CB ſunt potentiá tantùm commenſurabiles; Ergo etiam GH, & CE ex 5. h. Sed HI cōmenſuratur ipſi HG ex Theſi. Ergo ex 6. h. inuicem IH, & CE: ſed CB cōmenſuratur eodē modo HI, & CE quoq; Ergo, & inter ſe.

THEOR. VI. PROP. XXVIII.

Mediæ commenſurabilis media eſt.

S*It recta* A *mediæ* B *commenſurabilis, Dico, &* A *mediam eſſe ideſt incommenſurabilem.*

Detur itaque Rationalia, reſpectu cuius B media eſt, & ſit C. Appliceturq; ei C, vel quod idē eſt, fiat ex eá, tanquám ex vno latere rectangulum nigrum E D, quod ſit æquale quadrato mediæ B ex propoſ. 43. lib. 1. Et ex præced. EC erit Rationalis potentiá tantùm commenſurabilia. Deinde ex Rationali C; tanquam ex vno latere ex eadem propoſ. 43. lib. 1. fiat rectangulum æquale quadrato datæ A. Cum ergo media B, & A recta data ponantur commenſurabiles, earum quadrata erunt commenſurabilia ex propoſ. 4. huius; quamobrem rectangula quoque quadratis æqualia erunt commenſurabilia, quibus ſuppoſitia.

Probatur. Rectangula DE, & DF ob eandem Rationalem DC; quæ vtriuſque latus contexit, ſunt eiuſdem altitudinis: Ergo ex propoſ. 1. lib 6. ſe habebunt inuicem, vt Baſes EC, & CF: cum ergo Rectangula album, & nigrum ſint cōmenſurabilia ex hypotheſi; baſes quoque erunt inuicem cōmenſurabiles EC, & CF: Sed EC Rationali DC eſt incommenſurabilia longitudine; ſed ſolum potentiá, vt dictum eſt ex præc. propoſ. Ergo etiam talis erit CF ex propoſ. 8. h. Sunt ergo hæc duo rectangula nigrum, & album contenta ſub incommenſurabilibus longitudine, quia EC eſt incommenſurabilis ipſi C, & eidem quoque CF oſtenſa eſt incommenſurabilia / Quare & rectæ lineæ, quę quadrata æqualia iſtis rectāgulis efficere poſſunt, ex propoſ. 25. huius: Sed talia eſt A, Quoniam fecimus rectangulum album, illius quadrato æquale: Ergo erit Media.



COROLLARIVM

HInc educitur ſpatium quoque medio ſpatio commenſurabile medium. Quia rectangula nigrum, & album ponuntur commenſurabilia, & tamen probantur media, dum oſtenditur contineri ſub lineis potentia tantum commenſurabilibus. Vnde ex propoſ. 25. erit ſpatium irrationale, & linea ipſum potens media B, & conſequenter appellabitur ſpatium medium ab ipſa linea, quæ ipſum poteſt accipiendo denominationem.

PROBL. I. PROP. XXIX.

Medias inuenire potentiâ tantùm commenſurabiles, quæ rationale contineant.

SInt duæ potentiá tantùm commenſurabiles ex propoſition. 12. huius A, & B, inter quas media proportionalis ſumatur C, ex propoſ. 16. lib. 6. & ex propoſ. 15. lib. 6. reperiatur huic quarta proportionalis D; ita quod ita ſit in proportione A ad B, vt C ad D. Dico C, & D *eſſe medias potentia tantùm commenſurabiles*. Secundò, *quod ſi fiat ex eis rectangulum, illud erit rationale*.

Probatur prima pars. Nam A, & B potentiá tantùm

tantùm ſunt commenſurabiles. Ergo, cùm eandem proportionem dicant A ad B, vt C ad D erunt etiam C, & D inuicem commenſurabiles ex prop. 5 huius ſolùm potentia.

Probatur ſecunda pars: Nam fundamentum proportionis A eſt ad ſuum terminum B, ex conſtruct. vt fundamentum C ad terminum D; Ergo *permutando* referetur fundamentum A ad fundamentum C, vt terminus B ad terminum D.



Sed ex conſtructione, cùm C ſit media proportionalis, ita eſt A ad C, vt C ad B. Ergo etiam erit, vt C fundamentũ ad B terminũ, ita B ad terminum D, quòd ſit eadem proportio C ad B, quæ A ad C, & quæ A ad C eadem, talis ſit B ad D ex oſtenſione ſuperiori Et ideo etiam B erit media proportionalis inter C, & D; Propterea que eius quadratum erit æquale rectangulo ex C, & D ex 19. propoſ. lib 6. Eſt autem quadratum ex linea B conſtructum Rationale cum B ſit Rationalis potentiá tantum commenſurabilis: Ergo, & rectangulum, ex rectis C, & D tanquam lateribus compactum erit Rationale.

COROLLARIVM.

SI A, & B ſint lineæ tales potentiá commenſurabiles; ita quòd quadratum maioris ſuperet quadratum minoris ſpatio quodam, quod in quadratum redactum habeat latus commenſurabile ipſi maiori, vt docemus propoſ. 13 Etiam mediæ adiumento earum repertæ ſimili conditione gaudebunt, & C maior poterit plùs, quam D minor quadrato lineæ rectæ maiori commenſurabilis. Nam ita eſt A ad B, vt C ad D; poteſt verò A pluſquam a quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Ergo etiam C plus, quam D eodem genere quadrati poterit, vt ex propoſ. 15. huius Reperientur autem duæ cum hac conditione ex prop. 13. huius.

PROBL. II. PROPOS. XXX.

Medias inuenire potentiâ tantùm commenſurabiles, quæ ſpatium irrationale contineant.

SInt tres Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, C, & inter A, & B media D proportionalis inueniatur ex propoſ. 16. lib. 6. Deinde reperiatur ipſi D quarta proportionalis E ex propoſ. 15. ſexti; ita quòd, ſicut B refertur ad C lineam, tali quoque proportione D referatur ad lineam E. Dico D, & E *iſte medias proportionales potentia tantùm commenſurabiles*. Secundo Dico; *quòd ſpatium irrationale contineant, quòd appellatur medium*.

Probatur A, & B ſunt lineæ ex hypotheſi potentiá tantùm commenſurabiles. Ergo rectangulum factum ex ipſis ex propoſ. 26. huius erit medium. Sed D eſt inter eaſdem A, & B media proportionalis: Ergo ex propoſ. 19. lib. 6. eius quadratum rectangulo ex lineis A, & B facto erit æquale, & etiam quadratum ex D erit medium, & irrationale, & D media. Quippe quod rectangulo irrationali ſit æquale.

Sed E refertur ad C, vt D ad E. Itaque B, & C ſunt potentiá tantùm commenſurabiles; Quamobrem, & B ipſi D erit potentiá tantùm commenſurabilis ex propoſ. 5 huius. Propterea erit quoque E media ex propoſ. 28. huius. Ergo D, & E mediæ ſunt potentiá tantum commenſurabiles.



Probatur quoque 2. pars. Nempe quòd, ſi ex E, D lineis fiat rectangulũ, illud ſit mediũ.

Fundamentum B refertur ad terminum C, vt fundamentum D refertur ad terminum E, ex conſtructione. Vnde *permutando*, ita erit fundamentum B ad fundamentum D, vt terminus C ad terminum E. Sed D eſt media proportionalis inter A, & B. Quare, vt eſt A ad D, ſic erit D ad B in proportione, & *inuertendo* eá proportione reſpiciet B ipſum D ſicut D ipſum A. Cum itaque ſit B ad D, vt D ad A: Ergo etiam referetur terminus C ad terminum E, vt D refertur ad A: quia eſt ipſorum D, & A proportio eadem, quæ fundamenti B ad fundamentum D, & ideo eadem, quæ termini C ad terminum E.

Cum ergo iſtæ quatuor lineæ ſint proportionales, & D ſit ad A; vt C ad E; rectangulum ex propoſ. 18. l. 6. quod continetur ſub extremis D, & E erit æquale rectangulo à medijs contento A, & C: ſed rectangulum hoc ex lineis C, & A eſt medium ex propoſ. 26 huius. Ergo etiam rectangulum factum ex lineis E, & D ei æquale.

COROLLARIVM.

HInc naſcitur, quod ſi maior B plus poſſit quã C quadrato habente latus commenſurabile ipſi maiori B; quod etiam ſic ſe habebit D ad E, & ſuo quadrato ſuperabit quadratum ipſius E quadrato tali, quod habebit latus ſibi commenſurabile Ratioque eſt eadem, quæ præced. Coroll. quia ponitur, ſic eſſe B ad C, vt D ad E in proportione. Poteſt verò B plus, quam C quadrato rectæ lineæ ſibi maiori incommenſurabili: ergo etiam D plus poterit; quam E eodem genere quadrati, ex 15. huius: Porrò reperientur duæ E, & C cum ea conditione ex propoſ. 14. huius.

EXPENSIO VIII.

De irrationalibus, quæ naſcuntur à medijs.

MEdiæ licet reſpectu Rationalis irrationales ſint, inuicem tamen commenſurabiles ſunt, ex propoſ. 28. huius. Idcirco penes diuerſos reſpectus & relationes poſſunt dici, & rationales, & irrationales; irrationales quidem reſpectu Rationalis expoſitæ, at rationales inuicem: De iſtis verò duo genera aſſignauimus: Primum propoſ. 29. quæ rationale ſpatium continent: Secundum propoſ. 30. quæ medium ſpatium amplectuntur. Nunc ex iſto duplici genere mediarum; Quatuor ſpecies oriuntur irrationalium linearum; duæ per compoſitionem, duæ per ſubtractionem, vt ſupra ex rationalibus potentia tantùm Binomia, & Apotomes naſcebantur. Si ergo potentiá commenſurabilis mediæ, ei addatur; quæ ambæ rationale ſpatium contineant, vocabitur ex Binis Medijs prima, ſeu primum Binomium Medium. Si verò vna ſubducatur ab aliá, vocabitur media

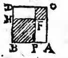
Apotome prima. Si verò duę mediæ inuicem potentia commenſurabiles medium contineant ſpatium, & vna adiatur alteri vocabitur ex binis medijs ſecunda; ſeu Binomium Medium ſecundum: Si verò vna ſubducatur ab alia, dicitur media Apotome ſecunda.

THOR. I. PROPOS. XXXI.

Si duæ mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis erit, quæ vocatur ex Binis Medijs Prima.

COmponantur duæ Mediæ PA, & PB ſuperiùs inuentæ propoſ. 19. quæ rationale rectangulum contineant. *Dico totam irrationalem eſſe.*

Probatur. Nam rectangulum album AF ex medijs AP, & PB ita refertur ad quadratum nigrum ex BP ex 1. l. 6. cum ſit eiuſdem altitudinis, vt baſes; Sed baſes ſunt incommenſurabiles: Ergo etiam Rectangulum AF album eſt incommenſurabile quadrato nigro PH.



Addatur rectangulo aliud æquale FD, & ideo ſibi commenſurabili: Quadrato verò PH nigro ex PB, quadratum nigrum OF ex AP, quod vtique ei erit commenſurabile; cùm mediæ inuicem ponantur potentiâ commenſurabiles. Illa duo rectangula alba AF, & FD adhuc erunt incommenſurabilia quadratis nigris, ex propoſ. 8. huius.

Verùm ſi omnia hæc aggregentur ſimul, duo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris, ex propoſ. 10. hoc aggregatum ex magnitudinibus irrationalibus vtrique parti aggregatæ irrationale erit, & ſignanter duobus rectangulis albis, quæ magnitudo eſt vna pars aggregata.

Tota autem hæc magnitudo irrationalis, nempe duo rectangula alba, & duo quadrata nigra æquant ex propoſ. 6. l. 2. quadratum AD ex tota AB: Ergo hoc quadratum AD ex tota AB erit irrationale reſpectu rectangulorum alborum, quæ ſunt rationalia, & ideo etiam reſpectu quadrati Rationalis. Quaderè etiam ipſa tota AB, latus ipſius, erit incommenſurabilis lineæ Rationali.

Vocatur autem *Binomium medium*; quod componatur ex duabus medijs, & *primum* ad differentiam ſecundi.

THEOR. II. PROPOS. XXXII.

Si à media media auferatur potentiâ tantùm ei commenſurabilis, quæ rationale contineant, Reliqua irrationalis erit; vocatur autem Media Apotome prima.

ACcipiantur duæ mediæ potentiâ tantùm commenſurabiles, quę ſpatium rationale contineant inuentæ propoſ. 32. huius CB, & AC, & minor BC ſubducatur à maiori AC. *Dico reſiduum AB eſſe lineam irrationalem.*

Probatur. Rectangulum AI ſub maiori AC, & minori BC eſt rationale: Quare etiam duplicatum erit rationale, vt ſunt AI, & BH. Quadrata verò nigra ex medijs AH, & BI irrationalia reſpectu Rationalis quadrati, licet inuicem rationalia, & ideo etiam irrationalia reſpectu rectangulorum AI, & EH, vtpote illi quadrato Rationalis commenſurabilium ex Theſi.

Si verò totum ex duobus quadratis AH, & BI ſumatur erit vtique ſingulis quadratis commenſurabile: cum partes ipſæ nempe quadrata ſint inuicem commenſurabilia, & ideò reſpectu rectangulorum AI, & BH erit totum irrationale ex propoſ. 8. huius.



Verùm, ſi rectangulis duobus addatur quadratum ex AB, ex 9. ſecundi fit magnitudo æqualis magnitudini duorum quadratorum BI, & AH; ideoque ſicut duo quadrata AH, & BI ſunt rectangulis oſtenſa incommēſurabilia, ſic erit hoc aggregatum ex rectangulis, & quadrato BA ipſis AH, & BI nigris quadratis æquale, rectangulis eiſdem AI, & BH ſeorſim ſumptis erit irrationale.

Cùm itaque tota magnitudo ex rectangulis, & quadrato ex AB ſit incommenſurabilis ſuæ parti, nempe rectangulis ſeorſim: Erit etiam incommenſurabilis reliquæ parti nempe quadrato nigro ex AB ex parte 2. propoſ. 10. Quare Quadratum ex AB erit incommenſurabile Rectangulis ipſis; ſed rectangula ponuntur rationalia reſpectu Quadrati lineæ Rationalis: Quaderè etiam quadratum ex AB erit irrationale ex propoſ. 8. reſpectu quadrati lineæ Rationalis; Et idcirco etiam ipſa AB ipſi Rationali, irrationalis erit.

THEOR. III. PROPOS. XXXIII.

Si duæ mediæ potentiâ tantùm commenſurabiles componantur, quæ medium contineant, tota irrationalis erit; vocatur autem ex Binis Medijs Secunda.

COmponantur duæ mediæ potentiâ tantùm inuicem commenſurabiles AB, & BC, quæ medium ſpatium contineant. *Dico totam AC irrationalem eſſe.*

Præaſſumptum. Vt propoſ. oſtendatur præſupponendum eſt, Duo rectangula alba inuicem æqualia eſſe media; quia alterum ex ipſis ſub AB, & BO ex Theſi eſt medium, & ideo eius duplum, eique commenſurabile, medium eſt ex Coroll. propoſ. 30.



Sic quoque quòd quadrata nigra ſunt media, quia lineæ AB & BO eorum latera contexentes ex Theſi ſunt mediæ reſpectu rationalis, licet inuicem comparatæ commenſurabiles ſint potentiâ; ideoque eorum quadrata inuicem ſibi erunt commenſurabilia, & hinc compoſitum ex ipſis ex propoſ. 10. erit medium, & irrationale, ſicut ipſa ſeorſim irrationalia ſunt.

Deinde Rationali ED expoſitæ applicandum eſt rectangulum EH, ſilicet ex eâ, tanquam ex vno latere, efficiendum eſt AH ex propoſ. 43. primi; quod rectāgulum ſit æquale duobus medijs rectangulis albis, & eidem aliud rectangulum PD applicandum eſt, quod ſit æquale duobus quadratis nigris item medijs.

Primo itaque eſt oſtendendum ſpatium totum

PH

PH eſſe irrationale reſpectu quadrati lineę Rationalis; & hoc demonſtrabitur ex eò, quòd conti-



neatur ſub CD, & DH, quę oſtendētur potentiâ tantùm commenſurabiles, quæ compoſitæ facient ex propoſ. 16. h. lineam irrationalem CH; linea verò DE, vel æqualis CP Rationalis eſt. Ideoque ſpatium PH erit irrationale, vt oſtendetur: Quibus omnibus ſuppoſitis, cum ſpatium PH irrationale, ſit æquale quadratis nigris, & albis rectangulis, ex effectione, quæ ex propoſ. 6. lib. 2. faciunt quadratum ex totâ AO, erit quadratum AK ex tota AO irrationale: Quamobrem etiam latus, & tota AO erit irrationale.

Primo itaque progreſſu oſtendendum eſt duas CD, & DH eſſe rationales potentiâ tantùm commenſurabiles, & oſtendetur primo eſſe incommenſurabiles longitudine. Nam in figura primò propoſita rectangulum AI ex AB, & BO album quadrato nigro ex BO incommenſurabile eſt; quòd ex 1. lib. 6. rectangulum ſit ad quadratum eiuſdem altitudinis, vt baſis AB ad baſim BO; Ideoque cum baſes ſint incommenſurabiles, etiam rectangulum AI album ex AB, & AO erit nigro quadrato ex BO incommenſurabile. Ideoque etiam duo rectangula duobus quadratis erunt incommenſurabilia, quia rectangulum rectangulo æquali. Quadratumq; quadrato commenſuratur ad præaſſump. Ideoque ſpatium quoque nigrum PD æquale quadratis erit incommenſurabile ſpatio albo EH æquale rectangulis. Ipſæ ergo lineæ erunt incommenſurabiles, cum ſit rectangulum nigrum ad rectangulum album, vt baſis ad baſim ex 1. l. 6.

Probatur deinde 2. Progr. Quod etiam ſint potentiâ commenſurabiles. Nam ſpatium nigrum PD eſt medium, vtpote æquale quadratis nigris medijs ex præaſſumpt. & DE Rationalis. Ergo alterum latus CD erit Rationale ſaltem potentiâ, ex propoſ. 27. Et ex eadem cum ſpatium album EH ſit medium, vtpote medijs rectangulis albis AI, & IH æquale, latus eius alterum HD erit potentiâ commenſurabile; quia ED Rationalis eſt; itaque lineæ CD, & DH ſunt incommenſurabiles longitudine quidem, vt ſupra oſtenſum eſt: Verùm, vt modo oſtendimus, commenſurabiles potentiâ, compoſitę facient lineam CH irrationalem ex propoſ. 16. huius, Ideoque ſpatium PH concluſum ſub rationali DE, vel CP, & ſub irrationali CH erit irrationale: Quod conſequens modo demonſtrandum eſt.

Progreſſ. 3. Si ſpatium CH eſſet rationale ſpatium, latus quoque CH eſſet rationale, & ſic rationale, & irrationale; quod repugnat. Irrationale quidem, vt probatum eſt progreſſ. 2. Rationale verò, vt oſtendetur ex ſententiâ aduerſariorũ, ſi ſpatium ex CH aſſerant rationale. Nam facto quadrato PR ex Rationali CP, ita erit quadratum PR ad rectangulum HP, vt RC ad CH: ſed rectangulum HP comparatum quadrato PR ex aduerſarijs eſt rationale: Ergo latus RC, vel æquale DE reſpectu lateris CH ob eandem altitudinem CP erit rationale, contra quòd oſtenſum eſt progreſſ. 2. cum itaque hoc ſpatium PH ſit irrationale, & ſit æquale quadrato AK etiam quadratum illud erit irrationale, & linea AC irrationalis erit reſpectu rationalis DE, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM

Hinc eſt, quod medium ſpatium non ſuperet medium ſpatium ſpatio rationali: ſed irrationali ſpatio. Siquidem quadratum AK eſt irrationale, & medium, cui æquatur rectangulum PH & ideo irrationale eſt. Rectangulum quoque nigrum PD eſt irrationale, & medium, quod ſuperatur à rectangulo PH ſpatio EH, quòd oſtenſum eſt irrationale; ſiquidem ſi ſpatium EH eſſet Rationale, etiam rectangula AI, & IK æqualia eſſent rationalia.

THEOR. IV. PROP. XXXIV.

Si à mediâ media auferatur potentiâ tantùm commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota medium contineat reliqua irrationalis erit, vocatur verò mediæ Apotome ſecunda.

Detrahatur à media AC media BC, ei AC tantùm potentiâ commenſurabilis; quæ cum tota AC medium rectangulum contineant. *Dico reliquam BA irrationalem eſſe latera alicui expoſita Rationali, cui BC, & AC mediæ ſint.*

Probatur. Nam, cum latera AC, & BC potentiâ tantum ſint commenſurabilia, efficient ſua quadrata cõmenſurabilia: Quare etiam cõpoſita ex 9. huius, magnitudo ex compoſitione reſultans vtriſque. ſeorſim commenſurabilis erit. Quamobrem, cùm ea quadrata ex hypotheſi media ſint, tota magnitudo eis commenſurabilis media erit ex propoſ. 9. huius.



Progreſſ. 2. Rurſùs, quia rectangulum ſub AC, & BC medium, & irrationale eſt ex Theſi; ſi accipiantur duo ex ipſis AI, & BH; Tota quoque magnitudo media erit ob eandem rationem, quòd dupla ſit ſingulis partibus, & duplum ſuæ parti dimidiæ commenſurabile ſit.

Progreſſ. 3. Sciendum verò eſt ex 8. lib. 2. Duo quadrata, totum ex AC, & nigrum ex CB prædicta eſſe æqualia duobus rectangulis AI, & BH addito eis quadrato ex BA: Spatium itaque medium ex 1. progr. nempe duo quadrata ſuperant ſpatium medium ex 2. progr. nempe duo rectangula, quadrato ex AB: ſed ex præc. Coroll. medium non ſuperat medium, niſi ſpatio medio: Ergo illud ſpatium reliquum quadratum ex AB erit medium, & irrationale; & linea AB; quæ eius latus conſtituit, erit irrationalis, quæ vocanda eſt media Apotome ſecunda.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, & nulli antecedentium eſt eadem.

SIt media DA. Dico *ex ea fieri irrationales infinitas, quæ nulli ex primo factis eadem ſint.*

Expoſita enim Rationali AC. Contineatur ſub rationali AC, & mediâ AD ſpatium DC: hoc erit irrationale. Poſſit illud recta DE, ideſt ſit latus quadrati illi ſpatio æqualis; hoc erit rurſus irrationale quadratum, & DE erit media inter DA & AC ex prop. 19 lib. 6. Addatur DI ipſi Rationali, vel æquali DI, & fiat ſpatium EI, hoc iterum erit irrationale cum contineatur ſub media ED & rationali DI. Poſſit illud EF, quæ rurſus erit media proportionalis inter ED & rationalem DI, & ſic in infinitum.



Quod vero ED non ſit eadē, ac AD patet, quia EI eſt rectangulum, linea verò ED eſt latus quadrati ei rectangulo æqualis; ſic EF eſt latus quadrati rectangulo EI equalis: vnde EF non poteſt æquari ipſi ED, ſed nec ipſi DA; cum ſemper proportio, vel creſcat, vel diminuatur. Eſt enim rectangulum ED minus, quam DA ob latus minus ED altero DI ſemper eodem perſiſtente, & ſic de alijs in infinitum.

Quòd verò rectangulum ſub rationali, & irrationali contentum ſit irrationale patet. Nam rectangulum ex media AD, & AC Rationali eſt ad quadratum ipſius Rationalis AC ob eandem altitudinem, quam ipſa Rationalis præſtat, vt baſis AD ad latus AC: ſed ex Theſi ſunt irrationales, ergo etiam ipſum ſpatium erit irrationale quadrato Rationalis, & ſic dicas de omnibus alijs.

EXPENSIO IX.

De lineis in partes commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles, & omninò irrationales ſecandis.

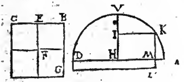
VIſis inuentionibus linearum potentiâ incommenſurabilium; modo docere oportet, quomodo in qualibet exhibitâ lineâ partes commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles reperiatur pro qua indagine neceſſaria eſt propoſ. 30. & 31. lib. 6. in qua docemus applicare rectangulum æquale dato rectilineo alicui lineæ, quòd ad implendam totam eius longitudinē figurâ quadratâ deficiat: Verùm quia propoſitio, vtpote vniuerſalis eſt difficilior, nos verò ſolum indigemus applicatione ad lineam datam rectanguli tantum æqualis quadratu; inde ponemus Lemma faciliùs ad Inſtitutum deſeruiens.

LEMMA I. PROP. XXXVI.

Datæ rectæ maiori rectangulum applicare æquale quartæ parti quadrati à minore deſcripti: ſed taliter, vt per totam non ſe extendat; ſed ſpatium relinquat, cui quadratum applicari poſſit.

SIt linea maior AD, minor CB, quæ diuiſa bifariam in E; quadratum ex medietate CE deſcriptum, vt CF, erit quarta pars quadrati à tota deſcripti CG, ex propoſ. 6. ſecundi Coroll. Huic ergo quartæ parti CE ſit applicandum ad lineam AD maiorem æquale parallelogrammum.

Secetur AD bifariam in H, & deducta perpendiculari ad AD, quæ ſit HV à puncto H detruncetur æqualis ipſi CB, & centro H interuallo HD medietate ducto ſemicirculo AKVD ab I ducatur IK perpendicularis ipſi HI; & eo puncto, quo ſecat ſemicirculum in K, deducatur alia perpendicularis ad AD, quę ſecet eam in M: ſegmentoque AM æqualis fiat reliqua ML, & tandem perficiatur rectangulum LD.



Dico hoc parallelogrammum LD applicatum rectæ AD eſſe æquale quadrato CF, & deficere figura quadrata AL vſque ad occupandam totam lineam AD.

Probatur ex propoſ. 16. l. 6. MK eſt media proportionalis inter MD, & MA. Ergo eius quadratum ex propoſ. 19. eiuſdem eſt æquale parallelogrammo LD ex lineis MD, & ML confecto: ſed huius KM quadratum eſt æquale quadrato CF, quod ſit MK latus æquale ipſius lateri CE ex effectione. Ergo rectangulum DL eſt æquale quadrato CF: patet verò deficere figura quadrata ad occupandam lineam AD; quia latus LM eſt æquale ſegmento MA.

THEOR. I. PROPOS. XXXVII.

Si recta ſecetur in partes inæquales, & ab eadem detrahatur pars æqualis parti minori: ſi illæ partes fuere commenſurabiles, reliquum erit commenſurabile toti; ſin minus, reliquum erit toti incommenſurabile.

SIt recta AD, cui detrahatur minor pars AB, & rurſus huic æqualis pars CD. Dico reliquum BC commenſurabile eſſe ipſi primitiuæ AD; ſi tamen partes primo factæ AB, & BD ab initio fuere commenſurabiles.

Pro-

Probatur. Quoniam partes AB, & BD ponuntur primò commenſurabiles ſuo toti AD: Etiam tota linea AD vtrique ipſarũ cõmenſurabilis erit ex propoſ. 9. Componantur AB, & æqualis CD: eritque compoſita commenſurabilis ſuæ parti dimidiæ AB, & ideo tota AD etiam huic toti ablato AB, & CD commenſurabilis erit. Quare totũ AD, etiam reliquo commenſurabilis erit ex Coroll. prop 9.



Probatur ſecundus caſus eodem genere argumenti. Nam, ſi pars AB eſt incommenſurabilis parti BD, eritque compoſita ex iota AD ex propoſ. 10. incommenſurabilis ſingulis ſuis partibus AB, & BD. Addatur parti AB pars æqualis CD, vt ideo ei commenſurabilis, & huic toti adhuc erit incommenſurabilis tota AD ex propoſ. 8. & ideo ex Coroll. propoſ. 10. erit quoque incommenſurabilis reſiduo BC.

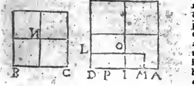
COROLLARIVM

Deducitur. Conuerſam huius propoſitionis quoad vtrãque partes eſſe quoque veram: nempe, quòd ſi BC ponatur commenſurabilis ipſi toti DA, etiam BA, vel CD, vel vtraſque ſimul commẽſurabiles, ipſi DA futuras; quoniã ſi tales nõ eſſent, deberet dici, quòd eſſent incommenſurabiles BA, ſeu CD ipſi DA: quare ſequeretur quoque iuxta præced. BC eſſe incommenſurabilem ipſi AB contra Theſim. Similiter ſi CB incommenſurabilis ponatur ipſi DA: Erit etiam BA, vel CB, vel vtraque ſimul incommenſurabiles ipſi AD ob eandem rationem; quia ſi eſſent commenſurabiles ſequeretur contra Theſim iuxta anteced. oſtenſionem, BC non eſſe incommenſurabilem.

THEOR. II. PROPOS. XXXVIII.

Si fuerit linea quadam maior, cui fuerit applicatum rectangulum æquale quartæ parti quadrati à minore deſcripti, & fecet lineam in partes inæquales; exceſſus, ſeu differentia, qua maius ſegmentum ſuperat medietatem, erit latus quadrati, cuius quadruplum eſt exceſſus quadrati lineæ totius maioris ſuper quadratum minoris.

Sit linea AD, cui fuerit applicatum ex Lemmate præcedenti rectangulum ML æquale quartæ parti CN quadrati à minore CB deſcripti. Dico, *quod differentia MI erit latus quadrati, cuius quadruplum æquat exceſſum, quo quadratum lineæ AD ſuperat quadratum lineæ CB.*



Quòd, vt probetur; diuidatur maior AD bifariã in I, & ex ea ſumatur DP æqualis lineæ, & ſegmento AM, quo facto cum AI, & ID ſint medietates; & ideo æquales, & MA, & PD ablatæ æquales; reliquæ MI, & IP æquales remanebunt.

Progr. 1. Recta AD eſt diuiſa bifariam in I, & & non bifariam in M: Quare ex propoſ. 7. lib. 2. rectangulum ML ſub MA, & MD contentum vnà cùm quadrato ex MI erecto erit æquale quadrato ex medietate IA deſcripto.

Progr. 2. Sed rectangulum hoc ex hypotheſi, & conſtructione eſt æquale quartæ parti hoc eſt CN quadrati ex minore CB deſcripti, Ergo hoc rectangulum ML quater acceptum æquabit totum quadratum ex CB deſcriptum. Et quadratum ex MI, vt ex Coroll. propoſ. 6. lib. 2 conſtat æquabit quadratum ex MP quater acceptum, quòd ſupra MI, & IP oſtenſæ ſint æquales.

Progreſſ. 3. Sed quadratum ex AI æquat rectangulum ML ſimul cum quadrato ex MI, & dixi progreſſ. 1. & hoc quadratum quater acceptum æquat quadratum totius AD ex Coroll. propoſ. 6. lib. 2. Ergo etiam rectangulum ML ex ſegmentis, & quadratum MI quater accepta æquabant quadratum ex linea tota AD deſcriptum.

Progreſſ. 4. Sed ex ſecundo progr. Rectangula quatuor ſunt æqualia quadrato ex CB, & hæc eadem ſimul cum quatuor quadratis ex 3. progreſſ. æquant quadratum ex AD: Ergo AD quadratum excedet quadratum ex CB quatuor quadratis ex MI differentia, quod erat probandum; Quatuor autem quadrata ex MI æquant quadratum ex MP, vt progreſſ 2. dictum eſt.

PROBL. I. PROPOS. XXXIX.

Diuidere datam lineam in partes incommenſurabiles.

Sit data recta AD in præced. ſchemate, quam oporteat diuidere in partes incommenſurabiles. Huic primò reperiatur alia tantùm potentiã commenſurabilis minor CB, quã minori poſſit efficere ipſa data maior AD quadratum maius tali exceſſu quadrato, qui habeat latus ſibi maiori incommenſurabile ex propoſ. 14. huius. Applicetur autem rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex minore CB deſcripti, quòd deficiat ad eius longitudinem occupandam figurã quadratã, & ſit ML. Dico MD eſſe partem in linea AD incommenſurabilem ipſi AD, & etiam compartem AM talem eſſe ipſi AD actu; & potentia, ſed inſuper inuicem eſſe incommenſurabiles.

* Probatur. Quia ex præced. MI, qua maior pars ſuperat medietatem eſt quarta pars quadrati, quo linea AD ſuo quadrato ſuperat quadratũ lineæ CB; Ideoque MP erit linea ſubtendens totum quadratum, quò maioris AD ſuperat minoris CB quadratum: Ergo MP erit incommenſurabilis, quia ex hypotheſi exceſſus iſte quadratus obtinet latus incommenſurabile ipſi AD. Sed ex propoſ. 37. Coroll. ſi MP ſit incommenſurabilis ipſi AD etiam MA & PD erit incommenſurabilis toti lineæ AD. Ex propoſ. 10. autem, ſi tota magnitudo ex duabus conflata vni earum incommenſurabilis ſit, erit, & alteri ex partibus, & ipſæ partes ab initio aſſumptæ incommenſurabiles erunt. Quare AM, & PD ipſi AD toti, & etiam comparti MP incommenſurabilis erit. Quòd ſi componatur MP, & AM, vel æqualis PD tota quoque magnitudo MD erit incommenſu-

menſurabilis parti MA. Quamobrem portiones AM, & MD incommenſurabiles erunt longitudine, tum toti AD, tum inter ſe.

Præaſſ. Pro oſtenſ. 2. partis, ſcilicet, quòd ſint, nedum actu incommenſurabiles, ſed etiam potentiâ, tum reſpectu lineæ AD, tum inuicem incommenſurabiles, præſupponendum eſt; Quòd rectangulum ML eſt commenſurabile quadrato CB, cum ſit eius quarta pars, & ideo quadrato AD, cui ex CB quadratum ex Thrſi commenſuratur. Deinde, quòd etiam quadratum ea MP eſt commenſurabile eidem AD. Quia, cùm quadratum ex CB ſit commenſurabile toti quadrato ex AD, erit etiam reliquum ex MP eidem commenſurabile; quòd autem ex MP ſit reliquum oſtenſum eſt in præced. Tandem rectangulum ML eſſe eiuſdem altitudinis, ac quadratum ex AM, & quadratum ex MD, nam vnum latus DL æquat AM ea hypotheſi, & MD eſt latus etiam quadrati ex MD.

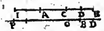
* Probatur, quòd AM, & MD ſint incommenſurabiles potentiâ ipſi AD Rectãgulum LM eſt cõmenſurabile quadrato CB, cum ſit eius quarta pars: Ergo etiam quadrato AD, cui ex CB commẽſuratur quadratum. Sed vt eſt AM, ad MD incommenſurabiles ex 1 l.6 ſic eſt quadratum ex AM ad rectangulum ML ob eandem altitudinem DL æquale PD; Ergo etiam quadratum ex MA erit incommenſurabile quadrato ex CB, & ideo ex AD. Idem oſtendetur de quadrato MD. Quia eſt eiuſdem altitudinis ob latus MD idem, ac rectanguli ML. Ergo erit incommenſurabile rectangulum ML, & quadratum ex MD, quales ipſæ baſes ſunt AM, & MD, & ideo quadratum ex MD erit incommenſurabile ipſi quadrato ex CB, & quadrato ex AD.

*. Probatur. Etiam, quòd quadrata ex AM, & MD ſint inuicem incommenſurabilia. Nam rectangulum ML duplicatum, cum quadrato ex MP, ex 9. ſecundi æquant quadratũ ex MD, cum quadrato PD. Cũ autẽ rectang. ML, & quad. MP ea præaſſ. ſit commenſurabile ipſi AD. Etiam illa rectangula ML duplatum, & quadratum MP ſunt commenſurabilia quadrato CB, & AD: Ergo etiam totum quadratum ex MD ſimul cùm quadrato ex PD, vel AM, commenſurabilis erunt, quæ illa æquant quadrato ex CB, & AD, ſed quadratum ex AM eſt oſtenſum incommenſurabile quadrato ex CB, vel AD. Ergo etiam erit incommenſurabile toti quãtitati aggregatæ quadratorum AM, & MD; Quare ex propoſ 10. ipſa quadrata erunt inuicem incommenſurabilia.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Si linea extrema, & media ratione ſecetur, vtrumque ſegmentum irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

* PRobatur de maiori ſegmento. Nam ſi tota linea AB ponatur rationalis; etiam dimidium erit rationale. Sed ea propoſ 35. l.6. ſi hoc dimidium reperiatur coniunctum cum maiori ſegmento facit quadratum quintuplo maius; quã à dimidio deſcriptum quadratum. Quare dimidij CB, vel æqualis AI, & maioris ſegmenti AD tanquam ex vnica linea, ideſt DI factum quadratum erit vt 5. reſpectu quadrati ex ſola dimidia AI, quod erit vt 1. Eritque proportio tanquam numeri ad numerum, vnde lineæ ipſæ dimidia AI, & ſegmentum AD ſimul reſpectu dimidij tantum, ideſt AI, vel CB erunt potẽtia tantum commenſurabiles, cum earũ quadrata habeant proportionem, quam



numeri ad numerum: Si ergo dimidia IA auferatur ab ID, reliquum remanebit AD ſegmentum maius ex propoſ. 19 huius Apotome.

* Probatur quoque ſecunda pars. Nam, ſi addatur PB tota minori ſegmento, & fiat DP efficit ex propoſ. 38. lib. 6. quadratum quintuplo maius, quàm quòd efficitur à maiori ſegmento PO; ſi ergo auferatur maius ſegmentum à totâ, cum minori ſegmento DB, remanebit dupla minus ſegmentum; nempe, quòd erat prius DB, & id, quod relinquitur ex hac ablatione BO. Quare DO eſt Apotome, ſed DB eſt dimidium BO: Ergo DB eſt Apotome, quòd erat probandum. Quoniam irrationali commenſurabilis irrationalis linea ex prop. 8. huius eſt, & Apotome quoque, quòd exoriatur ex ablatione minoris à maiori linearum, quæ inuicem potentia commenſurantur, cùm earũ quadrata ſint, vt ¾ quad. ad quinque, ex 6. l. 2.

EXPENSIO X.

De irrationalibus ſimpliciter.

TErtium genus irrationalium eſt earum, quæ naſcuntur ea equipotentia ad duas lineas incõmenſurabiles, nedũ longitudine ſolùm, ſed etiã incõmenſurabiles potentiã; & huius generis ſunt tres ſpecies. Prima ſpecies eſt earũ, quarum quadrata ſimul poſita faciunt ſpatium rationale; rectangulum verò ab ipſis contentum medium, Secundum genus ſe habet è contrà; nam rectangulum ſub ipſis contentum eſt rationale, ſpatium verò ea earum quadratis conflatum eſt irrationale. Tertium genus eſt earum, quæ faciunt rectãgulum ſub ipſis contentum medium, & ſpatium quoque, quòd conflatur ex eorum quadratis medium, quæ quomodo inueniãtur docere oportet.



Obſeruandum eſt ex 29. l. 6. quod perpendicularis in rectangulo ab angulo recto demiſſa ſecat baſim tali modo, vt rectangulum ſub tota, & maiori ſegmento ſit æqualis quadrato maioria lateris, at rectangulum ſub tota, & minore ſegmento ſit æquale quadrato minoria lateris.

Quod patet ea Corollu. pr. 8 l. 6. Nam latus BA maius eſt medium proportionale inter totam baſim BC, & maius ſegmentũ BD: Ergo ex propoſ. 19. lib. 6. eius quadratum erit æquale rectangulo, quod totâ baſi BC maiori ſegmento BA ambitur Eadem ratio eſt de totâ BC, & minori ſegmento DC inter, quæ medium proportionale eſt minus latus CA.

Sic obſeruandum eſt, quòd quadratum perpendicularia eſt æqualis rectangulo ſegmentorum, quòd ex eiuſdẽ 8. Cor. 1. l. 6. perpendicularis ſit mediũ proportionale inter duo baſis ſegmenta.

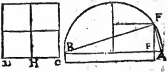
Sic

Sic rectangulum ſub tota baſi, & ſub perpendiculari eſſe æquale rectangulo crurum: Patet, quia ob ſimilitudinem triangulorum, ita eſt CB ad crus maius AB, vt crus minus, & baſis AC in triangulo CAD eſt ad perpendicularem AD, cruſq; maius in eodem triangulo, ideoque ex propoſ. 19. lib 6. rectangulum contentum ſub extremis proportionalibus erit æquale mediarum rectangulo.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant quidem compoſitum ex ipſarum quadratis rationale; rectangulum verò ſub ipſis contentum medium.

Reperientur duæ Rationales poteſtate ſolùm commenſurabiles, ex propoſ. 14. huius, quarum maior AB plus poſſit, quam minor CD quadrato rectæ ipſi maiori AB incommenſurabilis. Deinde ex propoſ. huius 36. applicetur maiori parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, quod ſit æquale parti quartæ quadrati à minore CD deſcripti, cuius latus eſt medietas CH, diuidatque eam in ein partes incommenſurabiles, ita quòd rectangulū contineatur ſub AE, & EB. Deſcripto tandem ſemicirculo ſuper AB, erigatur à puncto E perpendicularis EF, ad AB, quæ ſecet ſemicirculum in F; iunctis ergo punctis extremis AF, & AB erunt rectæ AF, & FA duæ incommenſurabiles, quarum quadrata compoſita facient magnitudinem rationalem; *rectangulum verò ab ipſis contentum medium.*



Probatur primò: Quòd ſint *incommenſurabiles* ex propoſ. 39. huius. Partes AE, & EB ſunt incommenſurabiles, ſed vt eſt ſegmentum AE ad ſegmentum EB; ita eſt rectangulum ſub tota, & minore parte EA ad rectangulum ſub tota, & maiore parte EB ex 1. ſexti; quòd ſint eiuſdem altitudinis ob idem latus AB totius, commune vtriſque. Ergo etiam hæc duo rectangula erunt incommenſurabilia, vt ſunt baſes AE, & EB. Sed hoc rectangulum ex tota, & maiore parte EB eſt æquale quadrato ex BF, vt ſuprà notaui, ſicut, & rectangulū ex tota, & minore parte AE, vt ſuprà eſt æquale quadrato ex latere AF minore. Ergo quadratum crurismaioris BF, & quadratum minoris AF erunt incommenſurabilia; & ideo rectæ AF, & FB, quæ horum quadratorum conterunt latere, erunt incommenſurabiles eodem modo, quo AE, & EB, nimirum toti rationali AB, & inter ſe.

Probatur ſecunda pars. Quod earum quadrata compoſita efficiant ſpatium rationale. Nam ex 11. ſecundi efficient ſpatium æquale quadrato ex AB ob rectangulum triangulum AFB: Baſis verò AB ponitur potentiâ commenſurabilis ipſi CD minori, & ideo eius quadratum erit rationale. Quadrata ergo ex AF, & FB ſimul poſita illi quadrato æqualia efficient ſpatium rationale.

Probatur tertia pars, quòd rectangulum ſub ipſis AF, & FB contentum ſit medium. Rectangulum ſub AB, & CD contentum, vtpote, quæ ſint poteſtate ſolùm commenſurabiles medium eſt prop. 26. huius. Ergo etiam omne aliud, quòd ipſis ſit commenſurabile ex propoſ. 28. Coroll.

Sed rectangulum ex totâ baſi AB, & perpendiculari EF illi commenſuratur, quòd ſit medietas eius, ergo hoc rectangulum erit medium.

Quòd verò ſit medietas rectanguli ex CD, & AB incommenſurabilibus rectangulum ex AB, & EF oſtenditur; quia EF horthogonalis eſt medietas lateris CD. Vnde, cùm rectangulum ex tota AB, & FE ſub totâ AB, & medietate lineæ CD contineatur erit dimidio minor; quàm rectangulum ſub totâ AB ratiom, & totâ CD.

Quòd verò orthogonalis ſit medietas lateris CD, ſic oſtenditur, perpendicularis FE quadratum ex præaſſumpt. æquale eſt rectangulo ex partibus AE, & EB baſis; ſed hoc ex effectione eſt æquale quadrato ex dimidia CH totius CD: Ergo quadratum perpendicularis FE, & quadratum ex HC erunt æqualia. Vnde, & latera erunt æqualia, & perpendicularis EF erit æqualis medietati CH lineæ CD. Rectangulum ergo ſub EF, & AB, vtpote medietas rectanguli medij, & irrationalis ſub AB, & DC contenti erit medium, & irrationale: Sed huic ex prænotatis eſt æquale rectangulum ex cruribus AF, & FB; Igitur rectangulum ex cruribus AF, & FB erit medium, & irrationale. Duæ itaq; AF, & FB faciunt quadrata ſimul poſita rationalia, at rectangulum ſub ipſis contentum medium, & irrationale, & ipſę ſunt incommenſurabiles potentiâ ipſi AB Rationali potentiâ commenſurabili.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommenſurabiles; quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium: rectangulum verò ſub ipſis contentum Rationale.

Inueniantur duę *Media* ad differentiam propoſ. antecedent. AB, & CD potentia tantùm inuicem commenſurabiles, quæ Rationale ſpatium amplectantur ex propoſ. huius 29. ſed hac conditione, quòd AB maior plùs poſſit, quàm CD minor quadrato rectæ ſibi maiori longitudine incommenſurabilis, quas docuimus inuenire Coroll. prop. 30. Deinde applicetur maiori rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex CD minori deſcripti, & omnia peragentur, vt priùs vtendo eadem figura, *Dico primo AF, & FB eſſe incommenſurabiles.*

Probatur eadem ratione, quâ oſtenſa eſt prima pars præced. propoſ. ex eo principio, quòd partes AE, & EB ſint incommenſurabiles. Vnde, & eorum rectangula ſub tota AD, & ipſis AE, & EB comprehenſa, vtpote eiuſdem altitudinis: ideoque quadrata ex AF, & FF eis æqualia: Idcircoque, & & ipſa latera AF, & BF erunt incommenſurabilia. Dico ſecundo. *Compoſitum ex ipſarum quadratis eſſe medium, & irrationale.*

Probatur eodem modo, quo oſtenſa eſt ſecunda pars præced. Ex eo, quod ſit æqualis ea magnitu-

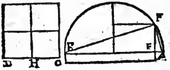
do quadratorum compoſitorum ex AF, & FB quadrato ex AB media. Vnde illud ſpatium duorum quadratorum medium erit ex Coroll. propoſ. 28.

Dico tertio *rectangulum ſub ipſis contentum eſſe rationale*. Probatorque eadem deductione, qua tertia pars præced propoſ. Nempe ex eo, quia rectangulum earum AF, & FB æquale eſt rectangulo ex perpendiculari FA, & tota BA; quod eſt medietas rectanguli ſub AB, & CD, & ideo ipſi commenſurabili. Idcircoque, cùm rectangulum illud ex AB, & CD ex Hypotheſi ſit rationale, cùm medias aſſumpſerimus ſpatium rationale continentes, etiam dimidium eius erit rationale, & ideo rectangulum ex AF, & FA huic dimidio æquale, erit quoque rationale.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum ex earum quadratis medium, & rectangulum ſub ipſis comprehenſum medium.

REperiantur duę Mediæ potentiâ tantùm commenſurabiles AB, & CD; quæ medium contineant ſpatium, & irrationale ex propoſ. 30. huius, & maior plus poſſit, quàm minor quadrato cuiuſdam rectæ maiori incommenſurabilis. Deinde omnia fiant, vt propoſ. 41. habebimus intentum.



Nam ijſdem probationibus vtendo, primo AB, & EB erunt incommenſurabiles ob quadratum, quo maioris ſuperat minoris quadratū maiori ipſi incommenſurabile, & ideo AE, & EB ſunt incommenſurabiles, & hinc earum rectangula AB tota pro altero latere inſeruiente erunt incommenſurabilia; Idcirco etiam quadrata linearum AF, & FB eis æqualia. Vnde ipſæ AF, & FB erunt incommenſurabiles.

Secundo aggregatum quadratorum AF, & FB erit medium, quòd ſit æquale quadrato ex AB medio propter ſuum latus AB medium.

Tertiò rectangulum ſub AF, & FB erit medium; cum ſit medietas rectanguli ſub AB, & CD medij ex Theſi, & irrationalis, quòd ſit æquale rectangulo ex perpendiculari dimidiæ datæ CD, & altera data AB, facto, & ideo rectangulum ex lineis AF, & FB erit medium, & irrationale, vt ex ſuppoſitione eſt rectangulum ex AB, & CD.

EXPENSIO XI.

De lineis irrationalibus, quæ ab irrationalium ſimpliciter additione, vel ſubductione reſultant.

VIdimus, quomodo tres ſpecies irrationalium reperiantur in anteced. Expenſ. quæ certis conditionibus diſcriminantur. Si ergo iſtæ inuicem addantur conſtituunt tres ſpecies irrationalium *Maior* prima; Secunda *Rationale, & Medium Potens*. Tertia *Bina Media potens*. Si verò altera alteri ſubducatur relinquunt tres ſpecies alias irrationalium. Nempe *Primã, quæ dicitur minor*. Secundam *cùm Rationali medium totum efficiens*. Tertiam *Cum media medium totum efficiens*; quas omnes demonſtrabimus eſſe irrationales.

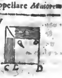
THEOR. I. PROPOS. XLIV.

Si duæ rectæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quarum quadrata aggregata rationalia ſint, Rectangulum verò irrationale. Tota eſt irrationalis, quæ vocatur Maior.

COniungãtur duæ rectę AB, & AC potẽtiâ commenſurabiles, quarum quadrata aggregata CI, & IH rationalia ſint Rectangulum verò ab ipſis effectum irrationale ſit BI. Dico *totam CB eſſe irrationalem*.

Probatur ratione, quâ vſi ſumus propoſ. 15. Rectangulum nigrum BI ſub AB, & AC conclusum eſt medium ex hypotheſi; Vnde, & duplicatum addito ei altero nigro medium, & irrationale perſeuerabit ex Coroll. propoſ. 18. cùm ſit commenſurabile parti componenti. Sed aggregatum quadratorum alborum CI, & IH, quibus pro lateribus inſeruiunt, ponitur rationale. Rectangula nigra igitur quadratis duobus albis erunt incommenſurabilia. Et ſi rectangula cum quadratis componantur totum aggregatum ex propoſ. 15. erit vtrique parti componenti irrationale. Hoc autem totum eſt æquale ex propoſ. 6. ſecundi quadrato ex CA, & AB, tanquàm vnâ lineâ conſtituto. Ergo hoc quadratum totius compoſitæ AB erit incommenſurabile quadratis duobus nigris: Sed quadrata duo ex lineis ſeorſim ſumptis ex Theſi ponuntur rationalia: Ergo quadratum ex tota CB quadratis albis erit irrationale. Vnde, & tota CB erit irrationalis ipſis CA, & AB, quam placuit appellare *Maiorem*.





THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

Si duæ rectæ potentiâ incommenſurabiles componantur. Quarum quadrata aggregata faciant ſpatium medium; Rectangulum verò, quod claudunt, Rationale tota irrationalis erit; vocatur autem Rationale, & medium potens.

COmponantur duæ rectæ DE, & CE potentiâ incommenſurabiles, quas docuimus reperire propoſ. 35. quæ compoſitum quadratorum faciunt medium; rectangulum verò ſub ipſis contentum Rationale. Dico *has compoſitas facere lineam irrationalem.*

Probatur eâdem ratione adhibitâ, quæ in præcedenti. Nam rectangulum nigrum CQ eſt Rationale, quod claudũt inuẽtæ ED, & CE, & cũ alio nigro æquali rectangulo eſt adhuc rationale. Quadratorum verò alborum aggregatum ex Theſi eſt irrationale. Ergo ſi ſimul omnia ponantur tota quantitas, & magnitudo aggregata ſingulis partibus erit irrationalis. ſicut, & ipſis quadratis. Sed hæc tota aggregatio quadratorum, & rectangulorum æquat quadratũ DV ex CD ex prop 4 .l. 2. Ergo hoc quadratum magnum eu CD erit irrationale, & idcirco eius latus tota compoſita EC ex duabus repertis CE. & ED erit irrationalis, quæ apellabitur *Rationale, & medium potens*, quia poteſt efficeru ſuis partibus, quibus componitur rectangulum rationale, & quadratorum partium aggregatum medium, nempe irrationale.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Si duæ rectæ potentiâ incommenſurabiles componantur, quarum quadrata compoſita ſpatium medium efficiant, & rectangulum quoque, quod continent medium ſit, tota irrationalis erit; vocatur autem bina media Potens.

PRobatur eadem ratione, qua vſi ſumus ad oſtendendam propoſ.33.

Vt ergo probetur applicandum eſt alicui rationali DE rectangulum DP nigrum, quod ſit æquale rectangulis duobus albis ex hypotheſi medijs duarum datarum AB, & OB & eidem Rationali PE applicetur aliud rectangulum æquale duobus quadratis nigris ex hypotheſi medijs, quæ fiant ex AB, & OB.



Quo facto probabitur eodem modo, ac ibi propoſ. Totum ſpatium PH eſſe irrationale; quòd ſit confectum ex duobus rectangulis, quorum vnum eſt æquale rectangulo medio duplici albo, & alterum quadratis nigris, quæ quantitates ſunt incommenſurabiles; quòd rectangulum album ad quadratum nigrum ob eandem altitudinem, quam cum illis habent, ſit vt baſes AB, & OB, quæ ponuntur incommenſurabiles, & ideo quadrata ipſa rectangulis nigris erunt incommenſurabilia. Quare rectanguli PH, partes DP, & PH, vtpote æquales quantitatibus inuicẽ incommenſurabilibus conſtans, erit incommenſurabilis altera, alteri: Quare lineæ ipſæ erunt incommenſurabiles ED ad DH.

Erunt autem potentiâ commenſurabiles Quoniam ED eſt rationalis, & ſpatium medium rationali applicatum facit aliud latus potentia commenſurabile; eu propoſ.27. Quamobrem duæ lineæ potentiâ tantùm commenſurabiles ſont, quæ compoſitæ facient lineam irrationalem ex propoſ. 36 huius. Spatium verò, quod continent progr. 3. propoſ. 33. oſtenſum eſt irrationale: quia ibi demonſtratur: quod, ſi ſpatium contineatur ſub rationali, & irrationali, illud eſt irrationale.

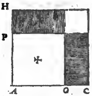
Hoc autem ſpatium, eu effectione æquant rectangula alba, & quadrata nigra, quæ ſimul faciunt quadratum AK, ex AO. Ergo quadratum ex AO erit irrationale; & ideo ipſa AO irrationalis erit.

THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

Si à linea recta auferatur alia potentia incommenſurabilis exiſtens illi toti, ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis rationale: at rectangulum ab ipſis clauſum medium: reliqua irrationalis erit, quæ vocatur Minor.

DIcit propoſitio quod ſi detur AC linea maior, & tota, & OC minor, quorum quadrata ſint rationalis; at rectangulum ſub ipſis contentum, vt eſt ſemialbum OI, ſit medium: Dicit inquam, quod ſi minor OC auferatur à maiori AC, *reliqua AO erit irrationalis.*

Probatur eodem modo, ac propoſ.23. huius. Rectangulum ſub AC, & OC ſeminigrum inuentis lineis iuxta propoſ.41. eſt ex Hypotheſi medium; ergo duplicatum erit quoque medium eu Coroll. propoſ. 28.



Compoſitum verò ex quadratis datarum AC, & OC Rationale: Igitur prædictis rectangulis OI, & PI ſemialbis quadrata album ex linea OC, & aliud totum CH erunt irrationalia, & incommẽſurabilia. Si verò rectangulis prædictis addatur quadratum ex reſiduo AO ex 7.ſecundi efficietur magnitudo æqualis duobus quadratis prædictis CH ex CA toti, & alteri ex linea OC. Ideoque incommenſurabilis rectangulis duobus OI, & PI. Cum ergo tota magnitudo quadrati OA, & rectangulorum duorum ſeminigrorum PI, & IO ſit incommenſurabilis rectangulis ſeorſim ſumptis eu propoſ. 10. erit, & incommenſurabilis quadrato eu AO. Quapropter erit hoc quadratum cruce inſignitum ex AO irrationale. Vnde ipſum

reſiduum linea AO erit irrationalis, quod apellandum eſt linea Minor.

THEOR. V. PROPOS. XLVIII.

Si recta linea à rectá auferatur incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum ex ipſarum quadratis medium; rectangulum verò ſub ipſis contentum Rationale, Reliqua irrationalis erit. Vocatur autem, cum Rationali medium totum efficiens.

DEtrahatur à rectá CD maiori recta CE minor, quæ inuentæ ſint iuxta propoſ. 42. Dico *reliquum* ED *eſſe irrationale.*



Probatur eadem ratione, ac antecedens. Rectangulum ſub CD, & CE contentum ex hypotheſi ponitur rationale, vnde, & duplicatum tale erit, vt OV, & EV. Sed duorum quadratorum DV, & QV ex duobus EC, & CD lateribus factorum compoſitum eſt irrationale: Ergo hoc compoſitum duplicatis rectangulis OV, & EV erit irrationale, & incommenſurabile: Sed ſi rectangulis addatur quadratum album DQ, ex ED ex 9. ſecundi efficitur magnitudo æqualis magnitudini ex conflatis quadratis DV, & QV; ideo quadratis ſeorſim ſumptis incōmenſurabilis, ex propoſ. 10. huius. Quare incōmenſurabilis quoque quadrato reſidui albo ex QD. Ideo reliqua ED irrationalis erit, quæ vocatur. *Cum rationali medium totum efficiens.*

THEOR. VI. PROPOS. XLIX.

Si à rectâ auferatur recta potentiâ incommenſurabilis exiſtens toti, quæ faciat compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & rectangulum ſub ipſis contentum medium, & quadratis incommenſurabile; Reliqua irrationalis erit, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens.

SIt recta AC, à qua detrahatur OC, & ſint eiuſdem rationis, quas docuimus reperire prop. 43. addità eâ conditione, quod rectangulum non commenſuretur quadratis ex AO, & AC. Dico reſiduum OC eſſe incommenſurabile, & irrationale.

Probatur eadem ratione, quâ vſi ſumus prop. 34. Tota magnitudo ex repertarum AC, & OC quadratis conflata media eſt ex Theſi, ſicut, & rectangulum ſeminigrum ſub ipſis contentum, etiam ſi duplicatum, vt ſunt duo rectangula nigra, cum duplici quadrato minori, & quia rectangulum ſeminigrum duobus quadratis albis ponitur incommenſurabile; tale quoque erit compoſitum ex rectangulis duobus ſeminigris.

Sed ſi duobus Rectangulis addatur quadratum maius ex reſiduo OC ex propoſ. 9. ſecundi efficietur magnitudo æqualis magnitudini ex duobus quadratis AC toto, & AO: Ergo hæc tota magnitudo quadratis duobus ſeorſim ſumptis erit media, & incommenſurabilis iuxta propoſ. 10. ſuperant itaque quadrata media magnitudinem rectangulorum compoſitorum nigrorum quadrato ex reſidua OC.



Sed medium non ſuperat medium rationali, aliquâ quātitate ex Coroll. prop. 33. Ergo quadratum ex reſidua OC non eſt rationalis quantitas: Vnde erit irrationalis, & linea illud quadratum ſubtendens OC erit irrationalis, quæ vocatur. Cum media medium totum efficiens, quia naſcitur à partibus, quæ efficiunt tum quadrata compoſita: tum rectangulum, quod ambiunt medium, & irrationale.

COROLLARIVM VNIVERSALE.

HAbemus itaque 26. inuentiones diuerſarum linearum irrationalium. Primò ſex Binomiorum, quæ naſcuntur à compoſitione linearum potentiâ tantùm commenſurabilium. Secūdò ſex Apotomes ex ſubtractione potentiâ tantùm rationalium. Deinde habemus mediam irrationalem, quæ inter duas potentiâ tantùm commenſurabiles media proportionalis eſt, ex quâ naſcūtur quatuor ſpecies irrationaliū duę per ſubductionē, quę dicūtur Apotome media prima, & Apotome media ſecunda, duæ per additionē quę vocantur Binomium mediū primū, & Binomiū mediū ſecundū. Tandē Inuenimus tria genera irrationalium ſimpliciū; ex quibus prodiere, ſex ſpecies Irrationalium; nempe duæ à ſingulis generibus; vna quidem per additionem, vt ſunt, quas hic deſcripſimus prima *Maior*. Secunda *Rationale, & medium potens*. Tertia *Bina Media potens*. Altera verò per ablationem nempe Prima *minor*. Secunda *Cum rationali medium totum efficiens*, & Tertia *Cum medio medio totam efficiens*, quæ omnes, ſi ſimul ennumerentur erunt 26. nempe 22. per additionem, & ablationem, & aliæ genericæ, nempe Mediæ, & irrationales ſimpliciter, & ſi placeat reperire etiam plures ex media infinitæ mediæ fiunt, vt ſupra diximus.

Addit verò Euclides multas harum linearum proprietates, quæ exprimuntur ab applicatione ſpatiorum irrationalium ad ipſas, ſeu ad aliquam rationalem: ſed cum viſum nobis ſit, ea non pertinere ad elementa, noluimus in plura hunc tractatum extendere, cum hæc ſufficiant ad naturam irrationalium, earumque intelligendum: neque amplior earum cognitio ad proſecutionem Mathematices deſſideretur.

EXPENSIO XII.

De commenſurabilibus ad lineas irrationales.

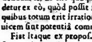
FÆcundum germen linearum irrationalium ſunt lineæ ipſæ irrationalibus commenſurabiles: nam ipſæ quoque illarū naturam inducunt, & irrationales ſunt: Vnde ad multiplicandas irrationales ſufficiet multiplicare alicui irrationali ſemel repertæ commenſurabiles.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. L.

Alicui ex Binomijs commenſurabilis, ipſa quoque Binomium eſt.

IRrationalitas Binomiorum conſiſtit in eo, quod totum ſit incommenſurabile omnino ſuis partibus componentibus, cùm partes ipſæ ſint potentiâ commenſurabiles. Sit ergo Binomium AC diuiſum in ſua nomina AB, & BC, & ei linea commenſurabilis longitudine DF; oſtendendum eſt DF eſſe quoque Binomium, & oſtendetur ex eò, quòd poſſit DF in duas partes diuidi, quibus totum erit irrationale, cùm ipſæ partes inuicem ſint potentiâ commenſurabiles.



Fiat itaque ex propoſ. 15. lib. 6. vt AC ad DF; ſic AB ad DE. Eritque etiam ex propoſ. 22. quinti cum ſit totum AC ad totum DF, vt ablatum AB, ad ablatum DE, reliquum quoque BC ad reliquum EF, vt totũ ad totũ, & vt ablatũ AB ad ablatũ DE. Quare ex 5. huius erunt commenſurabiles AB, & DE, ſicut etiam BC, & EF. Sed BC, & AB ponuntur incommenſurabiles toti AC: Ergo etiam DE, & EF ipſi toti AC tales erunt, ſed AC, & DF ſunt commenſurabiles, ergo ex propoſ. 8. huius. & ipſi ſuo toti DE, & EF erunt incommenſurabiles.

Progr. 2. Probatur quoque eſſe DE, & EF duas tantùm potentiâ inuicem incommenſurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* AB ad BC, vt DE reſpondet in proportione ad EF; ſed AB, & BC ſunt potentia commenſurabiles. Ergo etiam ex 5. huius tales erunt DE, & EF. Quare cum DE, & DF ſint duæ potentiâ tantùm commenſurabiles ex ijs conſtet DF, etiam DF erit Binomium.

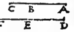
THEOR. II. PROPOS. LI.

Apotome commenſurabilis, etiam ipſa Apotome eſt.

SIt AB Apotome, & BC congruens, & DE ipſi AB commenſurabilis. *Dico, quod etiam hac ipſa* AB *Apotome ſit*; Scilicet ex ſubductione duarum Rationalium potentia tantum, irrationalis quædam linea reſultans reſpectu ipſarum, à quibus ſubduci poterat.

Fiat itaque AB ad DE, vt AC ad DF ex propoſ. 15. lib. 6.

Quia itaque eſt totum AC ad totum DF, vt pars AB ad partem DE ablatas, erit quoque ex prop. 22. lib. 5. reliquum BC ad reliquum EF, vt totum ad totum, & vt ablatum ad ablatum, & ideo inuicem commenſurabiles lineæ. Sed AB ablatum ponitur, vtpote Apotome incommenſurabile ipſi comparti BC, & toti AC. Ergo etiam DE ex huius 5. erit incommenſurabile ipſi DF, & EF. Quoniam inuicem AB, & DE ſunt commenſurabiles ſicut, & inuicem tota AC, & DF, quare reliquum EF erit incommenſurabile toti AC: vnde, & ſuo toti ei commenſurabili DF ex propoſ. 8. huius.

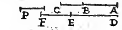


Probatur deinde, quòd DF, & EF ſint potentiâ commenſurablies. Nam oſtenſum eſt, quòd ſicut eſt AC totum ad DF totum ſic, & BC pars reliqua ſit ad EF partem reliquam. Ergo *permutando*, vt eſt AC totum ad ſuam partem reliquam BC in proportione, ſic eſt DF totum ad ſuam partem reliquam in proportione, ſed AC totum ad BC reliquam eſt potentiâ commenſurabilis lineæ. Ergo ex propoſ. 5. huius etiam totum DF ad reliquum EF. Vnde cum DE ſit reſiduum à ſubtractione Rationalis EF potentiâ tantùm commenſurabilis reſpectu illius DF, à quâ ſubducta eſt, ipſa erit Apotome quoque, & reſpectu illarum, à quibus emanat eâdem naturam Apotome ſortitur.

THEOR. III. PROPOS. LII.

Binomio medio commenſurabilis, & ipſa Binomium medium eſt.

SIt P Rationalis, & AC Binomium medium diuiſum in ſua nomina AB, & BC & DF, toti Binomio AC commenſurabilis. Et ex 15. lib 6. fiat, vt tota AC ad totam DF, ſic pars AB ad partem DE. Erit ergo ex 22. quinti etiam reliquá BC ad reliquam EF, vt tota AC ad totam DF, & ideo, cùm DF ponatur commenſurabilis ipſi AC; talis erit pars DE commenſurabilis parti AB, ex propoſ. 5. huius, & ſic EF commenſurabilis parti BC. Quare reſpectu Rationalis P, erunt incommenſurabiles, & mediæ DE, & EF; vt ſunt AB, & BC ex propoſ. 28. huius. Secundo oſtendetur eſſe inuicem potentiâ tantùm commenſurabiles DE, & EF, ſicut, & illæ ſunt AC, & BC.



Quæ enim eſt, vt pars AB ad partem DE, ſic pars BC ad partem EF, erit *permutando* pars AB ad partem BC, vt pars DE ad partem EF: Sed partes AB, & BC potentia tantùm ponuntur commenſurabiles; Ergo etiam DE, & EF ex prop. 5. h. Quare, cum ſint mediæ efficient aliquam ex ijs irrationalibus, quæ reſultant per compoſitionem mediarum.

THEOR. IV. PROPOS. LIII.

Apotome mediæ commenſurabilis, & ipſa Apotome media eſt

SEd ſit AB Apotome media in fig præced. & ei congruens BC, & fiat, vt AC ad DF, ita AB ad DE. Quia ergo, vt totum AC correſpondet proportione ad totum DF, ſic pars AB ablata ad partem ablatam DE. Ergo etiam ex propoſ. 22. lib 5. BC reliqua pars correſpondebit ad reliquam EF, vt ablata AB ad ablatam DE, ſed pars ablata AB eſt cōmenſurabilis parti DE ablatæ ex Theſi. Ergo ex propoſ. 5. h. reliqua BC, reliquæ EF, & totum AC toti DF erit commenſurabile, & quia AC, & BC ponuntur mediæ; erunt etiam DF, & EF mediæ ex propoſ. 28. h. reſpectu rationalis P.

Probatur deinde, quòd ſint inuicem potentia commenſurabiles DE, & FE.

Nam ita eſt AC ad DF, vt BC ad FE; Ergo *permutando* ita erit fundamentum AC ad fundamentum BC, vt DF terminus ad FE terminum: Sed AC, & BC ſunt potentiâ tantùm commenſurabiles: Ergo ex propoſ. 5. h. etiam DF, & FE.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. LIV.

Compoſitis lineis irrationalibus commenſurabiles ſunt quoque eodem modo, ac ipſæ irrationales compoſitæ.

SIt AB, & BC duæ omninò irrationales, quæ cõpoſitæ faciant lineam AC irrationalem reſpectu P Rationalis. Dico, & DF ei commenſurabilem, ſeu longitudine ſeu potentiá tantùm eſſe lineam quoque Irrationalem, vt ipſa eſt.

Probatur. Sit diuiſa AC in ſuas partes irrationales, quibus componitur AB, & BC. & fiat totum AC ad totum DF, vt AB ad DE ex propoſ. 15. lib. 6. ideoque etiam erit totum AC ad DF totum, ſic altera pars BC ad alteram partem BF ex 22. lib.5., & ideo partes AB ad DE, vt BC ad BF. Quare, cùm totum AC ponatur commenſurabile toti DF, erit etiam pars AB commenſurabilis parti DE, ſicut, & alia compara BC erit alteri comparti BF commenſurabilis. Quare, cùm partes ſint commenſurabiles, & totum AB rationali P ponantur incommenſurabile, etiam partes DE, & DF erunt incommenſurabiles ipſi Rationali P; ſicut, & ipſum totū DF toti AC commenſurabile, & ipſi rationali P erit incommenſurabile ex prop. 8 h.

Probatur ſecundo. Quod etiam illæ partes DE, & BF ſint inuicem incommenſurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo permutando ita erit AB ad BC, vt DE ad EF; Sed BA, & BC ſunt incommenſurabiles omnino. Ergo ex prop. 5. h. etiam DE, & EF.

THEOR. VI. PROP. LV.

Quæ Reliquis ex lineis irrationalibus commenſurabiles ſunt, & ipſæ irrationales, & Reliquæ, vt illæ ſunt.

SIt AB reliquum ex irrationalibus duabus AC, & BC, & commenſuretur ei DE. Dico quod etiam DE eſt reliquum, ſeu Apotome ex irrationalibus duabus.

Sit enim BC altera irrationalis à cuius ſubtractione ab irrationali AB remanſit AC, & ex prop. 15. 16 fiat, vt AB ad DE, ita AC ad DF; & quia AB commenſuratur ipſi DE, etiam AC totum commenſurabitur ipſi toti DF, & altera pars BC alteri comparti EF. Cum ergo AC totum, & BC pars ponantur incommenſurabiles omninò rationali P etiam DF totum, & EF pars reliqua ex prop. 8. h. erit incommenſurabilis omnino, & irrationalis rationali P.

Probatur deinde; quòd etiam DF, & FB ſint duæ omninò Incommenſurabiles: Nam vt eſt AC ad DF, ita ponitur BC ad EF: Ergo permutando erit, vt AC ad BC; ita DF ad FB: ſed AC, & BC ſunt Incommenſurabiles omninò, & Irrationales: Ergo ex prop. 5. h. etiam DF, & FB: Ideoque, cùm ſint inuicem irrationales, & irrationales quoque reſpectu P rationalis remanebit linea DE Reliquum ab irrationali DB ſubductá Irrationalis EF ſicut AB eſt reliquum ſubductá Irrationali BC ab irrationali AC.

Et hæc dicta ſint genericè de illis lineis, quæ commenſurantur irrationalibus; licet enim Euclides ad ſpecies ſingulas deſcendat, in illis 12. Binomiorum, & Apotomarum ſpeciebus, & probet ſingulas commenſurabiles vnicuique ſpeciei Binomio, vel Reliquo ad illam ſpeciem pertinere, cui commenſuratur; nobis tamen viſum eſt, adeo ſpecificam cognitionem neceſſariam non eſſe, maximè, quia irrationales minùs in vſum veniant in rebus mathematicis.

TRACTATVS XIII.

IN NVMERIS PROPORTIONALIBVS. PARS I.

De Numerorum Ratione.

POST Elementa primus ſcopus, in quem Mathematica tendit, ſunt proportiones numericæ, vtpote, quæ cum ſint rationales, magis etiam cognitioni ſunt obuiæ, & proportionibus corporum maximè affines, illis ianuam aperiant. Sed priùs de numeris ipſis proportionalibus, vt qui proportionum Arithmeticarum ſint fundamenta, agere opus eſt, & ſub hac ratione fundamenti proportionum de illis ſermonem facere. Poſſunt autem conſiderari, vt fundamenta proxima, & vt fundamenta remota, vt remota conſiderantur cum rationes ipſorum, quatenus ſe gerunt, vt continens, & contentum ſpeculationem ſubeunt, ar vt fundamenta proxima, cùm non iam ſub ratione ſimplici, ſed ſub ratione relata ad aliam, & ſimilitudinem alij rationi dicenre animaduertuntur. Ibi interueniunt duo numeri ſolum; hic quatuor requiruntur, quoniam iam non conſiderantur, vt obtinent rationem; ſed proportionem. Si ergo, vt rationem dicentes numeri accipiantur, tunc vocantur fracti: nempe partes alterius numeri, qui ſe tanquam totum, & continens gerit, & de iſtis prima hac tractatus parte peragemus, numeris, vt rationem dicentibus in ſecundam partem reſeruantes.

EXPENSIO I.

De minutiarum proportionibus.

ANtequam ipſarum minutiarum Algorithmum proponamus, neceſſe eſt cognoſcere ipſarum proportionem, quam hic breuiter indicabimus.

DEFINITIO I.

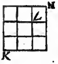
FRactio, minutiaue, aut numerus fractus eſt vna pars, ſeu plures partes alicuius totius, vel plurium totorum ſub vnius ratione conſideratorum.

Si enim totom ſit ſectum in 4. partes æquales, duæ ex ipſis, vel vna erunt numerus fractus: Item ſi tres aurei ſecti ſint io 8. partes æquales, & ex illis accipiantur tres, illæ tres partes erit numerus fractus trium aureorum.

Conſtat verò quælibet fractio duobus numeris alter eſt, qui partes acceptas exprimit, & ſuper lineolam ponitur, alter eſt, qui totius exprimit partes, & ſub lineola ponitur hoc modo.

$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ Qui ſuper lineolam ponitur dicitur Numerator; quòd numeret partes, quæ accipiuntor ex partibus totius; qui verò ſub lineola collocatur dicitur Denominator; quòd denominet, ex quo toto illæ partes ſüptæ ſint; ita in minutia $\frac{3}{5}$, in qua ſunt tres quintæ partes vnius integri quinque partibus conſtantis, tres eſt Numerator quinque Denominator.

Præaſſumpt. 1. Oriuntur numeri fracti ſæpius à diuiſione integrorum, in quâ, aut illa, quæ diuiditur ſunt integra ſingula, vt numerus diuidendus accipitur, vt plures partes plurium integrorum, vt vnius, & diuiſio inſtituitur ad hoc, vt illæ partes in integros rediganrur, vt 103. Iulij diuiduntur per 10. Iulios, quibus conſtat Aureus quilibet, vt Aurei fiant & ſic fractio $\frac{3}{10}$, quæ remanet à diuiſione ſignificat vnius aurei tres partes, ex 10. ex quibus conſtat. Vel diuiditur aliquis numerus ad hoc; vt ſingulis diſtribuatur; V. g. 103. Aurei, vt diſtribuantur 10. Militibus, & tunc ſignificat fractus $\frac{3}{10}$ tres Aureos in 10. æquales partes diſtributos. Ita ſi detur V. g. in quadrato KN partes 9. ex quibus accipiantur 4 & fiat minutia $\frac{4}{9}$ KL conſtabit ex quatuor quadratis, quorum quodlibet eſt 9. pars totius; quare ſi ſingulæ partes in 9. partes iterum intelligantur diuiſæ numerus 4. eſt etiam huius totius nona pars. Nam, ſi hæ ſingularum nouenæ partes ſimul erant quatuor nouenarios, etiam ſingulis diuiſis in nouem partes, quatuor ex ipſis erunt quatuor nouenariorum nona pars. Nam fient 36. cuius 4. eſt nona pars, nempe earum nouem in quibus 4. partes intelliguntur diuiſæ, vt fiant 36. Vnde eſt illud, quòd minutia ideſt 4. eſt pars numeratoris



ris ſilicet ipſius 4. à denominstore denominata, nempe nona pars.

THOR. I. PROPOS. I.

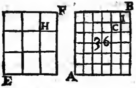
Minutia eſt ad ſuum integrum, vt numerator ad denominatorem.

* PRobatur. Quia numerus numerans exprimit partes totius, & tot habet vnitates, quot partes ſunt in ipſa quantitate non integra, nempe minutiâ, ſicut & denominator tot habet vnitates; quot integrum partes; Ergo vt eſt minutia ipſa ad integrum, ita eſt numerator ad denominatorem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Minutiæ æqualis, vel eiuſdem integri quæ ad ſuas integras quantitàtes eandem habent proportionem, inuicem ſunt æquales; quæ verò habet maiorem proportionem, illa maior eſt.

* SIt integri eiuſdem AB 36 minutia AC, ſeu pars 16. nempe $\frac{16}{36}$ ſitque integrum prædicto æquale EF 9. cuius minutia ſit 4. EH, ita vt ſit $\frac{4}{9}$. *Dico minutias eſſe æquales ſi ad ſua integra æqualia ſint in eâdem proportione.*



Probatur. Quia ex propoſ.9. quinti, quæ magnitudines ad eandem, ſeu ad æquales eandem habent rationem æquales ſunt inter ſe; ſed minutia HE 4. & AC 16: ad æqualia integra EF, & AB ſimilè habent rationem; Ergo ſunt inuicem æquales.

Probatur ſecunda pars. Quia maior ratio ea eſt, cùm aliqua quantitas alterius plùs comprehendit, ſed AI 25. dicit ex hypotheſi ad ſuum totum AB 36. maiorem rationem, quam EH 4. ad EF 9. ergo plùs comprehendit AI 25. ex integro AB; quàm EH 4. ex integro BE 9. quæ integra ſunt æqualia: Quare erit maior AI, quam EH.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ad ſua integra inæqualia minutiæ ſimilem dicant proportionem erunt inuicem in proportione, vt ſua tota, & integra exiſtunt.

* SIt minutia KL 4. ad ſuum integrum KN 9. vt in ſchemate præced. præaſſ. vt minutia AC ad integrum maius priori integro AB. *Dico, quòd minutia KL ad AC eſt, vt integrum KN ad AB.*

Probatur. Ita eſt KL minutia ad KN totum, vt AC minutia ad AB totum ex hypotheſi. Ergo permutando erit KL ad AC, vt totum KN ad totum AC.

COROLLARIVM

HInc eruitur minutias, quarum numeratores eandem proportionem habent ad ſuos denominatores eſſe æqu.les;ſi denominator integrū æqualis quantitatis exprimat; cum enim denominator vices integri obeat, & partes, quæ in ipſa quantitate ſunt,exprimat,patet;quòd eadem ratio eſt de denominatoribus, ac de totis ipſis: Vnde, & minutia ad ſuum denominatorem maiorem rationem dicens maior erit, & ita Aurei $\frac{3}{9}$, & $\frac{4}{12}$ erunt minutiæ æquales. Quia ita ſe habet 3 ad 9. vt 4. ad 12. At $\frac{4}{9}$, & $\frac{4}{12}$ ſunt minutiæ, quarum prima $\frac{4}{9}$ cum habeat maiorem rationem ad ſuum denominatorem; quam $\frac{4}{12}$ maior erit.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Duæ minutiæ eandem habentes denominatorem, eandem proportionem habent, quam numeratores, dummodo de eodem vel æquali toto verificentur.

DEtur minutia $\frac{16}{36}$, & $\frac{25}{36}$. Dico, *quòd habeat eandem inuicem proportionem, quàm numeratores 16. & 25.*

* Probatur, vt numerus 16. ad 36. ita eſt minutia AC partium 16. nempe ipſa quantitas in ſchemate præc. ad integram quantitatem BA ex 1. h. vt autem numerus 36. ad 25. ita eſt AB ad AI. Ergo *ex æquo* ita erit 16. ad 25. relicto medio 36. vt quantitas AC ad quantitatem AI.

EXPENSIO II.

De fractionum valore.

CVm à proportione, quam dicunt numeratores ad denominatores minutiæ, pro vt vidimus valore creſcant, & maiores ſint, videndum modo eſt; quomodo earum valor dignuſci queat.

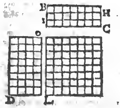
PROBL. I. PROPOS. V.

Duas minutias diuerſarum denominationum ad eandem reducere denominationem.

SInt datæ minutiæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{3}{8}$ Velimuſque cognoſcere valorem harum minutiarum, ideſt quænam ad ſuum idem, cuius ſunt minutiæ, maiorem proportionē dicat. Alternatim denominatores vnius cum numeratoribus alterius multiplicentur V. g. 3. per 7. & fiant 21. & è contra 4. per 8. & fiant 32. deinde denominatores inuicem, qui exprimāt partes ipſius totius, & fiat 56. Dico eandem eſſe minutiam $\frac{21}{56}$ quæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{32}{56}$ quę $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam, cùm ſint numerator 3. & denominator 8. multiplicati per eundem numerum 7. erit ex 17. l. 7. elem. eadem proportio 3. ad 8. quam 21. ad 56. ex prima vero propoſ h. minu-

tiæ, quæ ad ſuum totum idem, habent æqualem proportionem, æquales ſunt; quare CB minutia conſtans tribus octauis partibus CI, & IH, & HB erit æqualis CA ipſi toti, prout conſtat 21. partibus minoribus ex 2. h. propoſ. cùm ad CL totum eandem dicat proportionem.



Sic in OD cõſtante quatuor partibus ſeptimis, cũ ſit 4. multiplicatus per numerũ eundem 7. & ſit factus 32. & item totum 8. ſit multiplicatum per 7. & factum 56. habebit eandem proportionem 4. ad 7. quam 32. DO minutia ad 56. CL totum: Ergo ex 1. propoſ. h. $\frac{32}{56}$, & $\frac{4}{7}$ erunt æquales, & erit eadem minutia DO. Quare duæ minutiæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{4}{7}$ erunt redactæ ad eundem denominatorẽ, cum $\frac{21}{56}$, & $\frac{32}{56}$ illis ſint æquales.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Plures, quàm duas minutias diuerſarum denominationum ad eundem reducere.

Sint datæ minutiæ $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, quæ ad eandem denominationem redigendæ ſint. Multiplicentur ſimul ordinatim denominatores, nempe 2. cum 7. vt fiat 14. & cum hoc producto 14. numerus 3. vt fiant 42. & cum hoc producto 42. numerus 5. vt fiat 210. Deinde diuidatur numerus productus per ipſum denominatorem. Diuidatur V. g. per primum 2. & erunt 105. qui multiplicetur per 1. numeratorem, & prodibit prima minutia $\frac{105}{210}$ Deinde idem numerus diuidatur per ſecundum denominatorem 7. & prodibit 30. multipliceturque hic numerus per numeratorem 4. & erit $\frac{120}{210}$. Idem fiat de tertio 3 nam diuiſo 210. per 3. erit 70. qui multiplicetur per 2. & erit $\frac{140}{210}$. Sic diuidatur per 5 & erit 42. qui multiplicetur per 3. & erit vltima minutia $\frac{126}{210}$. Dico omnes datas minutias reuocatas eſſe ad alias $\frac{105}{210}$ $\frac{120}{210}$ $\frac{140}{210}$ $\frac{126}{210}$ eiuſdem denominationis, quæ prædictis $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ æquiualent.

*. Probatur. Nam, cùm multiplicauerimus denominatores ſimul, habebit primus numerus tot duenarios, quot vnitates ſunt in 7. & tot ſeptenarios, quot vnitates ſunt in 2. & ſic habebit partes, quas numerus 2. & quas 7. habent, idemq; dicas de numero 7. multiplicato cum 3. & de 3. multiplicato cum 5. Vnde productus numerus 210, eas habebit partes, quas habent denominatores; nempe ſecundam, ſeptimam, tertiam, quintam. Poterit itaque menſurari numero 5. 3. 7. & 2. reperiantur itaque iſtæ partes per diuiſionem, & ſic V g. quinta pars 42: Quis ergo 42. eſt quinta pars, habebit eam proportionem 42. ad 210. quam 1 ad 5. Si ergo multiplicetur 42. per 3. & fiunt 126. & per 5. vt ſint 210. erit eadem proportio 3. ad 5. multiplicatorum, quæ 126. ad 210. genitorum; cum per eundem numerum 42. multiplicati ſint; quare ex propoſ. 1. erit eadem minutia $\frac{3}{5}$ & $\frac{126}{210}$, & ſic de alijs.

PROB. II. PROPOS. VII.

Datas minutias diuerſæ denominationis, vel eiuſdem æſtimare, quæ maior ſit.

Sit data minutia $\frac{3}{5}$, & $\frac{4}{7}$, & volumus cognoſcere, quænam maior ſit. Multiplicentur inuicem numeratores vnius cum denominatoribus alterius, & conſiderentur, cuiuſnam numerator maiorem numerum producat. Nam illa minutia eſt maior. Sic quia multiplicatus 4. per 5. producit 20. & 3. cum 7. producit 21. maior erit minutia $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam ſi inuicem denominatores multiplicentur, & fiat 35. erit eadem minutia $\frac{21}{35}$, quæ $\frac{3}{5}$, & $\frac{20}{35}$, quæ $\frac{4}{7}$ ex 5. huius prop. Sed 21. maiorem proportionem dicit ad ſuum totum 35. quam 20. ex propoſ. 8. lib. 5. quia plures partes eius comprehendit, ergo 21. erit maior, quam 20. ex ſecunda propoſ. huius. Vnde etiam erit maior $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$ ex propoſ. 12. lib. 5. Coroll.

COROLLARIVM I.

Qvod, ſi iam ſint æquales denominatores patet, eam minutiam fore maiorem, quæ denominatorem habet maiorem; ita eſt maior $\frac{3}{5}$, quam $\frac{2}{5}$, & cæt. Quod ſi numeratoribus iiſdem denominatores inæquales ſint, vt $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, erit illa minor minutia, cuius denominator maior eſt ex prop. 8. lib 5. quia ſuo toti minorem proportionem dicit. Nam $\frac{3}{4}$ minutiæ denominator ſuperat numeratorem vnica parte tantum; at minutia $\frac{3}{5}$ denominator ſupereſt numeratori duabus vnitatibus: Vnde 3. magis comprehendit de integro 4. quam 3. de integro 5.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam eſt; Quod, ſi in aliquâ minutia numerator, aut æquet, aut ſuperet denominatorẽ, quòd illa minutia æquet, aut ſuperet integrũ, cùm partes integri numerator exprimat, ita $\frac{5}{5}$, & $\frac{7}{7}$ ſunt integra; at ſi eſſent $\frac{9}{5}$ tunc eſſet vnus integer, & inſuper $\frac{4}{5}$, & ſic propriè eſſet ſcribendum 1 $\frac{4}{5}$.

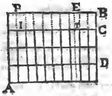
PROBL. III. PROPOS. VIII.

Valorem alicuius minutiæ, ſecundùm alias partes non à denominatore denominatas explorare.

Sit minutia $\frac{3}{4}$ vnius quadrati, quod conſtet 20. partibus. Volo ſcire, quot partes ſint tres quartæ illius quadrati: multiplico per partes 20. datas numeratorem 3. & facit 60. diuidoque per denominatorem 4 & productum erit 15. Tot ergo partibus conſtat minutia $\frac{3}{4}$, eſtque æqualis $\frac{15}{20}$, & $\frac{3}{4}$.

* Probatur. Nam multiplicetur per 20. numerus 4. denominator, & quia 20. multiplicat 4. & facit 80. & 3. & facit 60. erit eadem proportio, ex 17. lib. 7. n. 3. ad 4. quæ 60. ad 80. Diuidat rurſus 4. eundem numerum 60. & 80. & generet 15.

& 20. eadem quoque proportio erit 15. ad 20. quæ 60. ad 80. ideſt, quæ 3. ad 4. Quare æqualis erit minutia ex 3. huius propoſ. $\frac{3}{4}$, & $\frac{30}{40}$.



Sic ex 10. parallelogrammis; quibus conſtat AB ob multiplicationem per 4. factum eſt AB totũ 40. minorum, & AC minutia æqualis priori ex tribus parallelogrammis, quorum vnum eſt AN factũ eſt 30. & tandem per diuiſionem per 4. diuiſum eſt totum in 10. parallelogramma, quorum vnum eſt AF, & item minutia, & facta eſt AS æqualis minutiæ AC.

Quod ſi minutia intelligatur diuiſa per denominatorem, vt def. 1. aduerlimus V. g. remanſerint ex aliqua diuiſione facta per 4. tres integri: vt ſint $\frac{3}{4}$, tunc tria V. g. parallelogramma intelliguntur diuiſa in 4. partes, quorum trium parallelogrammorum ſimul ſumptorum minutia eſt tertia pars, aut tres illarum amplectitur, & aliquis deſiderat ſcire, quot ex decem partibus, in quas illa tria parallelogramma intelliguntur diuiſa comprehendant $\frac{3}{4}$ ipſorum. Tunc eodem modo agendum eſt. Ratio eſt. Quia accepta vnitate V. g. AD. ea habet eandem rationem ad 3. cũ 1. multiplicando 3. faciat 3. ex 17. lib. 7. quam 10. ad 30. item per 3. multiplicatus: Si verò diuidatur per 4. eadem ratio erit 7 $\frac{1}{2}$ ad 10. quæ 3. ad 4. cum 30. diuiſus per 3. faciat 10. & idem 30. diuiſus per 4. faciat 7 $\frac{1}{2}$ cumque idem numerus vtrobique diuidatur quotientes 7 $\frac{1}{2}$ & 10. habebunt eandem rationem, quam numeri diuidentes 3. & 4. Quare minutia AT erit tres quartæ partes minutiæ AC tribus parallelogramis conſtantis, quorum vnum eſt AD.

Aduerte tamen; quòd ſi quando, vt hic 7 $\frac{1}{2}$ numerus, qui prouenit non ſit integer; tunc propriè non poteſt ad eam denominationem redigi minutia; quia ſilicet minutia non ſolet per numeratorem, cui fractus adhæreat exprimi; vt fieret, ſi numerator ſtatueretur 7 $\frac{1}{2}$; ideoque minutia redigetur ad aliã æquiualentem $\frac{15}{20}$, vel ſi detur 10. & velit aliquis, exhiberi minutia, cuius numerus 10. ſit denominator, tunc reſpondebitur, quod propriè nequit fieri, ſed æquiualenter.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Tam numeratoris, quam denominatoris maximam communem menſuram inuenire.

SIt datus numerus $\frac{1970}{2758}$, cuius tum numeratoris, tum denominatoris maxima communis menſura ſit reperienda. Diuidatur denominator 2758 per numeratorem 1970. & reſiduum V. g. 788. diuidat rurſùs numeratorem, & 394. diuidat rurſùs reſiduum præcedens 788. aut nihil remanet, aut aliquid: ſi aliquid remaneat; rurſùs idem faciendum, diuidendo reſiduum maius per reſiduum minus, donec ad vnitatem deuentum ſit, & ſi ad eam perueniatur, erit ea cõmunis menſura, nec aliam communem menſuram ij numeri habebunt, & ideo vocabuntur inter ſe primi; at ſi ad vnitatem non perueniatur, vt hoc exemplo, in quo diuiſo reſiduo 788, per reſiduum minus 394. nihil remanet, ideo 394. erit communis amborum menſura maxima.

Prob. ex propoſ. 2. lib. 7. elem. Nam iam 394. menſurat ex æquo 788. reſiduũ: hoc autem reſiduum 788. menſurat 1970. & hoc menſurat 2758. Ergo 394. menſurat etiam 2758. Quod vero etiam ſit maxima communis menſura patet, & probatur eiuſdem prop. 2. l. 7. elem.

PROBL. V. PROPOS. X.

Minutiam ad minorem denominationem redigere.

MInutiæ aliquando adeo magnis numeris proponuntur, vt non facilè earum proportio intelligatur, quis enim non facillùs intelligat $\frac{5}{7}$ quam $\frac{1970}{2758}$. Imo aliquando magna minutia alicuius reſidui diuiſionis per minimos exprimitur, cùm tamen computus apparenter hoc non exhibeat, V. g. ſit numerus 24822. diuiſus per 2758. quotiens erit 9. & reſiduum erit $\frac{1970}{2758}$, qui numerus apud auctores reperietur expreſſus per hunc $\frac{5}{7}$ minimum numerum illi minutiæ æquiualentem: Vnde oportebit cognoſcere eandem minutiam ſub diuerſis numeris poſſe exprimi; ne aliquis putaret errorem irrepſiſſe in computo aliquo apud Mathematicos breuiſſimis terminis expreſſo.

Ita igitur, ſi reducenda ſit aliqua minutia ad minimos terminos, erit agendum: Repertâ maximâ communi menſurâ ex antecedenti diuidatur per eam, tum numerator, tum denominator V. g. datæ minutiæ $\frac{1970}{2758}$ diuidatur per maximam menſuram 394. tam numerator 1970. & prodibit pro numeratore 5. tum denominator, & exeret pro denominatore 7. ita erit noua minutia $\frac{5}{7}$ quam Dico æquiualere minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

* Probatur eadem proportio eſt 5. ad 7. quam 1970. ad 2758. cum vterque numerus ſit per 394. diuiſus, & quotiẽtes ſint 5. & 7. ex pr. 17. lib. 7. Quare ex 3. propoſ. Cor. huius erit æqualis minutia $\frac{5}{7}$ minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Integros ad minutiam redigere.

SInt dati integri 7. qui reducendi ſint ad minutiam denominatam à numero 9. multiplicetur 7. per 9. & erit productus 63. qui erit numerator, ſtabitque minutia $\frac{63}{9}$

* Probatur. Denominator exprimit integrum in eas partes, quas habet, ſeu numeros diuiſum. Ergo tot erunt nouenarij, quot integri. Sed integri ſunt 7. Ergo nouenarij erunt quoque 7. Numerus verò 9. ſepties acceptus facit 63. vnde erunt $\frac{63}{9}$.

EXPEN-

EXPENSIO III.

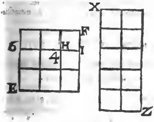
De fractorum numerorum additione.

ADditio fractorum facilis eſt, & ferè eadem, quæ integrorum; quare ad eam declarandam vnica propoſitio ſufficiens erit.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Minutias eiuſdem denominationis, aut diuerſa ſimul addere.

SInt primo addendæ minutiæ eiuſdem denominationis $\frac{6}{9}$, & $\frac{4}{9}$. Simul colligantur numeratores, & fiunt 10. & ſupponatur denominator, & fiunt $\frac{10}{9}$, ideſt 1. & $\frac{1}{9}$. Dico *duas minutias eſſe ſimul additas*.



* Probatur; vt eſt numerator numerus 6. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EI ad integrum EF ex propoſ. 1. Et vt eſt numerus 4. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EH ad integrum EF ex 1. huius. Ergo ex propoſ. 25. lib 5. compoſitus numerus 6. prima quantitas cum 4. quinta, habebit eandem rationem ad denominatorem 9. ſecundam, quam EI tertia cum EH ſexta ad integrum EF quartam quantitatem: ſed 6. & 4. numerus eſt ad 9. vt 10. ad 9. ſed vt 10. ad 9. ita fiat ZX minutia ad integrum EF. Ergo ZX ad integrum EF erit, vt EI, & EH ad integrum EF. Vnde ZX erit minutia æqualis EI, & EH, & dicet eandem proportionem ad integrum, quam 10. ad 9. Vnde bene quoque exprimetur per numerum $\frac{10}{9}$, vt requiritur in expreſſione minutiæ ex prima propoſ. huius.

Idem verò agendum etiã, ſi ſint plures minutiæ, quam datæ, vt $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{5}{7}$. Nam omnes iſtæ minutiæ ſimul collectæ efficient $\frac{16}{7}$ ideſt 2. & $\frac{2}{7}$; ſic agito in cæteris.

Si vero denominatores minutiarum ſint diuerſi; tunc redigentur ex ſupradictis ad eãdem denominationem, & eadem ſeruabitur regula, eademque oſtenſio valebit.

EXPENSIO IV.

De Minutiarum ſubductione.

EAdem prorſus ratio eſt de ſubductione, quæ de additione.

PROBL. I. PROP. XIII.

Minutiam minorem à minutia maiore ſubducere.

SI duæ minutiæ, quarum minor à maiore ſubducenda ſit. Subducatur numerator minoris à maiore, & reſiduum erit minutia, quæ poſt ſubtractionem remanet. Ita ſi $\frac{3}{7}$ à $\frac{4}{7}$ ſubducenda ſit, deducto n. 3. à 4. reſiduum erit $\frac{1}{7}$ ſic ſi $\frac{4}{9}$ à $\frac{7}{9}$ deducatur, reſiduum erit $\frac{3}{9}$.

Probatur. Quia enim 4. detractus à 7. relinquit 3. erit 3. & 4. æqualia numero 7. Ergo, & minutia 3. & 4. expreſſa erit æqualis quantitati minutiæ expreſſæ numero 7. Vnde ablata quantitate reſpondente numero 4. remanebit quantitas reſpondens numero 3.

At ſi ſint minutiæ diuerſorum denominatorum. Priùs in vnam denominationem ſunt reuocandæ, vt ſupra docuimus, & ſic inſtituenda eſt, vt priùs, operatio.

EXPENSIO V.

De fractorum multiplicatione.

MInutia multiplicatur, aut per minutiam aliam, aut per numerum integrum cum minutis, aut per numerum integrũ, aut mutuò duo integri cum duabus minutijs, &c.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Inuicem Minutias multiplicare.

SInt multiplicandæ minutiæ $\frac{4}{9}$, & $\frac{6}{9}$ multiplicentur inuicem numeratores, & fiat 24. Deinde denominatores, ſeu ſint eiuſdem, ſeu diuerſæ denominationis, & fiant 81. Ergo numerus ex multiplicatione $\frac{4}{9}$, & $\frac{6}{9}$ productus eſt minutia $\frac{24}{81}$ ſic $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{4}$ multiplicantur ex numeratorum multiplicatione faciendo 6. & denominatorum faciendo 12.

* Prob. Illa eſt multiplicatio, in qua toties componitur is, qui multiplicatur, quot ſunt in multiplicante vnitates; vnde genitus V. g. 15. eam habet proportionem ad multiplicatum 5. quã habet 3. multiplicans ad vnitatem. Data ſit ergo minutia $\frac{2}{7}$, & $\frac{3}{5}$ multiplicetur 2. per 3. numeratores, & fiant 6, & 5. per 7. denominatores, & fiant 35. Dico *quod minutia* $\frac{6}{35}$ *ita eſt ad minutiam* $\frac{2}{7}$, *vt* $\frac{3}{5}$ *eſt ad vnitatem*, & ideo minutiam $\frac{6}{35}$ eſſe genitam ex minutia $\frac{2}{7}$ per minutiam $\frac{3}{5}$.

Probatur. Nam; cùm 7. multiplicatus per 5. produxit 35. erit eadem proportio product 35. ad multiplicatum 7. vt multiplicantis 5. ad 1. Idem dicas de numeratoribus, nam 6. ad 2. erit, vt 3. ad 1. ob eandem rationem. Cum ergo tam denominator 35. ad denominatorem 7. generantẽ, quã numerator genitæ minutiæ $\frac{6}{35}$, nimirum 6. ad numeratorem 2. minutiæ generantis $\frac{2}{7}$ dicat eam proportionem, quam numerator 3. dicit ad 1. & denominator 5. dicit ad 1, minutiæ $\frac{3}{5}$ multiplicãtis, tota minutia, nempe ſimul numerator, & denominator $\frac{6}{35}$ generata erit ad totum $\frac{2}{7}$ multiplicatũ, & generantem, vt minutia tota multiplicans

$\frac{3}{7}$ eſt ad 1. ideo erit ea, quæ multiplicabit $\frac{3}{7}$, & generabit $\frac{6}{14}$.

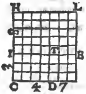
COROLLARIVM

HInc vides maiorem eſſe rationem in minutiâ genitâ denominatoris ad numeratorem, quam in minutijs generantibus denominatorum ad numeratores; ſi quidem 3. ad 2. eſt proportio ſeſquialtera, & 4. ad 3. eſt pportio ſuperparticularis ſeſquitertia, at verò 6. ad 12. eſt dupla, ad quod explicandum.

THEOR. I. PROP. XV.

Genitus numerus in multiplicatione minutiarum habet proportionem compoſitam, ex proportione minutiarum generantium.

SIt $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$ docet regula multiplicationem numeratorum ſimul, & denominatorum ſimul, ſed hoc eſt proportiones componere. Siquidem ex def. 1. lib.8. per mutuam multiplicationem duorum denominatorum fit planus numerus, item fit alius planus numerus per multiplicationem numeratorum; ſed ex propoſ.10. lib.8. elem. duo plani numeri inter ſe rationem habent ex lateribus compoſitam: Ergo, & hi duo numeri denominator, & numerator habebunt proportionem



à lateribus compoſitam inuicem. Sic ſi adſit numerus $\frac{4}{8}$ DH, & alius $\frac{3}{7}$ CB, ſi multiplicauerimus latus 8. per 7. efficiemus planum num. 15. CL, & 3. per 4. planũ 12. CT, qui habebunt eam proportionem compoſitam ex $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$. Quoniam ſi multiplicentur 3. numerator per 8. denominatorem efficiemus 24. & 12. ad 24. erit eadem proportio, vtpote multiplicati per eundem 3. quæ 3. ad 8. ſic 24. & 56. erit eadem proportio, quæ 3. ad 7. vtpote multiplicati per eundem numerum 8. ſed proportio 12. ad 59. eſt compoſita ex proportione (defin. 4. lib. 7.) n. 12. ad 24. & 24. ad 57. ergo etiam ex proportione 4. ad 8. & 3. ad 7.

COROLLARIVM

HInc elicito non eſſe mirum; ſi magis augeatur proportio denominatoris ad numeratorem in genitis, quam ea, quæ eſt in generantibus. Nam genitæ minutiæ denominator ad numeratorem, cum ſit compoſita ex proportionibus generantium minutiarum eſt maior. Vnde numerator geniti debet pluries, vel ſaltem plus cõprehendere ſuum numeratorem, ob maiorem proportionem, quam ei dicit, quàm denominator minutiarum generantium ad ſuum numeratorem, ad quem dicunt proportionem ſimplicem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Minutiam per integrum, cuius eſt minutia multiplicare.

ACcipitur integer tanquam minutia ſupponendo integro 1. vt fiat ex ea, velut fractio ab vnitate denominata; deinde regula præcedens adhibeatur. Sic ſi ſit multiplicanda minutia $\frac{2}{3}$ per numerum 7 fiat $\frac{7}{1}$, & adhibita regula tradita fient $\frac{14}{3}$, vel 4. $\frac{2}{3}$.

* Prob. Tum ex antecedenti, tum quia, cum in minutiâ integrũ exprimat denominator diuiſũ in tot partes, quot in eo ſunt vnitates, integra 7. ſi numerator ſit 3. continebũt ſepties, trinas partes, ſeu ſeptem ternarios, ex quibus ſingulis ternarijs duas partes tantùm æquat minutia $\frac{2}{3}$. Si ergo tot tertiæ partes ex ſingulis ſeptem integris tribus partibus compoſitis accipiantur, quot vnitates ſunt in 2. erunt 14. tertiæ partes, vtpote, quòd à ſingulis ſeptem duæ tertiæ partes accipiantur: Vnde conficient minutiam $\frac{14}{3}$, & numerum 4 $\frac{2}{3}$.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Numerum integrum cum integro minutiæ adnexo multiplicare.

INteger ad minutiam reuocetur, & fiat deinde, vt ſupra, ſic, ſi ſint multiplicandi 7. per 2. & $\frac{2}{3}$; Integer 2. cui adhæret minutia in tertiis proleetur multiplicando per denominatorem, vt fiant $\frac{8}{3}$; deinde numero 7. ad modum minutiæ accepto, $\frac{7}{1}$ prima regula adhibeatur, fientque $\frac{56}{3}$.

Probatur ex 14. propoſ. ac etiam eodem modo velut præcedens. Nam integrum quodlibet ex duobus intelligitur diuiſum in tres partes, ex quibus minutia $\frac{8}{3}$ octo tertias partes comprehendat. Si ergo ex illis accipiantur 8. tertiæ partes toties, quot vnitates ſunt in 7. non eſt dubium; quòd fient 56. tertiæ partes; nempe minutia $\frac{56}{3}$.

COROLLARIVM

HInc eſt, quod eodem modo multiplicetur integer cum minutia per minutiam ſolùm. V. g. 2. $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{7}$ reducendo integrum ad minutiam, & faciendo $\frac{8}{3}$, & $\frac{2}{7}$. Deinde multiplicando numeratores ſimul, & denominatores ſimul, & efficiendo minutiam $\frac{16}{21}$.

Sic, ſi multiplicanda ſint inuicem integra duo, quibus minutiæ adhæreant idem præſtabitur V. g. ſint 2. & $\frac{2}{3}$ multiplicandi per 4. $\frac{2}{5}$: reducetur ad minutiam ſuam vtrumque integrum; primum quidem ad $\frac{8}{3}$, ſecundum verò ad $\frac{22}{5}$, & deinde eodem modo res præſtabitur, & fient $\frac{176}{15}$.

* Quod ſic ex dictis propoſ. 14. probo. Quia 8. multiplicat 22; ita erit genitus 176. ad 22. vt 8. ad 1. Rurſùs, quia 3. multiplicat 5. ita erit genitus 15. ad 5. vt 3. ad 1. ex defin. 16. Tract. 8. Quare etiam ſimul 176. & 15. ideſt $\frac{176}{15}$ erit ad 22. & 5. ideſt ad minutiam $\frac{22}{5}$, vt 8. & 3. ſimul nimirũ $\frac{8}{3}$ ad vnitatem, vnde $\frac{8}{3}$ minutia erit multiplicans.

COROLLARIVM.

HInc eſt videre numeratores in minutijs ſiue ex additione collectis, ſeu ex multiplicatione genitis aliquando prodire maiores ſuis denominatoribus, & ideo ſuperare minutias ipſas ſua ecota, quod in multiplicatione præcipuè tunc ſolum eueniet, cum iam numeratores multiplicandi erant denominatoribus in aliquo maiores. Si verò quis cupiat in integra, vt priùs reſtituere hoc conſequetur, ſi ipſos numeratores per denominatores diuidat. Sic, ſi quis cupiat agnoſcere, quot integra in minutia $\frac{171}{15}$ continentur, diuidat per 15. & inueniet integra 11. & $\frac{6}{15}$.

Porrò Multiplicatio probatur per diuiſionem. Vnde operæ pretium erit, priùs addiſcere diuiſionem, quam modo trademus.

EXPENSIO VI.

De Minutijs diuidendis.

QVi intellexerit minutiarum multiplicationem, facilis ei euadet diuiſio, quòd fere idem ſit, vt modo videri poterit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Minutiam, quam alia data minutia per aliam minutiam menſuret, reperire.

SIt data minutia $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$, & iubeatur quis reperire minutiam aliquem, quam minutiæ datæ metiantur. Multiplicentur vnius inuicem numerator, & denominator, vt 3. & 7. & fiant 21. & per hunc numerum multiplicetur numerator 2. & denominator 5. alterius, & fiat minutia $\frac{42}{105}$. Dico hanc minutiam metiri minutiæ $\frac{2}{5}$.

Probatur. Quia 21 multiplicat 2. & 5. Ergo producti 42. & 105. erunt inuicem, vt 2. ad 5. ex 17. lib. 7. & ſic 42. metietur 105. vt 2. menſurat 5. Sed etiam 3. & 7. menſurant 21. qui per 2. menſurat 42. & per 5. metitur 105. ergo etiam $\frac{3}{7}$ metietur $\frac{42}{105}$ ex 9. pronunc. Tract. 8.

Reperiemus ſecundò numerum per quem minutia $\frac{3}{7}$ metitur minutiam $\frac{42}{105}$. Sic fiat 2. per 7. & prodibit 14. numerator, deinde 3. per 5. denominatores vnius cum numeratoribus alterius minutiæ multiplicando, & habebimus 15. denominatorem, ſtabitque minutia $\frac{14}{15}$, per quam dico minutiam $\frac{3}{7}$ metiri minutiam $\frac{42}{105}$.

Et probatur. Nam idem 2. multiplicauit 7. & fecit 14. multiplicauit quoque 21. in præced. probatione, & fecit 42. ergo, ex 17. ſeptimi, ita eſt 7. ad 21, vt 14. ad 42. Quare ex def. 18. Tr. 8. talis pars erit 7. numeri 21. quæ 14. 42. ſed 7. metitur 21. per 3. ex oſtenſione 1. partis, ergo etiam 14. metietur 42. per 3. & ideo etiam è contra 3. metietur 42. per 14. Rurſus Quoniam 3. multiplicauit 5. & fecit 15. & 5. multiplicauit 21. vt ſupra, & fecit 105. ita erit 3. ad 21. vt 15. ad 105. ſed 3. metitur 21. per 7. Ergo etiam 15. metietur 105. per 7. & ideo etiam 7. metietur 105. per 15. ideoque $\frac{3}{7}$ metietur minutiam $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$.

COROLLARIVM

MInutiam, ſeu numeros, per quos altera minutiarum $\frac{3}{7}$ menſurat productum $\frac{42}{105}$ & quotientes $\frac{14}{15}$ conſurgere à decuſſata datarum minutiarum $\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{7}$ multiplicatione, nempe denominatorum vnius per numeratores alterius, & vice verſa. Nam 2. per 7. facit 14. qui ter acceptus menſurat 42. & 3. per 5. facit 15. qui ſepties acceptus facit 105. Vnde quotientes 14. à numeratore vnius 2. per 7. alterius denominatore, & 15. à numeratore 3. per denominatorem alterius 5. conſurgit. Quare minutia $\frac{42}{105}$ menſuratur à minutia $\frac{3}{7}$ per minutiam $\frac{14}{15}$ nempe per $\frac{7}{3}$ inuersè ſumptam.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Minutiam per minutiam diuidere.

POteſt diuiſio fieri, ac multiplicatio, & eodem pacto præſtari hac ſolum conditione ſeruata, vt diuiſoris minutiæ numerator ſumatur pro denominatore, & denominator pro numeratore ſedibus eorum commutatis. Sint diuidendi $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ diuiſoris $\frac{3}{7}$: numeri ſedes mutentur, & fiat $\frac{7}{3}$. Deinde multiplicentur inuicem numeratores, & fiat minutia $\frac{14}{15}$. Dico Minutiam $\frac{2}{5}$ eſſe per minutiam $\frac{3}{7}$ diuiſam.

Fiat 3. in 7. numeres 21. & 2. in 21. fiat 42. ſic 5. in 21. fiat 105.

Probatur. Cum 42. ſe habeat ad 105. vt 2. ad 5. erit eadem minutia $\frac{42}{105}$ ac $\frac{2}{5}$ ex prima parte anteced. propoſ. Sed minutia $\frac{3}{7}$ menſurat $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$ ex præced. 2. parte. Ergo etiā minutia $\frac{3}{7}$ menſurabit minutiam $\frac{2}{5}$ per $\frac{14}{15}$. Hæc autem minutia $\frac{14}{15}$ ex Coroll. conſurgit ex multiplicatione vnius denominatoris per alterius numeratorem, & è contra, vel à multiplicatione vnius minutiæ per aliam multiplicantem ſumptam inuersè. Ergo ſi ſumatur minutia diuidens inuersè vt $\frac{7}{3}$, & multiplicetur per aliam producetur quotiens alterius V. g. $\frac{14}{15}$, qua menſurabitur $\frac{42}{105}$ minutia $\frac{3}{7}$, & ideo etiam minutiam $\frac{2}{5}$, quæ eſt eadem cum ipſa.

Eodem autem modo agemus, ſi voluerimus diuidere quamlibet minutiam per integrum, ſeu per integrum, cui minutia adhæreat, ſeu integrum per minutiam, vel integrum, cui minutia hæreat per minutiā, vel integrū per integrum cū minutia, vel tandem integrum cum minutia per integrū ſolùm, vel cum minutia, qui ſunt caſus 7. Id verò reducendo ſemper integra quæcunque ad minutiam agemus, & more minutiarum ea aſſumendo, vt hic vides.

Min. *Int.*	$\frac{2}{3}$ *per* 4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	*fiet*	$\frac{2}{12}$
min. *int.min.*	$\frac{2}{5}$ *per* $3\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{17}$		$\frac{10}{85}$
int. *min.*	3 *per* $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
int.min. *min.*	$4\frac{1}{3}$ *per* $\frac{2}{5}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{5}{2}$		$\frac{65}{6}$
int. *int.min.*	5 *per* $2\frac{3}{4}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{11}$		$\frac{20}{11}$
int.min. *in.mi.*	$6\frac{1}{2}$ *per* $3\frac{4}{5}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{19}$		$\frac{65}{38}$
int.min. *int.*	$4\frac{2}{4}$ *per* 2	$\frac{18}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{18}{8}$

Obſeruandum verò eſt diligenter, quinam numerus ſit diuiſor, vt eius numerus inuertatur; alioquin, ſi non diuiſoris, ſed diuidendi numerus inuertatur contrarium eueniet, vt experimentum docebit.

THEOR. II. PROPOS. XX.

Numerus, ſeu minutia quotiens poteſt eſſe aliquando maior minutiâ diuiſâ.

SIt data minutia $\frac{6}{7}$ diuidenda per minutiam $\frac{2}{7}$. Factâ operatione $\frac{42}{14}$ minutia erit quotiens, & demonſtrabit, quoties $\frac{2}{7}$ ingrediuntur in minutia $\frac{6}{7}$, quæ minutia $\frac{42}{14}$ eſt minutia maior minutiâ diuiſâ $\frac{6}{7}$.

* Probatur, Nam quotiens eſt numerus indicans, quot vicibus diuiſor in numero diuidendo capiat; ſed minutia diuidens multo minor, quam diuidenda poteſt capere tot vicibus, vt quotiens vel ſuperet denominatorē proportionis minutiæ diuidendæ: Ergo poteſt eſſe maior ipſa ex Cor pr. 3 huius. Sic minutia $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ capit ter perfectè; & ideo 42. numerator etiam capit denominatorem 14. ter. At è contrà, ſi diuideretur $\frac{2}{7}$ per $\frac{6}{7}$ nam 6. non capit in 2. niſi pro tertia ſui parte; & ideo eſſet quotiens $\frac{14}{42}$. Nam 14. minus eſt numero 42. pro tertia ipſius 42. parte, & ad illum habet proportionem, quam 1. ad 3. & quam $\frac{2}{7}$ diuiſus numerus habet ad $\frac{6}{7}$ numerum diuidentem.

COROLLARIVM.

HInc itaque collige. Quod minutiæ quotientis numeratoris proportio ad denominatorem exprimit proportionem, quam habet minutia diuiſa ad diuiſorem. Nam, ſi numerator contineat denominatorem etiam minutia diuiſa continebit diuidentem, vel ſemel, vel pluries prout numerator quotientis denominatorem continet, quod, ſi non continet; ſed minor ſit numerator denominatore in minutia quotiente, tunc exprimit proportionem minoris inæqualitatis, quam habet minutia diuiſa ad diuidentem, vt $\frac{14}{42}$ exprimet proportionem ſubtriplam, quam habet $\frac{2}{7}$ ad $\frac{6}{7}$, & ideo exprimit, quod $\frac{2}{7}$ non continet, niſi tertiam partem numeri $\frac{6}{7}$, vt 14. non continet, niſi tertiam partem numeri 42. at è contra ſi diuideretur $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ tunc quotiens eſſet $\frac{42}{14}$ exprimens, quod minutia diuiſa continet diuidentem ter, & habet ad eam proportionem maioris inæqualitatis triplam.

EXPENSIO VII.

De Minutijs minutiarum.

ALiquando fracti numeri quoque ſuas fractiones habent, quæ duplici ſenſu accipiũtur, vel enim ſunt fractiones vnius partis, quæ numero fracto reperitur. Sic, ſi dico duas tertias partes vnius dimidij diuiſum ſignifico illud dimidium in 3. partes ex quibus poſſideo duas.

Alio verò modo accipitur, tanquam non vna pars numeri fracti, ſed omnes partes ſimul per modum vnius eſſent diuiſæ in alias partes, ex quibus omnes non aſſumerem, ſed aliquas, vt, ſi dicerem $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ ſignifico duas tertias partes, ac ſi eſſent vnica pars, diuiſas eſſe in 6. partes ex quibus aſſumo 5. Scribitur autem fractio fractionum interiecto puncto pro linea ſic $\frac{2}{3}$.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

Fractiones fractionum ad ſimplices fractiones reuocare.

VT fractiones fractionum ſecundo ſenſu intellectæ ad ſimplicem fractionem reuocemus, numeratores inuicem ſunt multiplicandi, & vltimus terminus genitus erit numerator minutiæ omnibus illis fractionibus fractionum æquiualentia; denominator autem erit numerus à multiplicatione mutuâ denominatorum genitus. Sic $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ reducetur ad hanc $\frac{6}{12}$, & minutia A B C reducetur ad hanc $\frac{24}{60}$ multiplicatis inuicem numeratoribus 2. 3. 4. & denominatoribus 3. 4. 5.

A	B	C
2	3	4
3	4	5

* Probatur hanc regulam eſſe bonam. Nam quia intelligitur minutia ſecundò ſenſu. Ergo duæ partes totius 3. A erunt diuiſæ in 4. Si ergo minutiæ minutiarum denominator 4. menſurat 2. numeratorem ex hypotheſi; menſurabit etiam ex pronunc. 9. Tract. 8. denominatorem ſimplicis minutiæ A, quæ eſt 3. quem 2. menſurat. Ergo redigatur denominator A 3. in partes, quas conti-

net denominatoris B 4. & in eaſdem partes A 2. numerator, fietque minutia $\frac{8}{12}$. & quia 3. & 2. A fuerunt multiplicati per eundem numerum 4. ita ex 17. ſept. erit 2. ad 3. multiplicati, ac geniti 8. & 12. Sic numerator minutiæ minutiarum 3. B menſurat ſuum denominatorem B 4. & hic ex hypotheſi numeratorem A 2. ſimplicis minutiæ. Redigatur itaque A 2. in partes, quas continet numerus 4. & 3. & gignetur minutia $\frac{6}{8}$; quia autem 2. multiplicauit 4. & fecit 8. & 3. fecit 6. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 6. ad 8. Cum ergo ſit 6. ad 8. vt B minutiæ minutiarum 3. ad 4. & 8. ad 12. vt A minutiæ ſimplicis 2. ad 3. Ergo etiam erit ex æquo 6. ex 2. in 3. genitus ad 12. ex 4. in 3. naſcentem, vt numerator minutiæ minutiarum B 3. ad minutiæ ſimplicis denominatorē A 3. quare $\frac{6}{12}$ æquiualebit tribus quartis duarū tertiarū partis. Nam vt magis res pateat, duę quartę partes numeri 12. ſunt 8. quarum tres quartæ partes ſunt 6.

At ſi in primo ſenſu minutia intelligatur, & de vnica parte minutiæ ſimplicis intelligatur fractus ſecundus, & minutia minutiæ: Tunc alio pacto oportebit procedere. Nam numerator idē perſiſtet, q minutiæ minutię, at denominatoris cū denominatore minutię ſimplicis, vel antecedentis multiplicatio denominatorem dabit. Sic ſi ſint $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$ fractionis ſecundæ idem 3. numeratoris vices obibit; at denominator conſurget ex multiplicatione 5. cum 3. vt fiant 15. & ſtabit minutia $\frac{3}{15}$.

Prob. Nam, cùm numeri 3. intelligatur diuiſa quælibet vnitas in 5. partes: Ergo 5. toties menſurabit 5. quot vnitates ſunt in 1. & ideo etiam menſurabit 3. quot vnitates ſunt in 3. ideoque ſi habeo tres quintas vnitatis, quæ eſt in 3. habeo etiam 3. quintas partes vnius vnitatis quæ eſt in 3. & quia omnium vnitatum 3. ſimul ſumptarum quinque partes faciunt 15. habebo itaque minutiam $\frac{3}{15}$.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Minutiam minutiæ in primo ſenſu, minutiæ inſerere, ſeu ſimul addere.

DIffert inſitio à reductione. Nam ibi quærimus minutiam, quæ eiuſdem valoris ſit, ac minutia minutiæ, hic verò addimus minutiam minutiæ ſimplici minutiæ, ita vt ibi non interueniat prima, & ſimplex minutia, niſi tanquam denominator minutiæ ſecundæ, nec auget eam, ſed reſtituit eandem non re, aut numero; ſed valore: hic autem minutia ſimplex additur minutię minutiarum, vt fiat maior etiam valore, & eſt propriè additio.

Fit ergo ſic. Detur minutia $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, & debeamus ſimul addere quatuor quintas partes vnius tertię, ad duas tertias. Numerator minutię ſimplicis in denominatorem minutiæ minutiarum ducatur. Nempe 2. in 5. vt fiat 10. & huic addatur numerator 4. minutiæ minutiarum, & fiat 14. & hic erit numerator; denominatorem verò exhibebit mutua denominatorum multiplicatio, & erunt 15. ſtabitque minutia ex minutia ſimplici, & minutia minutiæ coaugmentata $\frac{14}{15}$.

Probatur. Nam cùm 5. multiplicet 3. & multiplicet 2. & fiat minutia $\frac{10}{15}$ erit eadem ac $\frac{2}{3}$ ſed quia 5. idem eſt, ac vna pars denominatoris 3. minutiæ ſimplicis ex præc. propoſ. parte ſecunda ideo $\frac{4}{15}$ erit eadem minutia, ac $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{3}$ nimirum minutia $\frac{4}{5}$ ſimplicis $\frac{1}{3}$; cùm ergo habeamus $\frac{10}{15}$, $\frac{4}{15}$ poterimus ſimul addere, vt fiant $\frac{14}{15}$, quod eſt inſerere.

Et idem agendum, ſi ſint plures minutiæ minutiarum, vt ſi $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$ proponantur addendæ. Ex 2. in 5. fiunt 10. addito 4. fiant 14. ex 14. in 8. fiunt 112. addito 5. fiunt 117. & hic erit numerator: Denominator verò exoriet ex mutuâ denominatorum multiplicatione 120. & erit minutia $\frac{117}{120}$. ſumma minutiarum $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$.

Aduerte autem minutiam nullam eſſe reducendā ad minimos terminos, dum vna alteri additur, licet valde augeſcat; ſed tunc, cum omnino completa eſt operatio; alioquin ſenſus variaretur, & nihil recti colligeretur, ſic $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{5}$ prius ad 2. per 3. fiunt 6. addito 1. fiant 7. deinde per ſecundum 3. 7. fiunt 21. & addito 2. fiunt 23. deinde 23. per 4. fiunt 92. addito 3. fiunt 95. pro numeratore, cum denominator ex multiplicatione denominatorum mutua colligatur 180. & fiat minutia ſumma prædictarum minutiarum $\frac{95}{180}$, quæ deinde poteſt redigi ad denominationem minorem per regulas traditas $\frac{19}{36}$.

PROBL. III. PROPOS. XXIII.

Minutiam minutiæ minutiæ ſimplici in ſecundo ſenſu addere, aut inſerere.

SInt exhibitæ minutię $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ intellectæ in ſecundo ſenſu, quæ ſint ſimul addendæ. Minutiæ ſimplicis numerator 3. cum denominatore minutiæ ſecundæ 5. multiplicetur, vt fiant 15. deinde ipſi numeratores inter ſe multiplicentur 2. & 3. & ſint 6. adiunctuque ſimul 15 & 6. & fiant 21. pro numeratore; denominator verò erit numerus ex multiplicatione denominatorum 4. & 5. procreatus nempe 20.; ſtabitque minutia $\frac{21}{20}$, quæ erit ſumma prædictarum minutiarum $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$.

Probatur. Nam quia 5. multiplicauit 3. & 4. ex 17. lib. 7 ita erit 3. ad 4. vt 15. ad 20. Quare ex 3. huius Coroll. eadem minutia erit $\frac{3}{4}$, quæ $\frac{15}{20}$. Rurſus, quia 5. multiplicauit 4. qui ſunt denominatores, & fecit 20. & 2. multiplicauit 3. numeratores, & fecit 6. ex propoſ. 21. huius eadem minutia erit $\frac{6}{20}$, quæ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$.

Cum ergo habeamus eandem minutiam minorem $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ expreſſam minutia $\frac{6}{20}$, & minutiam $\frac{3}{4}$ maiorem, & ſimplicem expreſſam numero $\frac{15}{20}$. Si eas addamus ſimul efficient minutiam $\frac{21}{20}$ ſummam minutiarum $\frac{3}{4}$, & $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$. At ſi plures minutiæ adſint, idem proceſſus agendum. Sic, ſi habeamus $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{6}$ nempe $\frac{2}{3}$, & 2 quintas trium quartarum duarum tertiarum, & tres quartas duarum tertiarum addendas ad duas tertias, ita agemus. Multiplicabimus 2. numeratorem primæ $\frac{2}{3}$ per denominatorem maximæ minutię minutiarum 4. & fiunt 8, & deinde numeratores inuicem, & erunt 6, quibus ſimul additis conficient 14. hunc verò per denominatorem 5. ſequentis minoris multiplicabimus, & fiet numerus 70. deinde omnes tres numeratores inuicem 2. 3. 2. & fient 12. quibus numero 70. additis erunt 82. quem numerum per denominatorem poſtremæ 6. multiplicabimus, & fiet 492. & deinde omnes quatuor numeratores inuicē 2. 3. 2. 4. vt ſint 48. qui numerus addendus eſt numero 492. & erit numerator 540. Denominator verò erit numerus ex mutuâ multi-

plicatio-

plicatione denominatorũ productus, nempe 360. & minutia ſumma omnium prædictarum ſtabit $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{6}{9}$ ideſt $\frac{1}{3}$.

Porrò in hac Inſitione, ſeu additione termini ante totalem additionem ad minimos numeros reduci poſſunt, ſi tamen numerator ſit minor quàm denominator, alioqui illa reductio eſſet potiùs cauſa confuſionis.

TRACTATVS XIII.

PARS SECVNDA.

De Numeris proportionalibus inueniendis.

Hic iam ipſos numeros, non vt rationem, ſed vt proportionem dicentes exquirimus, & docemus, tum numeros extremos proportionales inuenire, & conſequenter Auream regulam proportionum, tum mediam proportionalem, vnde extractionem Radicis quadratæ, tum etiam duos medios proportionales, & cubicam radicem inuenire docemus. Tractatus omninò, & abſolutè neceſſariùs, ſine quo in Mathematicis proficere nemo poteſt.

EXPENSIO I.

De inueniendo datis tribus quarto proportionali, vel de regula proportionum.

HÆc regula, quâ datis tribus numeris quartus quæritur, dicitur Aurea ob eius vſum mirificum, ne dum in mathematicis; ſed & in omnibus humanis comercijs, vt ferè nihil in negotijs cõtractibuſue agatur, niſi hęc regula interueniat.

PROBL. I. PROP. I.

Tribus datis numeris quartum proportionalem inuenire, qui ita ſit ad tertium, vt ſecundus ad primum.

DIſponantur tres numeri dati in ſeriem, ita vt tertius, cui annexa eſt quæſtio, & cui quæritur quartus, qui ſit ei proportionalis, vt eſt ſecundus ad primum ſit vltimo loco, & huic ſimilis primo loco, cui verò quartus, qui deſideratur, debet aſſimilari ſecundo loco, V.g. ſit datus numerus 6. & 9. & 12. numero verò huic vltimo quartus proportionalis quæritur, nempe aliquis numerus, qui ſit in proportione ad 12. vt eſt 9. ad 6. Primo ergo loco ponendus eſt numerus 6. ſecundo 9. tertio 12. dicendo ſi 6. tanquam fundamentum habet pro termino numerum 9. numerus 12. acceptus, vt fundamentum, quem numerum proportionalem habebit, qui illi ita correſpondeat, vt 9. ad 6.? Sicque diſpoſiti, vt hic vides ſtabunt numeri, ſi 6. dant 9. quid 12.? Multiplicabitur, itaque numerus 12. per 9. & fient 108. genitus autem numerus diuidetur per 6. & prodibunt 18. hicque numerus erit quartus proportionalis.

Probatur ex 19. propoſ. ſeptimi Eucl. cum quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex medijs generatur eſt ęqualis ei numero, qui ex extremis conficitur; cùm ergo hic ſint quatuor numeri proportionales, & ſit 6. ad 9. vt 12. ad 18. genitus numerus à medijs 12. & 9. qui eſt 108. erit æqualis numero, qui producitur ab extremis 6. & 18. Itaque habemus eundem numerum, qui ab extremis produceretur per multiplicationem mutuam mediorum: quare ex defin. 15. multiplicationis Tract. 8. numerus 108. totica continebit numerum 18. quot vnitates ſunt in 6. quia eſt idẽ numerus, qui produceretur à 6. & à 18. inuicem multiplicatis: Si ergo diuidatur per numerum 6. prodibit numerus, qui perquiritur, nempe numerus 18.

COROLLARIVM I.

COllige ex propoſ. 4. octaui non omnes numeros habere quartum proportionalem; eò quòd minimi ſint in datis rationibus: vnde enaſcuntur minutiæ in diuiſione geniti ex ſecundo, & tertio per primum ferè ſemper, quæ eodem modo ponendæ ſunt, vt in diuiſione integrorum tract. 8. monuimus Coroll. propoſ. 22. & more fractorum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis numeris, cuius primo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

SIt V.g. qui emerit 3. palmos ſerici cum $\frac{5}{7}$ quinque aureis, quęratur quot nummis aureis emet 32. palmos?

Si $3\frac{5}{7}$ dant 5 quid 32.?

Primo

Primo multiplicabimus integros ſecundum, & tertium. Nimirũ 32. p quinque, & facient 160. Iſte ergo numerus per integrum 3. & $\frac{5}{7}$ eſt diuidendus ex doctrina propoſ. 19. part. 1. Tractat. huius. Supponemus itaque numero 160. vnitatem, & deinde redigemus integrum 3. in minutiam: multiplicabimuſque 3. per 7. vt fiant 21. addemuſque numeratorem 5. & fient 26. itaque minutia erit $\frac{26}{7}$, & ſic numeri diſpoſiti erunt.

$$\frac{160}{1} \quad \frac{26}{7} \quad \text{diuiſoriſque mutato loco} \quad \frac{7}{26}$$

Multiplicabimus 160 per 7. & prodibit genitus quotiens $\frac{1120}{26}$, quem, vt redigamus ad integrũ diuidemus per 26. & prodibit numerus 43 $\frac{2}{26}$. Itaque 32. palmi ſerici venient aureis, 43. $\frac{2}{26}$ ſi 3 $\frac{5}{7}$ quinque aureis venduntur.

PROBL. III. PROPOS. III.

Datis duobus numeris, cuius ſecundo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

$$\text{Si Equi 5. aureis } 35\frac{4}{9} \text{ quid } 27?$$

SInt V. g. Equi quinque, qui empti ſint 35. aureis, & $\frac{4}{9}$. Quæritur, quot aureis Equi 27. conſtabunt. Ex Tract. h. p. 1. prop 11. integra in fractiones proiciantur, nempe 35 $\frac{4}{9}$ in $\frac{319}{9}$, & numero 27. ſupponatur 1. & ſic ſtent numeri inuicem multiplicandi.

$$\frac{27}{1} \;\&\; \frac{309}{9}$$

Qui generabunt numerum $\frac{8613}{9}$. qui diuidentur per numerum 5 Equorum ex propoſ. 19. Tr. h. 1. & erunt $\frac{8613}{45}$, quæ fractio ad integra redacta erit 185. & $\frac{18}{45}$, ideſt $\frac{2}{5}$. Ita Equi 27. conſtabunt aureis 185. & $\frac{2}{5}$.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Datis tribus numeris, cui tertio adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

QVæratur, quot aureis 57. libræ, & $\frac{1}{2}$. Zaccari veneant? dum tres libræ 14. ſolidis emuntur itaque numeri diſponentur.

Libræ 3. dant 14. ſolidos, quot reſtituent libræ 57. & $\frac{1}{2}$?

Igitur, vt in anteced. numerus 57 $\frac{1}{2}$ in minutias proiicienda, vt ſint $\frac{115}{2}$; ex inde ſecundus numerus 14. per hunc tertium multiplicandus, & genitus prodibit $\frac{1610}{2}$, qui deinde per 3. primum diuidendus erit ex part. 1. propoſ. 19. h. Tract. de fractis, fientq; $\frac{1610}{6}$, qui ad integra redacti dabunt 268. & $\frac{2}{6}$, ideſt $\frac{1}{3}$. Obſeruandum verò eſt, quòd fracti non ſunt ad integra redigendi, neque in hac, neque in antecedenti operatione; donec ſit completa operatio, ne impediatur, & confuſio enaſcatur.

PROBL. V. PROPOS. V.

Datis tribus numeris, cui primo, & ſecundo adhæreant fractiones, quartum proportionalem inuenire.

QVæratur, quid veneant 12. vlnæ panni; ſi 3 $\frac{5}{7}$ veneunt aureis 2. & $\frac{3}{5}$, itaque ita diſpoſiti ſtabunt numeri.

$$3\frac{5}{7} \text{ dant } 2\frac{3}{5} \text{ quid } 12?$$

Multiplica ex prop. 17. huius Tract. part. 1. numerum 12. per 2 $\frac{3}{5}$ redigendo ad fractiones $\frac{13}{5}$, & deinde ducendo 12. in $\frac{13}{5}$, & fient $\frac{156}{5}$; deinde ex expenſ. 5. Tract. huius p. 1. diuido fractionem $\frac{156}{5}$ per integrum, & fractionem 3 $\frac{5}{7}$ nempe $\frac{26}{7}$ multiplicando 7. per 156. & 26. per 5. & erit minutia $\frac{1092}{130}$ nimirum ad integros redacta 8. & $\frac{52}{130}$, ideſt $\frac{2}{5}$ itaque 12. vlnæ panni conſtant aureis 8. & $\frac{52}{130}$.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Datis tribus numeris, cui ſecundo, & tertio minutia adhæreat quartum proportionalem inuenire.

SInt quatuor pedes muri, qui fiant pretio 6. aureorum, & $\frac{1}{2}$; quot aurei perſoluentur ob opus pedum muri 9. & $\frac{1}{4}$?

Redigentur ad fractiones 6. $\frac{1}{2}$ ad $\frac{13}{2}$, & 9 $\frac{1}{4}$ ad $\frac{37}{4}$; & deinde multiplicentur, & fient $\frac{481}{8}$ diuidantur deinde ex ſupra cit. propoſ. $\frac{481}{8}$ per 4. & fient $\frac{481}{32}$, quæ minutia ad integrũ redacta, fient aurei 15. & $\frac{1}{32}$; itaque 9. pedes muri, & $\frac{1}{4}$ efficientur pretio 16. aureorum, & $\frac{1}{32}$.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis tribus numeris, cui tertio, & primo adhæreat fractio quartum proportionalem inuenire.

EOdem modo fit. Quæratur V. g. ſi 4. vlnæ, $\frac{5}{8}$ emũtur pretio 20. aureorum, quot aurei $\frac{3}{7}$ vnius vlnæ ementur?

$$\text{Si } 4\frac{5}{8} \text{ vlnæ aureis 20. quid } \frac{3}{7}?$$

Itaque multiplica 20. per $\frac{3}{7}$ ex expenſ. 4. ſuper citata, eruntque $\frac{60}{7}$, qui fracti diuidentur per integrum, & fractionem 4 $\frac{5}{8}$ multiplicando, vt docetur propoſ. 9. expenſ. 5. ſuprascit. eruntque $\frac{480}{259}$, itaque pretium erit 1. aureus, & $\frac{221}{259}$ qui redigi nequeunt ad minorem denominationẽ, ideſt inſuper dandæ erunt 221. partes vnius aurei ex 259. in quas diuideretur.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Datis tribus numeris, in quibus omnibus inueniatur fractio, quartum proportionalem reperire.

QVis tribus diebus, & ſeptem horis, nimirum in 3 & [illegible] conficit 93 milliaria, & [illegible]; quæritur, quot milliaria conficiet 5. diebus, & 11. horis nimirum 5 [illegible]? Itaque redigentur integri 5. ad ſuam minutiam, & fiant [illegible], ſic etiam 93 [illegible] redigentur ad [illegible] & inuicem multiplicabuntur, eruntque [illegible], quæ minutia diuidetur per minutiam 3. & [illegible] redactam ad [illegible], vt docemus expenſ. 5. huius de fractis, & producet [illegible]. Quæ minutia ad integros redacta dabit milliaria 155 [illegible] nimirum ferè [illegible], itaque viator quinque diebus, & 11 horis conficiet milliaria 155 [illegible], qui confecit diebus 3. & 7. horis milliaria 93. & [illegible].

EXPENSIO II.

De probatione regulæ aureæ.

MOdus inueniendi quartum numerum proportionalem indiget trutinâ aliquâ, ob quam, quis certò agnoſcat ſe benè operatum fuiſſe; pro quo ſciendum eſt duobus alijs modis æquiualentibus quartum proportionalis inueniri, quos hic explicabimus; deſeruientque pro lydio lapide ad captandum experimentum de operationis rectitudine.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datis tribus numeris quartum proportionalem aliter inuenire.

SIt numerus 10. cui quærendus quartus proportionalis, qui ad illum ita ſit proportionatus, vt 8. ad 12. diuidatur per primum ſecundus numerus, & quotiens multiplicet tertium numerum 10. ſic.

Si 8. dat 12. quid 10.? dabit 15.

diuiſus numerus 12 per 8. dat quotientem [illegible], per quem multiplicatus 10. dat numerum quartum proportionalem 15.

Probatur. Quia enim, vt eſt 8. ad 12. ita eſſe debet 10. ad 15. & quotiens [illegible] exprimit proportionem, ſecundùm quam 8. continetur in 12. eſtq; denominator proportionis, & ideo eam ipſam deſignat, iuxta quam 10. debet contineri in quarto proportionali; quare ſi 10. multiplicetur per quotientem 1 [illegible] producet illum numerum; qui toties continebit 10. vt 12. continet 8. quia quotiens numerat vices, quibus multiplicatus continetur in numero genito.

Si verò fracti adſint eadem regula valebit. V. g. velit quis capere experimentum, an computus præced. expenſ. propoſ. 7. ſit bene deductus, in quo quærebatur, quid ſibi vellent [illegible] vnius vlnæ; ſi 4 vlnæ & [illegible] precio 20. aureorum vendebantur. Itaque diuidendus erit ſecundus numerus per primum 4. [illegible] ideſt [illegible], & numerus prodibit [illegible] qui multiplicabuntur per [illegible], & dabunt [illegible], vt priùs.

Placeat deinde capere experimentum operationis propoſ. 6. in qua quæritur, cum habeamus per 4. pedes muri aureos [illegible]; quid ſimus lucraturi ſi ſint pedes 9 [illegible], vel [illegible], diuidemus itaque [illegible] per 4. & producent [illegible]; deinde multiplicabimus per [illegible], & generabunt [illegible].

PROBL. II. PROPOS. X.

Alio quoque modo datis tribus numeris quartum proportionalem inuenire.

DAtis tribus numeris 30. 55. 89. quæratur quartus proportionalis, qui ſit ad 89. vt 55. eſt ad 30. diuidatur tertius per primum, & quotus erit 2. [illegible]. Multiplicet deinde hic quotus ſecundum 55. & producit [illegible], qui diuiſus per 30. dabit 163 [illegible], ideſt [illegible].

I. 30. II. 55. III. 89. IV. 163. [illegible].

Probatur. Ita eſt primus ad ſecundum, vt tertius ad quartum: Ergo quoties continetur tertius in primo, toties continebitur quartus in ſecundo; quoniam *permutando*, ita quoque erit primus ad tertium, vt ſecundus ad quartum, & *inuertendo*, ita erit tertius ad primum, ita quartus ad ſecundum; quamobrem primus toties continebitur in tertio quoties cõtinebitur ſecũdus in quarto, vel è contrà. Quapropter ſi diuidatur tertius per primũ, quotiẽs indicabit ſuis vnitatibus vices ſecundũm quas continetur primus in tertio, & ideo ſecũdùm quas continetur ſecundus in quarto, eritque denominator proportionis. Quare ſecundum eas vices, & per illum quotum ſecundus multiplicatus ex 18. defin. tract. 8. reſtituet quartum ignotum; cùm genitus ex multiplicatione contineat multiplicatum toties, quot vnitates habet multiplicans, qui, vt prædiximus, quotus eſt, & proportionis denominator.

COROLLARIVM

HInc autem habes, quomodo regulæ aureæ operatio tentari poſſit. Nam poſtquam perfeceris eam primo modo, poteris hoc ſecundo, & tertio expiare, & experimentum ſumere; an eundem numerum pariat; moraliter enim impoſſibile eſt, vt per diuerſas operationes procedendo in eundem errorem delabaris.

Sit V. g. accipiendum experimentum, an prop. 5. præced. Expenſ. calculus ſit ritè confectus, in quo proponebatur quæſtio.

Si 3 [illegible], dant 2 [illegible], quid expoſcet 12?

Itaque tertius numerus 12. diuidendus erit per primum 3 [illegible] in fractiones redactum [illegible], & quotiens erit [illegible], qui deinde multiplicandus erit per 2 [illegible] in fractiones redactum [illegible], & pariet numerum [illegible], vt priùs.

Rurſus velit quis examinare prop. 4. operationem, in quâ dantur lib. 3. zaccari emendæ ſolidis 14. & quæritur librarum 57 [illegible] pretium. Diuidatur vltimus in minutias redactus [illegible] per primum 3. & erunt [illegible]. Rurſuſque hic quotiens multiplicet ſecundum 14. & prodibit genitus [illegible] requiſitus quartus proportionalis, eruntque ſolidi 268 [illegible].

EXPEN-

EXPENSIO III.

De regula trium inuerſa.

DIximus primum numerum ad ſecundum in regulis proportionum ita reſpondere proportione, vt tertius ad quartum, qui quæritur, & ideo, vt ex propoſ. 12. lib.5. Euclidis conſtat eò maior eſt quartus ſecundo, quò maior eſt tertius primo, & pari ratione quò minor eſt tertius primo, ſit, & eſſe debeat quartus ſecundo. Verùm aliquando etiam deſideratur numerus quartus qui tantò ſit minor ſecundo quantùm eſt tertius maior primo, vel è contra quartus expetitur, qui tantò ſit maior ſecundo, quantò tertius eſt minor primo. Si tamen in priori ordine numeri diſponuntur, ita vt primum locum occupet numerum, qui ſignificat id, quod etiam tertius 9. ſecundum verò occupet, cui quæritur eiuſdem ſignificationis numerus, qui ita ſit ad tertium, vt ipſe eſt ad primum. Sic verò inuerſa ratio ſtat.

Proportio recta.				Inuerſa			
I.	2.	3.	III.	I.	2.	4.	III.
II.	4.	6.	IV.	II.	6.	3.	IV.
Recta.				Inuerſa.			
I.	4.	6.	III.	I.	4.	2.	III.
II.	2.	3.	IV.	II.	3.	6.	IV.

Itaq; erit proportio inuerſa cum vltimum conſequens ſecundæ ponitur loco conſequentis ſeri ei ſecūde, & ſecundū conſequens loco antecedentis ſecundæ ſeriei, & tertij termini.

THEOR. I. PROPOS. XI.

In planis numeris æqualibus tantò eſt latus maius latere vnius plani, quantò eſt minus latus aliud huius latere alio primi plani.

SIt planus numerus A, & B. Dico, *quod quanto eſt 6. numeri B maior* quàm 4. numeri A, tantò, & 2. eiuſdem B minor erit quam 3.



Probatur. Nam ita eſt ex propoſ. 17. primi reciprocè 4. ad 6. vt 2. ad 3. Ergo ex 12. lib 5. Elem. ita 4. erit minor, quam 6. ſicut 2. quam 3. Quare 3. conſequenter tantò erit maior, quam 2. quantò 2. eſt minor, quam 3. & conſequenter, quantò 4. minor quam 6. tantò maior erit 3. quàm 2.

COROLLARIVM.

HInc eſt poſſe dari caſum, quòd cognoſcamus plani numeri latera 4. & 3. & alterius 6. & hinc velimus cognoſcere ipſi 6. per regulam auream latus tale, quod faciat cum ipſo numerum talem planum, qui exequet numerum planum ex 3. & 4. Ideoque debeat inquiri numerus, qui ſit tanto minor, quam 3. quanto 6. eſt maior, quam 4. & ideo ſit inuertenda regula.

THEOR. II. PROP. XII.

Inuerſa regula ad rectam reduci poteſt.

QVoniam, vt declarauimus, Conſequens primæ ſeriei pro antecedente ponitur in ſecūda ſerie, & conſequens ſecundæ ſeriei pro conſequente in prima in 2. regula inuerſa. Ideo erit, vt conſequens 2. primæ ſeriei *conuertendo* ad antecedentem ſuum 4. Ita conſequens ſecundæ ſeriei 3. ad ignotum antecedens 6. Eritq; proportio ex conuerſione terminorum proportioni rectè reſpondens. Ibi enim referebatur Antecedens 4. ad conſequentem 2. vt quiddam ignotum ad conſequentem 3. Sed conuerſio terminorum proportionem eorum non immutat, & adhuc antecedens aſſumptum, quod priùs erat conſequens. Si dicebat ꝓportione maioris inæqualitatis ad ſuū antecedens in prima ſerie, talem, & dicit conſequens in ſecunda ſerie ad antecedentem ſuum alioquin non eſſet eadem proportio, ſi eſſet in vna ſerie maioris inæqualitatis, in altera minoris: Ergo Proportio inuerſa conuerſis terminis erit recta, & conſequens, ac antecedens aſſumptum 3. erit minus antecedēte 4. vicem termini occupante in prima ſerie, vt antecedens 3 priùs conſequens ignoto altero termino minus erat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Quærere quartum proportionalem, qui ſit maior ſecundo, vt eſt tertius minor primo; Vel etiam minor ſecundo, vt tertius eſt maior primo.

IVxta præcedentem Regulam rectam proportionum ſint diſpoſiti numeri, & quæratur; ſi 3. palmi latitudinis 9. vlnas ſericei expoſcunt ad conficiendam lacernam; quot vlnæ 2. palmi latitudinis requirent.

3. 9. quid 2?

Inuertantur termini, & qui habet annexam quæſtionem primus conſtituatur, medius medium teneat; primus tertium locum, ſic.

Quid 2.? ſi 9. dant 3.

Deinde eodem prorſus modo procedatur, multiplicetur vltimus per ſecundum, & erit 27. qui diuidatur per primum 2. & erit quartus proportionalis $13\frac{1}{2}$. Et ita erit 2. ad 9. vt 3. ad $13\frac{1}{2}$: quoniam ſicut 9. quater cum dimidia eiuſdem parte continet 2. ſic $13\frac{1}{2}$ quater cum dimidia eiuſdem ternarij parte continet 3.

Itaque 3. vlnæ latitudinis dant 9. longitudinis; quare 2 vlne latitudinis exibebūt vlnas longitudinis $13\frac{1}{2}$, cùmque 2. primus ſit minor, quam 3. tertius, quartus tamen $13\frac{1}{2}$ eſt maior ſecundo 9. cum in regula recta deberet eſſe minor. Si enim regula recta adhiberetur proueniret numerus 6, qui eſſet tanto minor, quam 9. ſecundus, vt tertius 2. minor eſt primo 3.

Sed iam huius regulæ capiamus experimentum in fractis.

Operarij 30. perficiunt opus 11. diebus, 15. horis, quot diebus conficient 50?

30. 11. D. H. 15. quid 50?

Quo maior hic numerus operariorum, & minor numerus dierum requiritur ad opus perficiendum,

dum,& ideo quantò eſt tertius maior primo, nempe 50. numero 30. tantò erit tempus, qui deſideratur, & quartus numerus minor ſecundo 11. qui etiam tempus exprimit.

Vnde regula aurea; ſed euerſa adhibenda eſt: atque numeri inuerſo erunt diſpoſiti.

$$50? \quad 11\frac{15}{24} \quad 30.$$

Itaque multiplicabitur 30. per 11 [illegible] in minutias redactum [illegible], & efficient [illegible], qui deinde diuidentur per 50. & efficient [illegible] nimirum dies 6. & [illegible].

Quæ regula inuerſa etiam probari poterit, tum primo, tum ſecundo modo præcedentis expenſionis, & quidem primo; ſi numerus ſecundus, [illegible] diuidatur per primum 50. & fiant [illegible] deinde quotiens hic multiplicet tertium 30. & fiant [illegible]. Sic etiam ſecundum examen poterit adhiberi diuidendo per primum 30. tertium numerum 50. vt fiant [illegible], deinde multiplicando hanc minutiam cum minutia media [illegible] dabit enim [illegible].

Cognoſcetur autem ex ipſâ quæſtione propoſitâ, cùm adhiberi oporteat regula proportionum inuerſa; nam ipſum lumen naturæ dictabit, quando requiretur quartus terminus tantò minor ſecundo, quantò tertius maior primo, quòd tertius ex ſui natura non poſſit dare maiorem terminum, ſed minorem. V. g. ſi ſacrum tritici, cum emitur quatuor aureis dat panem vnius ſolidi 10. vnciarum, quot erunt vnciæ, ſi triticum cariùs ematur? nempe 6 aureis: nam ipſa rei natura dictat, quòd quantò cariùs emitur frumentum, tantò panis debeat eſſe minoris ponderis, vt eodem pretio ſemper vendatur, & numero æquet pretium maius, cum panis ſemper vendi debeat vnico ſolido, ideoque hic cognoſcitur, quod regula inuertenda ſit, quia, quo maior eſt 6. tertius numerus, quàm 4. eo minus debeat eſſe pondus panis, qui expoſcitur, pondere dato 10. vnciarũ.

EXPENSIO IV.

De Regula Aurea compoſita.

Componitur regula Aurea, cum geminâ vice adhibetur eo, quòd quæſtio propoſita talis naturæ ſit, vt non niſi gemina vice adhibita regula proportionis ſolui queat.

THOR. I. PROPOS. XIV.

Quando proponuntur magis, quam tres termini; tunc gemina vice regula proportionum eſt adhibenda.

Svnt quinque operarij, qui murum 23. pedum conſtruunt 7. diebus: ſi ergo ſint 10. quot diebus conſtruent murum 39. pedum? Vides hic plures, quàm tres terminos eſſe propoſitos, nempe quinque operarios 23. pedes, dies 7. & rurſus 39. pedes, & decem operarios. Dico itaque, quod regula trium gemina vice adhibenda ſit: Nam exquirendum eſt; ſi 5. operarij, vt faciant 23. pedes 7. diebus operantur, quod inſument temporis in conficiendis 39. pedibus ijdem met operarij. Ita, vt operarij non veniant ſub quæſtione, cum ijdem ſemper ponantur, cognito deinde tempore V. g. 11. dierum, & [illegible] partium vnius diei. Poſtea exquiremus, ſi 5 operarij temporis 11 [illegible] conficiunt murum 39. pedum quanto tempore 10. conficient eundem met murum. Itaque murus hic non venit ſub quæſtione; ſed idem præſupponitur. Sicut multa alia licet poſſent reuocari ad quæſtionem, quòd tamen eadem præſupponantur in vtraque proportionalium ſerie, tam in primo, & ſecundo, quam in tertio, & quarto non reuocantur ad quæſtionem, vt altitudo muri, & longitudo, quæ, ſi proponeretur, quælibet ſemel adhibitâ regulâ eſſet exquirenda, vt infra.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Regulam trium rectam compoſitam data capaci quæſtione adhibere.

Sit propoſitum ſaxum, cuius altitudo ſit pedes 2. latitudo pedes 4. $\frac{1}{2}$, faciatque 9. pedes ſuperficiei; quæritur quot pedes faceret, ſi latitudo eſſet 6. altitudo eſſet 5. pedum. Itaque quæremus primo de altitudine, ſi ita placeat, deinde de latitudine. Itaque dicemus ita. Si ſaxum altum pedes 2. latitudine poſthabita, pedes 9. ſuperficiei exhibet. Quot daret ſi eſſet altum pedes 5? & multiplicato 9. per 5. generabitur 45. quę diuidemus per 2. & prodibit quotiens 22 $\frac{1}{2}$. Deinde quæremus de latitudine; dicemuſque ſi ſaxum pedum 4 $\frac{1}{2}$ dat longitudinis 22 $\frac{1}{2}$ quid ſi eſſet 6. & dabit 30. pedes.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Regulam auream inuerſam compoſitam dato capaci ſubiecto exercere.

Sit Rupes 13. pedibus lata, alta 22. ex quâ longitudinis deſumpſi pedes 32. ad conficiendũ murum. Debeo conficere alium murum eiuſdem magnitudinis, & habeo aliam Rupem altam 17. pedes, & latam 11. Quæritur, quid debeam de illa deſumere in longitudinem. Quæram igitur primo; ſi pedes 13. latit. dant 32. longitudinis, quid dabunt 11? Certum eſt, quòd dabunt magis, quàm 32. licet 11. ſit minus, quam 13. eò, quia ſit minor latitudo; vnde debeo deſumere magis ſecundùm longitudinem; Ideoque regulam inuertam.

Quid 11.? ſi 32. dant 13.

Et facto computo prodibit 37. [illegible]. Itaque, ſi 13. dant longitudinem 32; oportebit, quòd ex ſaxo minoris latitudinis deſumam longitudinem maiorem 37 [illegible]: Deinde Rurſus dicam, ſi 22. dant 37. [illegible], quid 17? & vtique debet eſſe maior numerus, qui quæritur, quam 37 [illegible] licet 17. ſit minor, quam 22; quia minor altitudo dat magis longitudinis. Vnde inuertam regulam ſic.

$$\text{Quid } 17.? \quad \text{ſi } 37\frac{9}{11} \text{ dant } 22.$$

Et inuenies numerum [illegible], ideſt 48. & [illegible]; itaque longitudo huius rupis debebit eſſe 48. & [illegible], & patet: Nam producunt 13. 22. & 32. molem æqualem nimirum 9152. vt producunt 17. 11. & 48 [illegible], qui etiam producunt 9152. & ita ex mole æquali ſaxea poſſum conficere murum æqualem.

PROB.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Regulam Auream compoſitam ex inuerſa, & recta dato capaci ſubiecto exercere.

SInt quinque operarij, qui murum conficiant diebus 25. pedum 32. Quæritur, quanto tempore conficient, ſi eſſent operarij 7. & murus pedum 40.

Primo itaque inquiratur, ſi diebus 25. Operarij 5. dant murum pedum 32. quid ſi eſſent 7. & ſic ſtabit quæſtio

Si 5. diebus 25. perficiunt opus, quid 7?

Sed quia, quò plures ſunt operarij eò minori tempore opus perficiunt, quare licet 7. ſit maior numerus, quam 5. numerus tamen, qui quæritur debet eſſe minor, quam 25. ideoque inuertenda eſt regula ſic.

Quid 7.? ſi 25. diebus 5. opus perficiunt.

Et adhibita regula eueniet tempus $17 \frac{6}{7}$ dierum.

Deinde inquirimus; ſi murus 32. pedum conficitur diebus $17 \frac{6}{7}$; quanto tempore perficietur ſi eſſet 40. pedum, & ſic erit exempium.

$$\text{Si 32. diebus } 17 \frac{6}{7}\text{, quid ſi 40. pedum?}$$

Et quia, quò opus eſt maius, eo maius eſt tempus inſumptum in opere, ideo, vt eſt maior 40. quam 32. ita erit maior numerus exoptatus, quam $17 \frac{6}{7}$: Vnde hæc operatio recta erit, & multiplicato vltimo numero, cum medio prodibit numerus [illegible], & ſi diuidatur per 32. numerus erit [illegible], ideſt facient opus diebus 22 [illegible]; ideſt [illegible]. Propterea perficient opus, ſi ſint 7. operarij, & opus 40. pedum, ſi 5. faciunt pedes 32. diebus 25.

EXPENSIOV.

De numeris æquè potentibus.

ANtequam ad inuentionem radicis quadratæ accedamus, & inuentioni medij proportionalis, opus eſt vtile licet non neceſſarium, de numeris æquè potentibus agere, qui fundantur in lib. 2. Euci. & 8. ſiquidem hæc maxime faciunt ad radicem quadratam intelligendam.

Præaſſ. Iam quidem de numeris æquè potentibus latè egimus lib. 8. Verum hic faciliùs, eaq; quæ demonſtrauit Euclides de lineis, numeris applicantur. Siquidem vnica oſtenſione omnes 10. propoſitiones lib. 2. numeris conuenire oſtenditur. Quia longitudo, ſeu linea commenſurabilis alteri eſt ſicuti numerus ad numerum ex prop. 3. decimi, & ex propoſ 4. quę à lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata ſunt, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, & conſequenter, quæ ex lineis longitudine commenſurabilibus fiunt rectangula, ſe habebunt vt planus numerus ad numerum planum. Hinc euenit; quòd, ſi latera cuiuſcumque, ſeu quadrati, ſeu rectanguli, cuiuſcumque propoſitionis ſecundi libri ponantur rationalia, quòd ſe habebunt inuicem. vt numerus ad numerum, & eorum quadrata, & rectangula, vt quadratus numerus ad quadratum numerum; & ideo etiam, vt planus numerus ad planum numerum: Vnde ſi linea ſit ad lineá, vt numerus ad numerum, etiam quadratus ad quadratú, vt numerus quadrat. ad numerú quadratum, & planum ad planum, vt planus numerus ad planum numerum; Sed propoſitiones ſecundi Euclidis de lineis commenſurabilibus intelligi poſſunt, cum ſectio permittatur vt libet de 1. vſq; ad 10 Ergo eadem ratio, quæ de lineis, & quadratis, rectangulisque erit de numeris, eorumque quadratis, & planis: ſed vt etiam pateat quomodo ijs propoſitionibus ſingulis, hæc vniuerſalis doctrina applicetur ſub exemplum veniat propoſ. 4. quæ, & noſtra intereſt.

THEOR. I. PROP. XVIII.

Si numerus diuiſus ſit, vtcumque quadratus totius eſt æqualis quadratis partium, & inſuper rectangulis earundem.

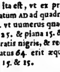
SInt partes AB 8. cuius 3. aſſumantur, & fiat quadratum 9. & 5. & fiat quadratum 25. deinde partes ipſæ multiplicentur ſimul, & fiat planum 15. & geminetur, ſintque 15. & 15. duo plana. Dico, quod hæc duo plana 15. & 15. & duo quadrata 25. & 9. ſunt æqualia quadrato ex toto numero 8. nimirum quadrato 64.



Patet. Nam ita eſt, vt ex præaſſumpto oſtenſum eſt, quadratum AD ad quadrata nigra, & rectangula 1. & 2. vt numerus quadratus 64. ad duo quadrata 9. & 25. & plana 15. & 15. ſed illud AD eſt æquale quadratis nigris, & rectangulis 1. 2. ergo etiam quadratus 64. erit æqualis quadratis 9. & 25. & planis 15. & 15.

COROLLARIVM I.

HInc eſt modus reperiendi quadratum numerum, cum quo quilibet numerus quadratum quoque numerum conſtituat. Sit V. g. numerus 7. conſtituaturque hic vice gnomonis in quadrato ABCD, vt per quadrata parua nigra exprimitur.



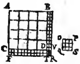
Ad hoc itaque, vt reperiatur numerus quadratus cum hoc gnomone, quadratum quoque efficiens, reperiendus erit quadratus albus EF. Vt igitur reperiatur ex numero 7. dematur 1, vt auferatur quadratum ſeminigrum angulare ad A, remanebuntque 6. qui numerus duo parallelogramma nigra

gra exprimir; ad hoc itaque, vt vnum habeatur, diuidatur bifariam, & erunt 3. multiplicetur ideo 3 in ſe ipſum, quia latus plani eſt æquale lateri quadrati albi, & obtinebis quadratum album 9. cum quo 7 faciet quoque quadratum numerũ 16.

Si verò velis plana ſeu parallelogramma nigra plures ſeries quadratorum continere, & numerus datus ſit capax, tunc ita efficies dato numero 351. ſubtrahes ab eo numerum quadratum, quem elegeris, cuius ſit capax, vt 169. cuius radix, & latus eſt 13. nempe latus O 7. quadrati parui ſeminigri; remanetque numerus 182. pro parallelogrammis nigris OC, & OX. Diuidatur bifariam, quia ſunt duo; & erit 91. diuidaturque per latus 13. nempe O 3. & prodibit latus OX, nempe quotus 7. Multiplicabitur itaq; in ſe quotus 7. & generabitur 49. qui numerus cum 351. conſtituet quadratũ 400 cuius radix eſt 20. Verum id non poteſt ſemper fieri præciſè, ſed proximè in numeris maximè, in quibus fractiones interueniunt.

COROLLARIVM II.

*Hinc etiam regula elicitur alia, quâ inueniatur numerus, qui cum numero quadrato quadratum quoque efficiat. Ob cuius declarationem ponamus quadratum ABCD non habere, niſi 16. partes, & ideo in ſe toto non continere, niſi quadrata parua 256. ſi vellem addere quadrata tot eiuſdem rationis, quæ componerent quadratum maius, deberem addere 16. pro vno quoque



latere, at inſuper in angulo 1 quadratum. Vnde eſſent addenda 33. quadrata. Quod ſi in geminam ſeriem eſſent addenda quater 16 quadrata nempe 64 & inſuper 4. quadrata in angulo. Vnde regula prodit. Sit datus numerus quilibet 9. & radix 16 quadrati 256. per illum 9. multiplicetur, & producet 144. & productus numerus bis aſſumatur, & ſit 288. ob duos planos numeros BV, & CY, deinde 9. in ſe multiplicetur, & ſit 81. ob quadratum ſeminigrum DR, qui cum 288. faciat ſummam 369. hic numerus additus quadrato 256. quadratum quoque efficit 625. cuius radix eſt 25. nimirum 16 & 9.

Et hac regula poteſt fieri tabula radicum, & quadratorum. Nam ſi quadrato 1 velimus addere quadratum numeri 2. accipiamus gemina vice radicem numeri 1, quæ eſt 1, & addamus 1, & fient 3. qui cum quadrato 1 facient 4. cuius latus eſt 2. Deinde accipiemus gemina vice 2. & addemus 1. vt fient 5. qui additus quadrato 4. facit 9 quadratum numeri 3. Deinde gemina vice acceptus 3. cum vnitate facit 7. qui additus quadrato 9 facit quadratum 16. numeri radicalis 4. & ſic conſequenter procedendo ſingulorum numerorum naturaliter procedentium, ſingula quadrata obtinebimus; quorum tabulam dat Clauius Geom. pract. l. 8. & Maginus tab. Tetragonica.

COROLLARIVM III.

Tandem eruitur, quomodo dato quadrato reperiamus numerum; qui ſubductus relinquat quoque quadratum; nam ſi à latere 16. quadrati 256. auferatur 3 & reliquus 13. per 3. multiplicetur, & fiant 39 & gemina vice accipiatur, & ſit 78 cui addatur quadratum 9. numeri 3. ſubducti à 16. fient 87. Numerus itaque 87. ſubductus à numero quadrato 256. relinquit quadratum 169. cuius radix 13.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Numero dato æquipotentes numeros alios, quos, quis iuſſerit, reperire.

Sit numerus aliquis 6. diuidendus in numeros 3. qui poſſint efficere quadrata, quæ ſimul æquent quadratum numeri 8. Reperiuntur tres numeri 5. 4. 3. ex propoſ. 13 lib 9. Elem quorum duo 4. & 3. æquent quadratum numeri 5. Deinde vtere regula aurea, & dic ſi 5. dant 4. quid dabit datus numerus V. g. 8.? & ſi 5. dant 3. quid 8? Inuenieſque $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$, qui erunt radices duorum quadratorum quadrato numeri 8. æqualium.

* Nam ita ponitur 5 ad 4 vt 8 ad $6\frac{2}{5}$. Ergo ex 18. l. 8. cum quadrati ſuorum laterum proportionem habeant duplicatam; ita erit quadratum ex 5 ad quadratum ex 4. vt quadratum ex 8. ad quadratum ex $6\frac{2}{5}$. Et ſic pariter quadratum ex 3. ad quadratum ex 5. vt quadratum ex $4\frac{4}{5}$ ad quadratum ex 8. Cum ergo ex 25. l 5. prima, & quinta quantitas ad ſecundam eandem obtineat rationem, quam tertia, & ſexta ad quartam. Erit quadratum ex 4 & 3 ad quadratum 5. vt quadratum $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$ ad 8 ſed quadrata ex 4 & 3. ſunt æqualia quadrato ex 5 Ergo etiam quadrata ex $6\frac{2}{5}$, & $4\frac{4}{5}$ æquabuntur quadrato 8.

Sed rurſus quæratur ſi 5. dat 4. & 3. quid $6\frac{2}{5}$? inuenienturque [illegible], & [illegible], qui æquabunt quadratum numeri $6\frac{2}{5}$. & conſequenter cum quadrato numeri $4\frac{4}{5}$ æquabunt quadratum numeri 8. ex prædicta ratione, & ſic efficies, ſi alios exoptabis plures, quam tres.

EXPENSIO VI.

De radice quadrata perquirenda, & medio proportionali, tertioque percrutando datis duobus.

Radicem quadratam exquirere eſt idem, ac datis duobus proportionalibus numeris medium proportionalem inuenire, quia ex prop. 19. lib. 7. Elem. quadratus numeri proportionalis eſt æqualis plano extremorum. Vnde ſine cognitione huius extractionis medius numerus proportionalis venari nequit.

Præaſſumptum. Aduerte id quod notauimus Tract. 8. de Arith. ſimpl ei locum ſignificare proportionem, quæ per decuplam multiplicationem numeri creſcit; Ita primus numerus à dextra ſignificat vnitates, ſecundus verſus ſiniſtram deci-

mas

mas, tertius decimas decimarum, & cæt.

Ideo quadratus numerorum, qui primò ſubtrahuntur incipiendo à ſiniſtra erit maior, quam ſecundus, & ſic de reliquis; quia ſignificat, vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas. Cum itaq; quadrati numeri latus non inueniatur totum ſimul obſtante numeri magnitudine; ſed per partes, & per diuerſa quadrata: ideo primus quadratus ſi vnus, vel duo ſignificat quadrata numeri ſimplicis, ſi ſint tres numeri erit centeſimarum, & numerus ille quadrati, qui ſubducitur, ſignificabit ſingulis vnitatibus decimas, & idem ſi ſint quatuor; quia non poſſunt facere quadratum numerum decimarum; niſi tres, vel 4. numeri; ſicut vnitatum quadratum facit vnus, vel duo numeri: Nam 10. per 10. ductus facit 100 qui tribus numeris exprimitur. At ſi ſint quinque, vel ſex quadrati radix, quæ extrahitur, erit centeſimarum: nam 100 per 100. ductus facit 10000 qui quinque numeris exprimitur, nec minor numerus poteſt eſſe centeſimarum quadratum; at ſi ſint ſeptem, radix quadrati, quæ extrahitur, erit millium; quia 1000. per 1000 ductus facit 1000000. quadratus numerus vnitatis millenariorum, qui, & poterunt eſſe dualitatis earundem, & trium, & quatuor, & ideo etiam octo numeris poterit exprimi, vt quadratum quatuor millium eſt 16000000. qui octo numeris exprimitur, & ſi ſit centeſimarum exprimetur, vt diximus ſex numeris, vt 160000. & ſi ſic decimarũ quatuor, vt 1600. & ſi ſit vnitatũ duobus 16. ſit ſic dicendũ de alijs numeris etiã maioribus.

Præaſſumptum 2. Aduertendum ſecundo ex propoſ. 28. lib. 8. inter numerum quadratum, & alium ſemper cadere aliquem proportionalẽ numerum planum, qui ſunt in quadrato duo complementa æqualia, vt ex propoſ. 35. lib. 1. Eucl. colligitur, & ex propoſ. 4. expenſ præced. qui cum altero quadrato complent quadratum maiorem. Cum ergo habetur quadratum aliquod maius, & ex eo ſubducat aliquis quadratum minus relinquit Gnomonem ſilicet quadratum aliud, & duo complementa: Sic ſi ex quadrato DCAB ſubducatur quadratum DEFH, relinquet gnomonem EBF circa ſe, qui continet quadratum HA, & duo rectangula CH, & HA, quæ ſunt media proportionalia inter quadratum DEFH, & quadratum HB. Quare tum hac, tum ratione ſupradicta non ab omnibus numeris latus quadrati ſubducẽdus eſt tum ex prima ratione, cum ſecundus, quartus, ſextus, octauus, & cæt. conſignificent cum primo, tertio, quinto, ſeptimo, & cæt. Tum quia ex præſenti ratione, rectangula quoque ſunt ſubducenda; vnde ſemper reliquendus eſt vnus medius pro illis ſubducendis.

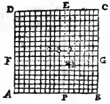
PROBL. I. PROPOS. XX.

Quadratam radicem ſubducere.

SIt ſubducenda radix quadrata à numero 289 punctum ſub dextro 9. collocabitur procedendo ad ſiniſtram, & intermiſſo vno, ideſt 8. ſub tertio 2. & ſic, ſi alij adſint, quia ab illis propriè radix quadrata ſubducitur; ab intermedijs verò media proportionalia, ſeu rectangula. Deinde videndum eſt, quinam quadratus numerus capiat in 1. ad ſiniſtram, qui eſt 2. & video; quòd in numero 2. maior quadratus nõ continetur, quàm 1. quare ſcribo ſeorſim 1. & ſub 2. rursùs ſcribo 1. in ſe multiplicatus, & factus quadratus 1. Et deinde ſubduco ab 2. & remanet 1. nempe ſubduxi quadratum decimarum, qui eſt 100. ob locum tertium, in quo eſt, & æquale quadratum DFHE, & habeo latus DE, qui eſt 1. numerus ſepoſitus, qui, quia in radice ponendus eſt ſecundo loco, vt conſtabit, erit numerus decimarum, & ſignificabit 10. ideſt latus DE, remanſitq; reſiduum 189.

. . 289	1
1	
189	

Sed quia rectangula etiam ipſa ſubducenda ſunt, propter quòd numerus intermedius 8. non eſt punctatus, quæ ſunt rectangula CH, & AH, quæ pro vno latere continent quantum continet radix quadrata, & pro alio radix illius quadrati ſubtrahendi adhuc incogniti, vt ex prop. 4. præced. colligitur: Siquidem latus 17. ſectus eſt vt cumque in 10. & 7. Vnde duo plani numeri, qui cum duobus quadratis ex 10. & 7. integrant quadratum ex toto numero 17. continebuntur ſub 10. & 7. inuicem multiplicatis, quare vnum latus erit 10. latus iam cognitum, & aliud 7. erit exquirendum.



Ad hoc, vt ergo illa ſubtraham, quia ſunt duo, habẽt conſequenter duo latera æqualia radici EH, & HF. Quare radix duplicanda eſt vt faciat 2. ſignificans 20. ob ſecundum locum quem occubabit radix 1. & ponendus ſeorſim ſub radice.

Circa quem numerum 2. conſidero; an capiat, & quod vicibus capiat in numero reſiduo 18. & video, quòd capit 9. vicibus, & eſſet hoc 9. aliud latus HG rectangulorũ: ſed quia quantum eſt hoc latus HG, tantùm debet eſſe latus aliud quadrati incogniti ſubtrahendi HA: ideo videndum eſt, an hic numerus 9. in ſe multiplicatus capiat in numero reſiduo, & punctato, à quo illud quadratum deducendum eſt, & quia à 189. ablatis 2. per 9. multiplicatis, nimirum 18. reſiduum eſt 9. in quo 9. in ſe multiplicatus nimirum 81. non capit ideo 9. non erit alterum latus planorum CH, & HA; quia non relinquit ſufficientem numerum, qui faciat quadratum HB.

Accipiam igitur 7. pro latere HG, qui duabus vicibus continetur in 18, & relinquit inſuper pro reſiduo 4. qui cum 9. faciunt 49. qui numerus eſt

. . 289	17
1	2
189	
14	
49	
49	

tantus, qui capiat 7. in ſe multiplicatum: Nam 7. ductus in 7. exhibet 49. Ideo iam reperi latus HG, vel EC planorum. Vnde ambo ſubducenda ſunt; ergo 2. in 7. ducti faciunt 14. qui ob locum

æqualis-

æquiualent numero 140 ſubtrahoque à 189. ita tamen, vt ſeruet ſuum locum & 4. ſub 8. ſitus ſit, & 1. ſub 1. neque vltimum numerum punctatum vllo modo tangat ſubtracto o remanent 3; 49. Et quia iam cognoui latus parui quadrati 10 eſſe 7. ideo multiplico 7. in ſe, & faciunt 49. qui ſubductus à 49 numero reſiduo nihil remanet: Vnde 7. ponendus eſt apud radicem ſepoſitam 1. & efficiet 17. Vides itaque, quod 1. priùs ſignificabat 10. eum modo cum numero 7. ſignificet 17 qui eſt radix, ſeu latus 17. partium maximi quadrati capientis quadratols 289.

Sed quia aliquando caſus occurrunt, qui ambiguum poſſent reddere operatorem: niſi de illis priùs monitus eſſet, ideo libet omnes caſus, qui occurrere poſſunt recenſere.

Primus eſt; ſi numerus primus ad ſiniſtram punctum non habeat; tunc, vt diximus in præſſ. 1. ille numerus eſt conſignificator, & tota radix à duplici numero ſubducenda eſt, vt ſi fuiſſent dati 9189. tunc numerus 9. nō eſſet punctatus; quare radix non eſſet ab illo extrahenda, quæ eſſet 3; ſed ab illo quidem vt cum numero 2. Ideſt à 92. quæ eſt 9 cuius quadratum eſt 81. à 92. ſubducendus, & reſiduum erit 1189 Duplicetur ergo, vt ſupra radix 9. & facit 18. Video itaque, quot vicibus capiat 18. in 118 & video quod capit quidem magis quã 6. ſed numerus 6. eſt ille, qui relinquit numerum capacem recipiendi quadratum ipſius 6. & ideo multiplico 6 per 18. & faciunt 108. quos ſubduco à 1189. ponendo 8. ſub 8. & reliqui numeri ſub reliquis verſùs ſiniſtram, & reſiduum eſt 109. Multiplico deinde 6. in ſe, & faciunt 36. quos ſubduco à 109 ponendo 6. ſub 9. & reſiduum eſt 73. fractus numerus à quo radix quadrata ſubduci nequit. Radix ergo quadrata huius numeri erit 96.

Caſus ſecundus eſt, ſi numerus, qui datur non ſit quadratus V g. ſi numerus datus eſſet 115. ita vt ablato primo quadrato 1. remaneat 15. à quo radix quadrata duplata pro planis proportionalibus medijs ſubduci nequit, vt hic 2 Nam 1. ſepoſitus duplatus non poteſt ſubtrahi ab 1 qui eſt apud 5. Vel etiam ſi capiat numeros planos proportionales medios, adhuc tam non totus reſiduus numerus a radice quadrata primo extracta & duplata adeo abſorbeatur vt non remaneat locus alteri quadrato, nec quidem vnitati, vt ſi daretur numerus 120. tunc ſubducto maximo quadrato ab 1 qui eſt 1 remanet 20. à cuius numero ſiniſtro radix quadrata 1. duplata ſubtrahi quidem poteſt; ſed nihil remanet tunc ſignum eſt, quòd non adſit tantus numerus quadratorum paruorum, qui integrent ſaltem ſeriem vnam ipſorum pro quolibet plano; nimirum 10. pro vno, & 10. pro alio, vt in numero 115. ſiquidem ablato maximo quadrato decimarum, nempe 100. quarum radix eſt 10. non remanent niſi 15. qui non poſſunt conficere duas ſeries æquales radici 10. pro HI, & 10. pro HI; vt conſtat ex Cor. 2. propoſ. 18. expenſ. præced. hæc verò ſeries gemina 10. & 10. ideſt 20. non adeſt, cum non ſint, niſi 15. Quod ſi adeſſet, at non ſupereſſet ſaltem vnitas pro quadrato paruo nigro, ad H, vt ex ſupracit. Coroll conſtat eſſe neceſſarium ad hoc, vt duo plana, & ſeries quadratorum paruorum cum quadrato magno extracto faciant quoque quadratum. Ideo, ſi hoc occurrat, apud radicem ponendus eſt o, vt dicat 10. & reſiduum 15. aut 20. erit numerus fractus.

Caſus tertius eſt. Si id occurrat non in fine, ſed in medio V. g. ſi eſſet numerus 12036. à quorũ quinto 1. radix quadrata ſubducta relinquit 20. à quo ſi 1. radix duplata ſubducatur nihil remanet ſub puncto niſi o, à quo, nec vnitas ſubduci poteſt: Signum eſt; quòd ab eo numero radix quadrata. quæ eſſet decimarum ſubduci nequit; cum nullum adſit quadratum centeſimarum, nempe nullum adeſt quadratum 100. vnitates, ſeu quadratula continens: Quare apud 1. ſepoſitam radicem, vt locum ſeruet ponendus eſt o, & poſthabito numero medio punctato, cuius loco ponitur o, apud radicem, iam procedendum eſt ad educendam radicem quadratam ab vltimo: Vnde conſidero numerum, qui apud eum eſt non pũctatum, 203. quot vicibus capiat radicem duplatam 10. quæ eſt 20. & video quod 9. vicibus, & adhuc remanet numerus talis, qui capiat 9. in ſe multiplicatum nempe 81. Ideo multiplico 20. per 9. & faciunt 180. quos ſubduco à 203. & ſunt reſidui 23. quibus addo 6. vt ſint 236. à quo in ſe multiplicatus ſubducendus nempe 81 & reſiduum eſt 155. qui fracti ſunt, nec ab eis radix quadrata amplius ſubduci poteſt. Itaque radix quadrata numeri dati 120 6. eſt 109 & remanet aliquid, quia numerus quadratus non eſt. Vnde maximi quadrati, qui eſt 11881. qui in ipſo capitur radix quadrata ſubducta eſt.

```
12036  | 109. Reſiduum 155.
11     | 20
 203   | 81
 180
 ---
 236
 ---
 155
```

Caſus quartus eſt, ſi remaneant reliquiæ maiores; quam par ſit, & ferat regula, quomodo dignoſcetur error. Hic itaque dignoſcitur ex Cor. 2. propoſ. 18. præced. Nam reperiatur talis numerus, qui cum numero, cuius radix quadrata extracta eſt, quadratum quoque efficiat; Cùm ergo ſciamus radicem quadratam eam duplicabimus, & ſit præcedentis quadrati duplicata radix 218. & vt reperiamus minimum numerum, qui hoc quadratum conſtituat accipiemus 1. per quem multiplicabimus 218. & dabit eundem numerum, cui addemus 1. in ſe multiplicatum, vt faciat 1. & fiet 219. & hic erit minimus numerus, qui quadrato 11881. poſſit addi ad hoc, vt eius radix vnitate tantùm aucta adhuc efficiat quadratum; ſi ergo reſiduum V. g 155. æquet hunc numerum; ſignum eſt, quòd radix quadrata non bene deducta ſit, & quòd ille, qui extractus eſt, licet ſit radix quadrata

ta

a alicuius numeri, non eſt tamen maximi quadrati, qui in numero illo capiat, cum in ſe potuiſſet capere, cuius radix vnitate eſſet maior.

PROBL. II. PROPOS. XXI.

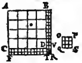
Radicem quadratam vtrum benè deducta ſit inueſtigare.

EXtracta radix quadrata in ſe multiplicanda eſt, & ſi adſint reliquiæ addendæ. Nam, ſi reſtituat numerum priorem additis reſiduis, benè eſt extracta radix quadrata alicuius quadrati, qui in numero dato capiat; Ad hoc autem, vt ſciamus, & ſecuri ſimus, illum eſſe maximum quadratum; examinandæ erunt reliquiæ; vtrum poſſint ſuperare, vel æquare numerum ex Caſu Tertio, qui cum numero à quo radix quadrata deducta eſt quadratum conſtituat; Nam poteſt eſſe, quod quadratum ſit benè deductum; ſed non maius quàm fieri poſſit, ita ſi extracta eſſet radix quadrata 16. à 289. multiplicatis in ſe 16. & additis fragmentis 33. reſtitueret priorem numerum 289. cum tamen radix quadrata non ſit 16. ſed 17.

PROBL. III. PROPOS. XXII.

A numeris non quadratis radicem quadratam proximiùs, quàm poſſit, educere.

QVoniam non omnis numerus quadratus eſt, ſi tamen quis vellit ab eo maximum quadratum, quem poſſit, proximiùs inueſtigare, ita faciendum eſt.



* Sit numerus 22. à quo radix quadrata ſubducta 4. qualis eſt quadrati ABCD reliquerit pro reſiduo quadrata 6. vt eſt OS. Volo cognoſcere, quid radici quadratæ addendum ſit propter hoc reſiduum. Multiplico radicem quadratam 4. pro vt mihi placet, V. g. per 3. (ſi per 10. vel 100. exactior erit, & facilior operatio) & faciet 12. & quia ſunt duo plana facient 24. ita vt ſint 12. pro vno, & 12. pro alio, quod nihil aliud eſt, quàm quod latus quadrati BD intelligatur diuiſum in partes 12. & ſingula quadratulorum latera in 3. & item CD in partes 12. quæ ſunt 24. Deinde me transfero ad reſiduum, nempe 6. & quia vnumquodque latus quadratorum paruorum, quę remanent, vt eſt OPQS, debet diuidi in tres partes, vt eſt diuiſum quodlibet latus quadratorum paruorum in quadrato AB, & fieri quadrata parua; ideo multiplico 3. in ſe, & reddit 9. & quia habeo 6. quadrata multiplico 6. per 9. & faciunt 54.

Radix verò eſt ſolum 24. nempe deberent addi ad hoc, vt peruenirent ad longitudinem duorum laterum CD, & BD quadrata parua 24. & inſuper vnum in angulo, quæ ſunt 25. ſed, quia numerus reſiduus eſt 54. multo maior, ideo forte potero ex iſtis quadratis adiungere duos ordines, nempe CD, & FR pro vno latere, & BD, & NV pro alio, ideo multiplico per 2. & faciunt 48. & rurſus multiplico 2. in ſe, & faciunt 4. quos addo numero 48. & faciunt 52. Addidi verò 4 ob quadratum paruum DR, cuius latus eſt 2. ob duas teſſeras quadratulorum 24. hinc, & inde additas: hos itaq; 52. ſubduco à 54 & reſiduum erit 2. de quibus non eſt curandum maximè, ſi ellegeris numerum maiorem, vt admonui. At quia latus multiplicaui per 3. & gemina vice duo latera radicis compleui; ideo efformo minutiam $\frac{2}{3}$. Latus ergo quadratum numeri 22. erit 4 $\frac{2}{3}$ ferè.

Obſerua verò. Quod hoc eſt idem, ac ſi quadratula parua omnia 22. multiplicarentur per 3. in ſe ducto, ideſt per 9. & fierent 198. & ab eis ita multiplicatis radix quadrata erueretur: Nam ſubducta radix quadrata eſt 14. à numero 198. Quare ſi rurſùs diuidatur 14. per 3. reſtituit 4 $\frac{2}{3}$, nempe partes 4. radicis prioris, & earum $\frac{2}{3}$. Vnde facilitatis gratia addes numero à quo radix quadrata ſubducenda eſt V. g. 22. binarium zifrarum, vt faciat 2200. ita enim multiplicabis numerum 22. per quadratum 100. numeri 10. & deinde ab eo extrahes radicem quadratam, vt ſupra docui; quæ erit 46. Diuides ergo 46. per 10. & erit 4 $\frac{6}{10}$ numeri 22. radix quadrata. Sic ſi addas duos binarios zifrarum numero 22 vt ſint 220000 extrahes exactiùs: nã hęc additio habet vim multiplicationis per 10000. qui eſt quadratum numeri 100. radix verò quadrata numeri 220000. eſt 469. quã diuides per 100. & dabit 4. & $\frac{69}{100}$. Minor vero, ſed maxima, quę eo numero contineri poſſit. Et ſic ſi cupias etiã exactiorem, binarium, vel duos, vel tres binarios addes, parique modo operaberis. Sufficiet autem detruncare tot numeros radici, quot binarij zifrarum additi ſunt; quoniam duæ zifræ vnicum numerum in radice patiunt, & ſub ſingulis figuris, ſeu numeris, interiectâ lineolâ addere zifram cum vnitate ad ſiniſtram; nam hęc detruncatio habet vim diuiſionis, vt patet. Si verò velis radicem maiorem vera, addes fractioni vnitatem V. g. fractioni 6. addita vnitas, vt ſint 7. dat 4 $\frac{7}{10}$ maiorem vera. Sic, & fractioni $\frac{69}{100}$ addita vnitas dat 4. & $\frac{70}{100}$ maiorem vera radice.

PROBL. IV. PROPOS. XXIII.

Datis duobus numeris tertium proportionalem inuenire.

EX propoſ. 20. ſeptimi habemus, quod duo numeri extremi proportionales generant ęqualem numerum inuicem multiplicati medio proportionali in ſe multiplicato, ideſt eius quadrato ſicut ex propoſ. 19. l. 6. habetur, quòd rectangulum duarum linearum proportionalium eſt æquale quadrato ex media; quòd cum ita ſit, ſi adſint duo numeri proportionales 24. 32. & tertius quęratur hic tertius quæſitus erit latus plani numeri æqualis quadrato numeri 32.. Ergo in ſe multiplicetur 32. & fiet quadratum 1024. quia ergo iſte numerus eſt etiam planus numerus, cuius latus eſt 24. & tertius proportionalis eſt aliud latus ſicut ex defin. 1. lib. 8. ſe mutuo multiplicantes planum generauerunt, ſic ſi diuidatur per alterum numerus alter reſtituetur. Ergo diuide 1024. per 24. & quotus erit 42 $\frac{2}{3}$ tertius proportionalis, eritq; 24. ad 32. vt 32. ad 42 $\frac{2}{3}$ nam 24. ad 32. & 32. ad 42. & $\frac{2}{3}$ eſt vt 3. ad 4.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire.

QVoniam ex propoſ.20. lib.7 ſi ſiot tres numeri proportionales, planus numerus genitus ab extremis eſt æqualis medij io ſe multiplicati quadrato; ideo, ſi duo nomeri dati ioſicē multiplicentor, & ab ipſorũ genito radix quadrata eruatur, hic oumetus erit medius proportionalis. Sint dati duo oumeri 20. & 45. Multiplicentur inuicem, & fiet 900. ſi à 900. extrahatur radix quadrata erit 30. qui eſt iotermedius proportionalis, & ita eſt 20. ad 30. vt 30. ad 45. quòd ſi oumerus genitos non ſit quadratus, neqoe enim omnibus numeris tertius, aut quartus proportionalis inoenitor ex prop 4 & 5.l 8 elem. Auferendus eſt ex dato numero plano maximus quadratus, qoi auferri poſſit, vt medius proportionalis viciniùs, quam poſſit, obtioeri queat.

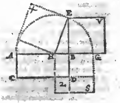
COROLLARIVM.

HInc poteris experiri illod, qnod Eucl. probat propoſ 5. lib.8, oon omnẽ numerũ habere, sot mediũ, aut tertiũ proportioualẽ, quià sũt numeri inter ſe primi, neqoe compoſiti ex alijs: Quare, ſi videas radicem quadratam prima vice non eſſe erutam, licet, vt docuimus poſſis à reliquis extrahere radicem quadratam, aut veræ radici ſemper magis appropinquare, non tameo vera edoci poteſt, cum illa non adſit ſaltem oumeris axatabilis: Vnde tandem quieſcendum, cùm ad eas minutias peruantum ſit, quæ inſenſibiles habeantur.

PROBL. VI. PROPOS. XXV.

Numerum datum maiorem, ita diuidere, vt partes ſint reſpectu alterius extrema proportionalia.

V. g. ſit 10. qui ita debeat diuidi, vt partes ſiot, reſpectu numeri 4. extrems proportionalia. Diuidatur in duas partes, & ſiot 5. multiplicetur in ſe fiunt 25. ſubducatur deinde 4. In ſe ductos, nempe 16. remaoent 9. cuius radix eſt 3. qui additos numero 5. facit 8. & alterum ſegmentum eſt 2. eſtque 2. ad 4. vt 4. ad 8.



PRobatur adhibito ſchemate propoſ. 16. ſecundi elem. HE quadratũ medietatis AG æquale eſt quadrato EB, & HB ex 12. propoſ. lib.2. elem. quare ablato quadrato HB à quadrato HE reſiduum erit quadratom ex HX, ſi ergo requiratur H à latus, & addator medietati AH lineę HG cooſtituet lineam AX, & reſiduũ medietatis erit XG. Sed ex prop.15.l.6, elem. DG, & XB, & AX ſunt proportionales. Ergo etiam numeri eas proportiones exprimentes, vt notauimus præaſſ. ad propoſ. 18. huius.

EXPENSIO VII.

De radice Cubica, duobuſq; numeris medijs proportionalibus.

EXtractio harum duarum radicum, nempe tùm cubicæ, tum quadratæ omnino neceſſaria eſt reliquis tractatibus; ſed hæc præcipoè pro ſolidis inueniendis, & permutandis, aut proportionaliter augendis: Cæteræ verò radices Zenſizenſica, Surdeſolida, & cæt. vix in vſum veniunt, & rarus omnino caſus dempta Algebra, & etiam in ipsâ, nec frequentior vſus; Propterea earum explicatio, & extractio huic libro proprium conuenit, in quo omnia quidem Mathematica, ſed relictis ſuperfluis, & minus vtilibus tradere intendimus.

Præaſſ. Cubica radix eſt numerus radicalis, qui gemina vice multiplicatus in ſe, & in genitum producit numerum cubum, V.g 2. ex defin. e l.8. Elem. erit radix cubica, quia multiplicatus in ſe facit 4. & iterum idem genitum multiplicans facit 8. & 8. erit cubus. Dato itaque numero cubo, vel numerum, qui cubum comprehendat, tradenda eſt regula, quâ ex ipſo hæc radix poſſit deduci.

Aliæ verò radices ſunt numerorum, qui nedum multiplicant ſe, & productum, ſed inſuper productum producti, vt Zenſizenſica. Vel producti etiam productum, vt Surdeſolida, & ſic in infinitum. Si ergo numeri V.g. 2. & 2. adhibeantur eos vnica vice inuicem multiplicãdo, numerus eſt quadratus; ſi etiam rurſus 2. adhibeatur, & multiplicet productum 4. erit productus 8. cubus: Si rurſus 2 adhibeatur ad productom 8. multiplicandũ erit productus 16 Zenſizenſus. Si 2. rurſus adhibeatur erit numerus productus 32 Surdeſolidus, & ſic procedendo in infinitum.

Præaſſ. 2. Quod adnotauimus in præ. ſſ.1. expoſ. præced. etiam hic aduertendum. Cubum numerorũ, à quo primo ſubdocitur à dextra ſignificare cubom vnitatum; ſecundum ſignificare cubom decimarum, tertium cubum centeſimarum; & ideo cubus vnitatum, ſilicet, cuius radix ſunt vnitates, exprimetur ad ſummùm tribus numeris. Sic numeri 9. radix erit numerus cubus 729. tribus numeris expreſſus; at, ſi ſit quatuor, iam incipit eſſe Cubos decimarum; nam numeri 10. cubus eſt 1000. quatuor numeris expreſſus, & quia cubus centeſimarum incipit à 7. numeris, quia 100. per 100. faciunt 10000. & iterum hic per 100. facit 1000000. Ideo Cubus decimarum exprimetur, ne dum quatuor numeris; ſed quinq; & ſex; cum vltimus cubus decimarum ſ. numeri 99. Sit 970299. ſex numeris expreſſus. Quare, cum ob numeri magnitudinem totus cubus extrahi ſimul nequeat, & debeat extrahi per partes; priùs extrahitur radix numeri cubi decimarum, V. g. deinde vnitatum ſi ſex, vel quinque vel quatuor numeri ſint: at, ſi ſint ſeptem vel octo, vel nouem figuræ; tunc ipſiùs extrahitur cubi centeſimarum radix, deinde decimarum; poſteà vnitatum, & ſic ſi adſint plures numeri.

Præaſſumpt. 3. Aduertendum quoque ex prop.

19. lib. 8. inter duos cubos, duos medios differentes cadere proportionales numeros, qui ſicut in radice quadrata erant duplandi. Sic in Cubica ſunt triplandi, vt potes faciliter intelligere ex fig. Cubi hic appoſita. Cubus enim QO, cuius baſes nigræ, ſi demàtur à cubo toto QT, remanet cubus OT, & remanent quoque duæ ſpecies ſolidorum; nempe ſolidum AB, quod habet ſuperficiem AO eandem ac cubus demptus OQ, & altitudinē SO, quam cubus reſiduus OT. Remanet quoque ſolidum aliud KO habens ſuperficiem cubi reſidui OT, & altitudinem SO cubi dempti OQ. Quę tamen ſolida ad cubum complendum triplicantur, nam primæ ſpeciei ſunt tria AB, & CI, & FD, ſicut & ſecundæ ſpeciei tria ſunt KO, & LH, & EI, quæ omnia extrahenda ſunt, vt habito latere, & radice FE, deinde reſiduū eius FH obtineatur, quæ eſt eadem ac TS, vel FS. Hinc eſt, quod tum propter hanc rationem, tum propter rationem prædictam non ab omni numero radix cubica extrahatur; ſed inter ſingulos duo medij prætermittendi ſint.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Radicem Cubicam extrahere.

S It datus numerus 15625. à quo radix cubica extrahi debeat. Super primam figuram ad dextram punctum collocabitur, & duabus intermiſſis ſuper quartam, & ſic ſemper duabus intermiſſis: quia ab iſtis punctatis propriè radix quadrata ſubducitur; ab alijs verò intermedijs ſolida proportionalia educuntur.

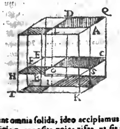
Videndum eſt itaque quinam maximus cubus capiat in primo numero punctato etiam incluſis præcedentibus ad partem dextram, nempe in 15. ad quod expediet habere cubos iam deductos, cùm ſuis radicibus ab vno vſque ad 10. vt hic vides.

Itaque maximus cubus, quà capiat in 15. eſt 8, cuius radix eſt 2. itaque ſeorſum radix 2. ſtatuatur, & ſubducatur 8. à 15. reſiduumque erit 7. & ſic ſubduxi Cubum 10 ex primo præaſſumpto: quia numerus punctatus, à quo ſubduxi, eſt quarto loco, qui eſt milliarium: habeoque radicē, & latus 2. qui in radice ponendus eſt ſecundo loco, quod ſignificet decimas, tunc cùm fuerit omnino extracta radix cubica.

Radix	Quad.	Cubus
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	10000

2
———
7625.

Accedamus modo ad alterius cubi extractionem à punctato numero 5. ſed quia priùs deducenda ſunt omnia ſolida, ideo accipiamus quadratum radicis 2. appoſita vnica zifra, vt ſit 20. quia,



vt dixi eſt numerus decimarum, eritque 400. quē triplico ob tria proportionalia ſolida maiora, & ſunt 1200. Iſte ergo numerus debet capere in reſiduo 7625. & inſuper remanere aliquid, tum ob ſolida minora triplicata extrahenda, tum ob cubum numerum inſuper deducendum. Et video, quòd quinquies capit, & inſuper remanet talis numerus, qui, vt puto, erit capax recipiendi ſolida prædicta minora, & cubum. Ideoque apud radicem pono 5. vt ſit altera radix, vt itaque faciam, & tramutem in ſolidos numeros, ſuperficies ſupra factas 1200 multiplico per 5. nempe per altitudinem inuentam, & faciunt 6000. & habeo tria ſolida maiora. Deinde, vt habeam quoque ſolida minora, & cubum. Multiplico radicem 5. in ſe, & generat planum numerum 25. habeoque baſim ſolidorum minorum, quam triplico; quia tria ſunt, & faciunt 75. quem numerum multiplico per latus 20. vt obtineam altitudinem ipſorum, & faciunt 1500. tandem, vt obtineam cubum, multiplico quadratum 25. per radicem 5. & facit 125. Quos omnes numeros ſimul colligo, nempe 6000. ſolida maiora 1500. ſolida minora, & 125. cubum; eritque numerus 7625. Quem ſubduco à numero reſiduo 7625. & nihil remanet. Radix ergo cubica extracta fuit, & reperta 25. Si verò fuiſſet numerus 15637. non fuiſſet cubus numerus; vnde ſuperfuiſſet aliquis numerus V. g. 12. à quo radix cubica vlteriùs extrahi non potuiſſet, vt ſupra de radice quadrata dixi, & illi caſus, quos ibi apoſui, ſunt & hic obſeruandi; ſed omnia triplicando.

	125
	———
	7625

Primus itaque caſus eſt; ſi ante primum numerum dextrum reperiantur duo numeri, vel vnus; tunc primi ſunt conſignificatores, & illi tres pro vno ſunt accipiendi; Secundus ſi numerus, qui datur nōn ſit cubus V. g. ſi datus fuiſſet numerus 1330. tunc extracto cubo 1. remanet 330. à quo non poſſumus extrahere duas ſpecies proportionalium triplicatas, & cubum minorem. Nam 1. in ſe facit 1 addito 0. facit planū numerum 100. quē triplico; & facit 300. qui numerus capit in 330. vnica vice; itaque radix altera eſſet 1. Si ergo talis verè eſt oportebit, vt capiat eius cubus, & ſolida tria in reſiduo 30. multiplicatus ergo 1. in ſe facit 1. ſuperficiem, quam triplico, & multiplico per 10. & facit 30. ſolidum. Deinde 1. in ſe, & facit 1. Vnio tandem ſimul 300. ſolida maiora 30. ſolida minora, & cubum 1. & faciunt 331. maior numerus; quam 330. Itaque nec quidem cubus vnius vnitatis in reſiduo 330. capere poteſt. Quare apud radicem pono ziffram, & erit 10. & 330. erit reſiduum; quod ſi fuiſſet hoc reſiduum 331. radix cubica fuiſſet 11. & nihil reſidui fuiſſet, quia numerus exhibitus fuiſſet cubus.

Tertius caſus eſt. Si id occurrat non in fine operationis, ſed in medio: tunc appoſita, vt in pręc. caſu apud radicem zifra, totum reſiduum ſequentibus numeris eſt copulandum, & videndum, an à reliquo hoc conſequentibuſque ad punctum radix cubica extrahi poſſit.

Quartus caſus eſt. Cum remanent reliquiæ, cognoſcere: an illæ ſint maiores, quam oporteat. Quod vt cognoſcatur radix cubica iam extracta V. g. 10. à numero 1333. multiplicetur in ſe, quę multiplicata triplicetur, vt ſit 300. triplicoque 1. & per radicem 10. multiplico, & facit 30. & addo 1. & facit 31. quem addo numero 300. & ſunt 331. Reſiduum verò numeri 1333. deducta radice Cu-

bicâ 10. eſt 333. itaque cum numerus ſit maior, quàm productus 331. ſignum eſt. quòd adhuc vnica vice Cubus vnius vnitatis capere poteſt, & quod radix cubica maxima ſit 11. huius numeri 1333. remanetque fractus numerus 2.

PROB. II. PROPOS. XXVII.

Radicem cubicam, vtrum benè deducta fuerit? inueſtigare.

HOc fit multiplicando radicem cubicam in ſe, & deinde in productum, & additis reſiduis, ſi conſentiat cum numero exhibito erit bene facta deductio; ſin minus aliquis error irrepſit; Hoc autem patet per ſe, nec indiget oſtenſione.

PROBL. III. PROPOS. XXVIII.

Dato numero non cubico, radicem cubicam proximiorem deducere.

ADdea propoſito numero V. g. 15862. aliquot ternarios zifrarum V. g. duos, vt fiat numerus 15862000,000. à quo radix cubica ſubducatur, & fit 2512. Quia ergo duo ternarij zifrarum additi ſunt, auferantur duæ figuræ ſiniſtræ 12. tanquam numerus fractus, & ſuppoſito 1. cum duabus zifris iuxta ternarios zifrarum additos, erit radix cubica numeri 15862. valde proxima 25. & $\frac{1}{10}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$. Ratio eſt eadem, quæ præcedent. Expenſ. prop. 22. eritque hic applicanda.

* Vel multiplicabis reſiduum 237. ſubductâ radice cubicâ per cubum 1000. numeri 10. & erit 237000. Deinde radicem cubicam 25. multiplicabis per 10. eritque 250. quam duces in ſe met, vt habeas numerum planum 62500. & ob tres proportionales interpoſitos per 3. multiplicabis, eritque 187500. videbis itaque quot vicibus capiat hic numerus 187500. in reſiduo 237000. & capit vnica vice. Ideoque hæc vnitas in ſe ducta multiplicabitur cum radice 250. & erit 250. quam triplicabis, vt faciat 750. ob tres proportionales minores, deinde duces vnitatem quoq; in ſe, & erit 1. Ergo iſti numeri 187500. & 750. & 1. ſimul addantur, eruntque 188251. quos ſubduces à reſiduo 237000. Et quia in hoc vnica vice capit, & radix Cubica fuit multiplicata per 10. ideo erit minutia $\frac{1}{10}$.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, quadratum primi ad quadratum ſecundi eſt veluti ſecundus ad quartum.

SInt quatuor numeri continuè proportionales 3. 6. 12. 24. & ſit quadratum primi 9. & ſecundi 36. Dico, quod ita eſt 9. ad 36. vt ſecundus 6. ad quartum 24.

* Probatur. Quoniam ponitur 3. ad 6. vt 6. ad 12. Ergo Rectangulum, & numerus planus ex primo 3. & tertio 12. æquabitur quadrato ex medio 6. Quare primus 3. multiplicando ſe faciet ſuum quadratum, & multiplicando tertium 12. faciet quadratum numeri 6. Ergo ex propoſ. 17. ſeptimi erit 3. ad 12. nempe primus ad tertium. Sic quadratum primi 9. ad quadratum 36. ſecundi. Sed vt primus ad tertium, ita eſt ſecundus ad quartum. Ergo vt ſecundus ad quartum, ſic erit quadratus primi ad quadratum ſecundi.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Si ſint quatuor numeri proportionales, erit ſolidus primi in ſe ducti, & in extremum æqualis Cubo ſecundi.

SInt quatuor numeri proportionales 2. 6. 18. 54. Dico ſolidum genitum ex multiplicatione primi in ſe, & in quartum eſſe æqualem Cubo ſecundi.

* Probatur ex præced. ita eſt quadratus primi 4. ad quadratum ſecundi 36. vt ſecundus ad quartum. Ergo ex 19. ſeptimi Elem. Si multiplicetur primi quadratus cum vltimo, qui ſunt extremi proportionales generabit æqualem numerum, ac ſecundi multiplicati in ſuum quadratum, qui ſunt medij proportionales. Sed ſecundus multiplicans ſuum quadratum facit Cubum, & primus multiplicans ſe, & deinde quartum facit ſolidum. Ergo iſte cubus, iſteque ſolidus erunt æquales.

PROBL. IV. PROP. XXXI.

Inter duos numeros datos, duos medios proportionales adinuenire.

SInt dati duo numeri 54. & 2. inter quos duo medij proportionales ſint coniciendi. Multiplico primum 54 in ſe, & deinde in alium 2. generabiturque numerus ſolidus 5832. Ab hoc itaque numero extrahatur radix cubica, & erit 18. ſecundus proportionalis apud primum 54. ponendus. Accipiatur deinde numerus 2. tanquam primus, & ducatur in ſe, deinde in vltimum 54. & generabit numerum ſolidum 216. Cuius radix cubica eſt 6. apud 2. collocandus, & ſic erunt 54. 18. 6. 2. quatuor proportionales continui.

* Probatur. Nam cubus ſecundi proportionalis ex præced. æquatur plano numero ex primo in ſe, deinde in quartum ducto. Si ergo ab eo plano numero primo in ſe, deinde in quartum extrahatur radix cubica, illa erit ſecundus proportionalis poſt primum collocandus. Quamobrem, ſi accipiatur vltimus 2. tanquam primus inuerſo ordine dabit ſecundum, qui erit idem, ac tertius, ſerie, vt priùs acceptâ. Etenim tertius 6. eſt ſecundus reſpectu 2. vltimi, vt primus accepti, vt 18. eſt ſecundus reſpectu primi 54.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere atque cubicam.

Extrahatur radix Quadrata, ſeu Cubica, tum à numeratore, tum à denominatore, ſeu vera, ſeu propinqua: ſi quando non ſit nec numerator, nec denominator numerus, aut quadratus, aut cubicus, & erit factum, quod deſideratur; Nam illæ duæ radices numeratoria inquam, & denominatoris conſtituent minutiam radicem numeri propoſiti. Proponatur V. g. minutia $\frac{4}{9}$ à qua deducenda ſit radix quadrata. Radix numeratoria eſt 2. denominatoria 3. ergo $\frac{2}{3}$ erit radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$, ſic quoque $\frac{2}{3}$ erit radix cubica numeri $\frac{8}{27}$. Quod, ſi data minutia ſit fractio alterius minutiæ reducenda eſt ex dictis ad eam minutiam. Quod, ſi hæreat integris, & ab integro ſimul cum minutia radix quadrata, vel cubica educenda ſit; integer in minutiam reducetur, & ab ea minutia radix cubica, vel quadrata eruatur. Sit ſi ſit 5 $\frac{4}{9}$ primò 5 $\frac{4}{9}$ reducetur ad minutiam $\frac{49}{9}$, & extrahetur radix quadrata, tum à numeratore 49 quæ erit 7. tum à denominatore 9. quæ erit 3. itaque minutia $\frac{7}{3}$. erit radix quadrata minutiæ $\frac{49}{9}$, vel 5. & $\frac{4}{9}$.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

A fractionibus, nec cubicis, nec quadratis radicem proximiorem cubicam, vel quadratam excerpere.

Sit data minutia $\frac{5}{7}$, à qua oporteat radicem proximiorem excerpere. Poteſt id exequi præcedenti regula duas radices nempe denominatoris, & numeratoris excerpendo proximiores, & ex eis duabus radicibus numeratoria quidem pro numeratore, denominatoris autem pro denominatore vtendo ad ſtatuendam minutiam, quæ ſit radix minutiæ datæ. Sic numeratoria 5. radix quadrata eſt 2 $\frac{1}{4}$, & denominatoris 7. eſt 2 $\frac{6}{10}$ eſſetque minutia.

* Verum, vt ſcribantur ad modum minutiæ integri reducendi ſunt ad fractiones, & vt earum valor cognoſcatur per denominatorem numerator diuidendus, vt redigantur ad vnicam minutiam. Sic 2 $\frac{1}{4}$ erunt $\frac{9}{4}$, & 2 $\frac{6}{10}$ erunt $\frac{26}{10}$. Quia ergo ex propoſ. 4. huius 1. par. ita eſt minutia $\frac{22}{10}$ ad minutiam $\frac{26}{10}$, vt numerator ad numeratorem, adeo minutia $\frac{22}{26}$ erit ea, quæ quæritur relicto denominatore 10. qui non variat minutias. Vnde ita erunt minutiæ illæ, ac minutia $\frac{22}{26}$.

2
——
2 — 10
——
6
2 — 10
22
——
10
——
26
——
10

Verùm, & alio modo exactiori fieri poteſt. Multiplicetur denominator 7. per numeratorem, 5. & ſint 35. eiuſque huius 35. radix quadrata 5. & $\frac{9}{10}$, ſeu $\frac{59}{10}$. Si ergo aſſumatur numerator 5 & ſtatuatur pro numeratore huius radicis inuentæ $\frac{59}{10}$ eo modo, quo ſupra, redigendo ad eandem denominationem, in fractioneq; proiciendo, vt ſit $\frac{50}{59}$ erit relicto denominatore 10. minutia radix datæ minutiæ $\frac{50}{59}$. Sic etiam eueniet, ſi radix inuenta $\frac{59}{10}$ ſtatuatur pro numeratore, & denominator ſupponatur, & ſit $\frac{59}{70}$.

* Probatur, quod hæc minutia ſit eadem radix, ac illa, quæ eſſet educta, tum à numeratore, tum à denominatore propoſitæ minutiæ, & ideò quod & ipſa radix ſit.

Nam, quia multiplicauimus duos numeros 5. & 7. extremos, & fecimus 35. cuius radix quadrata eſt 5. & $\frac{9}{10}$ ex prop. 20. ſeptimi, erit eadẽ proportio 5 ad 5. & $\frac{9}{10}$ ac 5. & $\frac{9}{10}$ ad 7. (ſupponimus autẽ oſtenſionis gratia 5. $\frac{9}{10}$, eſſe radicem veram) Quare proportio 5. ad 7. eſt duplicata eius, quam habet 5. ad 5. $\frac{9}{10}$, vel 5. & $\frac{9}{10}$ ad 7. Sed etiam 5. ad 7. habet duplicatam proportionem radicis 5. ad radicem numeri 7. ex propoſ. 18. l. 8. Ergo eſt eadem proportio radicis numeri 5. ad radicem numeri 7 ac 5. numeratoris ad radicem numeri 35. vel radicis numeri 35 quam poſuimus eſſe 5 $\frac{9}{10}$ ad denominatorẽ 7. quare erit ex Cor. prop. 3. p. 1. huius, eadem minutia radix numeratoria, & radix denominatoria V. g. $\frac{50}{59}$ ſupra inuenta, ac numerator 5. cum radice numeri 35. nempe $\frac{50}{59}$, aut ipſa radix 59. numeri 35. cum denominatore 70 cum in omnibus eadem ſit proportio, quod earum omnium proportionum duplicata ſit proportio numeratoris 5. ad denominatorem 7.

Ad extrahendã verò radicẽ Cubicã. Numerator 5. quadretur, & ſit quadratus 25 ducaturque in quadratum 25. denominator 7 & fiat 175. adiectiſque ciffrarum ternariis, ab hoc numero extrahatur radix cubica. Nam ſi hæc ſtatuatur tanquam numerator denominatoris 7. erit cubica radix minutiæ propoſitæ.

Sic numeri 175. radix cubica proxima eſt 5. & $\frac{6}{10}$. Si ergo hac radice vtar pro denominatore, & numero 5. pro numeratore modo prædicto, & faciam minutiam $\frac{50}{56}$ hæc erit radix cubica proxima datæ minutiæ $\frac{5}{7}$.

Probatur. Nam ex prop. 27. huius, radix ſolidi 5. in ſe, deinde in 7. ducti, nempe numeri 175. eſt ſecundus proportionalis poſt 5. primum collocatus, & 7. quartus proportionalis. Quare numerus 5 ad numerum 7. habebit triplicatam proportionem eius, quam habet 5. ad radicem numeri 175 Sed ex 19. l. 8. etiam 5. habet ad 7. triplicatam proportionem radicis cubicæ 5 ad radicem cubicam numeri 7. Ergo radix cubica numeri 5. ſumpta, vt numerator ad radicem cubicam numeri 7. ſumptam, vt denominator habebit eandem proportionem, quam 5. ad radicem cubicam numeri 175. Vnde ex propoſ. 3. huius 1. part. Coroll. erit eadem minutia, ſi ſumatur 5. vt numerator & radix cubica numeri 175. pro denominatore accipiatur, ac radix cubica numeri 5. vt numerator ſumpta, & radix cubica numeri 7. vt denominator, quæ conſtituit cubicam radicem minutiæ $\frac{5}{7}$.

Poteſt etiam ducere numeratorem in quadratum denominatoris, & radix cubica erit numerator, cuius denominator erit ipſe, qui priùs erat, conſtitueſque minutiam $\frac{6}{7}$.

Ratio eſt eadem, quæ prædicta; ſolumque differt in hoc, quòd denominator, vt primus aſſumitur, vt radix extracta ſit ſecundus proportionalis immediatus, & numerator quartus. Ibi verò numerator, vt primus aſſumebatur, & radix extracta tanquam ſecundus proportionalis, & tandem denominator tanquam quartus.

TRA-

TRACTATVS XIIII.

IN PROPORTIONES NVMERICAS. PARS I.

De Proportione Geometrica continua.

QVoniam ipſa fundamenta proportionum, numeros inquam ſimili ratione ſe referentes in præcedenti Tractatu inuenire docuimus, nunc ipſas proportiones, rationumque ſimilitudines opus eſt ſpeculari. Tres verò ſpecies proportionis ſunt; nempe Geometrica, Arithmetica, Muſica, de quarum naturâ agere opus eſt. Vt de in tres partes iſte Tractatus abibit, in quarum ſingulis, ſingulas ſpecies exponemus.

EXPENSIO I.

De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.

PRæcipua eſt, & quam in primis definit. lib. 5. defin. 4. Euclides, & de qua intelligit in propoſitionibus quinti, & ſexti eſt proportio Geometrica, & de hac primò agendum eſt; cùm ſit omninò eius cognitio neceſſaria ad Logarithmos inueniendos, & ordinandos; ob quem ſcopum de ea, hic tandem pleniorem cognitionem exhibere fuit neceſſarium.

Proportio autem Geometrica in ſimilitudine continentiarum conſiſtit, quando quantitas continet, vel continetur ab alia ſimiliter, ac aliqua alia quantitas continet aliam tertiam V.g. 4. 8. 16. ſunt in proportione Geometrica: quia 8. continet 4. ſicut 16. continet ipſum 8 nempe gemina vice.

Datur duplex proportio Geometrica, *Continua*, & *Diſcreta*. Continua eſt illa, quæ eſt eadem inter tres, aut quatuor, aut plures numeros, ita ut quilibet ſit ſequens, & antecedens, terminus relationis, & fundamentum V g. 4 8. 16. proportionem continuam habent; quòd fundamentum 4. referatur ad 8 vt terminum, qui tanquam fundamentum refertur quoque ad 16. terminum ſuum. At non continua eſt illa, in quâ nullus numerus rationem habet fundamenti ſimul, & termini, vt eſt illa, quæ intercedit inter 2. ad 4. & 5. ad 10. & 6. ad 12. Nam quælibet licet eadem proportio dupla habet ſuum fundamentum 2. 5. & 6. terminumq; 4. 10. 12. diſtinctum: Cùm itaque multæ proprietates, tum de Geometrica proportione in genere, ſeu inter quantitates corporum, vt quinto, & ſexto libro, ſeu inter quantitates numerorum, vt ſeptimo, & octauo, & nono ab Euclide explicatæ ſint, remanet hic, vt ſolas proprietates Geometricæ proportionis continuæ explicemus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Non omnes numeri continuari in ſuis proportionibus poſſunt.

PRobatur. Quia ex propoſ. 4. lib. 8. & propoſ. 5. eiuſdem; nec numeri duo inter ſe primi, nec tres, aut plures proportionem dicentes continuam; ſi eorum extremi ſint inter ſe primi continuari in numeris integris poſſunt. Quomodo verò cognoſcendum ſit, an dati numeri poſſint continuari in ſuis proportionibus, ibi explicatum eſt propoſ. 7.

THEOR. II. PROPOS. II.

Numeri, qui ab vnitate continuè proportionales ſunt, primus in ſe multiplicatus producit tertium, & primus in tertium producit quartum.

PRobatur. Quoniam vnitas per ipſum primum primum metitur: nam vnitas. V. g. ter accepta facit 3. Vt itaque referatur 3. ad alium, vt 1. ad 3. ter debet accipi ipſe 3. & ita in ſe multiplicari, vt fiat 9. Ad hoc autem, vt 9. ſe habeat ad alium, vt 1. ad 3. debet ter rurſus accipi, vt fiant 27. & ſic proſequendo. Ergo primus numerus poſt vnitatem in ſe ducendus, vt fiat ſecundus. Secundus autem multiplicandus per primum, vt fiat tertius in numeris ab vnitate continuè proportionalibus.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum continui proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, & aſſumptum numerum cadunt, tot, & inter ipſos medij proportionales cadent.

SInt à numero 8. continuè proportionales ABC, pro prima ſerie, & DEF pro ſecunda, & primæ numero æquali. Dico; *quòd tot inter eos cadunt numeri*, V.g. B, & E, vel C, & F quot inter quemlibet ipſorum B, vel C, & num. 8. proportionales cadunt.

C	27.	36.	48.	64	F
B	18.	24.		32	E
A	12			16	D
		8			
		64			
P	144	Q		256	R
S	20736.	3996		66136	
		T		V	

Quod, vt probetur, quilibet ipſorum quadretur ducendo illum in ſe, & ex numero 8. fiat quadratus numerus Q, & quadratus numerus P ex numero A, & quadratus numero R. ex numero D; Cum ergo P, & Q ſint numeri quadrati cadat inter eos medius vnus proportionalis ex prop. 8. octaui Euc. Sed inter B, & 8. cadit vnus medius proportionalis nempe A 12. quare erit B ad 8. numerum, vt numerus P quadratus ad quadratum Q.

Idem dicas de quadrato R, qui inter ſe, & quadratum Q admittit medium proportionalem vnicum; ſicut E reſpectu numeri 8. Quare Q reſpiciet R quadratum, vt 8. numerus reſpicit numerum E. Ideo, cum ſit B ad 8. vt P ad Q, & 8. ad E, vt Q ad R erit ex æquo B ad E, vt P ad R. Sed cum P, & R. ſint quadrati vnus inter eos proportionalis cadit, ergo etiam inter B, & E; Quia ergo inter B, & 8. vel E, & 8. vnus medius proportionalis cadit, vel A, vel D, inter etiam ipſos B, & E vnus medius proportionalis cadet, ſ. 24. & prop. 8. l. 8. Idem dicas de C, & F, inter quos duo medij proportionales cadent 36. & 48. ſicut cadunt inter C, & 8. duo medij proportionales B, & A, vel ſicut cadunt inter F: & 8. numeri medij E, & D. Quia inter S, & V cubos cadent duo medij proportionales.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si ſint quotcumque numeri continuè proportionales eandem inuicem proportionem dicent, tres numeri in eâdem diſtantiâ aſſumpti relictis intermedijs.

SInt numeri continuè proportionales 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Dico, *quòd ſi aſſumantur hic tres numeri in eadem diſtantia*, V. g. 2. & 16. & 128. qui relictis duobus accipiuntur, *quod eadem proportio adhuc eſt 2. ad. 16. quæ eſt 16. ad 128.*

Probatur. Nam vt eſt 2. ad 4. ſuum ſequentem ita eſt 16. ad 32. ſuum ſequentem, & vt 4. ad 8. ita 32. ad 64. & tandem, vt 8. ad 16. ita 64. ad 128. Ergo ex *æquo*, ita eſt 2. ad 16. vt 16. ad 128.

THEOR. V. PROPOS. V.

Trium numerorum continuâ proportione ſe reſpicientium quadratum medij eſt æquale rectangulo extremorum.

PAtet ex propoſ. 20. ſeptimi. Nam numerus medius in ſe ductus, qui eſt quadratus ex defin. 18 ſeptimi facit numerum genitum æqualē numero extremorum, qui eſt rectangulum numericum, aut planum, vt ex defin. 1 lib. octaui. Hoc idem poſſet probari in quantitate continua ex propoſ. 17. ſexti.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si ſint quatuor numeri continuè proportionales planum factum ab extremis æquale eſt illi plano, quod ſit à medijs.

PAtet quoque hæc propoſ. ex 19. propoſ. ſept. vbi numerus ex multiplicatione extremorum probatur æquari numero ex multiplicatione mediorum; cum verò inuicem numeri multiplicantur in plana rediguntur, vt conſtat ex def. 1 octau. quod etiam eſt intelligendum de cubo facto ex medio, cui eſt æquale ſolidum numericum factum ex extremis multiplicatum per medium. Patet enim, quod cum plana ſint æqualia multiplicata per eundem numerum medium faciant idem ſolidum.

THEOR. VI. PROP. VII.

* *Quo maior eſt numerus, eò in ipſo minutiores proportiones reperiri queunt continuâ proportione ſibi inuicem reſpondentes.*

PRobatur eo, quia ibi plures poſſunt inueniri relationes, vbi plura ſunt fundamenta; talia autem ſunt in multitudine maiori. Sed poſſunt etiam inueniri minutiores. Nam ea eſt minor proportio, quæ numeri, ad quem comparatur minorem partem, vel partes continet: ſed numerus paruus acceptibilis à maiori numero continebit illius minorem partem, quam numeri minoris, V. g. 2. continebit pauciores partes numeri 1000. quam numeri 100. cum huius quinquageſimam partem amplectatur, illius verò quingenteſimam. Ergo in maiori numero minutiores proportiones reperiri queunt.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

* *Differentiæ ſunt in eadem proportione, ac ipſi proportionales in continuè proportionalibus.*

SIt proportio continua 50. 60. 72. Dico differentias 10. & 12. eſſe in eadem proportione, ac ipſi termini, & ſic eſſe 10. ad 12. vt 50. ad 60.

Pro-

* Probatur. Ita ponitur 50. ad 60. vt 60. ad 72. Ergo *diuidendo* ita erit 50. ad 10. vt 60. ad 12. Ergo *permutando*, ita erit 50. ad 60. vt 10. ad 12. quod erat oſtendendum.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Differentiæ coaceruatæ in continuis proportionalibus conſtituunt cum numero radicali maximum terminum.

SInt tres termini continuè proportionales 4. 6. 9. & differentiæ 2. & 3. Sitque quidam numerus Ouium æqualis numero 4. & differentiæ 2. & 3. iſti numero addantur. Dico fieri terminum æqualem termino 9. vltimo. Nam ſi addamus 2. ipſi 4. quâ differt 4. à 6. fiet Ouium æqualis numerus numero 6. & ſic ſucceſſiuè. Ergo cum omnes termini ſemper ſint æquales etiam vltima æquali additione differentiæ Ouium completus numerus, vltimo termino erit æqualis.

THEOR. X. PROPOS. X.

Datis duobus terminis proportionalibus diuiſo maiore per minorem Quotiens eſt denominator proportionis.

EXibeantur duo termini 4. & 12. & diuidatur 4. per 12. quotiens erit 3. Dico *hunc quotientem 3. eſſe denominatorem proportionis, quam habet 4. ad 12.* Nempe 4. reſpectu 12. eſſe $\frac{1}{3}$.

Probatur ex defin. 1. ſeptimi. Nam eam proportionem dicunt numeri, cum alterius fuerit eadem pars, vel partes, & cæt. Si ergo per diuiſionem exquiramus, quæ pars ſit numerus 4. numeri 12. habebimus eius proportionem, quare ex propoſ. 40. ſeptimi, pars numeri 12. quæ eſt 4. erit à quotiente denominata, nempe à 3. & dicetur tertia pars. Sic ſi velimus ſcire, quæ pars ſit numerus maior 12. numeri 4. quia per diuiſionem 4. per 12. habetur minutia $\frac{4}{12}$, aut $\frac{1}{3}$ habebimus proportionem, quam dicit 12. ad 4. nimirum triplam.

COROLLARIVM.

HInc verò eſt, quod ſecundus terminus contineat antecedentem ipſo antecedente dempto, quot vnitates ſunt in denominatore vna abiecta, & ſic quod 12. minus 3. ideſt 9. contineat 3. toties, quot vnitates ſunt in 4. ſed demptâ vnâ.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

* *Numerus maior in quacumque proportione multiplici continet reliquos omnes tot vicibus, quot ſunt in denominatore vnitates vna dempta, & inſuper numerum à quo denominatio incepit.*

SIt data continua multiplex denominata à 4. proportio, quæ ſit 3. 12. 48. Dico 48. continere reliquos minores tricies nempe vna vnitate minus, quam ſint vnitates in denominatore, qui eſt quaternarius, & inſuper numerum 3. à quo incipit ſeries.

Probatur. Nam progreſſ. 1. ex ſuppoſitione n. 12. continet quater 3. ergo 3. tricies multiplicatus, ideſt acceptus quater minus vna vice æquabit 12. ſi cum 3. coniungatur numero, à quo incepit proportio. Progreſſ. ſecundus ſic dicas de numero 12. qui tricies acceptus, nempe per denominatorem quaternarium vnitate mancum multiplicatus, ideſt 36. & iunctus cum ipſo 12. æquabit 48. Sed iam hoc ipſum 12. habemus, quo deficit numerus 36. ad adæquandum 48 ex primo progreſſ. ex 3. tricies multiplicato, additoque ei numero ipſo radicali 3. Ergo numerus 48. continebit reliquos tricies, nempe toties, quot vnitates ſunt in denominatore minus vno, & inſuper numerum radicalem, cùm 12. tricies acceptus cum 3. tricies accepto vna cum 3. radicali, nempe 12. æquet ipſum 48. Et idem dicas, etiam ſi ſint plures termini, quàm tres.

Sic pronuncies etiam ſi proportio ſit multiplex ſuperparticularis, ſeu ſuperpartiens: V. g. detur 9. 24. 64. cuius denominator eſt 2. & $\frac{2}{3}$. Si ſubtrahas 9. à 24. remanent 15. 51 $\frac{2}{3}$. Quare 9. acceptus iuxta denominatoris vnitates vnâ excluſâ, nimirum 1. & $\frac{2}{3}$, quæ faciant 15. addito ipſo numero 9. æquant 24. Ita 24. acceptus ſemel cum duobus tertijs, & 9. cum duobus tertijs addito numero 9. radicali æquant ipſum 64.

* Probatur aliter data proportione 3. 12. 48. ſi dematur 3. à 12. erit 3. ad 9. Ratio denominata à 4. ſed diminuto vnitate, ideſt à 3. Quia ergo eſt 3. ad 12. vt 12. ad 48. erit *diuidendo* 3. ad 9. vt 12. ad 36. Quare *permutando* erit 3. ad 12. vt 9. ad 36. & *Componendo* erit 3. ad 15. vt 9. ad 45. Quare etiam *permutando* erit 3. ad 9. vt 15. ſumma aliorum minorum ad 45. terminum maximum deducto primo. Sed 3. ad 9. habet rationem denominatam à 3. ideſt à denominatore 4. vnitate minuto. Ergo etiã 15. ſumma ad 45. terminum maximum mancum 3. primo termino eandem obtinet.

THEOR. XII. PROPOS. XII.

Summa reliquorum in proportionalibus continuis proportionis ſuperpartientis, & ſuperparticularis excluſo maximo diuiſa per denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum dat quotientem, qui vnitus cum numero radicali ipſum maximum proportionalem numerum facit.

* SIt proportio data ſuperparticularis 50. 60. 72. cuius denominator proportionis, quam habet differentia 10. ad radicalem terminum 50. ſit $\frac{1}{5}$. Dico, quòd ſumma reliquorum dempto maximo, quæ eſt 110. diuiſa per $\frac{1}{5}$ dat quotientem 22. qui voltus cum numero radicali 50. facit maiorem terminum 72.

Prob. ex 8. prop. h. ita eſt differētia ad differentiã 10. ad 12. vt terminus 50. ad terminum 60. Ideoq; ex Coroll. 2. prop. 19. lib. 5. ita erit 10. ad 10 & 12. ſimul, ideſt ſummam 22. differentiarum, quemadmodum 50. ad 110. ſummam terminorum. Verum ſi diuidatur ſumma 110. per denominatorem 5. & per eundem 5. terminus 50. erunt adhuc ex prop. 19. lib. 7. quotiens numeri 50. ad quotientẽ numeri 110. vt 50. ipſe terminus ad ſummam 110.

Cum

Cum ergo differentia ad ſummam differentiarū, & quotiens radicalis termini ad quotientem ſummæ terminorum obtineat eandem proportionem, quā termini radicalis ad ſummam terminorum, erit etiam eadem proportio primæ ipſius differentiæ ad ſummam differentiarum, quæ quotientis radicalis termini ad quotientem ſummæ terminorum ex 16. lib. 5. Elem. & ideo *permutando* differentia prima ad quotientem radicalis termini habebit eam proportionem, quam ſumma differentiarum ad quotientem ſummæ terminorum. Sed Quotiens radicalis termini eſt æqualis differentiæ. Siquidem diuiſor eſt $\frac{3}{1}$ denominator proportionis, quam differentia habet ad radicalem terminum ex propoſ. 10 huius. Ergo etiam ſumma differentiarum, & quotiens ſummæ terminorum erunt æquales.

Sed omnes differentiæ additæ primo termino conſtituunt vltimum terminum ex prop. 9. Ergo etiam Quotiens ſummæ terminorum diuiſore exiſtente denominatore proportionis, quam habet differentia ad primum terminum, additus primo termino dabit vltimum terminum, vnde quotiens 22. additus termino 50. conſtituit vltimum terminum 72. Sic dicas de proportione ſuperpartiente; Datis enim tribus terminis 25. 40 64. ſumma minorum 65. diuiſa per denominatorem $\frac{3}{5}$, quæ fit multiplicando per 3. diuidendo per 5. dabit numerum 39. qui vnitus numero radicali 5. procreabit ipſum maiorem 64. Et idem argumentum valebit, etiam ſi plures ſit termini, vt patet.

THEOR. XIII. PROP. XIII.

Secundus proportionalis detracto numero radicali, & primo dicit eandem proportionem ad numerum radicalem, quam numerus extremus detracto eodem primo ad ſummam reliquorum.

SIt data proportio continua 3. 12. 48. detrahaturque numerus radicalis, & minimus 3. à numero 12. & remaneat 9. ſicut, & ab extremo 48. & remaneat 45. ſumma verò reliquorum eſt 15. Dico, quòd ita 9. eſt ad 3. vt refertur proportione 45 ad 15. ſummam reliquorum. Denominator autem proportionis eſt 4.

* Probatur ex propoſ. 11. huius. Nam maximus numerus continet ſummam reliquorum tot vicibus, quot denominator dempta vna habet vnitates, & inſuper numerum primum, & radicalem. Ergo hoc numero primo, radicalique excluſo continebit tot vicibus, quot repoſcunt vnitates denominatoris vna excluſa; ſed & ſecundus terminus minutus primo continet primū tot vicibus, quot vnitates ſunt in denominatore vna vnitate minuto ex propoſ. 10. Coroll. Ergo tot vicibus continetur primus in ſecundo minutus primo V. g. 3. in 9. quot ſumma reliquorum in extremo eodem primo minuto, vt 15. in 45. quare eamdem proportionem dicent ex 1. definit. ſeptimi, & ita erit 9. ad 3. vt 45. ad 15. & ita dicas de reliquis etiam ſi plures termini ponantur.

Idem quoque in proportione ſuperpartiente, & ſuperparticulari valet. Nam, ſi dentur 8. 12. 18. 27. cuius denominator proportionis differentiæ primæ ad terminum radicalem eſt $\frac{4}{1}$. Erit ablato 8. ad 12. vt ſint 4. & à 27. vt ſint 19. eadem proportio 4. ſecundi termini dempto primo 8. ad primum terminum 8. quæ eſt extremi dempto primo 19. ad ſummam reliquorum 38.

Prob. ex 12. h. Nā quotiens ſummæ differentiarū cum primo termino conſtituit vltimum, ergo ablato primo remanebit quotiens ſummæ differentiarum, cuius diuiſor eſt denominator prædictus $\frac{1}{2}$. Cum ergo idem diuiſor diuidat primum terminum, & conſtituat primam differentiam, & ſummā terminorum, & conſtituat ſummā differētiarū, erit ſecūdus terminus ablato primo, ideſt differētia prima ad primū terminum, vt ſumma differentiarum, ideſt ex propoſ. 9. vltimus terminus ablato primo, ad ſummam terminorum. Quòd autem $\frac{1}{2}$ diuidat primum terminum, & generet primam differentiam, patet ex 10. huius; quia diuiſo primo termino per differentiam dat denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum. Ergo diuiſo ipſo termino primo per quotientē, & denominatorē differentiam dabit ex princip. 8. Tract. 8. Elem.

THEOR. XIV. PROP. XIV.

* *Denominatores proportionum in quolibet proportionali creſcunt ab vnitate.*

SIt ſeries proportionalium 4 12. 36. 108. & denominator proportionis 3. Dico, quod 3. in ſingulis proportionalibus reperitur creſcendo ab vnitate, nempe, quod ſemel eſt in 12. nouies eſt in 36. nonagies in 108.

* Probatur. Nam numerus radicalis 4. ter acceptus facit 12. ergo tot partes erunt in 12. quot vnitates erunt in 3. ergo 12. in ſuis partibus numerabit 3. ſemel, at 36. numerat etiam ter 12 ergo 12. ter ipſum 3. numerat, ſic 108. ter capit 36. at 36. ter capit 12. ergo ter nouies capit 3. Sic verò procedere eſt procedere continua proportione ab vnitate ex propoſ. 2. huius.

EXPENSIO II.

De ſummandis proportionalibus Geometricis continuis.

SVmma proportionalium continuè fit etiam, ſi intermedij ignorentur, V. g. datis 24 & 64. ſumma omnium, qui inter 24. & 64. intercipiuntur ſine intermedijs haberi poteſt; ideoque hic oportet huius artis ſpecimen exhibere.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Datis terminis continuè proportionalibus primo, ſecundo, & vltimo omnium ſummam inuenire.

3. 12. —— 768.

*SInt dati termini continuè proportionales 3. 12. 768. inter quos intercipiuntur 48. & 192. continuè proportionales, qui tamen ignoti præſupponuntur, cum eorum cognitio in acquirenda eorum ſummā non ſit neceſſaria. Detrahatur ter-

minus primus 3. à ſecundo 12. & reſiduum ſit 9. ſic idem 3. terminus primus detrahatur à 768. & reſiduum ſit 765. Hoc verò reſiduum multiplicandum eſt per primum terminum adhibita regula proportionum, & diuidendum productum 2295. per reſiduum ſecundi 9. Nam quotiens erit 255. ſumma omnium excepto maximo. Si ergo hanc ſummam maximo addas, erit omnium ſumma cognita 1023.

* Probatur. Quia ex propoſ. 13. huius, eſt eadem proportio primi termini ad ſecundum, cui ipſe primus demptus fuerit, quæ eſt ſummæ omnium vſque ad vltimum excluſiuè ad ipſum vltimum, & maximum, cui ſimiliter primus demptus ſit; quare plana, ex primo, & vltimo ex iſtis quatuor proportionalibus erunt æqualia plano ex medijs ex propoſ. 6. huius. Quare planum factum ex 3. minimo, & 765. maximo erit æquale plano ex 9. ſecundo, & ſumma omnium excepto vltimo; vnde ſi diuidatur per 9. latus cognitum, planum illud latus alterum 255. exeret, quod eſt omnium proportionalium ſumma excepto vltimo.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Dato termino maximo, & minimo, & denominatore proportionis ſummam omnium terminorum continuè proportionalium inuenire.

3. 9. 27. 81.

*SInt dati termini continuè proportionales 3. 9. 27. 81. & denominator 3. ex vltimo primus demendus nimirum 3. & erunt 78. qui diuidendus eſt per denominatorem proportionis, cui vnitas ablata fuerit, nempe 2. & erunt 39. qui coniuncti cum 81. efficient omnium ſummam, & hoc in proportione multiplici; & multiplici ſuperparticulari, vel ſuperpartiente.

Probatur ex prop 11. huius. Quia numerus maior continet minores omnes, quot ſunt vnitates in denominatore vna dempta vnitate ab ipſo denominatore. Ergo ſi diuidatur per illas vnitates minus vna prodibit ſumma omnium aliorum.

Sic dicas de non multiplici, nam datis.

8. 12. 18. 27.

Sublato primo ab vltimo remanent 19. qui per denominatorem proportionis 1. differentiæ ad primum terminum, qui eſt $\frac{1}{2}$ dabit 38. ſummam omnium, excepto primo.

* Prob. ex prop. 12. h. Nam ſumma omnium diuiſa per denominatorem proportionis prædictum dat quotientem differentiarum, qui cum primo ipſum facit vltimum. Ergo extracto primo, & reſiduo per denominatorem eundem multiplicato dabit ſummam omnium; quia illud reſiduum erit quotiens ex proportionis denominatore diuidente relictus. Vnde per multiplicationem ab eodem denominatore factam in priſtinam multitudinem reſtitutus ſummam omnium, dempto vltimo exhibebit, & coniunctus cum eo erit omnium ſumma.

EXPENSIO III.

De proportione Geometrica propaganda.

DVplici modo poteſt extendi in infinitum proportio Geometrica, vel diminuendo, vel augendo; ideoque de duplici hac extenſione erit agendum.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Datis duobus terminis, & proportionis denominatore extendere proportionem, ſeu augendo, ſeu diminuendo in infinitum.

MVltiplicetur terminus datus maior datis duobus terminis 2 & 6. per denominatorem proportionis, quam habet minor ad maiorem, qui eſt 3. & producetur terminus maior tertius 18. & ſi per eundem denominatorem multiplicetur 18. fient 54. & ſic in infinitum ſe augendo.

2. 6. 18. 54. 162. & cæt.

At ſi cupias eam extendere diminuendo diuide minorem terminum per denominatorem eundem, & habebis minorem terminum tertium $\frac{2}{3}$; & ſi iterum diuidas producentur $\frac{2}{9}$; & rurſus enaſcent $\frac{2}{27}$.

$\frac{2}{12}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{3}$ 2. 6.

Vel ſi dati ſint 54. & 162. quorū denominator proportionis 3. ſi diuidas per 3. numerum 54. acquires tertium terminum 18. & cæt.

Probatur. Nam illi numeri ſunt in proportione Geometrica; qui eaſdem partes habent, ex def. 2. l. 7. elem. Nempe ab eodem numero denominatas; cum ergo quilibet V. g. tertius, vel quartus terminus ſe augendo comprehendat tres partes minoris ob multiplicationem ſicut datus terminus minorem datum comprehendebat, patet eſſe in eadem proportione; & idem dicas de diminutione. Nam terminus tertius ob diuiſionem erit tertia pars ſecundi dati, ſicut ipſe ſecundus eſt tertia pars primi.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Proportionem extendere, vel in augmentum, vel in diminutionem nullo dato proportionis denominatore.

SI ſit proportio extendenda in augmentum due maiorem in ſe. Deinde diuide per minorem, & tertius terminus prodibit; quod ſi diminuendo ſit procedendum, ducendus erit minor terminus in ſe, & diuidendus per maiorem. Sic datis 12. & 18. ſi ducatur 18. in ſe fiet 324. qui diuiſus per 12. dabit tertium terminum maiorem 27. Sic ſi ducatur 12. terminus minor in ſe, erit 144. qui diuiſus per 18. dabit minorem tertium terminum 8.

Probatur ex propoſ. 5. huius. Nam rectangulum, ſeu planum ab extremis confectum eſt æquale

le quadrato medij; Vnde medio ducto in ſe habtbimus quxdratum tale; quod erit ęquale rectangulo extremorum; cùm verò vnum ex extremis habeamus, obtinemus latus huius rectaoguli; quare, ſi diuidatur per hoc latus, aliud latus prodibit, nempe aliud extremum; ſicut enim rectangula numerica fiunt ex multiplicatione laterum ex defin. 16. ſept. Elem. ita habetur quilibet per diuiſionem totius ab altero effectam.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

Aliquæ proportiones per ſolam additionem, vel ſubtractionem poſſunt extendi.

PRobatur. Nam talis eſt proportio dupla vt 4. 8. 16. 32. ſubductus enim terminus minor à maiore dat proportionem decreſcentem, at additus terminus minor ipſi minori dat proportionem creſcentem.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Datâ ſucceſſiuâ proportione ſubducendo alias proportiones ſucceſſiuas reperire.

DAta proportione aliqua, ſubducatur minor à maiore, & ordine eodem differentiæ notentur, Nā illæ in eadē proportione erūt V.g. dentur proportionales 27. 81. 243. 729. & 2187. creſcentes in tripla proportione; Si demantur continuè minor à maiore erunt differentiæ 54. 162. 486. & 1458. ſimiliter in tripla proportione, & ſi rurſus horum proportionalium ſumantur differentiæ, erunt eodem modo proportionales; vt 108. 324. 972.

Probatur. Nam ex 23. propoſ. ſeptimi. Ita dicunt proportionem numeri proportionales, vt eorum partes aliquotæ, quæ ſunt in eadem proportione: Quando verò aufertur terminus minor à maiore aufertur pars aliquota, vtpote quod ſit maioris pars aliqua, quam numerat denominator; vt 3. eſt pars aliquota numeri 9. & 9. numeri 27. Ergo reliquæ partes aliquotæ, quæ ſuperant, dicent eandem proportionem. Probatur etiam ex propoſ. huius 8.

PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Data ſerie proportionali alias ſeries diuidendo reperire.

ASſume quemlibet numerum diuiſorem V.g. 4 & datam ſeriem partire 27. 81. 243. 729. habebiſque 6 $\frac{3}{4}$, 20 $\frac{1}{4}$, 60 $\frac{3}{4}$, 182 $\frac{1}{4}$, & rurſus hos diuidas, habebis alios proportionales in eadem proportione in infinitum.

Probatur ex eadem propoſ. 18. l. 5. & 7. vel 8. huius. In eadem enim proportione ſunt totum, & partes.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Si ſumma proportionis alicuius diuidatur ſucceſſiuè per terminos proportionis. Quotientes in eadem proportione inuerſo ordine inuenientur.

SIt ſumma 155. terminorum 5. continuè proportionalium 5. 10. 20. 40. 80. & per ipſos terminos diuidatur; habebimus hos terminos continuè proportionales 31. 15 $\frac{1}{2}$, 7 $\frac{3}{4}$, 3 $\frac{7}{8}$, 1 $\frac{15}{16}$.

* Probatur ex propoſ. 19. ſeptimi. Nam 155. eſt rectangulum, vel planum, cuius vnum latus eſt 5. & alterum latus 31. vel 10. & alterum latus 15 $\frac{1}{2}$, vel 20. & alterum latus 7 $\frac{3}{4}$, & cæt. Quare, cùm hæc latera faciant planum ſemper eundem erunt in eadem proportione 5. ad 10. vt 15 $\frac{1}{2}$ ad 31. quòd etiam oſtenditur ex propoſ. 17. ſexti, & ex dictis propoſ. 6.

COROLLARIVM I.

HInc eſt, quod ſi horum proportionalium poſtremò repertorum ſummam diuiſeris per eoſdem proportionales, efficies rurſùs alios in eadem proportione, & ſi horum ſummam rurſus per hos diuiſeris, alios inuenies in infinitum.

COROLLARIVM II.

HInc quoque ſatisfaciemus exquirenti duos proportionales, quorum ſumma æqualis ſit numero vnius in alterum procreato. Nam ſumptis proportionalibus duobus, & collectis in ſummā, ea dabit diuiſa per eoſdem, duos quotientes proportionales, quorum ſummæ æqualis erit numero ex multiplicatione vnius in alterum procreato.

Sic ſūptis numeris 4. & 8. quorum ſumma 12. diuiſa per 4. dabit 3. diuiſa per 8. dabit 1 $\frac{1}{2}$, quorum ſumma 4 $\frac{1}{2}$ eſt æqualis numero per mutuam multiplicationem effecto. Nam 1 $\frac{1}{2}$, & 3. inuicem multiplicati dant 4 $\frac{1}{2}$.

* Probatur. Cum enim 3 multiplicans 4. reſtituat 12. & multiplicans 1 $\frac{1}{2}$ faciat 4 $\frac{1}{2}$ erit eadem proportio 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. quam 4 $\frac{1}{2}$ ad 12.

Rurſus, cum ſit quotientium 1 $\frac{1}{2}$ ad 3. vt 4 ad 8. ex præced. vel ex 17. l. 9. erit cōponendo 1 $\frac{1}{2}$ ad 4 $\frac{1}{2}$, ſummam, vt 4. ad 12. quare permutando erit quoque 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. vt 4 $\frac{1}{2}$ ſumma ad 12. Cum ergo 4 $\frac{1}{2}$ quatenus ſumma, & 4 $\frac{1}{2}$, vt genitus ex mutua proportionalium multiplicatione 3. & 1 $\frac{1}{2}$ habeat eandem proportionē, quam 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. ad eundem numerum 12. erit idem numerus genitus ex proportionalibus, & collectus, vel ſummatus ab ipſis ex propoſ. 9. Elem. lib. 5.

EXPENSIO IV.

De proportionalibus in Geometrica proportione interſerendis.

INterpoſitio proportionalium dificilis eſt maximè ſi in prolixam ſeriem proportio debeat ex-

tendi, cum non inter quoſcunque numeros numeri proportionales cadant, ſed ſolum planos, vel ſolidos ſimiles. Vnde cum procedendo tandē plani diſſimiles euadant, neceſſe eſt tandem incidere in laborioſas fractiones, vt patebit experimentum capienti.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Inter duos numeros conſtituere medium Geometricè proportionalem.

SInt dati duo numeri 3. & 75. inter quos reperiendus ſit medius proportionalis. Multiplicentur ſimul, & ſit numerus multiplicationis 225. cuius radix quadrata 15. eſt medium proportionale, & 3. ad 15. erit in eadem proportione, ac 15. ad 75. Et ſi rurſus velimus ſcire 15. & 75. quem medium proportionalem habeant, multiplicabimus eodem modo numeros exhibitos, & ſubducemus radicem quadratam, quæ erit $33\frac{1}{2}$ proxima, ſed non vera, cum numerus ex datorum numerorum multiplicatione exortus non ſit quadratus: Ita ergo erit 15. ad $33\frac{1}{2}$, vt $33\frac{1}{2}$ ad 75.

Probatur ex propoſ. 5. huius. Quia enim quadratum medij eſt æquale plano extremorum; hinc eſt quòd ex mutua multiplicatione duorum numerorum, quos extremos volumus eſſe proueniat numerus æqualis quadrato medij: Vnde ex eo deducta radix quadrata erit latus numericum illius quadrati, & ideo dicet eandem proportionem hoc latus ſuis extremis, cùm ſit latus quadrati æqualis plano extremorum.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Inter duos datos numeros plures proportionales numeros interſerere.

ADatis duobus numeris 81. & 1296. extrahemus radices quadratas 9. & 36. & iterum ex iſtis radices quadratas 3. & 6. ſi fieri poſſit. Deinde multiplicandæ radices ipſæ, vt intermedij proportionales prodeant; ſic multiplicata radix quadrata 3. cum 9. dabit 27. & 6. cum 36. dabit 216. & habebimus duas ſeries numerorum ab vnitate continuè excreſcentium ex propoſ. 2. huius, deinde ſubſcribendæ ſingulis datis ſuæ radices, & proportionales ordinatim decreſcentes, & hinc multiplicandæ inuerſo ordine, maxima cum minima, maior cum minore, medioeris cum mediocri, & cæt. Nam numeri producti dabunt medius proportionales; Ita 6. multiplicatus cum 27. dabit ſecundum proportionalem 162. & 3. cum 216. tertium proportionalem 648. & 9. cum 36. numerum 324.

Probatur hæc operatio ex propoſ. 9. lib. 8. elem. Nam tot cadunt medij proportionales inter duos datos numeros, quot inter vtrumlibet ipſorum, & vnitatem; Cùm ergo inter vnitatem, & 81. inuenti ſint cadere 27. 9. & 3. & inter 1296. cadere 216. 36. 6. Ergo, & inter 81. & 1296. tot medij proportionales cadent nempe tres. Patet autem ex illa propoſitione; quod ij ipſi ſunt qui ex mutua, & alterna multiplicatione, maximi cum minimo, & cæt. fiunt.

81.	162.	324.	648.	1296.
27				216
9				36
3				6
1				1

Nam, vt ibi probatur, habent intermedij eam proportionem, quam 3. ad 6. Cum ergo 3. multiplicando 27. produxerit 81. ergo 6. multiplicando eundem 27. producet ſecundum proportionalem, qui ſe habeat ad primum, vt 3. ad 6. ex propoſ. 17. ſeptimi, cum idem numerus 27. multiplicet 3. & 6. Verum non omnis numerus talis eſt naturæ, vt æquali proportionalium numero diſtet ab vnitate, ac alter datus, nec talis, vt radix quadrata ab eo extrahi poſſit. Vnde vt plurimum laborioſa erit hæc operatio, & non præciſa; niſi forte numeri, inter quos medij proportionales deſiderantur ab vnitate continua proportione excreſcant.

ROBL. III. PROPOS. XXV.

Numerum datum in partes iuxta datam proportionem proportionales diſtribuere.

SIt datus numerus 992. qui diuidendus ſit in partes quinque habentes proportionem duplam diſponantur numeri quinque eiuſdem proportionis 2. 4. 8. 16. 32. quorum ſumma ſit 62. per hanc ſummam diuidatur numerus 992. & habebimus numerum 16. qui multiplicatus per terminos prædictos dabit partes quæſitas 32. 64. 128. 256. 512. quæ ſimul conflatæ reſtituent numerum 992.

* Probatur autem. Quia ſumma proportionalium continet omnes proportionales, ſimul: Quotiens verò à diuiſione numeri dati 992. proueniens, qui eſt 16 ſecat ipſum in tot partes, quot vnitates ſunt in ſumma proportionalium, quæ eſt 62. quia 16. multiplicatus per 62. facit 992. Ergo, ſi ſumma hęc 62. habet tot vnitates, quot vnitates reperiuntur in omnibus proportionalibus, etiam numerus datus 992. capiet tot vicibus 16. quot vnitates ſunt in omnibus proportionalibus. Et quia ita eſt 1. ad 62. vt 16. ad 992. etiam compoſitus 1. & 1. ideſt multiplicatus per 2. ad 62. vt eodem modo compoſitus 16. & 16. ad 992. ex prop. 24. lib. 7. elem. & ſic de alijs. Cùm ergo ſit quilibet proportionalis 2. 4. & cæt. ad 62. vt 32. & 64. & cæt. ad 992. Etiam ſimul omnes ex prop. 24. lib. 7. elem. proportionales 2. 4. & cæt. ad 62. erunt vt omnes ſimul 32. 64. & cæter. ad 992. ſed illi ſunt æquales ex Theſi numero 62. vtpote ſuæ ſummæ, ergo etiam, & iſti 32. 64. & cæt erunt æquales numero 992.

Quod verò 32 64. & cæt. ſint proportionales, vt 2. 4. & cæt. Prob. quia per eundem numerum 16. multiplicati fuere, vnde ex 17. lib. 7. ita erunt multiplicati 2. ad 4. vt geniti 32. ad 64.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Numerum extremum intermiſſis multis medijs in proportione Geometrica reperire.

SInt dati aliqui termini 3. 9. 27. 81. poſſum reperire alium 2187. qui diſtet ab 81. duobus interme-

intermedijs 243. & 729. vt ipſe vltimus 81. diſtat à 3. Id verò executioni mandatur multiplicando 81. in ſe, & diuidendo per primum 3. & diſpoſiti in ſeriem erunt.

3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Probatur. Quia, ita ex propoſ.4. huius, 3. eſt ad 81. vt 81. eſt in proportione ad alium ſequentẽ duobus intermiſſis pro vt 3. diſtat ab 81 Ergo ex propoſ. 5. huius quadratum ex medio 81. eſt æquale plano ex extremis. Quare diuiſum per latus 3. dabit alterum latus 2187. quod diſtat ab 81. duobus intermiſſis, & à 3. quinque intermiſſis. Vnde poteris reperire ab hoc diſtantẽ quinque terminis multiplicando 2187. in ſe, & diuidendo per 3 &c.

TRACTATVS XIV.

PARS SECVNDA.

De proportione Arithmetica.

COgnatio arcta intercedit, vt videbimus, inter Arithmeticam, & Geometricam proportionem, vt altera alteri ritè deſeruiat, & operationibus alterius ſedulè miniſtret; Ideo poſt tractationem proportionalitatis Geometricæ ſtatim Arithmeticæ diſcurſus ſubnectendus eſt.

EXPENSIO I.

De proprietatitibus Arithmeticæ proportionis.

SImiles ſunt effectiones harum duarum proportionum Arithmeticæ, & Geometricæ; niſi quòd huius multiplicatione, & diuiſione, vt plurimùm innoteſcunt; illius ex ſubtractione, & additione. Proportio verò Arithmetica conſiſtit in æqualitate exceſſuum, vt vna excedat aliam eodem exceſſu, quo hæc aliam excedit. V.g. numerus 8. excedit 6. eodem exceſſu, nempe dualitate, ſicut 6. excedit 4. quia ergo iſti tres numeri 4. 6. & 8. æquali exceſſu dualitatis ſe ſuperant, dicuntur Arithmeticè proportionales.

Præaſſ. 1. Sed in primis notandum, quod ſi ſint numeri quotcumque Arithmetico interuallo, vel etiam quocumque incerto creſcentes, vel decreſcentes, quilibet maior eſt æqualis minori, & omnibus interuallis numericis, quibus diſtant V.g.

Sint 7* 12* 17* 22* 27* 32* 37* & cæt.

Dico, quod 37. eſt æqualis numero 7. ſi tamen ei addatur interuallum 5. toties quot intercapedines ſunt inter 7. & 32. quæ ſtellulis notatæ ſunt, & ſunt ſex. Si ergo multiplicetur 5. per 6. & fiunt 30. & addatur numero 7. erunt 37. quod patet; quia tot vicibus à numero 7. excreuit 37. per additionem numeri interuallaris 5.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si ſint quatuor quantitates continua proportione Arithmetica excreſcentes, ſumma mediorum eſt æqualis ſummæ extremorum.

*DEntur quatuor numeri, qui ſe ſuperent æqualiter, nimirum ternario 8. 11. 14. 17. Dico quod additi 8. & 17. faciunt eundem numerum, quem additi ſimul faciunt 11. & 14. nimirum 25.

Probatur. Numerus 8. excreuit vſque ad numerum 14. per continuam additionem æqualis partis ideſt ternarij, qui ſemel additus eſt numero 8. vt fiant 11. gemina vice numero 8. iterum, vt fiant 14. iuxta interuallorũ multitudinem, quibus ab 8. diſtat 11. & 14. vt prænotaui in præaſſ. ergo ternarius additus ter ipſi 8. ſemel in 11. & iterum bis in 14. faciunt medios.

Sed etiam ter idem ternarius additus eſt primo 8. vt fieret extremum 17. ſemel quando excreuit ab 8. in 11. ſemel cum excreuit ab 11. in 14., & ſemel cum excreuit à 14. in 17. iuxta tria interualla, quibus diſtat à primo 8. Cum ergo ter ternarius additus primo numero 8. duplicato faciat duos medios, & ter additus eidem 8. faciat extremum, patet, quod duo medij ſimul erunt æquales primo, & extremo; cùm tam medij, quàm extremus cum primo, componantur ex primo bis accepto, & ex tribus ternarijs.

THEOR.

THEOR. II. PROP. II.

Si ſint tres quantitates continua proportione Arithmetica ſe reſpicientes duplum medij eſt æquale ſummæ extremorum.

SInt tres quantitates 7. 11. 15. quæ proportione Arithmetica, nempe æquali creſcant augmento, & medium 11. dupletur. Dico, *quod hoc duplum erit æquale ſummæ extremorum.*

* Probatur. Nam diximus propoſ. anteced. quòd terminus tertius componitur ex duplici additione æqualis partis, quæ hic eſt quaternarius bis additus numero primo 7. Numerus verò ſecundus Arithmeticus ex numero eodem 7. & ſimplici additione æqualis partis, nimirum quaternarij; Ergo ſi bis accipiatur hoc duplum conſtans gemino quaternario, & gemino numero radicali 7. erit æquale extremo, primo ei addito, qui etiam ſemel continet primum cum gemina parte equali, nempe quaternario; & ſic faciet ſummam, quæ bis continet primum, & bis partem equalem, quâ proportio augetur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ſit quotcunque numeri Arithmetico interuallo creſcentes, ſeu decreſcentes, primus multiplicatus per numerum interuallorum minutum vnitate iunctus cum vltimo erit æqualis ſecundo multiplicato per interuallorum numerum totum.

*SIt 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34 &c. numerus interuallorum ſit 8. quę ſtellulis notantur. Dico, quòd ſi 2. multiplicetur per numerum interuallorum vna vnitate abiectâ, nempe per 7. & iungatur extremo 34. quòd eſt æqualis ſecundo 6. multiplicato per interuallorum numerum 8.

* Progreſſ. 1. Si primus terminus 2. multiplicetur per 8. numerum interuallorum, & fiat 16. & ſi per eundem 8. multiplicetur numerus differentiæ 4. & fiant 32. iſti duo numeri collecti erunt æquales numero illi, qui ex multiplicatione ſecundi termini V. g. 6. cum numero interuallorum eodem 8. naſcitur, qui erit 48. Patet, quia 6. cõponitur ex 4 interualli numero, & 2. primo radicali; vnde, ſiue ſeorſim, & deinde iuncti, ſiue ſimul multiplicati eandem ſummam efficient 48.

Progr. 2. Differentię numero 4. multiplicato per 8. addito 2. radicali eſt ęqualis numerus vltimus 34 ex primo progreſſ. Ergo abiecto numero radicali à multiplicato numero differentiali, vt reſtet 32. remanet 34. numerus vltimus illo 32. maior in ipſo numero radicali: Quare, & ſi adderetur vtriſq; numerus ex interuallorũ 8. & numeri radicalis 2 multiplicatione cõſurgẽs, qui eſt 16. adhuc eſſet maior, ita auctus vltimus terminus eodẽ æqualiter aucto numero differentiali 32. in ipſo 2. radicali. Quamobrem, vt ſit æqualis demendus eſt à 16. numerus ipſe radicalis, & ita erit 14. nempe numerus 2. radicalis multiplicatus non per 8. ſed per numerum vna vnitate minorem, nempe per 7. Quamobrem numerus radicalis multiplicatus per numerum interuallorum minus vna vnitate, V. g. per 7. vt ſit 14 iunctus vltimo termino 34. erit ęqualis numero 16. ex multiplicatione interuallorum 8. & numeri radicalis 2. & numero differentiarũ 32. ſ. 48. Ergo etiã erit æqualis numero conſurgenti ex multiplicatione ſecundi termini 6. cum numero interuallorum; quem ex primo progreſſ. probauimus equalẽ numero differentiali 32. & 16. radicali per interuallorum numerũ multiplicato, & in vnam ſummam redacto, id eſt eidem 48.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Numeri proportione Arithmetica procedentes, dempto radicali, ita quilibet ad ſequentem eſt in proportione, vt numerus interualli vnius ad numerum interualli alterius.

SInt numeri 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34. 38. 42. & numerus interceptus inter quemlibet eorum ſit 4. Dico, *quòd ſi à numeris immediatis 34. & 38.* numerus radicalis expungatur, vt fiant 32. & 36. interuallorum numerus 8. qui mediat inter primum 2. & 34 dicit *eam proportionem Geometricam ad 32.* quam 9. numerus interuallorum medians inter primum 2. & ſequentem 38. dicit ad 38. numero radicali deducto, id eſt 36.

* Prob. Nam 4 octies continetur in 32. ex primo notabili huius, toties nempe quot ſunt interualla, ſicut eodẽ modo 4. nouies continetur in 36. ergo numerus octonarius interuallorum quater continetur in 32. ſicut numerus nouenarius interuallorum quater continetur in 36. Quare cum 8. & 9. per eundem 4. multiplicatus ſit: ita erit 8. ad 9. vt 32. ad 36. ex propoſ. 17. lib. 7. Elem.

COROLLARIVM

HInc eſt, quod planum ex medijs 8. & 36. ſit æquale plano extremorum 9. & 32.

THEOR. V. PROPOS. V.

Numeri proportione Arithmetica procedentes eandem dicunt proportionem Geometricam quilibet ad ſuum numerum interuallorum, ſi tamen ab eis numerus radicalis dematur.

PRobatur. Nam data eadem numerorum ſerie, quæ in præcedenti propoſitione; oſtenſum eſt; ita eſſe numeros interualli 8. ad numerum 9. interualli alterius, vt 32. Arithmeticus ad ſequentem numerum Arithmeticum 36. à quibus tamen Arithmeticis demptus fuit numerus radicalis 2. Quare, & *viciſſim* erit 32. ad 8. vt 36. ad 9. numerum interuallorum.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

* *Si aliquis terminus Arithmeticus maior multiplicetur per numerum interuallorum carentem vna vnitate, numerus productus addito ei termino radicali eſt æqualis numero, qui fit ex eodem numero interuallorum toto, & termino immediato minori.*

*SIt eadem diſpoſitio terminorum, quæ priùs 2. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30. 34. 38. 42. & numerus interuallorum inter 2. & 38. ſit 9. Dico, quòd ſi multiplicetur 38. per 9. minutum vna vnitate videlicet per 8. procreabitur terminus 304. cui ſi addatur terminus radicalis 2. efficietur æqualis numero 306. qui fit ex multiplicatione totius numeri interuallorum 9. cum minori 34. termino Arithmetico immediatè ſequente.

Probatur, ſi dematur à duobus terminis Arithmeticis 34. & 38. terminus radicalis 2. dicent proportionem ad inuicem, vt numerus interuallorũ, ex præced. propoſitione, & ita erit 8. ad 32. vt 9. ad 36. Quare, & plana eorum erunt æqualia, nempe productũ ex 32. & 9. ac productum ex 8. & 36. ex Coroll. præced. quæ ſunt 288. Si verò ſingulis addatur terminus radicalis, & fiat 34. & 38. & deinde multiplicentur per 9. numerus 34. vt fiat 306. & per 8. numerus 38. & fiat 304 addet 9. el plano ex 32. tot terminos radicales, quot addit 8. & inſuper vnum terminum radicalem, & faciet 306. Quare maior terminus 38. multiplicatus per numerum interuallorum minus vno, vt eſt 8. reſtituet numerum addito termino radicali 2. æqualem ei numero, qui fit ex multiplicatione termini immediate minoris 34. & toto numero interuallorum 9. vt eſt 306.

COROLLARIVM

ELlicitur hinc, quòd idem euenit etiam, ſi duo numeri dati Arithmetici non ſint immediati; ſed ſecundum diſtantiam, ita interualla ſumantur. V. g. ſi elligeres 30. & 38. interualla eſſent 7. inter 30. & primum radicalem, & inter 38. interualla eſſent 9. cum ergo ita ſe habeat 7. ad 28. vt 9. ad 36 dempto videlicet ab vtroque numero radicali; ſequitur, quòd planum ex medijs 9. & 28. ſit æquale plano ex extremis, nimirum 7. & 36. addito verò vtriq; numero radicali per interuallorum numerum multiplicato productus continebit inſuper, qui oritur à 9. & 28. nouem numeros radicales; qui verò à 7 & 36. ſeptem inſuper numeros radicales; Vnde erit ei æqualis, ſi bis addatur numerus radicalis.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Inter quoſcumque numeros Arithmeticè diſpoſitos eadem eſt ratio Geometrica interualli ad interuallum, quæ eſt differentiarum ad differentias.

SInt numeri 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. interualla inter 3. & 17. ſunt 7. differentia ſubducto 3. à 17. prodibit 14. ſic inter quoſcumque alios inter 7. & 13. differentia eſt 6. interualla 3. Dico itaque, quòd ita 7. eſt ad 3. vt 14. ad 6. nempe numeri interuallorum, & differentiarum numeri in eadem proportione ſunt.

* Probatur. Nam multiplicato numero differentiali ex præaſſ. 2 per interualla, dat differentias omnes, quibus diſtat vnus terminus ab alio. Sic 2. multiplicatus per 7. dat differentiarum numerum 14. & idem 2. multiplicatus per 3. dat differentiarum numerum 6. nempe differentias omnes, quibus 9. diſtat à 3. vel 17. diſtat à 3. Ergo ex 17. lib. 7. Elem. cum numerus interuallorum per eundem numerum 2. multiplicatus producat numerum differentiarum, habebunt eandem rationem geniti, & multiplicati. Vnde ita erit 3. ad 7. numeri interuallares multiplicati, vt 6. ad 14. differentiales geniti.

COROLLARIVM

HInc eſt, quod *permutando* ſit quoque numerus interuallaris ad differentias aggregatas nempe 3. ad 6. vt 7. ad 14.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Numeri Arithmeticè procedentes, ſi æqualiter remoti ab extremis addantur ſimul, illi omnes ſunt æquales.

SIt ſeries 7. 11. 15. 19. 23. 27. Dico 7. & 27. eſſe æquales additi ſimul numeris 11. & 23. ſicut etiam 15. & 19 additi ſimul, qui ſunt æqualiter remoti ab extremis.

* Probatur. Nam tantùm 7. & 27. faciunt 34. ad quem numerum ad hoc, vt perueniat numerus 23. deficit ei 4. nempe numerus interualli, quo termini diſtant, & primus terminus; at numerus 11. continet ambos, ergo additus 23. facit 34. ſic 19. vt perueniat ad 4 deficit ei numerus interualli gemini 4. & 4. & primus 7. numerus verò 15. vtpote duobus interuallis à primo diſtans 4. & 4 continet, & 7. Quare additus numero 15. conficiet 34. & ſic de alijs.

EXPENSIO II.

De proportionalibus Arithmeticis continuis in vnam ſummam colligendis.

FAciliùs trahuntur in opus Arithmetici proportionales, quàm Geometrici; cùm ſola additione, & ſubtractione tractentur.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Arithmeticos proportione continua procedentes; tum pares, tum impares in vnam ſummam colligere dato vltimo, & primo, & terminorum numero.

SInt dati quicumque termini impares proportione Arithmetica procedentes V. g. ſeptem 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Oporteatque omnium ſum-

Digitized by Google

ſummã noſcere. Vltimus terminus 22. iungatur cũ primo 4. & ſit 28. diuidatur deinde in geminas partes, quarũ vna ſit 14. numerus, qui per numerũ terminorum multiplicetur nempe per 7. dabit ſummam omnium 91.

Si vero numerus terminorum par fuerit 7. 11. 15. 19. 23. 27. Addatur ſimiliter vltimus terminus primo, vt fiant 34. & multiplicetur per numerum dimidium terminorum 3. vt fiant 102. & erit omnium ſumma.

* Probatur. Nam additi numeri æquè ab extremis remoti ſunt omnes æquales ex propoſ. 8. quare Arithmet. numerus iunctus primus extremo, & multiplicatus per numerũ terminorum æquabit numerum planum omnium numerorũ ſimul vnitorum, qui æqualiter remoti ſint ab extremis, & facti ſint omnes æquales V g 3. 5. 7. 9. 11. 13. facti ſint omnes æquales, nempe minimus 3. per adiectionem maximi 13. & maximus 13. per adiectionem minoris 3. Item ſequens minor 5. per adiectionẽ penultimi 9. Sicut, & 9. penultimus per adiectionem minoris 5. erunt ſex numeri æquales 16. qui multiplicati per 6. dabunt planum numerum 96. qui eſt ſumma omnium ſex conſtantium vnitatibus 16. quia ergo numerorum ita additorũ ſumma eſt numerus 16. per numerum terminorũ multiplicatus, & addita eſt medietas; dum ſinguli ſuis correſpondentibus additi ſunt, tot enim ſunt additi, quot erant. Ergo ſumma omnium erit dimidia huius plani numeri, nempe 48. ſed ſi dimidium terminorum multiplicetur cum vltimo 16. generat dimidium plani numeri, ideſt 48. Ergo vltimus terminus V. g. 13. additus primo 3. vt fiat 16. multiplicatus cum dimidio terminorum, vt fiat 48. erit omnium ſumma. Quod autem dimidium terminorum, cum vltimo, addito primo multiplicatũ, producat dimidium plani ex toto numero terminorum, & eadem ſumma vltimi, & primi geniti, patet ex 2. prop. lib. 9. quia duo plani tales ęquant planum totius.



Nec intereſt, ſi dimidium terminorum multiplicetur cum toto extremo, ſeu dimidium extremum multiplicetur cum omnibus terminis, nam ſemper conficiet dimidium planum, ex 2. propoſ. lib. 9. Elem. ita ſeu 3. multiplicetur cum 4. ſeu 2. multiplicetur cum 6. dimidium planum 12. conſtituent. Hoc autem dimidium planum erit ſumma omnium terminorum Arithmeticorum.

COROLLARIVM

IN progreſſionibus naturalibus ab 1. incipientibus quadratum maximi dempta radice, & dimidiatũ eſt ſumma omniũ ipſo dempto. Sic ſi ſint 1. 2. 3. 4. 5. quadratũ 25. numeri 5. dempta radice 5. vt faciant 20. dimidiatum nempe 10. eſt ſumma omniumquatuor. Quia addita vnitate numero 4. fit 5. qui multiplicatus per dimidium terminorum daret ſummam omnium, idem verò eſt multiplicare per dimidium, & per totum ſi genitum poſtea diuidas, & idem eſt multiplicare per 4. & per 5. ipſum 5. ſi à genito auferas ipſum 5. vt fiant 20.

EXPENSIO III.

De proportione Arithmetica propaganda.

FAcilis eſt propagatio huius proportionis, vnde breuiter eam explicabimus.

PROBL. I. PROPOS. X.

Data differentia proportionem Arithmeticam extendere.

HOc faciliter fit addendo illam ſucceſſiuè ſingulis terminis, ſic ſi 4. addatur 5. differentia fient 9. ſecundus terminus, & ſi eidem 9. addantur rurſus 5. fient 14. eruntque 4. 9. 14. tres termini Arithmetici.

Ratio quoque euidens; quia proportio Arithmetica oritur ab additione eiuſdem partis.

PROBL. II. PROP. XI.

Datis duobus terminis Arithmeticis tertium inuenire.

A Maiore duplicato detrahe minorem, eritq; reſiduum tertius terminus maior, vel è contrà à minore duplicato detrahe maiorem, & minor terminus exeret; ita datis duobus terminis 8. 15. ſi duplices maiorem, erunt 30. à quo detractus minor reſiduum exhibebit terminum maiorem 22. & è contra, ſi duplices 8. & detrahas 15. remanebit 1. terminus minor.

Probatur ex propoſ. 2. huius. Quia medius terminus duplicatus eſt ęqualis ſummę extremorum; vnde, ſi ab eo alterum ex extremis deducatur, alterum prodire neceſſe eſt.

PROBL. III. PBOPOS. XII.

Datis numero terminorum, maiori ſeu minori extremo, & differentia reperiemus alterum extremum.

SInt dati 10. Termini Arithmetici, quorum primus ſit 7. differentia 2. Dico, quòd reperiemus aliud extremum maximum, ſi ducamus differentiam 2. in terminorum numerum proximè minorem V. g. in 9. vt fiant 18. & huic genito primum terminum adijciamus, vt fiat 25. nam hic numerus 25. erit terminus maior.

Probatur. Differentiæ ſunt additæ, primo termino, tot, quot ſunt interualla. Nã interualla tot ſunt. quot termini vno dempto. Ergo ex prima præaſſ. vltimus terminus factus eſt, cum vltimus ſit ęqualis primo, & differentię per interualla multiplicatę.

Aduerte, quòd ſi progreſſio incipiat à ciffra, quod ipſa, vt numerus eſt auferenda ſicut, & in ſequenti Probl.

PROBL. IV. PROPOS. XIII.

Dato primo, & ſecundo termino, & numero interuallorum reperire vltimum; quem elegeris.

MVltiplicetur ſecundus per numerum interuallorum, & à genito dematur primus per interuallorum numerum minus vno multiplicatus.

Probatur. Quia ex propoſ. 3. iſti geniti ſunt æquales; nempe primus per interuallorum numerum minutum vnitate, cum vltimo, & ſecundus per numerum interuallorum multiplicatus. Quare ſi à genito ex ſecundo, & numero interuallorum detrahatur ille genitus; reſiduum erit vltimus terminus; ſic ibi 6. ſecundus multiplicatus per 8. interuallorum numerum dat 48. à quo demptus 14. nimirum 2. multiplicatus per 7. interuallorum numerum vnitate minorem dat 34. vltimum terminum.

PROBL. V. PROPOS. XIV.

Dato vltimo, & penultimo termino, & numero interuallorum reperire primum.

MVltiplicetur penultimus per numerum interuallorum, & ex ipſo genito deducatur vltimus multiplicatus per eundem interuallorum numerum; ſed minutum vna vnitate, & reſiduum erit primus terminus.

Probatur ex propoſ. 6. huius. Nam iſti duo ſunt æquales, vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno iunctus primo, & penultimus per interuallorũ numerũ multiplicatus. Vnde ſi ex hoc genito deducatur ille genitus prodibit primus: Sic ibidẽ penultimus 34. per interuallorũ numerũ 9. ductus dat 306 à quo dẽptus 304. ex 8. interuallorũ numero vnitate minori, & 38. vltimo proueniens dat 2. primum terminum.

Aduerte in is omnibus, quod ſi progreſſio Arithmetica incipiat à 0. vt 0. 4. 8. 12. 16. 20. 24. tunc ex hac operatione proueniet 0. oſtendens primũ terminũ zifrã eſſe, vt 6. numerus interuallorum dat 120. multiplicatus per penultimũ 20. ſed 24. vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno, nimirum per 5. dat 120. at 120. iſte deductus ab illo relinquit 0.

PROBL. VI. PROPOS. XV.

Datis duobus terminis extremis, & numero interuallorum reperire differentiam.

MInorem à maiori ſubducito, & reſiduum diuide per numerum interuallorum.

Probatur, quia tot ſunt ex prima Expen. huius preaſſ. differentiæ additæ primo, quot interualla vt fieret vltimus; Ergo vt fiat differentia ſubducendus eſt primus, & reliquum per interuallorum numerum diuidendum.

EXPENSIO IV.

De proportione Arithmetica interſerenda.

INterpoſitio terminorum in Arithmetica proportione non eſt grauis laboris, eamque iſtis præceptis in opus reducemus.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Inter duos terminos Arithmeticos medium proportionalem inuenire.

COniũgatur primus 5. cum altero 9. & ſumma 14. diuidatur per medium, & medietas 7. erit medium proportionale inter 5. & 9. eritque arithmeticè 5. ad 7. vt 7. ad 9. ſic ſi ſint 9. & 8. ſumma erit 17. & medietas 8. & $\frac{1}{2}$ erit medius terminus.

Probatur ex propoſ. 2 huius partis. Nam duplum medij eſt æquale ſummæ extremorum. Vnde ſumma extremorum diuiſa per medium dabit medium terminum Arithmeticum.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Inter duos terminos Arithmeticos plures medios inuenire.

HOc executioni mandatur repetiendo differentiam, quæ inter terminos illos debet mediare. Sit ergo 5. & 68. inter quos debeant inueniri 8. proportionales. Subducatur 5. à 68. & reſiduum erit 63. aſſumatur verò numerus terminorum minutus vnica vnitate, nempe 7. & diuidatur numerus reſiduus 63. per 7. & fiet differentia 9. Si ergo numero 5. addas differentiam 9. continuè ſeptem vicibus, efficies 8. terminos; quorum primus erit 5. vltimus 68. vt 5. 14. 23. 32. 41. 50. 59. 68.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datum numerum Arithmeticum in partes proportionales Arithmeticas diſtribuere.

DAtum numerum 152. diuidemus per dimidium numerũ terminorũ 4 & quotiens erit 38. hunc quotiẽtem in duas partes inæquales diuidemus, vt placet in 3. & 35. quos conſtituemus pro extremis, inter quos vt libet volumus eſſe 8. proportionales. Horum differentiam proportionalem inueniemus, vt propoſ. 17. huius part. quæ erit 5. cum iam habeamus electos terminos primum 3. & nouiſſimum 35. & numerum terminorum 8. & conſequenter interuallorum 7. cum tot ſint, quot termini minus vna vnitate: Si ergo differentiam repertam 5. addamus primo termino ſucceſſiue efficiemus terminos arithmeticè progredientes 3. 8. 13. 18. 23. 28. 33. 38. quorum ſumma erit 152.

Probatur ex 9. propoſ. huius partis. Nam vltimus terminus iunctus primo multiplicatus per dimidium terminorum facit ſummam omnium; Ergo diuiſa per dimidium terminorum ſumma

omnium, qualis debet eſſe numerus 152. dabit numerum, qui in ſe continebit maius, & minus extremum. Et hinc poſſumus diuidere in duas partes inæquales, vt placet, cum poſſimus eligere maius, & minus extremum, vt voluntas erit; Vnde dato maiori, minorique extremo, & numero terminorum habebimus interuallorum numerum quapropter rectè differentiam reperiemus,

Si verò numerus interuallorum ſit impar, nec commodè in duas partes poſſit diuidi, per ipſum totum poterimus partire numerum datum, & quotiens duplicatus erit numerus terminorum. qui rurſus in duas partes inæquales diuiſus dabit maius, & minus extremum, & cæt.

Sic 152 diuiſus per 8. dat quotientem 19. qui duplatus reſtituit 38.

Ratio eſt, quia maius, & minus extremum ex propoſ. 9. in vnam ſummam collectum, & bifariam diuiſum dat, ſi hæc eius medietas multiplicetur cum numero omnium terminorum, ſummam omnium. Vnde etiam ſumma omnium diuiſs per totum numerum terminorum dabit dimidium numerum, in quo maius, & minus extremum latet.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

* *Data terminorum Arithmeticorum ſerie, aliam ſimilem inuenire.*

ID facilliter operi conſignantur multiplicando per eundem numerum proportionales Arithmeticos datos. Sic ſi dantur 2. 5. 8. 11. reperiemus aliam ſeriem Arithmeticam eos per numerum 3. placitum multiplicando, & producti erunt 6. 15. 24 33. Arithmetici.

* Probatur. Quoniam 3 multiplicauit 2. & 8. eadem proportio erit genitorum 6. ad 15. quæ generantiũ 2. ad 5. & 15. ad 24. quæ 5. ad 8. Quare ex *æquo* erit 2. ad 8. vt 6. ad 24. Et *diuidendo* erit 2. ad reſiduum 6. ex 8. proportio, quæ eſt 6. ad 18. reſiduum ex 24. & *permutando* erit 2. ad 6 vt 6. reſiduum ad 18. Et pariter. Quia reſpondet 2. ad 5. vt 6. ad 15. erit *diuidendo*, 2. ad reſiduum 3. ex 5. vt 6. ad reſiduum 9. ex 15. Et *permutando* 2. ad 6. vt 3. reſiduum ad reſiduum 9. Cum ergo reſidua 6. ad 18. & 3. ad 9. dicant eandem proportionem, quæ eſt 2. ad 6. erit etiam inter eoſdem eadem proportio, & 6. erit ad 18. vt 3. ad 9. Quare *permutando* 6. erit ad 3. vt 18. ad 9. Numerus verò 6. eſt differentia, inter 2. & 8 & ideo dupla differẽtiæ 3. quæ eſt inter 2. & 5. terminos datos; & ideo etiam 18. differentia, quæ eſt inter 6. & 24. erit dupla differentiæ 9 quæ eſt inter 6. & 15. quare 6. 15. 24. erunt Arithmetici, vt ſunt 2. 5. 8.

TRACTATVS XIIII.

PARS TERTIA,

De Proportione Harmonica.

PRoportio Harmonica in eo exiſtit; quòd eadem proportio Geometrica ſit inter extrema, quæ eſt inter differentias, quibus numerus medius diſſidet ab extremis; Ita inter 2. 3. 6. eſt proportio harmonica; quia extrema 2. & 6. ita geometricè proportionalia ſunt, vt eſt 1. ad 3. quæ ſunt differentiæ, quibus diſſidet extremum 2. à medio 3. & extremum 6. ab eodem 3. Hæc autem proportio, licet dicatur Harmonica, eſt tamen potiùs Optica vt ſuo loco oſtendemus; pro nunc ipſius vniuerſalia tantùm ſimptomata adferemus.

EXPENSIO I.

De proportione Harmonica inuenienda, & aliquibus eius proprietatibus.

PRoportio Harmonica videtur quiddam inter Geometricam, & Arithmeticam. Nam in comparatione terminorum Geometrica eſt; quoad verò originem, ab Arithmeticâ ortus ſuos deſumit, vt modo videre licebit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis tribus numeris Arithmeticè proportionalibus, tres alios Harmonicè proportionales inuenire.

SInt dati 3. 7. 11. continuè Arithmeticè proportionales, & differentia ſit 4. multiplicentur extremi inuicem, & ſint 33. Multiplicetur deinde medius cum extremis, & erunt 21. & 77. Dico itaque 21. 33. 77. eſſe inuicem in Harmonica proportione.

* Probatur. Quia 3. extremum multiplicauit medium 7. & fecit 21. Multiplicauitque alliud extremum, & fecit 33. erit 7. ad 11. ex prop. 17. l. 7. vt 21. ad 33. Quare *diuidendo* erit 7. ad 4. differentiam, vt 21. ad 12. differentiam.

Rurſus. Quia 11. multiplicauit extremũ 3. & mediũ 7. & generauit 33. & 77. erit 3. ad 7. vt genitus 33. ad genitum 77. ex prop. 17. l. 7. elem. Quare *diuidendo* erit 3. ad 4. differentiam, vt 33. ad 44. differentiam. Quapropter etiam *componendo* erit 3. cum 4. nempe 7. ad 4. differentiam, vt 33. cum 44. ſ. 77. ad 44. differentiam. Cùm ergo ſit 7. ad 4. vt 21. terminus, ad 12. differentiam, & 7. ad 4. vt 77. terminus ad 44. differentiam ea propoſ. 13. quinti erit eadem proportio 21. ad 12. quæ eſt 77. ad 44. Proptereaque *permutando* 21. terminus primus ad 77. vltimum terminum erit proportio, quæ eſt differentię 12. ad differentiam 44. Quamobrem erunt tres termini 21. 33. 77. continuè harmonicè proportionales ex definit.

COROLLARIVM I.

HInc eſt. Quod ita ſit 3. ad 11. termini Arithmetici, vt 21. ad 77. terminos muſicos, & vt 12. ad 44 differentias. Patet. Medius 7. multiplicauit 3. & genuit 21. & 11. & genuit 77. Ergo ex propoſ. 17. ſeptimi eadem proportio eſt 3. ad 11. quæ eſt 21. ad 77. ſed vt eſt at 77. ita eſt 12. ad 44. quæ ſunt differentiæ, ergo ex *æquo*, vt 3. ad 11. ita eſt differentia 12. ad differentiam 44.

COROLLARIVM II.

HInc emanat illa proprietas, quòd differentia primorum multiplicata in tertium, ſeu extremum generet numerum æqualem differentiæ poſteriorum ductæ in primum, vt hic vides.

12 44
21 33 77
924

Ratio petitur ea propoſ. 19. lib. 7. Elem. Quoniam extrema dicunt eãdem proportionem, quam differentiæ, & ita eſt 21. ad 77. vt 12. ad 44. Ideoque multiplicati medij inuicem 77. & 12. & extremi inuicem 21. & 44. dabunt genitos æquales, & idem dicas ob eandem proportionem de extremis arithmeticis, & differentijs Harmonicis, ſeu extremis Harmonicis.

3 7 11 | 3 7 11
21 33 77 | 12 44
231 | 132

Nàm, quia, ita eſt 3. ad 11. vt 21. ad 77. ex Coroll. 1. ideo multiplicati inuicem 21. & 11. fient 3. & 77. dant 231. Et quia ita eſt 3. ad 11. vt differentiæ 12. ad 44. ex Coroll. 1. ideo 11. & 12. inuicem ducti ſicut, & 3. & 44. dant 132.

COROLLARIVM III.

COlligitur Arithmeticos tres eſſe in eadem proportione Geometrica, ac Harmonicis, ſed conuerſo ordine. Quia enim 3. V. g. generauit 21. & 33. primos Harmonicos. Multiplicando duos extremos Arithmeticos 7. & 11. ideo iſti poſtremi erunt in eadem proportione, ac Harmonici primi 21. & 33. Rurſus; quia 11. multiplicando duos primos Arithmeticos 3. & 7. produxit Harmonicos poſtremos 33. & 77. ideo in eadem proportione erũt iſti poſtremi Muſici cum Arithmeticis primis.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duobus terminis tertium in Harmonica proportione reperire, ſiue maiorem, ſiue minorem.

TErminorũ datorũ differentiã à minore ſubductâ termino, diuidẽdus eſt reſiduo genitum ex eorũ multiplitatione, nam quotiens cum datis duobus conſtituet Harmonicum maiorem. V. g. ſint dati 6. & 8. quorum differentia eſt 2. quæ deducta à minore termino 6. relinquit 4. Numerus verò genitus ex eorum multiplicatione terminorum eſt 48. qui diuiſus per 4. relinquit 12. tertium terminum; dico itaque quod 6. 8. 12. ſunt in proportione Harmonica.

* Probatur. Nam ſubducta differentia à minore termino dato relinquit reſiduum, qui cum duobus antecedentibus proportionem Arithmeticam habet; nempe 4. 6. 8. differentia enim, quę ſubducto 6. ab 8. remanet, eadem à termino minori 6. ſubducitur. Vnde multiplicati, vt ſuperius in 1. propoſ. producent tres terminos in proportione Harmonica. Nempe 6. multiplicando 4. & 8. extrema, dabit 24. & 48. & extrema 4. & 8. ſe multiplicando facient medium 32. Si ergo omnes diuidantur per 4. patet quotiẽtes in eadem proportione mãſuros eſſe. Sed iam quotiẽtes 24. & 32. diuiſorum per 4 reſiduũ ſũt ipſi multiplicati 6. & 8. Ergo reliquus diuiſus quoq; per 4. reſiduũ dabit tertium Harmonicum proportionalem 12. Siquidem diuiſio æquiualet multiplicationi, & ſicuti multiplicati numeri per eundem numerum ex propoſ. 17. ſeptimi faciunt genitos in eadem proportione, in qua ipſi multiplicati ſe reſpiciunt, ita etiam diuiſi generant quotientes in eadem proportione, in qua ipſi erant. Si verò cupias reperire vtroque dato minorem: Differentiam eorum maiori adde, & per hanc ſummam numerum ex eorum mutuã multiplicatione genitum diuide; quotiens enim erit terminus vtroque dato minor, vt ſi dentur 6. & 9; addo differentiam eorum 3. maiori 9. & ſumma ſit 12; diuido deinde numerum 54. ex eorum multiplicatione genitum per hanc ſummam 12. & prodit tertius terminus minor $4\frac{1}{2}$.

* Probatur eodem modo. Nam addita differentia eorundem, maiori V. g. ipſi 9. ex ipſis fiunt tres termini in proportione Arithmetica, vt 6. 9. 12. idem enim interuallum 3. mediat: quare fient ex ipſis Harmonici 54. 72. 108. ex prima propoſ. qui, ſi diuidãtur per maiorem 12. dabunt quotien-

tea eiuſdem Harmonicæ proportionis: ſed iam 6. & 9. ſunt quotientes duorum 72. & 108. ex diuiſione per 12. conſurgentes; ſi quidem & ipſi 72. & 108. ex multiplicatione 6. & 9. per 12. conſurgunt: ergo reliquus quotiens inuentus 4. $\frac{1}{2}$ ex diuiſione primi proportionalis 54. proueniens erit primus terminus ipſorum 6. & 9.

COROLLARIVM.

* Hinc eſt quod non ſemper duobus datis tertius Harmonicus proportionalis inueniri queat vtroque maior; licet poſſit reperiri vtroque minor in infinitum.

* Ratio eſt, quia quandoque occurrere poteſt, vt differentia datorum à minore ſubduci nequeat, eò quòd ſit maior, quàm ipſe minor numerus, vel ipſi æqualis, vt eſſent 3 & 9. nam 6. differentia non poteſt ſubduci à 3. & ſicuti ſi darentur 4 & 8. differentia ipſa 4. non poſſet ſubduci à 4. quia nihil remaneret. At poteſt diminui in infinitum, quòd differentia ſemper poſſit addi maiori termino, & ſic ſemper numerus ex eorum multiplicatione genitus per eum diuidi poſſit.

EXPENSIO II.

De proportione Harmonica continuanda.

DVplici modo Harmonica proportio continuatur. Prima eſt, cùm datis tribus terminis Harmonicis tertio, duo alij in eadem proportione Harmonica adiunguntur. Secunda quando tribus datis, duobus extremis tertius Harmonicè proportionalis adiungitur, quæ, ſeu prima, ſeu ſecunda non poteſt dici propriè continua. Non quidem prima, eo, quòd ſecundus, tertius, & quartus deinde non habeant proportionem Harmonicam, vt 2. 3. 6. 9. 18. Nam 2. 3. 6. & 6. 9. 18. eam, & eandem Muſicam proportionem poſſident; non autem 3. 6. 9. qui diſtant Arithmeticè. Secunda verò non eſt eadem priorum trium, quæ poſteriorum, nam 3. 4. 6. & 4. 6. 12. ſunt ſecundo modo continuè proportionales; ſed non eadem proportione 3. refertur ad 6. vt 4. ad 12.

PROBL. I. PROPOS. III.

Proportionem Harmonicam datis tribus terminis primo modo continuare.

DEnominator proportionis inter extrema ducitur in duos terminos medium, & extremũ, duoq; alij adiungẽtur tertio termino, qui in eadem proportione erunt cum eo, ac tres dati inuicem V.g. datis 2. 3. 6. ſi per 3. denominatorẽ proportionis, quã habet 2. ad 6. multiplicetur 3. mediũ & 6 extremum producentur 9. & 18. qui in eadem proportione erunt ad 6. quã tres dati 2. 3. & 6. ita vt ſint 2. 3. 6. 9. 18. continuè modo primo proportionales: & ſic ſi multiplicea hos vltimos per eundẽ ꝓportionis denominatorẽ, erũt numeri geniti 27. 54. alijs quoq; adiũgendi, ita vt ſint continuè proportionales harmonicè 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54.

* Præaſſ. Antequam deueniamus ad probationem obſerua priùs, quòd denominator ternarius rationis numeri 2. ad numerum 6. multiplicando 2. facit 6. Quare ſi adhuc 3. vt iuſſimus, multiplicet 6. & faciat 18, erit eadem proportio 2. ad 6. quæ 6. ad 18. Sed idem ternarius multiplicauit quoque, vt præcepimus, intermedium numerum 3. & fecit 9. quare ita erit 3. ad 9. vt 2. ad 6, & ideo, vt 6. ad 18. quæ eſt ob proportionem Muſicam eadem, ac differentiarum 1. ad 3

* Quo ſuppoſito in propoſ. probanda ſit primus progreſſ. Primus terminus 2. ad extremum 6. eſt vt medius terminus 3 ad inuentum 9. Ideo *permutando* erit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & *diuidendo* reſiduum 1. erit in proportione ad totum 3. vt reſiduum 3. ad totum 6. Quare *permutando* rurſus erit reſiduum 1. differentiaque datorum numerorum ad differentiam 3. extremi dati 6. ab inuento 9. vt 2. ad 6. primus, & vltimus datus.

* Progreſſ. 2. Eodem modo, ita erit 3. medius ad 9. inuentum, vt 6. extremus datus ad 18. inuentum. Ergo *permutando* erit 3. ad 6. vt 9. ad 18. & *diuidendo* differentia 3. ad terminum 6. vt differentia 9. ad terminum 18. & *permutando* erit differentia 3. ad differentiam 9 vt 6. ad 18. termini, quę eſt eadem, ac 2. ad 6. terminorum, vt progr. 1.

* Progreſſ. 3. Cum ergo ſit 1. differentiâ primi 2. à medio termino 3. ad differentiam 3. extremi termini 6. ab inuento 9. veluti 2. ad 6. ex primo progr. & ex ſecundo differentia 3. medij 3. ab extremo 6. ad differentiam 9. inuenti minoris 9. ab inuento maiore 18. ſit vt 2. ad 6. Erit itaque eadem proportio 1. differentia minor datorum ad 3. differentiam minorem extremi ab inuento minore quæ eſt differentia 3. maioris datorum ad 9. differentiam maiorem inuentorũ. Quare *permutando* erit minor 1. ad maiorem 3. datorum, vt minor 3. ad maiorem 9. inuentorum terminorum. Differentię verò 1. minoris ad 3. maiorem proportio eſt, vt 2. terminus primus datus ad vltimum datum 6. & ex præaſſ. vt 6. ad 18. quare erit differentia 3. ad differentiam 9. inuentorum, vt terminus vltimus 6. datus ad vltimum inuentum 18. Quare et 6. 9. 18. erunt in Muſica proportione, vt 2. 3. 6. quòd erat tandem probandum, cùm ſit 6. ad 18. vt differentia 3. termini 6. à 9. ad differentiam 9. termini 9. à termino vltimo 18.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quòd ſecundus, tertius, & quartus in iſtis harmonicis, & quartus, quintus, ſextus, ſint Arithmetici. Quod vt pateat.

* Aduerte idem eſſe multiplicare numerũ ꝑ numerum ſuarũ partiũ, & deinde per numerũ illas partes numerantẽ productum multiplicare, ac in ſe multiplicare; quia numeri plani facti ex toto numero, & eius partibus, ſi ſimul ſumantur, æquant ipſum quadratum numeri in ſe ducti ex propoſ. 2. lib. 9. Vnde, ſi habeamus numerum partium, & rectangulum ſub vna ex ijs partibus, & toto numero comprehenſum, & hunc planum per numerum, earum partium multiplicemus, habebimus omnia rectangula, quæ ipſum quadratum dati numeri exęquant. Sic ſi 2. tertia pars numeri 6. multiplicet 6. & faciat 12. deinde hunc numerum planum multiplicemus per numerum partium, qui eſt 3. ponemus tres numeros planos duodenarios ſimul, qui æquabunt quadratum numeri 6. Sint ergo Arithmetici 2. 4. 6. à quibus Muſici prodeunt 8. 12. 24 36. Quia 6. multiplicauit 2. & genuit 12. & rurſus 4. & genuit 24. & tandem ſe, & genuit 36. ex propoſ. 19. præc. partię

erunt

erunt 12. 24. 36. Arithmetici. Multiplicauit autem ſe numerus 6. vt diximus ſupra: nam multiplicauit priùs 2. & fecit numerum planum 12. deinde fuit multiplicatus per denominatorem 8. ad 24. ex propoſ. 3. quæ ex Coroll. 1. propoſ. 1. eſt idem, ac denominator proportionis 2. ad 6. & cõſequenter cum fuit multiplicatus numerus planus 12. per numerum continentiarum 2. in 6. fit quòd genitus æquet quadratum numeri 6. & virtualiter in ſe ipſum fuerit multiplicatus, quia per numerum partes numerantem fuit multiplicatus.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Proportionem Harmonicam ſecundo modo continuare.

SEcundo modo continuabitur proportio Harmonica. Datis enim tribus terminis Harmonicè proportionalibus 2. 3. 6. inueniemus duobus vltimo, & penultimo alium proportionalem iuxta ea, quæ docuimus propoſ. 2.

PROBL. III. PROPOS. V.

Etiam alio modo proportionem Harmonicam propagare.

* DIſponantur fracti ab vnitate incipientes, aut quoquo alio numero, & erunt in proportione Harmonica, ita erunt Harmonici.

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, & cæt. Sic [illegible], & cæt.

Patet primo. Si ad eandẽ denominationem redicantur [illegible], & [illegible], qui omnes proportionem conſequuntur harmonicam ſecundo modo continuatam.



Vt autem probetur monendum. Si eadem quãtitas AB diuidatur in tres partes, quarum vna AC, & rurſus in quatuor, quarum vna AD; certum eſt, quòd ablatis à tertijs partibus minores quartæ relinquent differentias æquales, vtpote, quòd æquales ab æqualibus demptæ ſiunt; & quia ſunt tres tertiæ partes, tot etiam relinquent differentias, quas, dico, tres differentias eſſe æquales vni quartæ parti. & oſtẽdo. Nam tres tertiæ partes æquãt AB, à quibus auferuntur tres quartæ, vt DC, & relinquunt tres differentias, ſed auferãtur tres quartæ partes à tota AB æquali tribus tertijs relinquet vnam quartam partem AD: Ergo 3. differentiæ æquant vnam quartam partem; quia ambo reſidua ſunt ablationis æqualium trium quartarum ab æqualibus tota AB, & eius tribus tertijs.

Ergo tres differentiæ æquant quartam partem, & addita vna, quatuor differentiæ æquabunt partem maiorem tertiam.

* Sint ergo $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ eiuſdem totius. Dico hos numeros muſicos eſſe: Nam differentis vnius tertij ab vnico quarto erit vnius quartæ partis $\frac{1}{3}$, & rurſus differentia, quæ eſt inter vnam quartam, & vnicam quintam partem totius, eſt vnica quinta pars eiuſdem totius, nempe vnius quartæ ex præpræaſſumpto. Ergo differentiæ erunt $\frac{1}{12}$, & $\frac{1}{20}$ ſui totius, ſicut fracti dati extremi ſunt $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{5}$ eiuſdem totius; cùm ergo ſint differentiæ eadem minutia, ac extremi fracti dati, erunt in eadem proportione; vnde $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}$ erunt Muſici ex pr. 3. Cor. Tract. 3.

COROLLARIVM

HInc eſt quoque, quod numerus factus ex differentia maiori Harmonica, & minori extremo, vel è contrà minori differentiâ in maius extremum ductâ facere numerum, qui continet tres harmonicos, tanquam ſuas partes; ideoque Harmonici ſunt fractiones, quina genitus eſt denominator, vt [illegible], & [illegible], quòd enim cõtineat duo extrema, patet quia fit ax eorũ multiplicatione; quod autem contineat medium 33. Prob.: Nam illius partes continentur in extremis, cùm ex mutua Arithmeticorum extremorum multiplicatione ſit genitus, quæ produxere etiam extrema Harmonica multiplicata per medium Arithmeticum, vt ex 1. propoſ. huius part. conſtat; imò, & ſi tres Arithmetici ſimul ducantur; numerus productus erit denominator, cuius numeratores erunt Harmonici: Nam Harmonici, cum generentur ex multiplicatione Arithmeticorum non poſſunt continere alias partes, quam quæ in ipſis ſunt, cum autem Arithmetici omnes ſimul ducuntur, patet, quòd genitus omnes partes, quas ipſi continent, obtineat: Vnde & continebit omnes partes Harmonicorum, ſic 231. qui fit ex ductione 3. in 7. & 7. in 11. Arithmeticos continent 21. vndecies 33. ſepties 77. tricies.

EXPENSIO III.

De proportione Harmonica interſerenda.

NOn poteſt prætermitti interſitio proportionis harmonicæ, vtpote aliquando eius continuationi neceſſaria, huicque cognitioni addemus etiam diuiſionem dati numeri in Muſicos terminos.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Inter duos datos numeros medium Harmonicum reperire.

IStud operi mandatur Regula aurea. Nam primo eorum differentiam reperies, & deinde eos in vnam ſummam rediges, quæreſque ſumma, & minore termino, & differentis, differentiam, quæ debet eſſe inter primum, & medium, quâ repertâ ipſi minori addatur, vt conſtituatur terminus medius. Sint pro exemplo dati 15. & 25. Inter quos medius proportionalis harmonicè ſit inueniendus; Differentia eſt 10. ſumma 40. Dico itaque ſi 40. dant 15. quid dabit 10. differentis? & multiplicatis 10. per 15. & diuiſis per 40. prodibit differentia 3. $\frac{3}{4}$, quę addita minori termino 15. faciet 18. $\frac{3}{4}$ pro medio, ita vt ſint tres harmonicè proportionales 15. 18. $\frac{3}{4}$, & 25.

* Probatur ex propoſ. 24. ſeptimi elementorum. Nam ſi diuiſi numeri proportionales fuerint, hi quoque compoſiti proportionales erunt; Quia ergo ita eſt extremum ad extremum, vt medij differentia à primo ad eiuſdem differentiam ab vltimo, ſequitur, vt eadem proportio ſit aggregati extremorum ad vnum ex extremis, quæ eſt aggre-

ag gregati ex differentijs ad vnũ earundem. Datis autem duobus terminis habes per additionem eorum aggregatum per ſubductionem verò ſummã differentiarum, vt probabo: Ergo habes tres terminos proportionales; nam ita eſt aggregatum extremorum ad vnum ipſorum, vt aggregatum differentiarum ad alteram ex ipſis, quę debet inquiri per regulam proportionum.

Quòd verò differentia inter duos numeros extremos ſit aggregatum differentiarum, patet: medius enim numerus non poteſt magis differre ab ambobus maiori, & minori, quam ipſi inuicem differant V. g. datis 3. 7. 11. non poteſt 7. magis differre à 3. & à 11. quã, quòd ipſi differunt, nempe à 3. num 4. & à 11. numero 5. quæ ſimul faciunt 9. differentiã ipſorum, vt per ſe patet alioquin eſſet diſtantia maior, vel minor, quàm quod eſſet, namque eſſet 9. vnitatum, at menſurata per 4. & 5. diſtantiam eorundem à medio, non eſſet talis.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Datum quemlibet numerum in proportionem Harmonicam diſtribuere.

*SIt datus quiſque numerus V. g. 54 & oporteat ſecundùm proportionem Harmonicam illum diſtribuere, diuidatur per terminos Arithmeticos V. g. 1. 2. 3. 4 eiuſque partes in proportione Harmonica, quæ ſunt 54. 27. 18. 13. $\frac{1}{2}$.

Probatur. Quia 54 numerus, vel quilibet alius reſpectu partium, in quibus diuiſus eſt, eſt veluti integer, cuius vna pars eſt quotiens. Ergo dicent partes ſingulę, & quotientes eandem proportionem. quam $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, de quibus probatum eſt prop. 5. dicere proportionem Harmonicam.

COROLLARIVM.

HInc eſt; quòd ſi numeri Arithmetici 1. 2. 3. 4. vel quilibet alij in vnam ſummam continua multiplicatione redigantur, & ſumma deinde per ſingulos diuidatur, quòd producentur Harmonici continuè proportionales ob eandem rationem, quòd ſumma ſe habeat veluti integer, & denominator, cuius numeratores ſint partes diuiſæ, ſic 24. ſumma numerorum Arithmeticorum 1 2. 3. 4. ex mutua multiplicatione reſultans diuiſa per eoſdem numeros, dat 24. 12. 8. 6. in Harmonica proportione continuos.

EXPENSIO IV.

De comparatione Proportionum.

TRibus modis inuicem proportiones comparari poſſunt; vel vt eorum differentiæ dignoſcantur, vel vt inuicem termini intermiſceantur, vel vt omnes, aut aliquas proportiones ipſi termini obtineant: Tribus itaque expenſionibus breuiter ab iſta ſpeculatione nos expediemus; cum nihil de cætero Mathematicę deſeruiat.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Conueniunt in hoc omnes proportiones, quòd per eundem numerum termini multiplicati generent numeros eiuſdem proportionis.

SIc 2. 4. 6. Arithmetici multiplicati per quemlibet numerum V. g 4. generant 8. 16. 24. terminos quoq; Arithmeticos; Sic 3. 4. 6. Harmonici per 4 multiplicati generant 12. 16. 24. Harmonicos ſic dicas de Geometricis.

Probatur verò propoſitio ex præcedentibus, & ex propoſ. 17. ſeptimi Elementorum.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Differunt proportiones; quod Arithmetica progrediatur in infinitum creſcendo, non decreſcendo, niſi incidat in fractos, Harmonica ſolum decreſcendo, Geometrica creſcendo, & decreſcendo.

PRobatur ex dictis, & maxime de Harmonica ex Coroll. propoſ. 2.

THEOR. III. PROPOS. X.

Differũt quoq; Quod Arithmeticæ proportionis differentiæ æquales ſint, & proportiones inæquales, ideſt diſſimiles: at Geometrica proportiones habet ſimiles, & terminorum differentias ſimiles cum differentiæ in eadem proportione ſint, & Harmonica neque differentias ſimiles, neque proportiones poſſidet ſimiles in ſuo continuo progreſſu. Patet ex dictis.

SVnt aliæ, quæ oriuntur ex eorum multiplicatione, diuiſione additione, & ſubtractione ſupra explicatis praxibus, quas, ſi voluerit, poteſt quilibet conferre, & differentias etiam in iſtis operationibus tractandis agnoſcere.

EXPENSIO V.

De maxima, & minori Harmonia.

CVm quatuor termini, ita ſunt ordinati; vt in ipſis omnes tres proportiones inueniantur, dicunt Mathematici habere Harmoniam maximam, quòd ſi ſolum duæ inueniantur, dicunt, Harmoniam minorem poſſidere. Oportet itaque docere modum inueniendi quatuor terminos, qui vel duas, vel omnes proportiones conſequantur.

PROBL. I. PROP. XI.

Quatuor numeros habentes proportionem Arithmeticam, & Geometricam inuenire.

CApe tres terminos, quorum extrema, vel paria ambo ſint, vel ambo imparia; ſed Geometricâ proportione nexos, vt 16. 24. 36. interque iſtos extremos numerum Arithmeticum, interijce eos vniendo, vt docuimus, & deinde biſariam diuidendo, & erit numerus 30. itaque in quatuoe numeris 16. 24. 30. 36. proportio Geometrica, & Arithmetica reperietur, vt ex ipſa conſtructione eſt manifeſtum.

PROBL. II. PROPOS. XII.

Quatuor numeros reperire, in quibus Harmonica proportio, cum Geometrica reperiatur, vel cum Arithmetica.

ACcipe tres numeros continue Geometricè proportionales, vt 16. 24. 36. & ex dictis propoſ 5. vel 4 h. exquire inter extrema 16. & 24. Harmonicum proportionalem numerum, eritque 19. $\frac{1}{5}$. Vnde quatuor termini 16. 19. $\frac{1}{5}$ 24. 36. duas proportiones propoſitas obtinebunt, vt patet ex conſtructione. Si verò cupias inter 16. & 36. extremos idem ages, eritque 22. $\frac{8}{52}$.

Eodem modo inter duos Harmonicos 4. & 6. extremos trium 3. 4 6. interijcietur terminus Arithmeticus 5. eruntq; quatuoe termini 3. 4. 5. & 6. Harmonicè, & Arithmeticè proportionales.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Quatuor terminos reperire, in quibus omnes proportiones ſint, & extrema proportionem datam Geometricam conſequantur.

EX tribus Arithmeticis paribus, vt docuimus propoſ. 3. huius creentur tres Harmonici proportionales, quorum extrema proportionem habeant datam, & inter extremos horum ſtatuatur terminus Arithmeticè proportionalis, & erunt quatuor termini in Maximâ Harmonia, vt expoſcis.

Sint V. g. tres numeri Arithmetici 4. 6. 8. ex quibus creo tres Harmonicos 24. 32. 48. interque extrema 24. & 48. interpono Arithmeticum in ſe 6. multiplicando, vt fiat 36. Sunt ergo termini 24. 32. 36. 48. habentes omnes proportiones requiſitas.

Probatur. Nam primo 24. & 48. ſunt in proportione data 4. ad 8. vt patuit ſupra propoſ. 1. huius, & Coroll.

Secundo obtinent proportionem geometricam non continuam, & ita eſt 24 ad 36. vt 32. ad 48. Nam quia 6. multiplicauit 4. & fecit 24. & ſe & fecit 36. Ergo eadem proportio erit inter 4. & 6. quæ eſt inter 24. & 36. Sic quia 8. multiplicauit 4. & 6 ex prop. 17. ſeptimi elementorum, ita erunt geniti 32. & 48. vt 4. ad 6. Ergo, cùm proportionem eandē, quam 4. ad 6. dicant 24. & 36. ac 32. & 48. eandem Geometricam rationem habebunt. Sunt etiam 24. ad 32. vt 36. ad 48. in eadem ratione. Nam 4 multiplicauit 6. & 8. Ergo geniti 24. & 32. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. & quia 6. multiplicauit ſe, & 8. geniti 36. & 48. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. Ergo & inter ſe eandem, quam 6. ad 8. conſequentur.

Probatur tandem de proportione Arithmetica numerus enim 6. multiplicauit ſe, 4. & 8. Ergo geniti 24. 36. 48. erunt in eadem proportione, quam 4. 6. & 8. ſed hæc ex Hypotheſi eſt Arithmetica, ergo, & genitorum 24. 36. 48. ex 19. prop. part. præced. 2.

Probatur tandem de Harmonica ex ipſa conſtructione. Imperatum eſt enim ex tribus datis Arithmeticis 4. 6. 8. tres Harmonicos reperire 24. 32. 48.

TRACTATVS XV.

De Linearum, Segmentorumque proportionibus.

QVamuis quædam fundamentalia de lineis ſecandis lib. 6. Expenſ. 3 tetigerimus; ea tamen fuere pauca, & quæ ſolùm elementi neceſſitas expoſceret. Verùm linearum amplioribus terminis clauditur ſpeculatio, latiorque admodum eſt, & quæ cognitionem multarum propoſitionum, quæ deinde oſtenſæ ſun, requirat, & ideo earum ſpeculationem, neceſſe fuit, in hunc locum reicere.

EXPENSIO I.

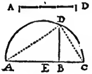
De linearum proportionali inuentione in proportione Geomet. . ca.

QVamuis ſopra eum Euclide lib. 6. Expenſ. 3. inuenerimus lineas proportionales datis lineis, Quia tamen faciliter id alio modo executioni demandatur; ideo ad tractatus perfectionem hic eum docebimus, & præter hoc docebimus quoque reperire alias lineas proportionales, ſeu potentia, ſeu commenſurabilitate, vel inæqualitatis, vel æqualitatis, vt plena linearum proportionalium cognitio habeatur.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis duabus lineis alteram proportionalem Geometricam, ſeu extremam, ſeu mediam reperire.

SIt inquirenda media proportionalis datis AB, & AC. Fiat ſuper AC ſemicirculus, & erigatur perpendicularis à puncto B in peripheriam, ducaturque AD punctata: nam hæc ex 2. Coroll. propoſ. 8. ſexti inter AC & AB eſt media proportionalis, diciturque diuidere proportionem AB, ad AC *per interpoſitionem* AD *in duas partes æquales.*

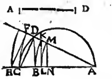


Si verò datis maiore AC, & media AD exquiratur minus extremum; facto ſuper AC ſemicirculo accommodetur media AD in ipſo, & à puncto D. cadat perpendicularis. Nam AB ex cit. Coroll. erit minus extremum. Si verò dato minore extremo AB, & mediâ AD ſeorſim expoſita exquiratur maius extremum, ex B excitetur perpendicularis BD, prolungeturque AB quantum opus eſt, & cētro altero extremo A interuallo AD media ducatur circulus, ſ eũ fig. non exprimat, qui ſecet perpendicularem BD in D. A puncto ergo D, quo illā ſecat, excitetur perpendicularis DC, quę ſecabit minus extremum productum in C Dico ergo AC ex eodem Coroll. eſſe maius extremum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duabus rectis lineis proportiones earum propagare in infinitum.

DEntur duæ AB, & AD, & ſecundùm proportionem minoris ad maiorem creſcendo ſit propaganda proportio: Quia datur minus extremum AB, media AD ſeorſim data; ideo ex propoſ. anteced. erecta perpendiculari BD centro A interuallo AD ducatur circoli portio l. in fig. non ſit, & à pūcto D quo ſecat exeat data A D in A & ei normalis DC, & CA erit tertia proportionalis ex prec. Rurſuſque ex puncto C ducto arcu CF interuallo AC ab F, in quo ſecat, ducatur rurſus perpendicularis FH ad AF, ſeu parallela primò ductę CD, *&* in H *erit quarta proportionalis, ita vt* AB *ſit* AD, *vt* AD *ad* AC, *&* AD *ſit ad* AC, *vt* AC *ad* AH.



Probatur, quia AB eſt ad AD, vt AD ad AC ob rectum angulum D ex Coroll. 2 prop. 8. lib. 6. Ergo etiam AD erit ad AF, id eſt AC, quæ ei vtpote radius, æquatur, vt AF ad AH ob rectum angulum H, ex dict. Coroll. propoſ. 8. & ſic in infinitum creſcendo.

Si verò requiratur proportio continuata in decreſcendo maioris AO ad minorem BA. A puncto B interuallo AB ducatur portio circuli BK, & à puncto K demittatur perpendicularis KL. Rurſuſq; à puncto L ducatur portio circuli LM; & à puncto M demitatur perpendicularis MN. Dico hoc modo

do proportlooem cootinuari in ſe dimlnoendo,& AD eſſe ad AB, vt AB ad AL, & AB eſſe ad AL; vt AL ad AN; & ſic quouſque placuerit.

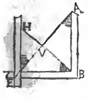
Probatur. Nam ex præced. vt eſt AD ad AB hoc eſt ad æqualem AK; ita eſt AK ad AL. Rurſuſque, vt AB hoc eſt AK ad AL ob rectum aogulum L ſic AL, ideſt AM ad AN; & ſic quouſque placeat, poteria conrinuare. Ao verò hæc continuatio poſſit verè in lofinitum produci infra videbimus, cum de proportionum progreſſione.

PROBL. III. PROPOS. III.

Duobus datis extremis proportionalibus inter ea duas medias continuè proportionales in data proportione conijcere.

HOe problema antiqui, non niſi organicè ſoluere potuerunt ob iofinitam, linearum multitudinem, quæ inter lineas poſſunt pooi; Multas autem eorum inuentiooes ſingulari ingeoio excogitatas Clauiua affert lib.6. propoſ.15. Geometr. pract. & quaſdam valde amplificat Betinus Aetarij Math. propoſ.13. tom.2. Nos afferemus modum facillimum Platonis.

Sit regula ligoea, vel cuprea AB placitæ longitudinis, cui alia regula BE eiuſdem rationis rectangolè infiaa ſit, & ſtabllirer. Huic verò rectaogulè altera inſeratur EH tali modo, vt par illam mota, nunqoam tamen ab angulo recto deficiat, & ecce ioſtrumentum paratum erit.



Vſus verò inſtrumenti talis eſt. Sint duæ datę extremę lineę AV, & VH, quę rectāgulè vniātur in V, & producantur per puoctatas, quantum ſatis erit. Applicetur verò ioſtrumentum extremo A regula AB, & ita accommodetur traſfereodo regulam HE, vel viciniùs, vel longinquiùs vſq; dum alterum extremū H alterius datæ VH extremum ipſa regula mobilis lambat, & ſimul contiooatæ punctatę VB, & VE tranſeant per aogulos rectos, regularum; oempe VB per angulum B, & VE per aogulum E. Dico *quatuor* AV, *&* BV, *&* VE, *&* VH *eſſe quatuor continuè proportionales.*

Hocque, diciturque à Mathematicis diuidere in treapartes æquales proportiooem AV ad VH.

Prob. Nam triangula AVB, & BVE, & EVH ſunt æquiangula. Anguli enim ad V recti, & anguli nigri æqualea; Cùm albus, & niger ad baſim AB in triaogulo AVB vni recto ſint æquales; & ideo, com torus apud B ſit rectua, reſiduus āgulus niger ad B erit æqualis nigro ad A, & idem dicas de alijs.

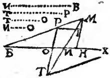
Cum ergo triangula æquiangula ſint, erit AV erua maius ad BV minua in triangulo AVB, vt BV idem; ſed maius io criaogulo BVE ad erus minus VE, & hoc BV maius ad ſuum minus VE erit, vt ipſum VE maius in triangulo VEH ad mious VH. Quare BV, & VE ſunt duæ mediæ proportionales inuentę inter extremas AV, & VH.

PROBL. IE. PROPOS. IV.

Datam lineam exhibere, quæ ad aliquam compoſitam habeat proportionem ex duabus lineis ad duas alias, cum fieri poteſt.

SIt data proportio BN ad NO, & proportio TP ad TO non eadem, ac precedens, ſed diuerſa, vt proportio compoſita ſit, non duplicata.

Ducta linea BH, & TP, vtcumque, quæ faciant quemcumque angulum in O: menſuretur NO punctata ſuper alteram earum V. g. ſuper continuam NB à puncto O in N, & à puncto N altera puoctata ei correſpondens NB; Sic in altera TP punctata TO menſuretur ſuper OT à puncto O io T, & à puncto T altera punctata TP correſpoodens perque extrema P, & B ducatur MB, & per N, & T linea TN, quę conuenient in M, *& erit reperta* MB, *quæ ad* PM *habebit proportionem compoſitam, ex proportione* NB *ad* NO, *&* OT *ad* PT;



* Probatur primo, quod MB, & MT conuenient, in M. Nam ſi oon conueoieot, eſſent TM, & MB parallelæ; Quare triangula POB, & NOT eſſent proportionalium laterum, vtpote æquiāgula V.g. ſi TX eſſet ipſa TN parallela ipſi BP; eſſet OB ad OX, vt OP ad OT, & *componendo* OB ad OB ſimul, & OB eſſet, vt OP ſola ad OB ſimul, & OT: Quare contra præſoppoſitionem proportio eſſet ſimilis datarum linearum, quòd nolumus: nam poſuimus NB ad ON diſſimilem à proportione TO ad TP. Quare non eront parallelæ; idcircò conuenient E. g. in M.

Probatur. Quod proportio BM, ad PM ſit compoſita ea proportiooe NB ad NO, & TO ad TP. Ducaturqoe parallela PI ad NB V. g. à puncto P.

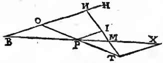
Eritque ex 4. lib.6. MB ad MP, vt NB ad IP. Interponatur quælibet, vt aduertimus poſſe fieri Tract.9.part.1. Eapenſ.3. Scilicet NO, quæ interponatur inter IP, & NB. Erit igitur proportio NB ad IP compoſita ex duabus, ſc. ex proportiooe NB ad NO, & NO ad IP: Sed ex 4. lib.6. vt NO ad IP ob parallelismum linearum ON ad IP; Sic eſt in proportione TO ad TP: Ergo (poſita proportione TO ad TP loco proportionis NO ad IP) proportio MB ad MP eadem, quæ NB ad IP erit compoſita ex proportiooe NB ad NO, & TO ad TP, quod ſi cupias proportiones compooentes ambas eſſe maioris ad minorem vtere figura prop. ſeq.

PROBL. V. PROPOS. V.

Data linea, quæ dicatur componi ex proportione vnius lineæ ad aliam exhibere duas lineas, quæ reliquam proportionem contineant.

DIcatur linea BM ad MP compoſita ex proportione BN ad ON; & ex alia, quęraturque reliqua proportionum, quæ proportionem MB ad PM compleat.

Accomodetur in hac, ſeu pręc. fig. MB longior, vt faciat cum MB quemcumque angulum, & ducatur indefinita MT ab M per N. Deinde ab N, męſuretur NO ſuper NB, & à puncto P parallela ducatur ad NB, quæ ſit IP, & à P per O tranſeat PT conueniens cum TM. *Dico proportionem* TP *ad* TO *eſſe proportionem, quæ componit cum proportione* NB *ad* NO *proportionem* BM *ad* PM.



Probatur. MB eſt ad MP, vt NB ad IP interponatur NO; eritque proportio NB ad IP compoſita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP. Quare, & proportio BM ad MP erit compoſita ex proportione B ad NO, & NO ad IP, ſcilicet ex TO ad TP, vel TN ad TI, & aduerte, quod ſi TB non conueniet cum TM verſùs T conueniet verſùs M; cùm in proportione compoſita, vt dixi in præcedenti TP, & TM non poſſint eſſe parallelæ, vt eſt BN, & XT.

PROB. VI. PROPOS. VI.

Datâ mediâ trium in continua ratione exiſtentium, & aggregato extremarum proportionalium primam, & vltimam exhibere.

SVper aggregato HI duarum extremarum fiat circulus ACBD, & mediâ datâ duplâ BC accommodetur in circulo; ſiquidem oportet aggregatum extremarum, quæ diametrum faciunt circuli eſſe maius ipsâ mediâ duplatâ, quia duæ extremæ ſunt maiores, quàm medię, & tantò magis cùm mediæ ſunt inuicem ęquales ex propoſ. 13. lib. 5. Elem.



Deinde ipſi CB erigatur perpendicularis AD ab eius medietate B. *Dico factum eſſe id, quod deſſiderabatur.*

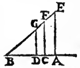
Probatur. Quia AE eſt ad EC, vt EC ad ED ex Coroll. propoſ. 16. lib. 6. Linea AD verò, vt diameter æquatur aggregato HI.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis duobus exceſſibus trium magnitudinum in continuâ proportione exiſtentium exhibere tres continuas.

SInt dati exceſſus AC, & CD, qui in vnicam lineam ponantur AD, quę, & extendatur ad plarirum vſque ad B: Deinde à punctis A, C, D erigantur perpendiculares, quę ex 14. lib. 6. eandem proportionem ſeruent, quę AC ad CD, & ducatur EG per puncta E, F, G, donec cum altera AB conueniat in B. *Dico factum eſſe id, quod expoſcitur, & eſſe* BD *ad* BC, *vt* BC *ad* BA.

Probatur, vt AB ad CF, ſic eſt AB ad CB ex propoſ. 4. lib. 6. ſed AE ad CF, effecta eſt ſic vt AC ad CD; Ergo vt eſt AC ad CD, ſic ex 16. l. 5. eſt tota AB ad CB.



Sed, vt eſt CF ad DG, ita eſt CB ad DB; ex propoſ. 4. lib. 6. At CF reſpicit in proportione BD, vt AB reſpicit CF, vt AC reſpicit CD ex effect. & ideo vt proportionatur AB ipſi CB. Ergo proportionata eſt AB ipſi CB, vt CB ipſi DB. Quare tres AB, & CB, & DB ſunt in continua analogia.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

* *Dato termino maiori, & differentia termini maioris à medio reperire ipſum medium terminum, atque minorem.*

SIt datum maius extremum AB in propoſ. præced. figurâ, & differentia AC: Detrahatur hęc differentia AC à maiore extremo AB, & reſiduum CB erit medius terminus; Rurſus ex propoſ. 15. ſexti, fiat, vt AB ad ſuam differentiam AC eſt in proportione, ſic CB ad aliud; & inuenietur CD. *Dico itaque, quod* AB, *&* CB, *&* DB *erunt in continua proportione.*

* Probatur, vt AB eſt ad AC; ſic CB eſt ad CD. Ergo componendo, vt AB eſt ad AC cum CB; ſic CB eſt ad CD cum DB: Quare diuidendo, vt AB eſt ad CB; ſic CB erit ad DB: quapropter AC, & CB, & DB, erunt in continua proportione.

EXPENSIO II.

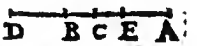
De proportionali linearum additione.

ADditio proportionalis linearum maximas in Geometria ſecum fert vtilitates, & plurimis prebet ſpeculationibus fundamentum, interque multas propoſitiones, quę exhibentur, hę ſunt vtiliores, & admodum neceſſarię.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datam lineam rectam, vtcumque ſectam tali ſegmento augere, vt tota cum adiuncta ſit ad adiunctam, vt maius ſegmentum ad minus.



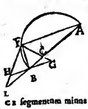
SIt linea AB ſecta, vt cumque in C, & iubeamur adiungere talem partem V. g BD; quæ faciat rectam AD; & hæc tota AD ſit ad adiunctam, & ſegmẽtum BD, vt maius ſegmentum primitiuum AC eſt ad minus CB.

Ponatur CE æqualis ipſi CB: Fiatque per 15. propoſ. lib. 6. vt AE ad BC: Sic tota AB ad BD: reperieturque BD: *Dico itaque totam AD eſſe ad BD adiunctam veluti proportionatur ſegmentum maius AC ſegmento minori CB.*

Probatur. Quoniam enim AB reſpicit EC veluti AB reſpicit BD; erit quoque componendo AB, & EC ad EC, vt AB, & BD ad BD: ſed EC eſt æqualis ex effectione minori ſegmento CB: Ergo erit etiam, vt AB, & EC, hoc eſt AC ad CB; ſic AB cum BD, ideſt tota AD ad BD.

* Poteſt etiam fieri alio modo. Sit data AB diuiſa, vt cumque in C. Facto ſuper AB ſemicirculo, i puncto C erigatur, ſi placet perpendicularis CF. & fiat triangulum rectangulum AFB, lineæq; AF ducatur GH parallela per punctum B, & occurrat ipſi CF in G. Sit deinde BH. æqualis ipſi GB, & ducatur per H linea FH, vſque ad L; & AB prolongetur, vſque ad L. *Dico BL eſſe eam additionem, quæ requiritur; & AL eſſe ad BL, vt AC ad CB.*

Probatur AF eſt ad BH, vel æqualem GB ob earum parallelismum in triangulo AFL, vt AB ad BL: ſed vt AF ad GB; ſic AC ad CB, ob triangulorum AFC, & GCB ſimilitudinem: cum ſint ad verticem, & inter parallelas ex 9. ſexti: Ergo vt tota AL ad adiunctam BL, ſic AC ſegmentum maius ad CB ſegmentum minus.

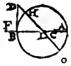


PROBL. II. PROPOS. X.

Datæ lineæ, vtcumque ſectæ tale ſegmentum addere, vt tota cum addita ſit ad totam, vt ſegmentum ad ipſam additam.

INter AB, & AC media proportionalis inueniatur BD; Eritque quadratum ex BD factum æquale rectangulo ex AC ſegmento, & tota AB effecto ex propoſ. 19. lib. 6. Erigatur itaque hæc media ex B perpendiculariter, & facto ſuper AB totâ datâ circulo, per centrum eius L ducatur à vertice D linea ODL *Dico, quòd portio HD inter media inter DB tangentem, & peripheriam intercepta eſt illa, quæ addita ipſi AB facit AF, quæ eſt ad totam AB, vt ſegmentum AC eſt ad additam BF.*

Probatur. Quia rectangulũ ex tota, & addita pro vno latere AF, & addita BF pro alio eſt æquale rectãgulo ex DO tota, & ſegmento HD ob æqualitatem laterum HD, & BF. Rectangulum verò ex OD, & HD eſt æquale quadrato BD, ex 36. lib. 3. vnde etiam erit æquale rectangulo AB, & AC, quod æquatur ex dictis quadrato ex BD. Quare ex prop. 10. lib. 6. OD, ideſt æqualis AF tota cum additâ erit ad AB totam, vt eius ſegmentum AC ad additam HD ideſt æqualem BF.

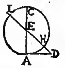


PROBL. III. PROPOS. XI.

Datis duabus lineis, alteram ipſarum, ita continuare, & tota cum additâ ſit ad alteram, vt altera ad additam, ideſt ſint continuè proportionales.

SIt data recta maior AC, & minor AD, quæ orthogonaliter ad verticem A coniungantur. Diuiſâque bifariam alterâ ipſarum, puta AC minorem, dimidiæ EA interuallo deſcribatur circulus, & ducatur ex D per centrum E linea DL. Dico totam HL, ideſt AC datam cum adiunctâ HD ſimul, ideſt LD eſſe ad datam AD, vt AD ad HD.

Probatur. Nam ex DL tota adiecta cum HD pro latere, & adiecta HD ſolum pro alio fiet rectangulum æquale quadrato tangentis AD ex 36. lib. 3. Eucl. Ergo ex propoſ. 10. lib 6. vt DL ad AD; ſic AD erit in proportione ad DH; quare AC æqualis HL aucta eodem incremento DH erit ad DA, vt DA ad DH.



PROBL. IV. PROPOS. XII.

Lineæ datæ adiungere talem partem, vt alterius ſegmentis data, & adiuncta ſint proportionales.

SIt linea AC ſecta in B, & alia DB, cui oporteat addere talem partem, vt ipſa DB ſit ad ſegmentum BC, vt AB ſegmentum alterum ad additam BF: Addatur linea BD lineæ AC ad punctum B, & faciat cum AC, quemcumque angulum. Per tria verò pũcta ADC reperiatur circulus tranſiens ex 5. lib. 4. & DB prolungetur vſque ad circumferentiam in F, & erit factum, eritque AB ad BF, vt DB ad BC.

Probatur. Et enim BF cum DB faciunt rectãgulum æquale rectangulo ex AB, & BC, & ideo erunt, vt AB ad BF, ſic BD ad BC ex 18. lib 6.

Quod autem rectangulum ex BD, & BF ſit æquale rectangulo ex AB, & BC oſtenditur ex 35. lib. 3.

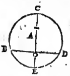


PROBL. V. PROPOS. XIII.

* *Datam lineam ſectam, vtcumque, ita augere, vt ſegmentum maius cum addita ſit ad ſegmentum maius, vt ſegmentum maius ad minus.*

SIt linea AE diuiſa in O, & ſegmentum maius OA; debeatque huic ſegmento addi talis pars; vt ipſum cum parte addita ſit ad ſegmentum maius AO, vt maius ad EO minus.

Erigatur perpendicularis OB, & OD æqualis ipſi AO à puncto O, & per tria puncta B, E, D tranſeat circulus. Prolungeturque CA ad peripheriam in C, & erit factum.



Eritque ex 35. lib. 3 rectangulum CO, & EO æquale quadrato OX, ideſt OA ei æquali ex effectione.

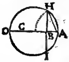
Vnde ex propoſ. 19. lib. 6. CO ſegmentum, cum addita erit ad OA, vt OA ad AC.

PROBL. VI. PROPOS. XIV.

* *Datam lineam, vtcumque ſectam, ita addere; vt tota cum addita ſit ad ſegmentum maius, vt ſegmentum maius ad minus.*

SIt data linea AC, quam oportet adiungere; vt tota AC cùm additâ CO, ſ. AO ſit ad BC ſegmentum maius, vt BC ad AB ſegmentum minus.

Erigatur à puncto B perpendicularis, & à centro A internallo ſegmento maiori BC portio circuli ducatur, quæ ſecet BH in H, cui BH fiat æqualis HI; perque tria puncta H, A, I tranſeat circulus, & prolungetur BC in O. Dico AO nempe totam AC cum addita CO eſſe ad CB ſegmentum maius, vt ipſa CB ad BA ſegmentum minus.



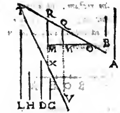
Patet, quia ex Coroll. propoſ. 8. lib. 6. ita eſt AO ad AH, ideſt BC, vt AH ad AB.

PROBL. VII. PROPOS. XV.

Datæ ſint duæ lineæ inæquales, & ratio data. Sintque addendæ talibus partibus, vt rationem datam inuicem obtineant, ſed compoſitæ aliquam aliam rationem datam conſequantur.

SCiendum eſt hoc problema non ſemper operi demandari poſſe; ſed aliquando, prout rationes exhibentur, iuxta quas addendum ſit, vel detrahendum: Ipſa verò experientia docebit, cùm operi demandari pòterit, abque eo, quòd omnes caſus ponamus: Sunt enim multi, & qui prolixis verbis indigerent.

Sint ergo datæ duæ lineæ A, B, ad quas duæ aliæ addendæ ſint, quæ ſint, vt C ad D, & efficiant compoſitæ proportionem, quam H ad L.



Fiat ON ad MO, veluti proportione reſpicit C ipſam D, & ex punctis M, & N erigantur perpendiculares, & parallelæ ipſis datis æquales A, & B, quæ ſint NV, & MX; iunganturq; puncta VX. Deinde fiat ex propoſ. 15. l. 6. exp. vt H ad L, ſic XT ad VT: Poſtmodum à puncto T per punctum O ducatur recta OT; Producanturque NV in Q, & XM in R. eruntque lineæ XR ad VQ in data proportione H ad L.

Probatur ſunt enim TX ad TV. ſic RX ad QV; ob paralleliſmum linearum VQ, & XR in triangulo VQT, ſed XT ad TV ita effecimus, vt H ad L: Ergo erunt R X ad V Q, vt H ad L: Sunt verò NQ ad MR, vt ON ad OM, & ON ad OM, vt B ad A ex effectione, & pariter MX ad VN, vt C ad D; ergo effecimus id, quòd propoſitum fuit. Nam partes additæ NQ, & MR obtinent rationem datam C, & D totæ verò XR ad VQ rationem datam H ad L ipſæ verò lineæ, quibus facta eſt additio, ſunt æquales lineis datis A, & B.

EXPENSIO III.

De linearum diuiſione.

REctam lineam ſecare proportionaliter præter ea, quæ traddimus lib 6. hic docemus, cùm id multis operationibus deſeruiat, multiſque propoſitionibus, quæ deinde tradendæ ſunt hæc doctrina neceſſaria euadat.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Rectam lineam ita ſecare, vt inter ſegmenta altera recta ſit media proportionalis, quæ data debet eſſe, aut ſubdupla, aut minus, quàm ſubdupla illius, quæ ſecanda eſt.

SIt ſecanda AC in duo ſegmenta, ita quòd inter ſegmenta tanquam media proportionalis ſit BA, non maior, quàm dimidium datæ AC. In E ad diſtantiam dimidiæ AE fiat ſemicirculus ſuper AC diametro, & AB data fiat tangens in A, & faciat in A angulum rectum. Ducaturque diametro pa-



ralleia

rallela BH ab altero extremo B, quæ ſecabit, vel tanget ſemicirculum AHC; quòd AB ex hypotheſi minor ſit, quàm ſemidiameter AE, vel ei æqualis. Deinde ab H; in quo ſecat, ducatur HF perpendicularis ad AC, ſecabitque AC in F.

Dico itaque quod inter AF *&* FC *ſegmenta, media proportionalis eſt* AB.

Probatur. Nam ex propoſ. 16. lib. 6. FH inter ſegmenta eſt media proportionalis; ſed FH eſt æqualis AB, cum ſint inter parallelas, & parallelæ. Ergo etiam AB eſt media proportionalis inter AF, & FC.

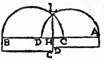
COROLLARIVM

HInc data aliqua V. g. BA inuenies illius extrema proportionalia, nempe AF, & FC per præcedentem praxim, ſi ſimul iungas, vt vnam longitudinem efficiant, vt per ſe conſtat.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Rectam lineam duobus punctis in tres partes diuiſam, in quatuor partes iterum diuidere per punctum intermedium; vt ſegmenta facta remaneant proportionalia.

SIt linea AB diuiſa in punctis C, & D, quæ oporteat iterum diuidi in H, vt ſegmentum AH ſit ad ſegmentum CH, vt ſegmentum HB ad ſegmentum HD. Diametro AD deſcribatur circulus, & iterum diametro CB alius circulus deſcribatur, &



à puncto, quo ſe interſecant in L ducatur perpendicularis ad H, & erit factum, quòd expoſcitur. *Taliſque erit proportio* AH *ad* CH; *qualis eſt* HB *ad* HD, *vel* CA *ad* CH, *vt* BD *ad* DH.

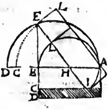
Probatur. Nam rectangulum ex AH, & HD eſt æquale quadrato HL ex 19. lib. 6. eo, quòd ex 8. lib. 6. HL ſit media proportionalis, ſic rectangulum ex CH, & HB erit æquale eidem quadrato ob eandem rationem; quare hæc rectangula erunt æqualia inuicem: quare ex propoſ. 10. lib. 6. AH latus vnius erit ad HC latus alterius, vt HB latus huius ad HD latus rectanguli, cuius alterum latus AH. Quare etiam *diuidendo* AC erit ad CH, vt DA ad DH.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datam lineam ſemel ſectam, iterum denuò ſecare, vt partes ſint in continua proportione.

SIt linea AD diuiſa, vtcumque in B, quam oporteat iterum ſecare in C, vt partes ſint in continua analogia, & ſit AB ad BC, veluti eſt BC ad CD.

Diametro AB fiat circulus, & diametro AD alius circulus deducatur, & à puncto diuiſionis datæ B erigatur perpendicularis, quæ ſecet peripheriam maioris circuli in E; & ducatur EH, cui fiat æqualis HC. Dico factum eſſe, quòd mandatum fuit, & AB, BC, & CD *in continua proportione reperiri.*



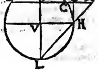
Probatur rectangulum ex IB, & EL eſt æquale quadrato ex BE ex 35. lib. 3 & ex 19. lib. 6 eidem quadrato ex BE, rectangulum ex AB, BD æquale eſt, quia AB, & CB, & BD ex 8. l. 6 ſunt in cõtinua proportione. Rectangulum verò ex AB, & BD æquatur rectangulo ex AB, BC, quòd eſt AC, & rectangulo nigro ex AB, & CD. Pariter ex IB, & EL rectangulum æquatur rectangulo ex IL, & LE, & quadrato ex LE. Rectangula verò iſta ex IL, & LE, & ex AB, & BC ſunt æqualia, cum ſint ex diametro, & LE, vel æquali BC: Quare ablatis iſtis rectangulis æqualibus rectangulum nigrum, & LL quadratum remanebũt æqualia, quamobrem ex 19. l. 6. latus nigri rectanguli, ideſt AB erit ad EL, hoc eſt ad BC; vt BC ad CD, quòd erat probandum.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam lineam ſectam ita ſecare; vt pars intermedia ſit vltima proportionalis trium continuè proportionalium.

SIt data linea AB, quæ, vtcumque ſit diuiſa in C: Oporteatque iterum eam diuidere in D, vt DC pars intermedia ſit extrema proportionalis, & ita ſit DB ad AD, vt AD ad DC.

Diuidatur BC biſariam in K, & erigatur ex K perpendicularis KL æqualis lineæ AK. Ducaturque AL per extrema A, & L: perque tria puncta C, B, L circulus tranſeat, & à centro V ducatur parallela ad AB, quæ occurrat AL in H puncto, & ex puncto H deducatur perpendicularis HD, &



erit factum. Nam ita erit BD ad AD, vt AD ad DC.

Probatur AK æquatur KL, & HV eſt parallela ad AK: Ergo, & ipſa æquatur radio VL. Quare HV eſt etiam radius. Eadem ratione cum DH ſit parallela ad KL erit æqualis lineæ AD & HD ad angulos rectos incidet in HV radium: Vnde erit tangens: quare eius quadratum erit æquale rectangulo DB, & CD ex 36. lib. 3. & conſequenter quadratum æqualis AD erit æquale rectangulo eidem CD, & DB, vnde ex 19. lib. 6. DB erit ad AD, vt AD ad DC.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Datam lineam ita ſecare, vt tota ſit ad ſegmentum alterius, vt tota altera eſt ad ſegmentum huius.

SIt data AB, in quâ ſegmentum CB. Volumus autem ita ſecare BD in I V.g. vt tota DB ſit ad CB, vt AB ad IB, ideſt reciprocè proportionentur totæ, & partes. Vniantur ad verticem B; vt faciant quemcumque angulum. Per tria verò puncta A, C, D agatur circulus ex prop. 1t. l. 3. Nam dico IB *eſſe ſegmentum, quod requiritur, & eſſe* DB *ad* CB, *vt* AB *ad* IB.



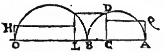
Probatur ex propoſ. 36. lib 3. elem. Coroll. Nam rectangulum ex AB, & CB eſt æquale rectangulo ex DB, & IB. Vnde ex propoſ. 10. lib. 6. ita erit DB ad CB, vt AB ad IB.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Datas duas rectas ita ſecare, vt ſegmenta ſint reciproca in proportione.

SIt data AB minor pro libito ſecta in C, & maior BO ſecanda ſit ſimiliter, vt ſegmenta V.g. OL, & BL ſint proportionalia ſegmentis AC, & CB reciprocè, *nimirum* OL ſit *ad* CB, *vt* AC *ad* BL.

Inter ſegmenta data AB & CB inueniatur media proportionalis CD; Factoque ſuper BO maiori, ſemicirculo reperiātur duo ſegmēta, quibus CD ſit media proportionalis ex propoſ. huius 16. & ſint BL, & LO. Eritque factum, quòd poſtulatur, *&* OL *erit ad* CB, *vt* AC *ad* BL.



Probatur rectangulum ex AC, & CB, ideſt CQ, eſt æquale rectangulo LH, ex OL, & BL, quòd inter ambo ſegmenta ſit CD eadem media proportionalis; & ideo ex 19. lib. 6. ſint æqualia quadrato ex CD facto. Vnde, & erunt æqualia inuicem. Quaderé ex 19. lib. 6. erit OL ad CB, idem latus quod AQ, vt AC ad BL, idem latus quam OH, quod erat præſtandum.

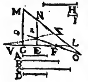
PROBL. VII. PROPOS. XXII.

Auferre à lineis duabus datis partes, quæ inuicem habeant proportionem datam; ita tamen, vt reſidua correſpondeant inuicem in proportione datâ, cùm fieri poteſt.

SInt datæ duæ lineæ A, & B, à quibus demendæ ſint duæ partes in ratione C ad D, ita tamen, vt reſidua inuicem eam proportionem dicant, quam dicit H ad I.

Fiat FG ad FE, vt C ad D, & ex punctis E, & G erigantur perpendiculares EN, æqualis A, & GM æqualis B, coniungaturque MN, & fiat ex propoſ. 13. lib. 6 OM ad ON, vt H ad I. Si MO eſt maior, quam ML linea, in quam FG terminat, producta ſi fuerit, & FG non pertingat ad L, ſed debeat produci, problema fieri poteſt, ſecùs, ſi id non eueniat, igitur ex O per F ducatur OQ. Dico factum eſſe, quòd expoſcitur, *&* QG *eſſe ad* ER, *vt* C *ad* D; *reſiduas verò* QM *ad* NR *eſſe, vt* H *ad* I.

Probatur. Nam QG ablata correſpondet proportione ad ER ablatā, vt FG ad FE, quæ ex effectione eſt eadem proportio, quæ C ad D. Sic MQ eſt ad RN, vt OM ad ON, quæ ex effectione eſt eadem, quæ H ad I. Ergo reſiduum MQ ad reſiduum NR eſt, vt H ad I; quod fieri oportebat.



Aliquando tamen fieri poteſt, ſed reciprocè, vt ſi ZM inuenta, quæ eſſet, vt H ad I non pertingeret vltra M in O; ſed eſſet minor, quàm ML, & eſſet MZ, tunc enim deberet fieri EV ad VG, vt C ad D, & ex Z ad V ducenda eſſet ZV punctata; quæ ſecaret in reciproca ſegmenta. Nam reſiduum à punctata vſque ad M eſſet ad MR, vt H ad I; at verò ablata ER ad G vſque ad punctatam, vt C ad D: ita vt fundamentum, & terminus eſſent in eadem quantitate V. g EN.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

Lineam diuiſam extrema, & media ratione proportionali diuidere.

DIuidere extremâ, & mediâ ratione proportionali lineam eſt eam ſecare in tria ſegmenta facta, vt tota ad ſegmentum primum ſit, vt ſegmentum, aliud ſecundum ad tertium.

Sit ergo linea data IH ſecta in L, quæ ita ſecāda ſit in tria ſegmenta in aliquo puncto V. g. O, vt tota IH ſit ad ſegmentum datum LH, vt alterum ſegmentum IO eſt ad OL.

Super ſegmentum IL fiat circulus, & à puncto H ducatur tangens HM, connectaturque punctum contactus MK, & ob eodem puncto contactus M demittatur perpendicularis MO. Et dico eſſe factum, id, quod poſtulatur. *Nam tota* IH *erit ad* LH. *vt ſegmentum ſol[?]m* IO *eſt ad* OL.

Præſſumpt. Obſeruandum eſt lineam OM eſſe mediam proportionalem inter baſis ſegmenta OH, & OK in triangulo rectangulo KMH ex 8 Eu. Et eandem OM eſſe mediam proportionalē inter duo diametri ſegmenta IO, & OL ex prop. 16. lib. 6. Quare ſi fieret ex OM quadratū ei eſſet æquale rectangulum ex HO, & KO ex propoſ. 19. lib. 6. necnon, & rectangulum ex diametri ſegmentis IO, & OL ob eandem rationem. Quare hæc rectangula inuicem eſſent æqualia. Vnde ex prop. 10. lib. 6. habebunt latera reciprocè proportionalia: Ideoq; ea proportione reſpondebit HO ad OI, vt OL ad OK. Quo poſito.



Probatur Propoſ. & progreſſ. 1. Cum HO, ſit ad OI, vt OL ad OK. Vtendo itaque *compoſitione rationum*, ita erit HO cum OI, ideſt tota HI, ad OL, vt OL cum OK, ideſt LK ad OK.

Progreſſ.

Progreſſ. 2. Rurſus; ſi HO eſt ad OI, vt OL eſt in proportione ad OX ex præaſſumpto vtemur *permutatione*, & erit antecedens HO ad OL antecedentem vt OI ad OX terminos. Vtemur deinde *diuiſione rationũ*; & erit LH pars ad LO compartẽ, vt XI pars & radius, vel LX item radius ad XO compartem.

Progreſſ. 3. Cum ergo iſtæ proportiones æquales ſint, & ſimiles *ex æquali arguendo* erit HI ad OL, quam primo progr. oſtendimus, velut IX, vel LX ad OX: nimirum tota HI ad partem interceptam IO; vt pars extrinſecùs aſſumpta HL ad alteram partem interceptam OL.

Progreſſ. 4. Cùm ergo IH correſpondeat proportione ad IO, vt LH ad OL poterimus denuo vti *permutatione*, & erit IH ad HL antecedentes, vt IO ad OL ſequentes, nempe tota IH ad ſegmentum datum HL, vt ſegmentũ factum IO eſt ad OL, quod erat demonſtrandum.

EXPENSIO IV.

De proportione linearum Arithmetica.

Licet proportio Arithmetica ſit facillima, non licet tamen eam omnino præterire ad tractatus integritatem, ideo breuiter.

PROBL. I. PROPOS. XXIV.

Tres proportionales datis duabus lineis in Arithmeticâ proportione inuenire.

HOc faciliter fit: Datis enim duabus A, & B inquiratur maius extremũ, Fiat CL æqualis ipſi A, & addatur differentia VI ſemel, & fit LQ & erit CQ maius extremum.

Si verò exquiratur minus extremum fiat CL æqualis ipſi AV mediæ, & ei ſemel differentia LQ detrahatur, & fiet B minus extremum. Si verò inquiratur media datis B, & CQ fiat AI æqualis ipſi B, & differantia OQ, quæ eſt inter minus, & maius extremum biſariam diuidatur, addaturq; ipſi AI, & ſit AV media proportionalis. Patet inuentas eſſe extrema proportionalis arithmeticè, quia ſingulæ lineæ altera ſuper alteram excreſcunt augmento æquali; quòd eſt de ratione proportionis arithmeticæ: ſic VA excedit B linea VI, & CQ excedit AV linea IQ, & LQ, & VI ſunt differentiæ æquales.



EXPENSIO V.

De linearum proportione Muſica.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

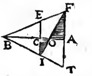
Datis duabus lineis alteram proportionalem Harmonicam, ſiue mediam, ſiue extremas inuenire.

SIt primo datum maius extremum AB, & minus CB, cui oporteat mediam proportionalem Harmonicam reperire.

A puncto C excitetur perpendicularis CE, ſicut & à puncto A perpendicularis AF; Sitque CE, cuiuſcumque magnitudinis. Prolungetur vſq; ad I, quantum eſt CE, & à B per E ducatur linea recta vſque ad AF, & vbi ſecat in F ad I recta ducatur, quæ ſecabit AB in O; quam eſſe ſectam Harmonicè affirmo, *& OB eſſe mediam proportionalem inter* CB, *&* BA Harmonicè, ideſt eſſe CB ad CA Geometrica in proportione, vt eſt differentia OC inter primam, & mediam ad differentiam OA inter mediam, & extremam.

Probatur. Nam ob paralleliſmum linearum AF, & CE in triangulo AFB, ita erit AB ad CB, vt AF ad CE.

Progreſſ. 2. Deinde conſiderandum quoque eſt, quod triangula nigra ſunt ſimilia, quòd ſint rectangula, & habeant angulos ad O ad verticem æquales, vnde, & reliquos: quare erit AO ad AF, vt OC ad CI, vel æqualis CE *& permutando* ita erit AO ad OC, vt AF ad CI, vel CE: Sed AF ad CE erat in primo progreſſ. vt AB ad CB; Ergo etiam differentia AO ad differentiam OC eſt, vt maius extremũ AB ad minus CB, quare OB erit media proportionalis, cuius differentia à maiori extremo AO, ita refertur ad differentiam ſuam à minori extremo CB, vt maius extremum ipſum refertur ad minus.



Si verò libeat minus extremum data media OB, & maiori AB reperire excitabis perpendicularem AF à puncto A, cuius longitudinis placeat V.g. AF, æqualemque deduces AT perpendicularem ab A, iungeſque TB, & ab F per O duces FI, & à puncto, quo ſecat in I rectam BA deduces perpendicularem IC, & vbi cadit in C erit extrema minor proportionalis harmonica CB.

Patet. Quia eſt eadem conſtructio, ac antecedens ſolo ordine variata.

Si verò, quis cupiat dato minori extremo CB, & media BO maius extremum. Is excitabit perpendicularem IC, cuius longitudinis libeat, & producet æqualem CE, perque punctum E à puncto B ducet rectam, & rurſus ab I per O aliam rectam, quæ ſe interſecabunt ſicubi V.g. in F. Ab F ergo puncto ad OB prolungatum duces perpendicularẽ, quæ cadet in A. Linea itaque AB erit maius extremum. Quod autem conueniant, patet: Maior eſt enim angulus externus B, quã angulus niger I internus acutus I, quod crus CO crure BC neceſſariò ſit minus in triãgulo OCI, ideoq; IF, & BF non poſſunt eſſe parallelæ, quod incidens EI non faciat angulos internum externo æquales.

Probatur verò prop ex eo, quòd ſit alio ordin eadem operatio, quæ priùs in prima parte propoſitionis, vt patet.

TRAC-

TRACTATVS XVI.

DE PROGRESSIONE PROPORTIONALI.

PARS PRIMA:

De Linearum Progreſsione Geometrica.

VIdimus progreſſionem numeris procedentem, & eius ſingulares affectiones ſpeculati ſumus; modo linearum progreſſionem proportionalem oportet animaduertere in multis à prima diuerſam, & præcipuè in eo, quòd in progreſſione numerali Geometrica vltimus numerus aſſignari nequit, ad quem progreſſio perueniat; hìc autem aſſignari poteſt vltimus lineę terminus, ad quem licet infinita progreſſio tendat, illumque conſequatur, ita vt inter aſſignata extrema omnis multitudo innumera proportionalium concludatur, quamuis ad illud extremum ſucceſſiuè procedendo nunquam ſit peruentura, in duas verò partes hunc Tract. ſecabimus, agendo priùs de Geometrica proportione, deinde de Muſica. Arithmeticam prætermittentes, vtpote à numerica non diſcrepantem.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam de progreſſionibus pertractemus ipſa principia, definitioneſque videre oportet.

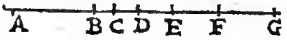
DEFINITIO I.

S*Eries Progreſſionis eſt quantitas finita diuiſa ſecundum proportionem Geometricam datam*

Sit quantitas aliqua finita data AB, quæ diuidatur ſecundùm proportionem AB ad AC; ita quod AB ſit ad AC, vt AC ad AD, & rurſùs AC ad AD, vt AD ad AE, & cæt. hæc eſt ſeries Progreſſionis Geometricæ.

DEFINITIO II.

G*Eometrica progreſſio eſt quotcumque terminorum ſecundum eandem rationem continuatio.*



Geometrica itaque progreſſio eſt illa continuatio diuiſionis ſecundum eandem datam rationem eiuſdem quantitatis, ita vt nullum includat finem ſecundum ſe. Iam verò vt de progreſſione numerica dictum eſt, alia eſt diſcreta, alia continua. Diſcreta eſt, quæ non progreditur per eaſdem rationes: continua verò per eandem datam rationem, aut perpetuò augetur, aut perpetuò diminuitur.

DEFINITIO III.

T*Erminus progreſſionis eſt feriei finis, ad quem nulla progreſſio pertinget, licet in infinitum continuetur. Sed ei perpetuò accedet.*

Itaque progreſſionis GF ad GE, & GE ad GD, & cæt. eſt A: quia licet diuiſiones perpetuò contingant viciniores puncto A illud tamen punctum conſequi non valebunt vt infra oſtendetur.

EXPENSIO II.

De progreſſionum terminis inuicem comparatis, & differentijs.

PRiùs conſiderabimus progreſſionem in ſe cōparando terminos terminis; deinde comparabimus progreſſiones inuicem; tandem acceſſum terminorum ad finem animaduertemus. Tripliciter autem comparari poſſunt inuicem termini, vel quoad ipſam proportionem, quam cum alio dicunt, & hoc ſufficienter aduertimus in proportionibus; tum numericis, tum quantitatis continuæ: at verò differentiæ terminorum, & eorum aggregata reſtant hic conſideranda.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Continuè proportionalium differentiæ ſe eadem proportione reſpiciunt, quà termini ipſi.

SInt in continua proportione AG, & AF, & AE, & AD, & cæt. *oſtendendam differentias quoque in continua correſpondentia, & eadem, quà propoſiti termini reperiri. & GF eſſe ad FE, vt FE ad ED, &c.*

Probatur Progreſſ. 1. Tota AG eſt ad AF, vt AF ad AE. Ergo *diuidendo* GF erit ad FA, vt FE ad EA; & *permutando* GF ad FE erit, vt FA ad EA: quæ eſt eadem, ac proportio AG ad AF in fig. defin. 1.

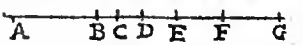
Progreſſ. 2. Repete idem argumentum de ſequentibus terminis FA eſt ad EA, vt EA ad AD. Ergo *diuidendo* FE erit EA, vt ED ad DA: Igitur *permutando* erit FE ad ED, vt EA ad DA; quæ eſt eadem, quam obtinet GA ad FA.

Itaque ex primo progreſſ. GF differentia eſt ad FE differentiam, vt GA ad FA: Ruſuſque ex ſecũdo progreſſ. FE eſt ad ED, quæ ſunt differentiæ, vt GA ad FA. Ergo eadem proportione fruuntur differentiæ GF, & FE, & ED, qua reperitur inter GF, & FA: Quare ſunt continuè proportionales: idéq; dicas de differentijs aliorum terminorum continuò proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si differentiæ ſint continuæ proportionales; etiam alij termini eadem proportione continua gaudebunt, dummodo duo primi gaudeant.

SInt differentiæ continuè proportionales GF, & FE, & ED in eadem figura, addaturque ipſis EA, ita quod terminus AG ſit ad AF, vt differentia GF ad differentiam FE. *Dico omnes terminos AG, & AF, & AE, & AD eſſe continuè proportionales.*



Probatur ex primo Progreſſ. Differentia GF eſt ad FE; vt AG terminus ad AF terminũ: Ergo *permutatim* differentia GF ad terminum AG refertur, vt differentiã FE ad terminum AF. Ergo *diuidendo* GF refertur ad FA, vt refertur FE ad EA. Quare *permutando* rurſus GF reſpicit FE veluti FA reſpicit EA, quæ eſt eadem proportio, quæ eſt GA ad FA, & ex datis FE ad ED. Quare GA, FA, & EA erunt in eadem proportione.

Progreſſ. 2. Sic quoque eodem diſcurſu differentia FE refertur ad differentiam ED, vt FA ex primo progreſſ. reſpicit EA ideo *permutando* FE in proportione ſe geret ad FA ſicuti ED eſt ad EA: Quare *diuidendo* FE erit ad EA proportionata, ſicut ED ad DA: Quare rurſus *permutando* FE erit ad ED, vt EA ad DA.

Quamobrem cum ex datis termini GA ſit ad FA; GF ad FE differentiæ, quæ ex datis eſt eadem proportio, ac FE ad ED; & rurſus FA ſit ad AE ex primo progreſſ. vt eadem FE ad eandem ED, & ex ſecundo progreſſ. EA ſit ad DA pariter, vt eadem FE ad eandem ED, patet, quod quatuor termini GA, & FA, & EA, & DA erunt in eadem proportione, & ſic dicas de alijs.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si plures fuerint quantitates in continuè proportione, & aggregentur binæ, & binæ, erunt aggregata in continuà proportione.

SInt V. g. in preced. fig. quatuor quantitates continuè proportionales GF, & FE, & ED, & DC; & ſimul ſumantur GF, & FE. Deinde FE, & ED, tandem ED, & DC. *Dico hæc aggregata eſſe quoque continuè proportionalia.*

Probatur Progreſſ. 1. GF eſt ad FE ex datis, vt FE ad ED. Ergo *componendo* GF, cum FE ad ipſam FE, erit vt FE cum ED ad ED: Igitur *permutando* GF cum FE erit ad FE cum ED, vt FE ad ED.

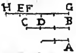
Progreſſ. 2. FE eſt ad ED veluti ED ad DC. Ergo ſimili diſcurſu *componendo* FE, cum ED ad ipſam ED erit in proportione, vt eſt ED cum DC ad DC, & *permutando* FE ſimul cum ED erit ad ED cum CD, vt ED ad DC. Sed hæc proportio ED ad DC eadem eſt ex datis, quę eſt FE ad ED: Ergo ſunt in eadem proportione aggregata GF cum FE, ad FE cum ED, & hoc FE cum ED ad ED cum DC, cum habeant eam proportionem, quæ eſt FE ad ED; quod erat præſtandum.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si ſint tres magnitudines, & minor terminus, differentiaque à mediocri, & huius differentia, differentia à maiori differentia ſint continuè proportionales, ipſi quoque termini erunt continuè proportionales.

SInt tres quantitates A, & BC, & GH, minorq; differentia CD, & hæc conferatur cum differentia maiori HF, & differat quantitate EF; ſintq; continuè proportionales EF, & CD, & A. *Dico ipſas quantitates HG, & CB, & A futuras eſſe continuè proportionales.*

Probatur. Ponitur differentia CD reſpicere minorem terminum A, vt EF differentia differentiæ reſpicit ipſam differentiam CD. Ergo *componendo* CD cum A, ideſt CB erit ad A, veluti EF cum CD ideſt HF, eſt ad CD: Quãobrem etiam *permutando* CB erit ad HF fundamẽta veluti A reſpicit CD termini. Quapropter rurſus *componendo* medius terminus CB, cum HF maiori differentia hoc eſt terminus maximus HG, erit ad CB, vt proportionem dicit terminus A cum differentia CD, hoc eſt CB terminus medius ad ipſum A terminum primum, quod erat probandum.



COROLLARIVM I.

COlligitur propoſ. conuerſa. Nam ſi quantitates A & BC, & GH fuerint continuè proportionales etiam differentia differentiæ maioris à minori, minor differentia, & primus terminus minor erunt continuè proportionales.

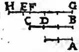
COROLLARIVM II.

QVod ſi differentis differentiæ EF differentia CD, & terminus primus minimus DA ſimul addantur, quod erunt continuè proportionales, patet ex prima huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Differentia differentiæ maioris, à minore ipſa differentia maior, & terminus maximus in quantitatibus continuè proportionalibus ſunt continuè proportionales.

SInt quantitates, vt in præced. figura continuè proportionales A, BC, & GH, & differentia EF differentiæ maioris HF à minori CM, & terminus maximus HO. *Dico eſſe continuè proportionales* EF, *&* HF, *&* HD.



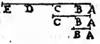
Probatur ex primâ huius, vt differentis HF ad differentiam CD, talis quoque eſt proportio termini HG ad terminum CB: quare *diuidendo*, vt HF reſiduum eſt ad CB ablatum, ideſt FO æqualem. Sic EF reſiduum ad differentiam CD, vel æqualem HE; Ergo *componendo*, vt HF cum FO, quæ eſt maior terminus ad HF maiorem differentiam. Sic erit EF cum HE, quæ eſt HE maior differentia ad EF differentiam differentiæ.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si ſint tres quantitates continuè proportionales, & maiori termino bis medius, ſemel vltimus aggregetur; Mediocri verò ſemel vltimus, erunt hæc aggregata, cum vltimo termino in continua proportione.

SInt tres quantitates continuè proportionales AB, & BC, & CD. Dico, quod ſi ſumantur omnea ſimul, & addatur BE æqualis medio termino; deinde ſumatur medius terminus ſemel cum minimo, & ſit CA, & tandem minimus, *quod omnes adhuc erunt continuè proportionales, & ita erit* BA *ad* CA, *vt* CA *ad* AE.

Probatur. Quoniam ponuntur continuè proportionales DC, & CB, & BA. Si arguatur à *compoſitione* rationum erit DC cum CB, ad cuius eandem proportione, ac CB cum BA ad BA. Ergo *permutando* erit DC cum CB linea proportionata ad CB cum BA, veluti eſt CB ad BA: Rurſuſque *componendo* erit DC cum CB, & CB cum BA ſimul, hoc eſt EA ad CB cum BA hoc eſt CA, vt CB cum BA, hoc eſt CA ad BA.



Itaque omnes termini BA, CB, & DC, & inſuper iterum medius CB, vel æqualis ED ad medium CB cum primo BA habent eandem proportionem, quã ipſe medius CB cum primo BA habet ad ipſum primum BA, quod erat oſtendendum.

EXPENSIO III.

De ſerie linearum proportionalium inuicem comparatarum.

VIſis proprietatibus differentiarum, ſimulque aggregatorum proportionalium terminorum, reſtat contemplari ſeries linearum ad inuicem comparatas, & maximè earum, quæ ab eodem principio enaſcuntur: hæc enim cognitio in primis deſeruit ad inueniendas areas Parabolarum, & Ellipſium, corporibuſque ſolidis, vt plurimùm dimetiendis.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si ſint duæ ſeries linearum proportionalium, & perueniant ad eundem terminum, etiam ſi ſequantur, termini ſequentes vnius ſeriei ad terminos alterius erunt, vt antecedentes, dummodò in eadem remotione à communi termino ſummantur.

SInt ABC ſeries vna decreſcens, FGC creſcens, & terminus communis C, & ſequantur in ſuâ progreſſione, & ſint termini in prima ſerie A, B, C, D, E; at in ſecunda F, G, C, H, I, *Dico, quod ſicut eſt* B *ad* G, *ita ſit* D *ad* H, & ſicut eſt A ad F, ſic reſpondeat in proportione E ad I.

Probatur. Quia BCD ponuntur continuè proportionales erit rectangulum ex B, & D ex propoſ. 19. lib. 6. elem æquale quadrato ex C facto: ſic ponuntur proportionales GCH erit æquale rectangulum ex G, & H quadrato C: Quare erunt æqualia rectangulũ ex H, & D, & rectãgulũ G, & H: habebunt itaque reciprocè latera ex 10. lib. 6. proportionalia, & ita erit B ad D, vt H ad D.



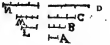
Similiter

Similiter A, B, C, D, E ſunt continuè proportionales: Ergo erunt ex *æquo* AEX continuè proportionales: Vnde vt priùs rectangulum ex AE erit æquale quadrato C. Pariterque FCI ex *æquo* erunt continuè proportionales; quapropter rectangulum ex F, & I erit æquale quadrato ex C. Vnde rectangula ipſa inuicem erunt æqualia, vtpote æqualia vni tertio, & hinc etiam latera ex to lib. 6. elem. erunt reciprocè proportionalia, & A erit ad F, vt I ad E.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Si ſint duo ordines continuè proportionalium incipientes ab eodem termino. Tertij termini primo incluſo erunt in duplicata ratione ſecundorum ad inuicem, & quarti in triplicata, & quinti in quadruplicata, & ſic in infinitum.

QVoniam ABC, & ALM ſunt continuè proportionales erunt quadrata ex A, & C æqualia quadrato B, & ex A, & M æquale quadrato ex L: ſed quadrata ipſa ſunt ex 21. lib. 6. Eucl. in duplicata ratione ſuorum laterum: Ergo etiam rectangula illis quadratis æqualia: Sed rectangula, vtpote eiuſdem altitudinis A ſunt inuicem, vt baſes C, & M, ergo C, & M erunt in duplicata ratione linearum B ad L.

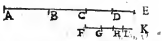


Lineæ verò quartæ erunt in triplicata: Nam quadrata ex C, & M ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum, quibus æquatur quadrato quidem C rectangulum ex B, & D, & quadrato ex M rectangulum ex L, N: quare inuicem ea rectangula erunt vt quadrata: ſed quadrata ex C, & M obtinent proportionem duplicatam laterum C ad M, quæ latera dicunt proportionem duplicatam reſpectu B ad L, ergo quadrata prædicta ex C, & N habebunt proportionem quadruplicatam eius, quæ eſt B ad L. Quamobrem rectangula quoque ex B, & D, & ex L, & N æqualia quadratis conſequentur rationem quadruplicatam linearum B ad L; ſed proportio rectangulorum eſt compoſita ex proportione laterum B ad L, & D ad N. Tolle itaque proportionem B ad L, cui erat quadruplicata, & remanebit proportio linearum D, N triplicata eius, quæ eſt B ad L; & ſic concludes de alijs.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series compoſita, ex paribus numero terminis ad aliam ex tot terminis conflatam, & in eadem proportione continuatam habet eandem multiplicatam proportionem, quæ ex terminis conflatur.

SInt duæ ſeries quantitatum in eadem proportione, ſed pari numero terminorum conſtantes AE, & FK V. g. quatuor, ita vt ſit AB ad BC, & hic ad CD, & hic ad DE, & hic ad FG in eadem proportione. *Dico, quod tota ſeries, ſeu quantitas* AE *ad quantitatem* FK *habet proportionem quadruplicatam vnius termini ad alium puta* AB *ad* BC.

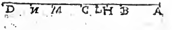


Probatur quilibet terminus obtinet proportionem quadruplicatam ad quemlibet terminum alterius ſeriei, & AB huius ad FG alterius quadruplicatam proportionem habet eius ex def. 7. Tract. 9. quæ eſt AB ad BC, quia per quatuor terminos AB, & BC, & CD, & DE vſque ad FG continuatur. Idem dicas de termino BC reſpectu termini alterius ſeriei GH & ſic de alijs: Quare omnes antecedentes termini in AE, qui conſtituunt AE ad omnes conſequentes in FK, nempe KF habebunt proportionem quadruplicatam quoque cum vnus antecedentium AB ad alterum conſequentium FG talem conſequatur proportionem, vt patet ex propoſ. 17. lib 5. elem.

PROBL. I. PROP. X.

Duas ſeries ſimilium proportionalium datis tribus terminis continuè proportionalibus exhibere.

SInt diſponendæ duæ ſeries continuè proportionalium, & dentur tres termini AB, & AC, & CD: Inueniatur inter AB, & AC, media proportionalis AH, & inter AC, & AN media proportionalis AL, & ſic ſemper fiat, & erit inuenta vna ſeries. Ruſus inter AC, & CD media proiiciatur AM, & inter AM, & AO media proiiciatur AN, & ſic ſemper fiat. Dico, *quod hæ duæ ſeries inuentæ erunt ſimiles, & quilibet terminus erit ad alium terminum ſimilis; ac quilibet terminus eiuſdem ſeriei erit ad alium ſibi correſpondentem.*



Probatur. Quoniam inter continuas proportionales AB, & AC, & AD medias proiecimus HA, AM erunt omnes in continuâ proportione: Quare ex prima h. etiam differentiæ erunt in cõtinua eadem proportione HC, & MD: HB, & CN.

Progreſſ. 2. Et quia inter AH, & AC eſt media proportionalis AL, erunt AH, & AL, & AC continuè proportionales, ſicut, & AM, & AN, & AD, quod NA ſit media, tales erunt, & ideo ex 1. huius etiam differentiæ erunt in eadem proportione, & HL erit ad LC, vt AL ad AC; Et pariter MN erit ND, vt AN ad DA, quæ eſt eadem, quæ AL ad AC, ex Theſi eo quod ſint mediæ proportionales AL, & AM inter ſimiles proportiones AN, & AC atque inter AM, & AD: Vnde, & differentiarum proportiones erunt ſimiles, eritque HL ad LC, vt MN ad ND.

Progreſſ 3. Et quia ex primo progr. eſt BH ad HC; vt CM ad MD. Erit quoque *componendo* BH cum HC, ideſt BC ad ipſam HC, vt CM cum MD ideſt CD ad ipſam DM.

Progreſſ. 4. Sic quia eſt ex 2. progr. HL ad LC, vt MN ad ND, erit componendo HL cum LC, ideſt HC ad LC, vt MN cum DN ideſt MD ad ND: Vnde erit BC ad CH veluti CD ad DM ex 3. progr. & ex 4. progr. CH ad CL, vt MD ad DN, & ſic conſequenter, ſi alij termini adſint.

THEOR. IV. PROPOS. XI.

* *Si ab aliqua data ſerie deſumantur alternè termini, & fiat ſeries, hæc ſeries ad primum terminum duplicatam habet rationem eius, quam habebat data ſeries ad ſuum primum terminum.*



SIt AZ data ſeries, à qua deſumantur alternè termini intermedio ſemper relicto vt AB, CD, & EF, & cæt. & fiat ſeries AX. Dico ſeriem AX eſſe ad primum terminum AB in duplicata ratione AZ ad AB.

Prob. AB eſt ad BC, vt BC ad CD, ergo ex æquo AB erit ad CD in duplicata ratione eius, quæ eſt AB ad BC, ſed, vt AB ad CD, ex 9. prop. h. ita eſt AX ad CX, cū illæ ſeries AX, & CX ob duplicādam eandem rationē ſint quoq; cōtinuè proportionales, ergo AX da CX duplicatā habet rationē AB ad BC, ſed vt AB ad BC, ita ex propoſ. 9. huius eſt AZ ſeries ad BZ ſeriem: ergo AX ſeries ad CX ſeriem duplicatam habet rationem ſeriei ZA ad ſeriem ZB, ergo p *conuerſionem* rationis erit quoque AX totum ad compartem AB, & primum terminum in duplicata ratione eius, quæ eſt totius AZ ad compartem AB, & primum terminum.

EXPENSIO IV.

De progreſſionis termino.

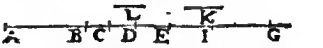
MOdo conſideramus progreſſiones linearum in partibus ſuis, ſed quatenus finitæ ſunt, & eſt vtiliſſima conſideratio maximè ad quadrandas ſuperficies Ellipticas, & Parabolicas, & huiuſmodi.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si in aliqua finita quantitate fuerit pars aſſignata in proportione ad reſiduum, vt pars reſidui in proportione eadem ad remanens aliud reſiduum; hæ partes in quantitate finita in infinitum multiplicari poſſunt.

SIt data magnitudo AO, & ſit in ea pars IO ad reſiduum ſuum IA, vt pars huius reſidui EI eſt ad ſuum reſiduum EA. Dico, *quod in infinitum in quantitate* GA *iſtæ partes poterunt multiplicari*: fiat GI ad IE ſic IE ad K.

Prob. Pr. I. Quoniam itaque eſt IG ad reſiduum IA, vt IE pars reſidui ad id, quod hinc reſtat EA; Erit quoq; *permutando* pars GI ad IE partem, nempe IE ad K ex conſtructione, veluti reſiduum IA ad aliud reſiduum EA. Quare rurſus *permutando* erit IE ad AI, vt K ad AE; Verū IE eſt minor, quàm IA. Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam K erit minor quam EA. Vnde ex EA poterit ſumi æqualis ED: Eruntque GI, & IE, & ED tres continuè proportionales: Sicut ex effectione erant IG, & IE, & K, & pariter erit IE ad IA, vt ED æqualis ipſi K ad EA, vt oſtenſum eſt.



Progr. 2. Quoniā itaq; eſt IE ad IA, vt ED ad EA erit quoq; *diuidendo* IE ad EA, veluti ED ad DA. Quare ſi inueniatur duabus IE, & ED tertia proportionalis L idem argumentum, quod ſupra iterabis. Nam, quia eſt pars IE ad reſiduum EA, vt pars ED ipſius reſidui ad reſiduum aliud DA, erit *permutando* IE pars ad ED partem, ideſt ex effectione ED ad L, vt reſiduum EA ad aliud DA, & rurſus permutando ED ad AE proportione reſpondebit, vt L ad DA. Verum ED eſt minor, quàm EA, vt dictum eſt. Ergo etiam L minor erit, quàm DA: Vnde ex DA poterit abſcindi DC æqualis ipſi L, & ſic in infinitum continuari.

COROLLARIVM.

QVod ſi fuerit pars ad reſiduum, vt huius pars ad ſecundum reſiduum, & proportio partis ad partem continuetur; continuabitur etiam proportio partium quarumcumque inuentarum ad ſua reſidua V. g. quòd ſi ED ſit tertia proportionalis tribus GI, IE, & ED, erit etiam IE ad EA in eadem proportione, vt ED ad DA: quia oſtenſum eſt in 2. progr. quando argumentati ſumus ex *diuiſione rationis* IE eſſe ad EA, vt ED ad DA.

Et idem dicas de parte DC: Nam; quia vt in fine 2. prog. oſtenſum eſt ED eſt ad EA, vt L, vel DC ad DA, ergo *diuidendo* ED erit ad DA, vt DC ad CA, & ſic continuè.

COROLLARIVM II.

*HInc eſt; quod ſi linea, vel magnitudo aliqua proportionali aliquo decreſcente creſcat augmento, quod illæ partes decreſcentes in infinitum poterunt in ea multiplicari. Nam in linea AO. Qui GI eſt ad IA, vt IE ad EA, erit etiam permutando GI ad IE, vt IA ad EA. Ponitur quoq; IE ad EA, vt ED ad DA ex effectione, ergo permutando erit IE ad ED, vt EA ad DA. Quia ergo eſt GI ad IE, vt IA ad EA. Et IE ad ED, vt EA ad DA. Ergo erunt GI, & IE, & ED partes continuæ proportionales, vt reſidui IA, EA, & DA; & ideo ex præc. in infinitum procedent.

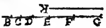
THEOR. II. PROP. XIII.

Si proportio maioris inæqualitatis continuetur magnitudo vltra omnem datam magnitudinem augetur.

SIt data proportio CB ad BD, & aſſignata quantitas E. Dico, quòd ſi hæc proportio continuetur

onetur; quantitatem illam maiorem quantitate K quantumlibet magnâ euaſuram.

Probatur. Differentia DC replicata multoties, certum eſt, quod tandem ſuperabit quantitatem K. Sed Additiones, quæ ipſi DB accreſcunt, ea proſecutione, & continuatione CB ad DB proportionis, ſunt maiores ſingulæ; quàm DC. Ergo continuatæ toties, quoties replicata eſt quantitas DC ſuperabunt ipſam K.



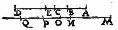
Quod autem differentiæ, ſeu additiones DC, & ED, & EF, & cæt. ſint maiores; quam DC; patet ex prima huius. Nam ſunt in eadem proportione, ac termini. Quadere, vt eſt DB ad EB termini; ſic differentiæ DC ad DE; ſed maior eſt BE, quàm DB, Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam ED, quam DC maior erit.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si à quantitate aliqua partes auferantur, vt ſit prima pars ad ſuum reſiduum, vt pars ipſius reſidui ad reſiduum ſuum; fiet tandem reſiduum datâ quacumque quantitate minus.

Sit quantitas AD V. g. linea, ex quà auferatur quantitas, & pars AB, & à reſiduo BD pars BC: ita quòd ſit AB ad BD, vt BC ad CD. Dico, *quod ſi hoc continuè fiat, relinqui tandem partem, qua libeat aſſignata MN minorem.*

Sit quantitas MN data, & reperiatur alia NO, cui ſit MN, vt reſiduum BD eſt ad totum AD, & continuetur hæc proportio, donec euadat maior in Q, quam AD; hoc enim eueniet aliquando ex præced. Deinde in ratione prædicta partis ad reſiduum diuidatur toties AD, quoties MQ diuiſa eſt, hoc enim poterit fieri in infinitum ex 12. huius.



Progreſſ. 1. Quoniam MN, & MO, & MP, & MQ ſunt continuè proportionales, erit MN ad MO, vt MP ad MQ; ſed ex effectione MN eſt ad MO, vt reſiduum BD eſt ad AD. Igitur MP erit ad MQ: vt DB ad AD. Et ideo *inuertendo* QM erit ad MP; vt AD ad DB.

Progr. 2. Rurſus *permutando* MQ erit ad AD, vt MP ad DB: ſed ex effectione MQ maior eſt, quam AD: Ergo etiam MP maior erit, quam BD.

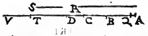
Progreſſ. 3. Deinde quia eſt AB ad BD, vt BC ad CD erit quoque *componendo* AB cum BD ideſt AD ad BD; vt BC cum CD, ideſt BD ad CD; ideoque proportio AD erit ad BD, vt BD ad AD, & etiam erit, vt MQ ad MP eadem, quæ eſt AD ad BD, vt dixi Progr. 1. & ex effectione MQ ad MP, eſt veluti MP ad MO; Quare cum ſit BD ad CD, vt PM ad MO, erit quoque permutando BD ad PM, vt CD ad MO: Sed maior eſt MP ex probatis, quàm AD. Ergo maior quoque erit MO, quam CD.

Idem autem oſtendes de MN reſpectu ED: quare erit maior MN data quantitas; quam ED, quod erat oſtendendum.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Si fuerit propoſita talis quantitatum ſeries, vt quilibet ablatus terminus ab aliqua alia ſit ad eius reliquum, vt ſequens terminus à reliquo ablatus ad id, quod denuò remanet; erit illa alia quantitas æqualis toti ſeriei infinitæ terminorum propoſitæ.

Sit ſeries infinita terminorum propoſita AB, BC, CD, & cæt. qui auferantur à quantitate AV; & quilibet V. g. AB relinquat reſiduum BV, ad quod ſit AB, vt BC alius terminus ablatus à reſiduo eſt ad reliquum ſuum CV. Dico; *quòd hæc quantitas AV æquat totam ſeriem.*



Probatur non erit maior tota ſerie; ſed nec minor: Ergo totam ſeriem æquabit.

Quod non ſit minor, patet ex 11. propoſ. Quia tota ſeries poterit intra ipſam continuari in infinitum; ita quòd numquam perueniatur ad V: Ergo quantitas AV minor non erit ſerie terminorum infinita.

Quod verò non ſit maior oſtenditur: nam ſi eſſet maior aliquo exceſſu eſſet maior. Sit is TV, & continuetur proportio AB ad BC in linea AV; donec ſit minor pars reſidua, quam TV, quod ex propoſ. præc. fieri poteſt: cum ergo ſeries infinita ſuperet AT: Ergo AV non ſuperat ſeriem terminorum omnem quantitate TV; ſed minore, eùm iam continuata minus relinquat, quam TV contrà hypotheſim; & ſemper idem argumentum vrgebit: Ergo quantitas AV nulla aſſignabili quantitate excedet infinitam ſeriem: ſed nec ea minor eſt: Ergo illam æquat, quod erat oſtendendum.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Datâ ſerie infinitâ terminorum per eandem proportionem procedentium, & primâ differentiâ inuenire magnitudinem, ſummæ omnium terminorum æqualem.

Sit ſeries infinita AB, & BC, & CD, & cæt. & differentia maioris termini à ſequenti BC, ſit AZ, & fiat differentia AZ ad primum terminum AB, vt AB ad aliud, & inueniatur AV: ex prop. 14. l. 6. elem. Dico *lineam AV toti magnitudini infinitæ terminorum æqualem eſſe.*

Probatur. Quoniam ex conſtructione AZ differentia eſt ad AB primum terminum, vt terminus AB ad quantitatẽ AV. Etiam *diuidendo* AZ erit ad BZ, eſt AB ad VB. Idoque *componendo* AZ cum BZ ad BZ, vt AB cum AV ad BV, hoc eſt AB erit ad BZ æqualem BC, vt AV ad BV.

Rurſuſque *permutando* AB erit ad AV, vt BZ idem terminus, qui ac ex effectione ad BV. Quare *diuidendo* AB erit ad BV, vt BZ, vel BC ad CV. Quare ex præced. AV æquabit totam ſeriem datorum terminorum.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc eſt, quòd, ſi fuerit AB ad AV, vt BC ad BV; quod AV æquabit totam ſeriem in finitorum terminorum. Item ſi fuerit AB ad BC, vt AV ad BV, vel BV ad CV: erit enim *permutando*, vt priùs AB ad AV, vt BC ad BV. Quare, & *diuidendo* AB erit ad BV BC ad CV.

Item ſi AV, BV, & CV, ſint continuè proportionales, quoniam *diuidendo* erit AB ad BV, vt BC ad CV. Quare ſemper quantitas AV æquabit infinitam terminorum ſeriem.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur, quod cum ſit AB ad BC, vt AV ad BV, & AV contineat omnes antecedentes alicuius ſeriei, & BV omnes conſequentes, licet in infinitum procedentes; quod tota collectio infinitorum antecedentium ad collectionem infinitorum conſequentium erit, vt vnum antecedens ad vnum conſequens.

COROLLARIVM III.

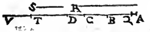
DEducitur quoque differentiam maioris termini à minore, & maiorem terminum, & totam collectionem terminorum eſſe in continuâ analogiâ: ſiquidem fecimus, vt AZ differentia ad AB primum terminum; ſic AZ ad aliud; & inuenimus totam collectionem terminorum infinitorum AV.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datam magnitudinem iuxta proportionem datam, ita diuidere; vt progreſſio ſecundum eandem ſeriem continuata terminetur in punctum deſtinatum.

SIt data proportio R ad S, & ſecundùm hanc proportionem ſit diuidenda AV, vt progreſſio terminorum finiat in V.

Diuidatur taliter AV, vt proportio AB ad BV ſit ea, quam habet R ad S ex prop. 13. Cor. 6. Elem. deinde iuxta proportionem AV ad BV, ſic fiat AB ad BC, & erit factum id, quod deſiderabatur.

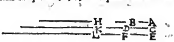


Probatur. Vt AV ad BV; ſic eſt AB ad BC. Ergo etiam ex propoſ. 22. lib. 5. Reliquum VB erit ad reliquum VC, vt AB ad BC. Vnde ex propoſ. 16. huius, terminus progreſſionis eſt V, hæc autem progreſſio ex effectione eſt vt R ad S.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datis pluribus rationum progreſſionibus inuenire quantitatem, quæ omnes adæquet.

SInt datæ tres proportionũ AB, & CD, & FE ſeries & ex 16. h. inueniantur tres quantitates, quę illas adæquent H, K, L, & hæ quantitates in vnam

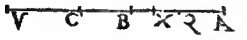


ſummam redigantur, eritque factum, quòd exoptatur.

Patet. Nam, cùm quælibet quantitas vt H æquet ſuam ſeriem V. g. proportionis A ad B, ſicut K ſeriem proportionis C ad D, & tandem L ſeriem proportionis F ad E; ſi ſimul colligantur eas omnes ſeries propoſitas tota æquabit.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam magnitudinem, ita ſecare, vt duplicis ſeriei idem ſit terminus.



SIt AV quantitas, & ſecetur in B; vt AB ſit ad BV, vt BC ad CV ex propoſ. 15. lib. 6. Elem: Rurſuſque ſecetur in Z, & fiat, vt AZ ad ZV; ita ZX ad XV, & ex propoſ. 15. harum duarum proportionum erit idem terminus V. Quod patet ex conſtructione ipſa.

TRAC-

TRACTATVS XVI.

PARS SECVNDA.

De Linearum Progreſsionibus Harmonicis.

ALij antecedentes Tractatus à diuerſis Auctoribus ſelecti ſunt, aliqui etiam multa additione cumulati, & omnes aliqua ſaltem propoſitione, aut oſtenſióne adaucti: hic Tractatus omnino meus. Licet; vt noſtri inſtituti eſt plurimis intermiſſis in compendium redactus.

EXPENSIO I.

De progreſſionis Harmonicæ continuatione.

DOcuimus ſupra datis duabus lineis, vel interſerere lineam mediam harmonice proportionalem; ſicut, & extremas inuenire: Modo docendum eſt eas continuare, & in plures terminos propagare, & prius declarationes dictionum nonnullarum oportet precedere,

DEFINITIO I.

CEntrum harmonicum eſt punctum, in quo plurimæ lineæ conueniant muſicas in proportiones aliquam lineam; vel aliquas lineas diuidentes.

Sic N in fig.ſequenti erit centrum, ſi lineę NO, & NP diuidant AB in partes proportionales.

DEFINITIO II.

LInea intercepta vocatur, quæ inter centrum, & primæ lineæ harmonicè diuiſæ extremum intercipitur.

Sic NB erit intercepta inter AB lineam harmonicè diuiſam, & N centrum.

DEFINITIO III.

BAſes æquales triangulorum ſunt partes æquales cuiaſdam lineæ interceptæ parallelæ, quæ radios terminant.

DEFINITIO IV.

RAdij harmonici ſunt lineæ quædam, quæ à centro eodem diſcedentes in baſes æquales terminant, & lineam aliquam, vel aliquas harmonicè diuidunt.

Lineæ itaque, quæ baſes æquales vocantur ſunt vt AO, & OP, & cæt. quæ radios NO, & NP, & cæt. recipiūt. Si ergo lineam aliquam V.g. AB in partes harmonicè proportionales diuidant, illi radij vocabuntur radij harmonici.

PROBL. I. PROPOS. I.

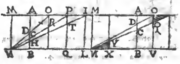
Datam lineam ita ſecare, vt ſingulæ partes ſucceſſiuè proportionem muſicam obtineant.

SIt AB diuidenda in partes muſicè continuè proportionales ita, quòd ſit BC, BD, BA in proportione muſicâ ſicut etiam ſunt BH, & BC, & BD, & ſic ſucceſſiuè. Ducantur duę parallelę per vertices AB, quæ ſint MI, & NL, & à puncto A ſumpta qualibet parte M A, ſingulæ fiant æquales in infinitum AO, OP, & PI. Sicut, & NB, innctiſque punctis N, & M à puncto N, ducantur rectæ NO, & NP, & IN in infinitum. Dico, *has partes, quas ducta in linea* AB *deſignant eſſe muſica proportione. ſingula toti correſpondentes*, & BH, & BC, & BD, & BA eſſe muſicè proportionales.

Aduerteq; quod non eſt neceſſe, parallelas MI, NL eſſe perpendiculares ipſi AB; ſed ad quemcunque angulum.

* Probatur ea eſt proportio muſica, quàm proportione Geometricâ, ita eſt primus terminus ad vltimum, vt differentia ad differentiam. Sed CB eſt ad BA; vt differentia CD ad differentiam DA. Ergo ſunt in proportione muſicâ.

Probatur verò aſſumptum: Ita eſt CB ad PQ, ideſt æqualem BA, vt OR ad MN, ideſt BA ob triangu-



lorum ſimilitudinem MNP, & NPQ: Quare RO, & CB erunt ex propoſ.9.lib.5. æquales: Cùm itaque ſit ob parallelismum linearum OR ad DC, vt NO ad DN, & vt NO ad DN, ſic MN ad DA; erit etiam OR, ideſt BC ad DC, vt MN hoc eſt BA ad DA: Quare *permutando* erit quoq; terminus BC ad BA totam, vt DC differentia ad DA differentiam.

Idem

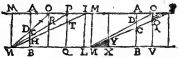
Idem oſtendemus de tribus BH, & BC, & BD, quod ſit BH ad BD termini extremi, vt CH ad CD differentiæ. Nam BH æquatur ipſi PT ob triangulorum PTI, & NHB in ſingulis ob parallelas æqualitatem, & æquales baſes NB, & PI ex hypotheſi: Quare erit, vt CH ad PT, vel BH; ſic NC ad NP; ſed NC æquatur ipſi RP: Ergo ſicut XP ad NP, ſic CH ad PT: ſed vt RB ad PN ſic RO ad MN. Ergo ex 9. lib. 5. RO erit in proportione ad NM, vt CH ad PT, vel æquali BH, ideſt, quæ CB ad BA, vt ſupra diximus. Sed OB ad NM, ideſt CB ad BA habent eam proportionem ex oſtenſis, quam DC ad DA; hoc eſt DB ob ſimilitudinem triangulorum DAO, & NDB: Ergo CH ad PT, ideſt BH, vt ſupra dixi eſt, vt DC ad BD: Quare permutando CM erit ad DC differentiæ BH ad BD termini. Quòd ſi ND non ſit æqualis reliquis AO, & OP, ſed quælibet, vel irrationalis, probl. tamen oſtendetur præſupponendo tamen AO, & OP æquales, vnde ex 4. lib. 6. Coroll. etiam CQ, & QP ob ſimilitudinem triangulorum ex parallelis ortum erunt æquales.

Quoniam ita eſt DA ad NM, vt AO ad OM, & OD ad ON, & ideo, vt QC ad QN. Fiat NX æqualis OP, & ducatur XY. Erit igitur YX ad QV, vt NY, quæ æquatur ipſi QP, & ideo ipſi CQ eſt ad NQ. Quod enim NY ſit æqualis ipſi QP: patet: Quia ob parallelas triangula NYX, & OQP ſunt æqualia in angulis, imo etiam in lateribus ex eo, quia fecimus NX æqualē OP: vnde, & cætera crura vnius, alterius cruribus erunt æqualia. Cùm itaque ſit YX hoc eſt OQ ad QV, vt NY, ideſt QP, & ideo CQ ad NQ, & OQ ad VQ, vt CD ad CB ex propoſ. 4 Elem. Coroll. Ergo DC erit *ex æquo* ad CB, vt CQ ad NQ, ideoq; *ex æquo* rurſùs, vt DA ad MN. Cum ergo ſit DC ad CB, vt DA ad MN erit *permutando* DC ad DA, vt CB ad MN, ideſt æqualem AB, nempe, vt differentia DC ad differentiam DA, ſic erit terminus BC extremus ad terminum extremum BA.

PROBL. II. PROPOS. II.

* *Plurimas lineas in infinitum inuenire, quæ proportione Muſicâ decreſcant, vel accreſcant.*

FIat eadem operatio, quæ priùs, & vtere eadem fig. & dico NM, DA, OR, PT *continua proportione muſica decreſcere.*



* Probatur. Similitudo enim triangulorum efficit; vt PT æquetur ipſi BH; ſunt enim ſimilia triangula NHB, & PTI ob angulos ob paralleliſmum linearum æquales. Sic OR æquatur ipſi CB. Sic DA ipſi BD; ſed BH, & BC, & BD, & BA ſunt in proportione muſicâ, vt oſtendimus. Ergo etiam PT, & OR, & DA, & MN, erunt in proportione muſicâ.

Sit deinde data PT, cui plurimas in proportione muſicâ reſpondentes volumus inuenire. Ducatur ad eius extremum P linea MI, & aſſumpta in ea placita parte PI in reliquo numerantur partes quotquot voluntas erit ei PI æquales, vt PO, & OA & AM; eriganturque MN, AD, OR parallelæ ipſi PT à punctis M, A, O, & ducetur ab I per T extremum datæ recta, quæ illam ſecet in N, & à puncto N rectæ ad ſingula puncta ducantur A, O, P; Eruntque ſegmenta intercepta NM, DA, OR, & PT muſicè continuè proportionales; patet ex præcedenti.

THEOR. I. PROP. III.

* *Linea diuiſa ſucceſſiuè; ſecundum proportionem muſicam erit diuiſa in partes ſucceſſiuæ denominationis.*

SIt linea AB diuiſa in partes Harmonicè proportionales DB, & CB, & HB. Dico *eam eſſe diuiſam in partes ſucceſſiuè denominationis* V. g. primo in duas, ſecundo in tres, tertio in quatuor; ita vt primus terminus ſit tota, ſecundus dimidia, tertius tertia pars, quartus quarta, & cæt.

Aduerte tamen, quòd non intendimus probare quod neceſſariò ordo incipiat à dimidia, cum poſſit incipere à qualibet alia denominatione V. g. à quarta, ſeu quinta parte, ſeu etiam irrationalis omninò ſit; nec poſſit ſubire denominationem aliquam ſeriei harmonicæ.

* Probatur autem ita eſt DA ad MN, vt AO ad OM ob parallelas ex 4. propoſ. lib. 6. Elem. ſed AO eſt dimidium OM ex effectione. Ergo, & DA erit medietas lineæ AB. Sic CB erit tertia pars lineæ totius AB.

Prob. autem; quia CB eſt ad PQ, vel AB, vt NB ad NQ; ſed NB ex effectione eſt tertia pars NQ. Ergo etiam CB taliter erit in proportione geometrica reſpectu totius AB.

Sic oſtendetur de HB quod ſit tertia pars totius AB, & ſic de reliquis. Quod ſi AM ſit irrationalis reſpectu AO etiam tota compoſita MO ad AD irrationalis erit ex propoſ. 10. lib. 10. quare, & omnes MO, MP, & cæt. vtpote ex incommenſurabilibus compoſita magnitudo, vnde DA quoque ad MN incommenſurabilis erit, & ſic dices de alijs.

COROLLARIVM

HInc eſt quod ſi lineam quamcumque ſucceſſiuè, primò in tres V. g. ſecundo in quatuor, tertiò in quinque, quartò in ſex diuidas, hæ omnes partes erunt muſicè proportionales, eritque tertia pars ad quartam, & hæc ad quintam, & cæt. ſucceſſiuè in proportione Harmonica proportionalis.

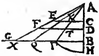
PROBL. III. PROPOS. IV.

* *Datá lineá harmonicè ſecta alias quaſcumque in infinitum harmonicè ſimiliter ſecare.*

SIt data recta AB ſecta in C, & D harmonicè, & oporteat alias ſimiles ſecare. Ducantur à punctis BCD parallelæ CE, & DF, & BG, menſureturq; ſuper AB prolungatam, ſi neceſſarium ſit, longitudo lineæ diuidēdæ AH; Facto ergo centro in A interuallo AH portio circuli ducatur HI, & punctum, quo ſecat BG connectatur cum A centro recta AI. Dico AI ſectam eſſe, vt BA harmonicè in ..., ... T.

* Pro-

Probatur. Nam ex Propoſ.4. lib.6. vt eſt AC ad CB, vt AK ad KI, ergo componendo AC eſt ad AB, vt AK ad KT, quod memoriâ tenendum.



Rurſus AC ad AX; ſic eſt AB ad AI; & AD ad AT. Ergo ex p.22. l.5. erit pars CD reſidua ad partẽ KT reſiduam, & pars DB ad partem TI, vt AB ad AT totum, vel vt DA ad AT alterum totum. Cum ergo ſit CD ad KT, vt DB ad TI erit etiam *permutando* CD ad DB, vt KT ad TI: Sed CD eſt ad DB, vt AC ad AB, ex *hypotheſi*: Ergo etiam KT erit ad TI, vt AC ad AB: ſed vt AC ad AB, ita eſt AX ad AI. Ergo erit AK ad AT, ſic differentia KT ad differentiam TI: ſed etiam ex propoſ.13. lib.6. eſt ſecta ſimiliter, ac AB, ergo habemus intentum: Sic dices de alijs lineis AQ, & AX, & quibuſcumque ſimilibus.

EXPENSIO II.

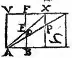
De comparatione vnius ſeriei harmonicæ ad aliam.

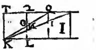
VIſa continuatione ſeriei muſicæ; modo eam alij ſeriei comparare oportet.

THEOR. I. PROPOS. V.

* *Duæ ſeries Harmonicorum proportionalium baſibus ſuis ſibi inuicem æqualibus ſitæ, & à linea aliquota incipientes; eandem proportionem inuicem ſemper ſeruant.*

SInt duæ ſeries proportionalium Harmonicorum ſecunda BF, & BE, & BD, & AC. Prima LZ, & LO, & LN, & quatum radij cuiuſcumque in baſes æquales terminent, & primus ſit tota linea BF, vel LZ ſecundus medietas BE, & LO, & ſic de reliquis. Dico eam proportionem, quam habet LZ ad BF primus terminus vnius ſeriei, cum primo termino alterius perpetuò ſeruari reſpectu terminorum ſequentium ita, vt alter alteri correſpondenti ſit in eadem proportione, nempe ita erit, vt tota LZ ad totam BF, ſic OL ad BE, & LN ad BD, & cæt.





* Prob.Prog.1. Nam cum QZ ſit medietas, & pariter XF ſit medietas lineæ XV; ita erit QZ ad QT vt XF ad XV, ideoque ZO ad KT, vt EF ad AV. quare permutando erit OZ; ideſt OL ad BF, vel ED vt KT ad AV. Deinde Pr.2. vt KO ad KQ, ſic eſt ON ad QI, ideſt æqualem NL, & vt AE ad AX, ſic EO ad XP, ideſt æqualẽ CB, ſed vt KO ad KQ, ſic eſt AE ad AX, ergo, vt ON ad NL, ſic eſt ED ad OB, vel *conuertendo* NL ad ON vt DB ad ED. Quare erit OZ ad KT, vt EF ad AV ex primo progr. & ON ad NL, vt ED ad OB ex ſecundo, & ideo permutando OZ ad EF, vt KT ad AV, & ON ad BO, vt NL ad DB.

Cum ergo ſit quoque ZO ad KT, ideſt EF ad VA, vt ON ad NL, ideſt ED ad OB, vt demonſtrationis ſerie dictum eſt, erit quoque *permutando* ZO ad ON, ideoque EF ad ED, vt KT ad NL, & ideo, vt VA ad OB. Igitur erit permutando, vt KT ad VA, ſic NL ad DB.

Quod vt clarius innoteſcat faciamus, quòd linea FB ſit 48 partium, & linea TK, ſeu ZL 36. nimirum $\frac{3}{4}$ ipſius FB. In prima ergo diminutione ex propoſ.3. huius BB erit $\frac{1}{2}$, ideſt 24. & OL $\frac{3}{8}$ ideſt 18. At vero 18 ad 24. ſeruat proportionem, quam habet tota ad totam, quæ eſt $\frac{3}{4}$. Sic linea DB erit partiũ 16. & NL partiũ 12. quia quælibet erit $\frac{1}{3}$ totius, at vero 12. ad 16. eſt eadẽ proportio 3. ad 4 &c.

PROBL. I. PROPOS. VI.

* *Seriem proportionis Muſicæ ſimiliter alteri ordini propagare.*

SIt datus ordo primus, & oporteat alium ordinem in data proportione extendere: Fiat primus terminus AB ordinis propagandi maior, vel minor iuxta placitam longitudinem, & tot numero partes cuiuſcumque magnitudinis illæ ſint inuicem æquales intermedient inter centrum A, & primũ terminũ BF in hac ſecunda ſerie, quot numero intermediant inter centrum K, & terminum primum ZL in primâ ſerie, & in præced. propoſ. ſchemate, & deinde ordo conſequens terminorum propagetur, vt docuimus propoſ.2. huius, & erit progreſſus harmonicus 2. ſimilis propoſito primo.

Probatur eodem modo, ac præced. propoſ.

THEOR. II. PROPOS. VII.

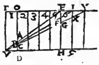
* *Omnes proportiones muſicæ ſimiles ſunt in proportione Geometrica alteri ab vnitate denominatæ, ſi tamen ſint rationales.*

SIt proportionis Muſicæ ſeries AD, & BD, & CD tres termini. Dico tres terminos EH, & FH, & GH eſſe quoq; muſicè proportionales, & quamuis alius denominationis; eſſe tamen geometricè ſimiles præcedentibus.

* Probandum itaque primo tres terminos EH, & FH, & GH eſſe muſicè proportionales, & hoc oſtenditur. Quoniam vt eſt primus EH ad vltimum GH, ſic eſt differentia EF ad differentiam FG.

In ea proportione eſt EF ad TV ex 4. prop. lib 6. vt BI ad IT, & IF ad IV, & XG ad XV, vel æquales VC ad VX, ſed vt VC ad VX; ita eſt CD ad XZ, ſed CD æquatur IX, ſunt enim æquales ob ſimilitudinem triangulorum VCD, & XIY æqualium quoque laterum YI, & VD ex hypotheſi. Quare erit VC ad VX, vt IX ad XZ: ſed vt XI ad XZ, ſic ex Coroll. prop. 4. lib.6. eſt FG ad GH. Ergo FG ad GH, erit, vt VC ad VX: ſed vt VC ad VX, ſic eſt VB ad IV, vel æquales FI ad IV, & vt FI ad IV, ſic eſt BI ad IT, & EF ad TV. Ergo ex 16 l.5.el. vt FG ad GH, ſic eſt EF ad TV, ideſt æqualem EH. Vnde *permutando*, vt eſt FG ad EF differentiæ ſic GH ad EH terminos. Vnde cum ſit differentia ad differentiam, vt terminus ad

terminum erunt termini EH, & FH, & GH Harmonicè proportionales.



Probatur quoque. Sint alius denominationis, quam ea priùs propoſita, quæ denominatur ab vnitate, vt ea in quam diuideretur OH, quæ eſt tota $\frac{5}{5}\ \frac{5}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{5}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{5}{7}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{9}$. Nam FH primus terminus poſt totam lineam HE eſt ad totam HE, vel IZ, vt VF ad VI: ſed VF ad VI ſe habet ex hypotheſi, vt 5. ad 6. Ergo etiam ſecundus terminus HG ſe habebit ad primum, vt 5. ad 6. Sic tertius terminus GH ad totam ſe habet, vt VO ad VY; ſed VO ad VY ſe habet, vt 5. ad 7. Ergo etiam GH ad totam HE ſe habebit, vt 5. ad 7. & ſic procedendo quartus erit, vt 5. ad 8. vnde ſeries erit tota $\frac{5}{6}\ \frac{5}{7}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{9}$, &c.

Probatur tãdem, quod ſint in eadem proportione Geometrica cum ſerie, quæ denominatur ab vno Nam ex Coroll. prop. 4. lib. 6. vt differentia AB ad differentiam BC, ſic EF ad FG, differentiæ quoq; alius ſeriei, & vt CA ad CD, ſic EG ad GH. Quare *componendo* AC cum CD idest AD terminus maior ad CD minorem, ſic EG cum GH, ideſt EH terminus maior in alia ſerie ad GH terminum minorem. Patet etiam, quia $\frac{5}{6}$, & $\frac{1}{6}$ ex Tract. 13. Coroll. prop. 27. ſe habent, vt 1. ad 5. & ſic $\frac{1}{9}$, & $\frac{5}{9}$ habent 1. ad 5. & ſic ſemper eodem modo ſe habet.

PROBL. II. PROPOS. VIII.

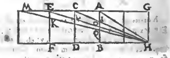
Series Harmonicas proportionalium reperire datæ denominationis in aliqua linea.

SIt Schema præcedens, & velimus reperire proportionem harmonicam in data linea EH, quæ ſe habeat ad aliam in eadem linea continuatam, vt 1. ad 5. Per extremum E ducatur linea TI, & quinque æquales partes, vt EI numerentur ab E verſus T; erigaturque TV æqualis datæ EH. Deinde rurſus in alteram partem portiones primis æquales numerentur, quantùm placet, vt EI, & IV, & cæt. ducanturque ab V rectæ, vt VI, & VY, & cæt. nam diuident lineam EH in partes, quæ ad aliam ſeriem datam, in quam diuiſa eſt OD erunt ſinguli termini, vt 1. ad 5. Patet ex præced. oſtenſione.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series harmonicas proportionalium reperire iuxta datam proportionem in pluribus lineis.

SInt reperiendæ plures lineæ, quæ dicant inuicem proportionem harmonicam, & ſint ad alias proportionem harmonicam dicentes vt 3. ad 1. fiant lineæ parallelæ AB, CD, & EF, & æquali diſtent interuallo, & recta coniungantur A, E puncta, & erunt æquales AC, & CE. Sumantur ergo in AG duæ partes æquales ipſi AC, & ducatur parallela GH ipſi AB. Deinde per E recta parallela ipſi GE ducatur, quæ cum GH conueniet in H: Ab H ergo ad C, & E, & cæt. radij ducantur, & ex præc. AB erit diuiſa in terminos harmonicos iuxta datam proportionem, ita vt AB tota $\frac{3}{3}$ IB $\frac{3}{4}$, OB $\frac{3}{5}$ QB $\frac{3}{6}$, & ſe habebunt ad aliam $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, vt 3. ad 1. modo dico, quod etiam lineæ AI, CL, & EK ſunt in eadem proportione ac IB, & OB, & QB. Vnde ſe habebunt ad ſeriem $\frac{3}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{6}$ eodem modo ac 3. ad 1, cum, & etiam ipſi ſint $\frac{2}{3}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{5}\ \frac{2}{6}$.



Probatur triangulum HIB eſt æquiangulum triangulo AIC, ob angulos C, & H inter parallelas alternos, & angulos apud I ad verticem. Quare erit ex 4. lib. ſexti AC ad AI, vt HB ad IB, & *permutando* AC ad HB, vt AI ad IB. Rurſus HOB triangulum eſt æquiangulum triangulo CLE ob eandem rationem. Quare ſimiliter arguendo ex 4. l. ſexti & *permutando* CA erit ad HB, vt CL ad OB. Rurſuſque triangulum HQB eſt æquiangulum triangulo EAM, quare erit eodem modo EM ad HB, vt EK ad QB. Sed tres, vtpote æquales AC, & CE, & EM habent eandem proportionem ad eandem HB. Ergo etiam tres AI, & CL, & EB ad tres IB, & OB, & QB, vtpote eiuſdem proportionis trium æqualium ad HB habebunt eandem proportionem. Quare erit IA ad BI, vt CL ad OB, & EK ad QB. Quare permutando AI erit ad CL, vt IB ad BO, & CL ad EK, vt OB ad QB.

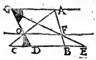
LEMMA I. PROP. X.

Si inter duas parallelas crura duorum triangulorum æqualium baſium ſe intercipiant, linea per eorum interſectiones ducta erit parallela baſi, & triangula, quæ fiunt æqualis altitudinis.

SInt duo triangula quæcumque ABC, & GED quorum crura ſe decuſſent in F, & O. *Dico, quod linea FO ducta per F, & O eſt parallela baſi FC.*

Probatur triangulum AFG eſt æquiangulum triangulo EFB, quod angulus B ſit æqualis angulo G nigro, vtpote alterni inter parallelas ex propoſ. 30. lib. 1. Elem. & anguli quoque apud F ſint ad verticem, & ideo æquales: vnde, & reliqui ex Coroll. 2. prop. 17. lib. 1. Elem. Quare AG ad AF, vt EB ad FB, & *permutando* AG ad EB, vt AF ad FB: Sic quoque dicendum de triangulis AOG, & DOC ob angulos alternos nigrum ad D, & feminigerrimum ad G æquales, & angulos ad verticem æquales quoque. Quare erit, vt AG ad AO, ſic DC ad OC. Quare *permutando* erit AG ad DC, vt AO ad OC, ſed EB, & DC ſunt æquales cum baſes triangulorum præſupponantur æquales; Vnde ablata parte ED communi, reliquum EB, & DC eſt æquale. Quare AO ad EB, & eadem AG ad DC dicet eandem proportionem ex 7. lib. 5. vtpote ad æquales. Quare erit etiam eadem proportio AF ad FB, quæ AO ad OC. Quare cùm crura trianguli ſint diuiſa proportionaliter linea tranſiens per diuiſiones F, & O erit parallela baſi BC ex prop. 2 lib. 6. & triangula EFB, & DOC ex propoſ. 40. lib. 1. Coroll. 2. erunt æqualis altitudinis.

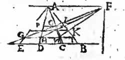
THEOR.



THEOR. III. PROP. XI.

* *Si plurima triangula æqualia æqualiũ baſium in vnum verticem conueniant, & recta aliqua baſi non parallela in ea incidat, & ſecet, parallelæ baſibus à ſectionibus crurum ductæ omnia crura ſecabunt harmonicè proportionaliter.*

SInt triangula ABC, & ACD & AED, & cæt. quæ in vnum verticem A conueniant, & eorum ſint æquales baſes: ſecetque eorum crura aliqua FG. Dico, *quod ſi ducantur per eorum interſectiones parallela baſi* BE *iſta in partes harmonicè proportionales diuident omnes lineas ſectas, & crura triangulorum.*



* Quod vt oſtendatur ducatur baſi AE parallela FA à verticibus triangulorum; donec occurrat obliquæ ſecanti GF; occurret enim, cùm incidens FG baſibus parallela non ſit, & à puncto F, ducatur FH, & FN Quia ergo HN, NI, & HG aũt æquales, q: ex Cor prop. 4. l. 6. el. HG eſt ad HN, & NI; vt ęquales ex theſi, DE ad DC, & CB. Ex 1. propoſ. AB erit ſecta harmonicè proportionaliter, & AI, & KA & AL erunt tres termini harmonici, quo ſuppoſito.

* Probatur. Parallelæ ductæ ab interſectionibus O, P, G crurum ab FG incidente factis tranſeunt neceſſariò per puncta IKL. Ergo eam diuidunt in partes proportionales harmonicè IA, & KA, & LA. Triangula HFG ex præced & IKN ſunt æqualis altitudinis. Ergo parallela à P diſcedens incidet in punctum K ex prop. 39. Cor. l. 1. in verticem trianguli IKN. Sic triangulum NOG æqualis altitudinis eſt velut ILH: Ergo parallela diſcedens ab O incidet in punctum L: Quare eodem modo IA diuidetur in partes proportionales, ſic à radijs NF, FH, & FG, vt à parallelis LO, & KP, & IH. Cùm ergo IA ſit diuiſa in partes harmonicè proportionales, etiam omnes CA, DA, & EA ab iiſdem parallelis erunt diuiſæ ex propoſ. 4. huius.

COROLLARIVM.

*HInceque patet quomodo poſſimus diuidere in partes harmonicas plurimas lineas ſimul, & plures ſeries harmonicorum terminorum efficere.

EXPENSIO III.

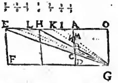
De interpoſitione Harmonicorum terminorum.

INterpoſitio terminorum eſt cum inter duos terminos alij termini interiaciuntur, ita tamen, vt ſit adhuc continua ſeries proportionalium eo modo, quo continuatur proportio Harmonica.

PROBL. I. PROPOS. XII.

* *Terminos continuè proportionales harmonicè inter terminos harmonicos conijcere.*

SInt dati tres termini continuè proportionales harmonicè AD, & BD, & CD nempe 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. & oporteat inter eos alios terminos interponere, qui proportionem contineant. Sint verò termini AD, & BC, & CD inter parallelas AF, & EF, lineiſq à centro G egredientibus OH, & GE determinati, eruntq; æquales AH, & HE. Diuidantur itaq; AH, &



HE ſecundum terminos, quos volumus interponere V. g. 3. ita quòd primus terminus ſit, vt 3. ad 3. ſecundus, vt 3. ad 4. tertius, vt 3. ad 5. &c. Deinde ad ſingulas diuiſiones à centro G rectæ ducantur GI, & GH, & GL, & cæt. & erit factum, & ſic procedent termini.

$$\frac{3}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{9}$$

*PRobatur. Nam ex prælibatis huius in prima propoſ. AD primus terminus erit ad AD vltimum, vt differentia AM ad differentiam MN, & MD erit ad BD, vt differentia MN ad differentiam NB. Ergo inter AD, & BD duos terminos termini duo interpoſiti ſunt MD, & ND. Et ſic dicas de cæteris, quod verò ſint datę denominationis patet ex prop. 8. huius.

EXPENSIO IV.

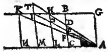
De terminis inuicem comparatis, & differentijs.

IAm ex ipſa definitione proportionis harmonicę notum eſt duas differentias harmonicas inter tres terminos eſſe inuicem, ut primus terminus ad tertium, & ideo etiam permutando eſſe differentiam maiorem ad maiorem terminum, vt minor differentia ad minorem terminum: reliquas igitur proportiones indagabimus.

THEOR. I. PROP. XIII.

* *Maior terminus eſt ad ſummam omnium differentiarum, vt æquales baſes cum intercepta ad ipſas æquales baſes.*

SIt ſecta AC in partes proportionales harmonicè in D, E, F. Differentiæ erunt EO, & OB, & BF, & ſumma earum BF. Dico, *quòd ita ſe habet* AG *primus terminus ad totam ſeriem, & ſummam differentiarum* BF, *vt* AC *intercepta, vel æqualis* GB *cum æqualibus baſibus* omnibus ſimul ſumptis AH, & HI, & IK, ad ipſas æquales baſes ſimul ſumptas.



Probatur. Nam ex 4. lib. 6. vt BK ad AG, ſic eſt AF ſumma differentiarum ad AG primum terminum.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Minor terminus omnium ita eſt ad ſummam omnium differentiarum, vti intercepta ad omnes baſes æquales.*

SIt figura, quę præcedentis propoſ. Minor terminus omnibus alijs terminis erit FC, & ſumma differentiarum erit FB. Intercepta AC omnes baſes æquales BK. *Dico, quòd* FC *ſit ad* FB, *vt* AC *eſt ad* BA.

* Probatur AVC triangulum eſt æquiangulum triangulo BFK: quia anguli apud F ſunt ad verticem anguli verò ad A, & K alterni. Ideoque ex propoſ. 11. lib 6. elem. AC erit ad FC, vt BK ad FB ideo *permutando* AC erit ad BA, vt FC ad FB.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Termini ad inuicem maior ad minorem ſunt in eadem proportione, ac æquales baſes cum intercepta ad ipſas æquales baſes cum intercepta minus vna æquali baſi.*

SIt eadem fig. quæ ſupra. *Dico* AC *terminum eſſe ad* DC, *vt* GH *ad* GB, *&* DC *eſſe ad* EC, *vt* GI *ad* GH, *& è contra inuertendo.*

Probatur. Nam ADC, & DBH ſunt æquiangula triangula: Ergo ex 4. lib. 6. AC erit ad DC, vt BH ad BO: Quare *permutando* AC. vel GB ei æqualis erit ad BH, vt DC ad DB, & ideo *componendo* AC, vel GB cũ BH erit ad GB, vt DC cum DB ad DC, ideſt HO addita baſis, & intercepta erit ad interceptam BG, vt terminus BC ad terminum DC.

* Probatur quoque de reliquis terminis: nempe de termino DC reſpectu termini AC. *Dicoque quòd* DC *ſit ad* AC, *vt* GB *ad* GH.

Triangulum HIO eſt æquiangulum triangulo ABC ob parallelas, inter quas eſt. Quare vt priùs AC erit ad EC, vt HI ad HO; quapropter *permutando* AC, vel GB æqualis erit ad HI, vel æqualem AH, vt EC ad HO: ſed eadem AC erat in preced. part. huius prop. ad BAH, & ideo ad æqualem HI ex hyp. vt CD ad BO. Ergo ex 16. l. 5. vt CD ad BD ita EC ad HO, & hinc *permutando* CD ad EC, vt BO ad HO: Sed producta AH in T ob equalitatem triangulorum HTI, & HBD ipſa TI æquatur ipſi BD: Proportione autem reſpondet TI, ideſt BD ad HO, vt TA ad AH, & vt IG ad OH, & conſequenter ex 16. l. 5. CD erit ad EC, vt IO intercepta cum additis omnibus ad OH interceptas cum additis vna minus, ita in quam erit terminus CD ad terminum EC.

Eſt autem IG ad HG, vt TA ad HA, quia ob triangulorum THI, & HGA ſimilitudinem TH eſt ad HA, vt FH ad HG, ideoque *componendo* TA eſt ad HA, vt IG ad HG, & ideo, vt TI, vel BO ad OH.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

* *Si intercepta ſit irrationalis, etiam termini Muſici erunt irrationales, ideſt nullo numero exprimibiles.*

SIt AC intercepta irrationalis: Dico, *quòd termini erunt irrationales* BC, *&* DC, *&* EC.

* Probatur. Quia AC ponitur irrationalis ipſi AH ideſt æqualis CL etiam compoſitũ LA erit irrationale ex propoſ. 10. lib 10. vtrique parti componenti, nempe ipſi CL, & ipſi AC. Sed vt eſt AL ad AC, ſic BC terminus ad DC terminum: Ergo ex propoſ. 5. lib. 10. elem. termini ipſi inuicem erunt incommenſurabiles BC, & DC.

Idem argumentaberis de terminis DC, & EC. Nam AC ponitur incommenſurabilis ipſi GL: Ergo etiam ipſi æquali LM. Quamobrem, & compoſitũ ipſarũ AL erit incõmenſurabile ipſi LM. Vnde ſi LM, & AL incõmenſurabiles cõponantur AM totũ erit incommenſurabile ipſi AL; ſed vt MA ad AL, ſeu, vt BO ad GH: ſic eſt ex 15. huius DC ad EC, Ergo, & DC ipſi EC erit incommenſurabilis, & ſic dicas de reliquis.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Poſita intercepta incommmenſurabili, reliquæ omnes differentiæ inuicem erunt incommenſurabiles.

POnatur intercepta incommenſurabilis. Dico differentiam DA eſſe incommenſurabilem ipſi differentiæ OE.

Probatur DE eſt ad FA differentiæ, vt termini DC ad CF: ſed termini ſunt incommenſurabiles, ergo ex 5. lib. 10. & ipſæ differentię, quòd verò primus terminus ad tertiũ incõmenſurabilis. Prob. ſic DC eſt ad EC, vt AM ad AL, & ex prop. 15. huius EC eſt ad FC, vt AN ad AM: Ergo DC eſt ad FC ex æquo, vt AN ad AL, Sed NA, & AL ex dictis in præc., ſi AC ſit incommenſurabilis, ſunt incommenſurabiles, Ergo etiam DC, & FC termini.

EXPENSIO IV.

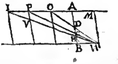
De progreſſionis Harmonicæ extremo.

Sicut in progreſſionis Geometricæ continuatione extremum eſt, ad quod nulla progreſſio, quantumuis multiplicata, peruenire poteſt; ita & Harmonicum extremum eſt, quòd nulla progreſſio harmonica valet conſequi, quod vt demonſtratione firmetur ſit.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Nulla progreſſio harmonica extremum ſuum conſequi poteſt, quamuis vt vtlibet multiplicata.

Sint termini harmonici AB: & DB, & CB, & HB. *Dico, quod etiam ſi ſine meta multiplicentur nunquam poterunt conſequi extremum* B.



Probatur ex propoſ. 15. huius: Nam terminus penultimus CB erit ad vltimum HB, vt MI ad MP; ſed MI ad MP habet minorem proportionem, quàm omnes alij termini præcedentes, & ideo MP ad MI maiorem. Ergo BH ad CB habebit maiorem proportionem omnibus terminis præexiſtentibus: ſed CB eſt lineæ: Quare etiam BH lineæ erit. Quoniam comprehendit plures partes ipſius CB, quàm omnes antecedentes termini comprehendant terminorum maiorum. Quod autem MP ad MI ſit maior proportio, quàm MO ad MP patet. Quia creſcit linea MI per continuam additionem vnius. Maior eſt autem proportio 2. ad 3. quàm 1. ad 2. & 3. ad 4. quam 2. ad 3. & ſic ſucceſſiuè.

Probatur quoq; alio modo. Nam quacunq; poſitâ terminorum multiplicatione ſemper NHB erit triangulum, & centrum N diſtabit à puncto B, Ergo etiam H diſtabit ab eodem puncto B.

Tandem Probatur 3. Refertur BN ad AI, vt HB ad HA, & ideo *permutando*, vt BN ad HA ita eſt AI ad ſumâ differentiarum HA: ſed omnes differentiæ HA ad omnes baſes AI ſunt quid quantum; Ergo etiam BH reſpectu BN.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

In qualibet data linea abſque fine quæcumque progreſſio Harmonica continuari poteſt.

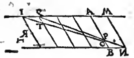
Probatur in præced. fig. ad partes æquales ſumptas in linea baſium æqualium MI à centro N, poſſunt duci infiniti radij; quia partes AO, & OB, & PI poſſunt multiplicari in infinitum, & à ſingulis ab N radius duci poteſt: ſed omnis radius in AB deſignat terminum harmonicum ex diſtis propoſ. 1. huius; nec ex præc. datur terminus harmonicus, cuius longitudo excedat punctum B: Ergo in AB termini harmonici in infinitum multiplicari poterunt abſque eo, quòd perueniatur ad punctum B.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Aſſignatâ qualibet in proportionis harmonicæ ſerie ad minorem perueniri poterit.

Per additionem partium æqualium fit ſemper minor proportio totius cum addito ad totum ſolùm V.g. 3. habet proportionem minorem ad 2. quam 2. ad 1. & 4. ad 3. quàm 3. ad 2. & 5. ad 4. quàm 4. ad 3. & ſic continuè.

Aſſignetur ergo linea R, cui habeat minorem proportionem intercepta NB, quam E. g. 7. ad 3. eritque R ad NB maior proportio, quam 7. ad 3. Ad MA addantur tot partes, vt maior ſit proportio MI cum additis ad MN; quam 7. ad 3. & ducatur ad illud extremum radius NI.



Quoniam igitur triangulum MIN eſt triangulo IQT, & ideo æquali NOB æquiangulum erit MI ad MN, vt NB ad BO: ſed MI habet maiorem proportionem ex effectione ad NM, quàm 7. ad 3. Ergo etiam NB habet maiorem proportionem ad BO, quàm 7. ad 3. ſed eadem NB habet minorem proportionem ad R, quam 7. ad 3. Ergo R maior erit, quam BO. Vnde lineâ aſſignatâ R poterit in AB minor linea aſſignari in proportione harmonica.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Termini harmonici vltra omnem aſſignatam quantitatem diminui poſſunt.

Sit aliqua data R in præcedenti fig. Dico, quod in progreſſione Harmonica procedendo terminus aliquia minor, quàm R dari poteſt.

Aſſignatæ R habeat aliqua ex ipſis baſibus, vt QI minorem proportionem, quam quiibet aſſignatus numerus 30. ad 3. Addanturque tot baſes donec MI ad MN habeat maiorem proportionem, quam 30. ad 3. quo poſito.

Probatur Propoſ. Triangulum QIT eſt æquiangulum triangulo MIN. Quare erit MI ad MN, vt QI ad QT: Sed MI habet maiorem proportionem ad MN, quàm 30. ad 3. Ergo etiam QI habebit maiorem proportionem ad QT, quàm 30. ad 3. ſed QI ad R habet minorem proportionem ex hypotheſi, quam 30. ad 3. Ergo R eſt maior, quàm QT. Eſt autē QT terminus harmonicus, vt ex prop. 2. h.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Si ſeries infinitorum terminorum muſicorum continuetur relinquet tandem aliquam differentiam aſſignata qualibet quantitate minorem.

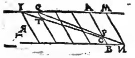
ASſignetur quantitas aliqua minima R. *Dico in* AB *differentias muſicas adeo poſſe multiplicari, vt tandem aliqua ſit minor, quam* R.

Probatur. Nam termini adeo poſſunt multiplicari, vt aliquis ſit minor, quàm R ex præced. multiplicentur, & ſit QT minor, quam R; Ducaturque NQ. Dico differentiam PO eſſe minorem, quam R. patet. Nam PO eſt ad QT, vt NP ad NQ, vel MA ad MQ: ſed MA minor eſt, quam MQ ex hypotheſi. Ergo PO minor eſt quam QT. Ergo minor etiam eſt, quàm R.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Quæcumque infinita differentiarum muſicarum ſeries æquat primum terminum.

PRobatur. Nam enim minor erit, quia in BA primo termino infinitæ differentiæ capere poſſunt ex propoſ. 18. h. & ideo infinitam differentiarum multitudinem capere. Sed nec erit maior: Si enim eſt maior ſit maior V. g. quantitate OB: Multiplicentur itaque termini adeo, vt aliquis tandem inueniatur ex propoſ. 20. minor aſſignata quantitate BO. Ergo ſeries illa in infinitum procedens in quantitate AB relinquit minus reſiduum, quam BO. Quare BA primus terminus non ſuperat ſeriem infinitam differentiarum quantitate BO, & ſic ſemper valebit argumentum: ergo ſeries infinita differentiarum muſicarum æquat primum terminum.



TRACTATVS XVII.

De Proportionalitatibus Rationum.

LIcet iſte Tractatus ſit vniuerſalis, & omne genus quantitatis complectatur, tum diſcretæ, tum continuæ; quia tamen numeris faciliùs, & euidentiùs proportionum ſimilitudines explicantur, hinc eſt, quòd numeris exempla dabimus, non lineis, aut ſuperficiebus, cum tamen propoſitiones genericè ſint intelligendæ, & omni generi quantitatis applicandæ.

EXPENSIO I.

De principijs.

EGigmus iu præcedentibus de ſimilitudine Rationum, & continentiarum, iuxta quas vna quantitas aliam continet: nunc autem agimus de ſimilitudine ipſarum ſimilitudinum Rationum, & in eo conſiſtit, quòd ipſæ rationes, quibus inuicem duæ quantitates, & duæ in ſe continendo aſſimilantur ipſæ quoque inuicem ſint ſimiles. Quamobrem proportionalitas requirit ad minus duas proportiones, & ideo quatuor Rationes, nam duæ Rationes vnam proportionem efficiunt, & tandem octo terminos, inter quos quatuor rationes repetiantur.

DEFINITIO I.

P*Roportionalitos eſt proportionum ſimilitudo.*

Sint duo numeri $\frac{8}{4}$ duobus numeris proportionales $\frac{1}{4}$; ſint deinde etiam alij duo $\frac{6}{2}$ duobus alijs $\frac{4}{8}$ proportionales, hæc proportio, quæ inter primos quatuor reperitur ſi ſit ſimilis proportioni, quæ inter hos extremos proportionatur, dicitur *Proportionalitos*.

DEFINITIO II.

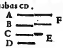
R*Ationum denominatores vocantur quantitates, quæ ſuis partibus exprimant continentiam vnius quantitatis reſpectu alterius.*

Sint $\frac{8}{2}$, & $\frac{9}{3}$ Denominatores harum quantitatum ſunt primæ 4. ſecundæ 3. quia indicant quot vicibus vna quantitas in alia contineatur; ſic quater 2. continetur in 8. & 3. in 9. ter continetur 3. Sic ſi exhiberentur duæ lineæ pertica, & palmus. Linea quædã, quæ demonſtret ſuis partibus continentiam palmi in pertica, dicetur denominator. V. g. ſemipalmus diuiſus in 6. vncias poterit dici denominator, quia indicabit ſuo ſexagenario partium continentiam ſex pedum, quas pertica complectitur.

DEFINITIO III.

S*Imilitudo proportionum conſiſtit in ſimilitudine denominatorum.*

Et hoc quidem verum eſt in quantitatibus rationalibus, & in irrationalibus, nam exprimuntur earum ſimilitudines per mutuam duarum quãtitatum habitudinem. Sic ſit $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{12}$, poterit exprimi denominator proportionis, quam habet 2. ad 6. & 3 ad 12. eſſe eam, quæ eſt inter 3. & 4. nempe ipſos denominatores, qui indicant, quot vicibus capiat 2. in 6. & 3. in 12. Sic ſi ſint duæ irrationales AB ſimiles alijs duabus CD.



Sintque duæ aliæ lineæ, quæ exprimant V. g. F continentiam B in A, & E, quæ demonſtret continentiam D in C, iſtæ rationum ſimilitudines licet irrationales poterunt exprimi per illos duos Denominatores F, & E, & dicere, quod ſicut eſt F ad E, ita eſt proportio AB ad proportionem CD.

DEFINITIO IV.

P*Roportiones ſimiles illæ ſunt, quæ ijsdem, vel æqualibus denominatoribus gaudent.*

Sint V. g. $\frac{2}{4}$, & $\frac{8}{16}$: iſtæ proportiones ſunt ſimiles, quia ita 4. continet 2. gemina vice, ſicut 16. continet 8. gemina vice: quare ſunt ſimiles in continendo, cùm contineant, tam vna, quam alia ijſdem vicibus, quarè, & ipſæ continentiæ ſunt ſimiles.

PRINCIPIVM.

Q*Vantitas rationis, ſiue denominator ductus in conſequentem producit antecedentem, ſi ſit maioris inæqualitatis, at è contro ſi ſit minoris, nam diuiſus conſequens per denominatorem, antecedentem, & manifeſtat.*

Sit

TRACTATVS XVI.

DE PROGRESSIONE PROPORTIONALI.

PARS PRIMA:

De Linearum Progreſsione Geometrica.

Vidimus progreſſionem numeris procedentem, & eius ſingulares affectiones ſpeculati ſumus; modo linearum progreſſionem proportionalem oportet animaduertere in multis à prima diuerſam, & præcipuè in eo, quòd in progreſſione numerali Geometrica vltimus numerus aſſignari nequit, ad quem progreſſio perueniat; hìc autem aſſignari poteſt vltimus lineę terminus, ad quem licet infinita progreſſio tendat, illumque conſequatur, ita vt inter aſſignata extrema omnis multitudo innumera proportionalium concludatur, quamuis ad illud extremum ſucceſſiuè procedendo nunquam ſit peruentura, in duas verò partes hunc Tract. ſecabimus, agendo priùs de Geometrica proportione, deinde de Muſica. Arithmeticam prætermittentes, vtpote à numerica non diſcrepantem.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANteqnam de progreſſionibus pertractemus ipſa principia, definitioneſque videre oportet.

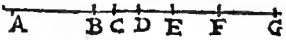
DEFINITIO I.

SEries Progreſſionis eſt quantitas finita diuiſa ſecundum proportionem Geometricam datam.

Sit quantitas aliqua finita data AG, quæ diuidatur ſecundùm proportionem AB ad AC; ita quod AA ſit ad AC, vt AC ad AD, & rurſus AC ad AD, vt AD ad AE, & cæt. hæc eſt ſeries Progreſſionis Geometricæ.

DEFINITIO II.

GEometrica progreſſio eſt quotcumque terminorum ſecundum eandem rationem continuatio.



Geometrica itaque progreſſio eſt illa continuatio diuiſionis ſecundum eandem datam rationem eiuſdem quantitatis, ita vt nullum includat finem ſecundum ſe. Iam verò vt de progreſſione numerica dictum eſt, alia eſt diſcreta, alia continua. Diſcreta eſt, quæ non progreditur per eaſdem rationes: continua verò per eandem datam rationem, aut perpetuò augetur, aut perpetuò diminuitur.

DEFINITIO III.

TErminus progreſſionis eſt ſeriei finis, ad quem nulla progreſſio pertinget, licet in infinitum continuetur. Sed ei perpetuò accedet.

Itaque progreſſionis GF ad GE, & GE ad GD, & cæt. eſt A: quia licet diuiſiones perpetuò contingant viciniores puncto A illud tamen punctum conſequi non valebunt vt infra oſtendetur.

EXPENSIO II.

De progreſſionum terminis inuicem comparatis, & differentijs.

PRiùs conſiderabimus progreſſionem in ſe cōparando terminos terminis; deinde comparabimus progreſſiones inuicem; tandem acceſſum terminorum ad finem animaduertemus. Tripliciter autem comparari poſſunt inuicem termini, vel quoad ipſam proportionem, quam cum alio dicunt, & hoc ſufficienter aduertimus in proportionibus; tum numericia, tum quantitatis continuæ: at verò differentiæ terminorum, & eorum aggregata reſtant hic conſideranda.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Continuè proportionalium differentiæ ſe eadem proportione reſpiciunt, quà termini ipſi.

SInt in continua proportione AG, & AF, & AE, & AD, & cæt. oſtendendam differentias quoque *in continua correſpondentia, & eadem, quà propoſiti termini reperiri. & GF eſſe ad FE, vt FE ad ED, &c.*

Probatur Progreſſ. 1. Tota AG eſt ad AF, vt AF ad AE. Ergo *diuidendo* GF erit ad FA, vt FE ad EA; & *permutando* GF ad FE erit, vt FA ad EA: quæ eſt eadem, ac proportio AG ad AF in fig. defin. 1.

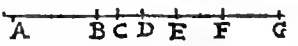
Progreſſ. 2. Repete idem argumentum de ſequentibus terminis FA eſt ad EA, vt EA ad AD. Ergo *diuidendo* FE erit EA, vt ED ad DA. Igitur *permutando* erit FE ad ED, vt EA ad DA; quæ eſt eadem, quam obtinet GA ad FA.

Itaque ex primo progreſſ. GF differentia eſt ad FE differentiam, vt GA ad FA: Rurſuſque ex ſecũdo progreſſ. FE eſt ad ED, quæ ſunt differentiæ, vt GA ad FA. Ergo eadem proportione fruuntur differentiæ GF, & FE, & ED, qua reperitur inter GF, & FA: Quare ſunt continuè proportionales: idẽq; dicas de differentijs aliorum terminorum continuò proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si differentiæ ſint continuæ proportionales; etiam alij termini eadem proportione continua gaudebunt, dummodo duo primi gaudeant.

SInt differentiæ continuè proportionales GF, & FE, & ED in eadem figura, addaturque ipſis EA, ita quod terminus AG ſit ad AF, vt differentia GF ad differentiam FE. *Dico omnes terminos* AG, & AF, & AE, & AD *eſſe continuè proportionales.*



Probatur ex primo Progreſſ. Differentia GF eſt ad FE; vt AG terminus ad AF terminũ: Ergo *permutatim* differentia GF ad terminum AG refertur, vt differentiã FE ad terminum AF. Ergo *diuidendo* GF refertur ad FA, vt refertur FE ad EA. Quare *permutando* rurſus GF reſpicit FE veluti FA reſpicit EA, quæ eſt eadem proportio, quæ eſt GA ad FA; & ex datis FE ad FD. Quare GA, FA, & EA erunt in eadem proportione.

Progreſſ 2. Sic quoque eodem diſcurſu differentia FE refertur ad differentiam ED, vt FA ex primo progreſſ. reſpicit EA ideo *permutando* FE in proportione ſe geret ad FA ſicuti ED eſt ad EA: Quare *diuidendo* FE erit ad EA proportionata, ſicut ED ad DA: Quare rurſus *permutando* FE erit ad ED, vt EA ad DA.

Quamobrem cum ex datis termini GA ſit ad FA, GF ad FE differentiæ, quæ ex datis eſt eadem proportio, ac FE ad ED; & rurſus FA ſit ad AE ex primo progreſſ. vt eadem FE ad eandem ED, & ex ſecundo progreſſ. EA ſit ad DA pariter, vt eadem FE ad eandem ED, patet, quod quatuor termini GA, & FA, & EA, & DA erunt in eadem proportione, & ſic dicas de alijs.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si plures fuerint quantitates in continua proportione, & aggregentur binæ, & binæ, erunt aggregata in continua proportione.

SInt V. g. in præced. fig. quatuor quantitates continuè proportionales GF, & FE, & ED, & DC; & ſimul ſumantur GF, & FE. Deinde FE, & ED, tandem ED, & DC. *Dico hæc aggregata eſſe quoque continuè proportionalia.*

Probatur Progreſſ. 1. GF eſt ad FE ex datis, vt FE ad ED. Ergo *componendo* GF, cum FE ad ipſam FE, erit vt FE cum ED ad ED: Igitur *permutando* GF cum FE erit ad FE cum ED, vt FE ad ED.

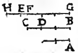
Progreſſ. 2. FE eſt ad ED veluti ED ad DC. Ergo ſimili diſcurſu *componendo* FE, cum ED ad ipſam ED erit in proportione, vt eſt ED cum DC ad DC, & *permutando* FE ſimul cum ED erit ad ED cum CD, vt ED ad DC. Sed hæc proportio ED ad DC eadem eſt ex datis, quę eſt FE ad ED: Ergo ſunt in eadem proportione aggregata GF cum FE, ad FE cum ED, & hoc FE cum ED ad ED cum DC, cum habeant eam proportionem, quæ eſt FE ad ED; quod erat præſtandum.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si ſint tres magnitudines, & minor terminus, differentiaque à mediocri, & huius differentiæ, differentia à maiori differentia ſint continuè proportionales, ipſi quoque termini erunt continuè proportionales.

SInt tres quantitates A, & BC, & GH, minorq; differentia CD, & hæc conferatur cum differentia maiori HF, & differat quantitate EF; ſintq; continuè proportionales EF, & CD, & A. *Dico ipſas quantitates* HG, & CB, & A *futuras eſſe continuè proportionales.*

Probatur. Ponitur differentia CD reſpicere minorem terminum A, vt EF differentia differentiæ reſpicit ipſam differentiam CD. Ergo *componendo* CD cum A, ideſt CB erit ad A, veluti EF cum CD ideſt HF, eſt ad CD: Quãobrem etiam *permutando* CB erit ad HF fundaměta veluti A reſpicit CD termini. Quapropter rurſus *componendo* medius terminus CB, cum HF maiori differentia hoc eſt terminus maximus HG, erit ad CB, vt proportionem dicit terminus A cum differentia CD, hoc eſt CB terminus medius ad ipſum A terminum primum, quod erat probandum.



COROLLARIVM I.

COilligitur propoſ. conuerſa. Nam ſi quantitates A & BC, & GH fuerint continuè proportionales etiam differentia differentiæ maioris à minori, minor differentia, & primus terminus minor erunt continuè proportionales.

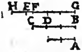
COROLLARIVM II.

QVod ſi differentia differentiæ EF differentia CD, & terminus primus minimus DA ſimul addantur, quod erunt continuè proportionales, patet ex prima huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Differentia differentiæ maioris, à minore ipſa differentia maior, & terminus maximus in quantitatibus continuè proportionalibus ſunt continuè proportionales.

SInt quantitates, vt in præced. figura continuè proportionales A, BC, & GH, & differentia EF differentiæ maioris HF à minori CM, & terminus maximus HG. *Dico eſſe continuè proportionales* EF, & HF, & HG.



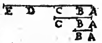
Probatur ex primâ huius, vt differentia HF ad differentiam CD, talis quoque eſt proportio termini HG ad terminum CB: quare *diuidendo*, vt HF reſiduum eſt ad CB ablatum, id eſt FG æqualem. Sic EF reſiduum ad differentiam CD, vel æqualem HE; Ergo *componendo*, vt HF cum FG, quæ eſt maior terminus ad HF maiorem differentiam. Sic erit EF cum HE, quæ eſt HE maior differentia ad EF differentiam differentiæ.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si ſint tres quantitates continuè proportionales, & maiori termino bis medius, ſemel vltimus aggregetur; Mediocri verò ſemel vltimus, erunt hæc aggregata, cum vltimo termino in continua proportione.

SInt tres quantitates continuè proportionales AB, & BC, & CD. Dico, quod ſi ſumantur omnes ſimul, & addatur un æqualis medio termino; deinde ſumatur medius terminus ſemel cum minimo, & ſit CA, & tandem minimus, *quod omnes adhuc erunt continuè proportionales, & ita erit* BA *ad* CA, *vt* CA *ad* AE.

Probatur. Quoniam ponuntur continuè proportionales DC, & CB, & BA. Si arguatur à *compoſitione* rationum erit DC cum CB, ad CB in eadem proportione, ac CB cum BA ad BA. Ergo *permutando* erit DC cum CB linea proportionata ad CB cum BA, veluti eſt CB ad BA: Rurſuſque *componendo* erit DC cum CB, & CB cum BA ſimul, hoc eſt EA ad CB cum BA hoc eſt CA, vt CB cum BA, hoc eſt CA ad BA.



Itaque omnes termini BA, CB, & DC, & inſuper iterum medius CB, vel æqualis ED ad medium CB cum primo BA habent eandem proportionem, quã ipſe medius CB cum primo BA habet ad ipſum primum BA, quod erat oſtendendum.

EXPENSIO III.

De ſerie linearum proportionalium inuicem comparatarum.

VIſis proprietatibus differentiarum, ſimulque aggregatorum proportionalium terminorum, reſtat contemplari ſeries linearum ad inuicem comparatas, & maximè earum, quæ ab eodem principio enaſcuntur: hæc enim cognitio in primis deſeruit ad inueniendas areas Parabolarum, & Ellipſium, corporibuſque ſolidis, vt plurimùm dimetiendis.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si ſint duæ ſeries linearum proportionalium, & perueniant ad eundem terminum, etiam ſi ſequantur, termini ſequentes unius ſeriei ad terminos alterius erunt, vt antecedentes, dummodò in eadem remotione à communi termino ſummantur.

SInt ABC ſeries vna decreſcens, FGC creſcens, & terminus communis C, & ſequantur in ſuâ progreſſione, & fiant termini in prima ſerie A, B, C, D, E; at in ſecunda F, G, C, H, I, *Dico, quod ſicut eſt* B *ad* G, *ita ſit* D *ad* H, & ſicut eſt A ad F, ſic reſpondeat in proportione E ad I.

Probatur. Quia B C D ponuntur continuè proportionales erit rectangulum ex B, & D ex propoſ. 19. lib. 6. elem æquale quadrato ex C facto: ſic ponuntur proportionales G C H erit æquale rectangulum ex G, & H quadrato C: Quare erunt æqualia rectangulũ ex H, & D, & rectãgulũ G, & H: habebunt itaque reciprocè latera ex 10. lib. 6. proportionalia, & ita erit B ad G, vt H ad D.



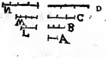
Similiter

Similiter A, B, C, D, E ſunt continuè proportionales: Ergo erunt ex *æquo* ACB continuè proportionales: Vnde vt priùs rectangulum ex AE erit æquale quadrato C. Pariterque FCI ex *æquo* erunt continuè proportionales; quapropter rectangulum ea F, & I erit æquale quadrato ex C. Vnde rectangula ipſa inuicem erunt æqualia, vtpote æqualia vni tertio, & hinc etiam latera ex 10 lib. 6. elem. erunt reciprocè proportionalia, & A erit ad E, vt I ad E.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Si ſint duo ordines continuè proportionalium incipientes ab eodem termino. Tertij termini primo incluſo erunt in duplicata ratione ſecundorum ad inuicem, & quarti in triplicata, & quinti in quadruplicata, & ſic in infinitum.

QVoniam ABC, & ALM ſunt continuè proportionales erunt quadrata ex A, & C æqualia quadrato B, & ex A, & M æquale quadrato ex L: ſed quadrata ipſa ſunt ex 21. lib. 6. Eucl. in duplicata ratione ſuorum laterum: Ergo etiam rectangula illis quadratis æqualia: Sed rectangula, vtpote eiuſdem altitudinis A ſunt inuicem, vt baſes C, & M, ergo C, & M erunt in duplicata ratione linearum B ad L.

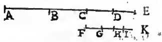


Lineæ verò quartæ erunt in triplicata: Nam quadrata ex C, & M ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum, quibus æquatur quadrato quidem C rectangulum ex B, & D, & quadrato ea M rectangulum ex L, N: quare inuicem ea rectangula erunt vt quadrata: ſed quadrata ex C, & M obtinent proportionem duplicatam laterum C ad M, quæ latera dicunt proportionem duplicatam reſpectu B ad L, ergo quadrata prædicta ea C, & N habebunt proportionem quadruplicatam eius, quæ eſt B ad L. Quamobrem rectangula quoque ex B, & D, & ex L, & N æqualia quadratis conſequentur rationem quadruplicatam linearum B ad L; ſed proportio rectangulorum eſt compoſita ex proportione laterum B ad L, & D ad N. Tolle itaque proportionem B ad L, cui erat quadruplicata, & remanebit proportio linearum D, N triplicata eius, quæ eſt B, ad L; & ſic concludes de alijs.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series compoſita, ex paribus numero terminis ad aliam ex tot terminis conſlatam, & in eadem proportione continuatam habet eandem multiplicatam proportionem, quæ ex terminis conſlatur.

SInt duæ ſeries quantitatum in eadem proportione, ſed pari numero terminorum conſtantes AE, & FK V. g. quatuor, ita vt ſit AB ad BC, & hic ad CD, & hic ad DE, & hic ad FG in eadem proportione. *Dico, quod tota ſeries, ſeu quantitas AE ad quantitatem FK habet proportionem quadruplicatam vnius termini ad alium puta AB ad BC.*



Probatur quilibet terminus obtinet proportionem quadruplicatam ad quemlibet terminum alterius ſeriei, & AB huius ad FG alterius quadruplicatam proportionem habet eius ex def. 7. Tract. 9. quæ eſt AB ad BC, quia per quatuor terminos AB, & BC, & CD, & DE vſque ad FG continuatur. Idem dicas de termino BC reſpectu termini alterius ſeriei GH & ſic de alijs. Quare omnes antecedentes termini in AE, qui conſtituunt AE ad omnes conſequentes in FK, nempe KF habebunt proportionem quadruplicatam quoque cum vnus antecedentium AB ad alterum conſequentium FG talem conſequatur proportionem, vt patet ex propoſ. 17. lib 5. elem.

PROBL. I. PROP. X.

Duas ſeries ſimilium proportionalium datis tribus terminis continuè proportionalibus exhibere.

SInt diſponendæ duæ ſeries continuè proportionalium, & dentur tres termini AB, & AC, & CD: Inueniatur inter AB, & AC, media proportionalis AH, & inter AC, & AH media proportionalis AL, & ſic ſemper fiat, & erit inuenta vna ſeries. Rurſus inter AC, & CD media proiciatur AM, & inter AM, & AD media proiciatur AN, & ſic ſemper fiat. Dico, *quod hæ duæ ſeries inuentæ erunt ſimiles, & quilibet terminus erit ad alium terminum ſimilis; ac quilibet terminus eiuſdem ſeriei erit ad alium ſibi correſpondentem.*



Probatur. Quoniam inter continuas proportionales AB, & AC, & AD medias proiecimus HA, AM erunt omnes in continuâ proportione: Quare ex prima h. etiam differentiæ erunt in cõtinua eadem proportione MC, & MD: HB, & CH.

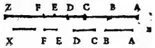
Progreſſ. 2. Et quia inter AH, & AC eſt media proportionalis AL, erunt AH, & AL, & AC continuè proportionales, ſicut, & AM, & AN, & AD, quod NA ſit media, tales erunt, & ideo ex 1. huius etiam differentiæ erunt in eadem proportione, & HL erit ad LC, vt AL ad AC; Et pariter MN erit ND, vt AN ad DA, quæ eſt eadem, quæ AL ad AC, ex Theſi eo quod ſint mediæ proportionales AL, & AM inter ſimiles proportiones AH, & AC atque inter AM, & AD: Vnde, & differentiarum proportiones erunt ſimiles, eritque HL ad LC, vt MN ad ND.

Progreſſ 3. Et quia ex primo progr. eſt HB ad HC; vt CM ad MD. Erit quoque *componendo* BH cum HC, ideſt BC ad ipſam HC, vt CM cum MD ideſt CD ad ipſam DM.

Progreſſ. 4. Sic quia eſt ex 2. progr. HL ad LC, vt MN ad ND, erit componendo HL cum LC, ideſt HC ad LC, vt MN cum DN ideſt MD ad ND: Vnde erit HC ad CH veluti CD ad DM ex 3. proga. & ex 4. progr. CH ad CL, vt MD ad DN, & ſic conſequentes, ſi alij termini adſint.

THEOR. IV. PROPOS. XI.

* *Si ab aliqua data ſerie deſumantur alternè termini, & fiat ſeries, hac ſeries ad primum terminum duplicatam habet rationem eius, quam habebat data ſeries ad ſuum primum terminum.*



SIt AZ data ſeries, à qua deſumantur alternè termini intermedio ſemper relicto vt AB, CD, & EF, & cæt. & fiat ſeries AB. Dico ſeriem AX eſſe ad primum terminum AB in duplicata ratione AZ ad AB.

Prob. AB eſt ad BC, vt BC ad CD, ergo ex æquo AB erit ad CD in duplicata ratione eius, quæ eſt AB ad BC, ſed, vt AB ad CD, ex 9. prop. h. ita eſt AX ad CX, cũ illę ſeries AX, & CX ob duplicãdam eandem rationẽ ſint quoq; cõtinuè proportionales, ergo AX ad CX duplicatã habet rationẽ AB ad BC, ſed vt AB ad BC, ita ex propoſ. 9. huius eſt AZ ſeries ad BZ ſeriem: ergo AX ſeries ad CX ſeriem duplicatam habet rationem ſeriei BA ad ſeriem ZB, ergo p *conuerſionem* rationis erit quoque AX totum ad compartem AB, & primum terminum in duplicata ratione eius, quæ eſt totius AZ ad compartem AB, & primum terminum.

EXPENSIO IV.

De progreſſionis termino.

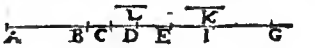
MOdo conſideramus progreſſiones linearum in partibus ſuis, ſed quatenus finitæ ſunt, & eſt vtiliſſima conſideratio maximè ad quadrandas ſuperficies Ellipticas, & Parabolicas, & huiuſmodi.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si in aliqua finita quantitate fuerit pars aſſignata in proportione ad reſiduum, vt pars reſidui in proportione eadem ad remanens aliud reſiduum; hæ partes in quantitate finita in infinitum multiplicari poſſunt.

SIt data magnitudo AG, & ſit in ea pars IG ad reſiduum ſuum IA, vt pars huius reſidui EI eſt ad ſuum reſiduum EA. Dico, *quod in infinitum in quantitate GA iſtæ partes poterunt multiplicari:* fiat GI ad IE ſic IE ad K.

Prob. Pr. 1. Quoniam itaque eſt IG ad reſiduum IA, vt IE pars reſidui ad id, quod hinc reſtat EA; Erit quoq; *permutando* pars GI ad IE partem, nempe IE ad K ex conſtructione, veluti reſiduum IA ad aliud reſiduum EA. Quare rurſus *permutando* erit IE ad AI, vt K ad AE; Verũ IE eſt minor, quàm IA. Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam K erit minor quam EA. Vnde ex EA poterit ſumi æqualis ED: Eruntque GI, & IE, & ED tres continuè proportionales: Sicut ex effectione erant IG, & IE, & K, & pariter erit IE ad IA, vt ED æqualis ipſi K ad EA, vt oſtenſum eſt.



Progr. 2. Quoniã itaq; eſt IE ad IA, vt ED ad EA erit quoq; *diuidendo* IE ad EA, veluti ED ad DA. Quare ſi inueniatur duabus IE, & ED tertia proportionalis L idem argumentum, quod ſupra iterabis. Nam, quia eſt pars IE ad reſiduum EA, vt pars ED ipſius reſidui ad reſiduum aliud DA, erit *permutando* IE pars ad ED partem, ideſt ex effectione ED ad L, vt reſiduum EA ad aliud DA, & rurſus permutando ED ad AE proportione reſpondebit, vt L ad DA. Verum ED eſt minor, quàm EA, vt dictum eſt. Ergo etiam L minor erit, quàm DA: Vnde ex DA poterit abſcindi DC æqualis ipſi L, & ſic in infinitum continuari.

COROLLARIVM.

QVod ſi fuerit pars ad reſiduum, vt huius pars ad ſecundum reſiduum, & proportio partis ad partem continuetur; continuabitur etiam proportio partium quarumcumque inuentarum ad ſua reſidua V. g. quòd ſi ED ſit tertia proportionalis tribus GI, IE, & ED, erit etiam IE ad EA in eadem proportione, vt ED ad DA: quia oſtenſum eſt in 2. progr. quando argumentati ſumus ex *diuiſione rationis* IE eſſe ad EA, vt ED ad DA.

Et idem dicas de parte DC: Nam; quia vt in fine 2. prog oſtenſum eſt ED eſt ad EA, vt L, vel DC ad DA, ergo *diuidendo* ED erit ad DA, vt DC ad CA, & ſic continuè.

COROLLARIVM II.

* HInc eſt; quod ſi linea, vel magnitudo aliqua proportionali aliquo decreſcente creſcat augmento, quod illæ partes decreſcentes in infinitum poterunt in ea multiplicari. Nam in linea AO. Quia OI eſt ad IA, vt IE ad EA, erit etiam permutando IA ad IE, vt IA ad EA. Ponitur quoq; IE ad EA, vt ED ad DA ex effectione, ergo permutando erit IE ad ED, vt EA ad DA. Quia ergo eſt GI ad IE, vt IA ad EA. Et IE ad ED, vt EA ad DA. Ergo erunt GI, & IE, & ED partes continuæ proportionales, vt reſidui IA, EA; & DA; & ideo ex præc. in infinitum procedent.

THEOR. II. PROP. XIII.

Si proportio maioris inæqualitatis continuetur magnitudo vltra omnem datam magnitudinem augetur.

SIt data proportio CB ad BD, & aſſignata quantitas K. Dico, quòd ſi hæc proportio continuetur

nuetur; quantitatem illam maiorem quantitate K quantumlibet magnâ euaſuram.

Probatur. Differentia DC replicata multoties, certum eſt, quod tandem ſuperabit quantitatem K. Sed Additiones, quæ ipſi DB accreſcunt, ex proſecutione, & continuatione CB ad DB proportionis, ſunt maiores ſingulæ; quàm DC. Ergo continuatæ toties, quoties replicata eſt quantitas DC ſuperabunt ipſam K.



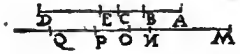
Quod autem differentiæ, ſeu additiones DC, & BD, & BF, & cæt. ſint maiores; quam DC; patet ex prima huius. Nam ſunt in eadem proportione, ac termini. Quadere, vt eſt DB ad BE termini; ſic differentiæ DC ad DE; ſed maior eſt BE, quàm DB. Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam ED, quam DC maior erit.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si à quantitate aliqua partes auferantur, vt ſit prima pars ad ſuum reſiduum, vt pars ipſius reſidui ad reſiduum ſuum; ſiet tandem reſiduum datâ quacumque quantitate minus.

Sit quantitas AD V. g. linea, ex quà auferatur quantitas, & pars AB, & à reſiduo BD pars BC: ita quòd ſit AB ad BO, vt BC ad CD. Dico, *quod ſi hoc continuè fiat, relinqui tandem partem, qua libeat aſſignata MN minorem.*

Sit quantitas MN data, & reperiatur alia NO, cui ſit MN, vt reſiduum BD eſt ad totam AD, & continuetur hæc proportio, donec euadat maior in Q, quam AD; hoc enim eueniet aliquando ex præced. Deinde in ratione prædicta partis ad reſiduum diuidatur toties AD, quoties MQ diuiſa eſt, hoc enim poterit fieri in infinitum ex 12. huius.



Progreſſ. 1. Quoniam MN, & MO, & MP, & MQ ſunt continuè proportionales, erit MN ad MO, vt MP ad MQ; ſed ex effectione MN eſt ad MO, vt reſiduum BO eſt ad AD. Igitur MP erit ad MQ: vt DB ad AD. Et ideo *inuertendo* QM erit ad MP; vt AD ad DB.

Progr. 2. Rurſus *permutando* MQ erit ad AD, vt MP ad DB: ſed ex effectione MQ maior eſt, quam AD: Ergo etiam MP maior erit, quam BD.

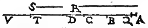
Progreſſ. 3. Deinde quia eſt AB ad BD, vt BC ad CD erit quoque *componendo* AB cum BD ideſt AD ad BD; vt BC cum CD, ideſt BD ad CD; ideoque proportio AO erit ad BO, vt BD ad AD, & etiam erit, vt MQ ad MP eadem, quæ eſt AD ad BD, vt dixi Progr. 1. & ex effectione MQ ad MP, eſt veluti MP ad MO: Quare cum ſit BD ad CD, vt PM ad MO, erit quoque permutando BD ad PM, vt CD ad MO: Sed maior eſt MP ex probatis, quàm BD. Ergo maior quoque erit MO, quam CD.

Idem autem oſtendes de MN reſpectu ED: quare erit maior MN data quantitas; quam ED, quod erat oſtendendum.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Si fuerit propoſita talis quantitatum ſeries, vt quilibet ablatus terminus àb aliqua alia ſit ad eius reliquum, vt ſequens terminus à reliquo ablatus ad id, quod denuò remanet; erit illa alia quantitas æqualis toti ſeriei infinitæ terminorum propoſitæ.

Sit ſeries infinita terminorum propoſita AB, BC, CD, & cæt. qui auferantur à quantitate AV; & quilibet V. g. AB relinquat reſiduum BV, ad quod ſit AB, vt BC alius terminus ablatus à reſiduo eſt ad reliquum ſuum CV. Dico; *quòd hæc quantitas* AV *æquat totam ſeriem.*



Probatur non erit maior tota ſerie; ſed nec minor: Ergo totam ſeriem æquabit.

Quod non ſit minor, patet ex 11. propoſ. Quia tota ſeries poterit intra ipſam continuari in infinitum; ita quòd numquam perueniatur ad V: Ergo quantitas AV minor non erit ſerie terminorum infinita.

Quod verò non ſit maior oſtenditur: nam ſi eſſet maior aliquo exceſſu eſſet maior. Sit is TV, & continuetur proportio AB ad BC in linea AV; donec ſit minor pars reſidua, quam TV, quod ex propoſ. præc. fieri poteſt: cum ergo ſeries infinita ſuperet AT: Ergo AV non ſuperat ſeriem terminorum omnem quantitate TV; ſed minore, cùm iam continuata minus relinquat, quam TV contrà hypotheſim; & ſemper idem argumentum vrgebit: Ergo quantitas AV nulla aſſignabili quantitate excedet infinitam ſeriem: ſed nec ea minor eſt: Ergo illam æquat, quod erat oſtendendum.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Datâ ſerie infinitâ terminorum per eandem proportionem procedentium, & primâ differentiâ inuenire magnitudinem, ſummæ omnium terminorum æqualem.

Sit ſeries infinita AB, & BC, & CD, & cæt. & differentia maioris termini à ſequenti BC, ſit AZ, & fiat differentia AZ ad primum terminum AB, vt AB ad aliud; & inueniatur AV: ex prop. 14. l. 6. elem. Dico *lineam* AV *toti magnitudini infinitæ terminorum æqualem eſſe.*

Probatur. Quoniam ex conſtructione AZ differentia eſt ad AB primum terminum, vt terminus AB ad quantitatē AV. Etiam *diuidendo* AZ erit ad BZ, eſt AB ad VB. Idoeque *componendo* AZ cum BZ ad BZ, vt AB cum AV ad BV, hoc eſt AB erit ad BZ æqualem BC, vt AV ad BV.

Rurſuſque *permutando* AB erit ad AV, vt BZ idem terminus, qui BC ex effectione ad BV. Quare *diuidendo* AB erit ad BV, vt BZ, vel BC ad CV. Quare ex præced. AV æquabit totam ſeriem datorum terminorum.

COROLLARIVM I.

HInc eſt, quòd, ſi fuerit AB ad AV, vt BC ad BV; quod AV æquabit totam ſeriem in finitorum terminorum. Item ſi fuerit AB ad BC, vt AV ad BV, vel BV ad CV: erit enim *permutando*, vt priùs AB ad AV, vt BC ad BV. Quare, & *diuidendo* AB erit ad BV BC ad CV.

Item ſi AV, BV, & CV, ſint continuè proportionales, quoniam *diuidendo* erit AB ad BV, vt BC ad CV. Quare ſemper quantitas AV æquabit infinitam terminorũm ſeriem.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur, quod cum ſit AB ad BC, vt AV ad BV, & AV contineat omnes antecedentes alicuius ſeriei, & BV omnes conſequentes, licet in infinitum procedentes; quod tota collectio infinitorum antecedentium ad collectionem infinitorum conſequentium erit, vt vnum antecedens ad vnum conſequens.

COROLLARIVM III.

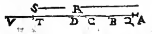
DEducitur quoque differentiam maioris termini à minore, & maiorem terminum, & totam collectionem terminorum eſſe in continuâ analogiâ: ſiquidem fecimus, vt AZ differentia ad AB primum terminum; ſic AB ad aliud; & inuenimus totam collectionem terminorum infinitorum AV.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datam magnitudinem iuxta proportionem datam, ita diuidere; vt progreſſio ſecundum eandem ſeriem continuata terminetur in punctum deſtinatum.

SIt data proportio R ad S, & ſecundùm hanc proportionem ſit diuidenda AV, vt progreſſio terminorum finiat in V.

Diuidatur taliter AV, vt proportio AB ad BV ſit ea, quam habet R ad S ex prop. 13. Cor. 6. Elem. deinde iuxta proportionem AV ad BV, ſic fiat AB ad BC, & erit factum id, quod deſiderabatur.



Probatur. Vt AV ad BV; ſic eſt AB ad BC. Ergo etiam ex propoſ. 25. lib. 5. Reliquum VB erit ad reliquum VC, vt AB ad BC. Vnde ex propoſ. 16. huius, terminus progreſſionis eſt V, hæc autem progreſſio ex effectione eſt vt R ad S.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datis pluribus rationum progreſſionibus inuenire quantitatem, quæ omnes adæquet.

SInt datæ tres proportionũ AB, & CD, & FE ſeries & ex 16. h. inueniantur tres quantitates, quę illas adæquent H, K, L, & hæ quantitates in vnam

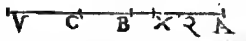


ſummam redigantur, eritque factum, quòd exoptatur.

Patet. Nam, cùm quælibet quantitas vt H æquet ſuam ſeriem V. g. proportionis A ad B, ſicut K ſeriem proportionis C ad D, & tandem L ſeriem proportionis F ad E; ſi ſimul colligantur eas omnes ſeries propoſitas tota æquabit.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam magnitudinem, ita ſecare, vt duplicis ſeriei idem ſit terminus.



SIt AV quantitas, & ſecetur in B; vt AB ſit ad BV, vt BC ad CV ex propoſ. 15. lib. 6. Elem: Rurſuſque ſecetur in Z, & fiat, vt AZ ad ZV; ita ZX ad XV, & ex propoſ. 15. harum duarum proportionum erit idem terminus V. Quod patet ex conſtructione ipſa.

TRAC.

TRACTATVS XVI.

PARS SECVNDA.

De Linearum Progreſsionibus Harmonicis.

ALij antecedentes Tractatus à diuerſis Auctoribus ſelecti ſunt, aliqui etiam multa additione cumulati, & omnes aliqua ſaltem propoſitione, aut oſtenſióne adaucti: hic Tractatus omnino meus. Licet; vt noſtri inſtituti eſt plurimis intermiſſis in compendium redactus.

EXPENSIO I.

De progreſſionis Harmonicæ continuatione.

DOcuimus ſupra datis duabus lineis, vel interſerere lineam mediam harmonicè proportionalem; ſicut, & extremas inuenire: Modo docendum eſt eas continuare, & in plures terminos propagare, & priùs declarationes dictionum nonnullarum oportet precedere,

DEFINITIO I.

CEntrum harmonicum eſt punctum, in quo plurimæ lineæ conueniant muſicas in proportiones aliquam lineam; vel aliquas lineas diuidentes.

Sic N in fig. ſequenti erit centrum, ſi lineę NO, & NP diuidant AB in partes proportionales.

DEFINITIO II.

Lineæ intercepta vocatur, quæ inter centrum, & primæ lineæ harmonicè diuiſæ extremum intercipitur.

Sic NB erit intercepta inter AB lineam harmonicè diuiſam, & N centrum.

DEFINITIO III.

BAſes æquales triangulorum ſunt partes æquales cuiuſdam lineæ interceptæ parallelæ, quæ radios terminant.

DEFINITIO IV.

RAdij harmonici ſunt lineæ quædam, quæ à centro eodem diſcedentes in baſes æquales terminant, & lineam aliquam, vel aliquas harmonicè diuidunt.

Lineæ itaque, quæ baſes æquales vocantur ſunt vt AO, & OP, & cæt. quæ radios NO, & NP, & cætera recipiunt. Si ergo lineam aliquam V.g. AB in partes harmonicè proportionales diuidant, illi radij vocabuntur radij harmonici.

PROBL. I. PROPOS. I.

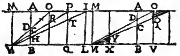
Datam lineam ita ſecare, vt ſingulæ partes ſucceſſiuè proportionem muſicam obtineant.

SIt AB diuidenda in partes muſicè continuè proportionales ita, quòd ſit BC, BD, BA in proportione muſicâ ſicut etiam ſunt BH, & BC, & BD, & ſic ſucceſſiuè. Ducantur duę parallelę per vertices AB, quæ ſint MI, & NL, & à puncto A ſumpta qualibet parte M A, ſingulæ ſiant æquales in infinitum AO, OP, & PI. Sicut, & NB, iunctiſque punctis N, & M à puncto N, ducantur rectæ NO, & NP, & IN in infinitum. Dico, *has partes, quas ductæ in lineа AB deſignant eſſe muſica proportione ſingula toti correſpondentes*, & BH, & BC, & BD, & BA eſſe muſicè proportionales.

Aduerteq; quod non eſt neceſſe, parallelas MI, NL eſſe perpendiculares ipſi AB; ſed ad quemcunque angulum.

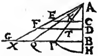
* Probatur ea eſt proportio muſica, quàm proportione Geometricâ, ita eſt primus terminus ad vltimum, vt differentia ad differentiam. Sed CB eſt ad BA; vt differentia CD ad differentiam DA. Ergo ſunt in proportione muſicâ.

Probatur verò aſſumptum: Ita eſt CB ad PQ, ideſt æqualem SA, vt OR ad MN, ideſt SA ob triangulorum ſimilitudinem MNP, & NPQ: Quare RO, & CB erunt ex propoſ. 9. lib. 5. æquales: Cùm itaque ſit ob paralleliſmum linearum OR ad DC, vt NO ad DN, & vt NO ad DN, ſic MN ad DA; erit etiam OR, ideſt BC ad DC, vt MN hoc eſt BA ad DA: Quare *permutando* erit quoq; terminus BC ad BA totam, vt DC differentia ad DA differentiam.



Idem

* Probatur. Nam ex Propoſ.4. lib.6. vt eſt AC ad CB, vt AK ad KI, ergo componendo AC eſt ad AB, vt AK ad KI, quod memoriâ tenendum.



Rorſus AC ad AK; ſic eſt AB ad AI; & AD ad AT. Ergo ex p.22. l.5. erit pars CD reſidua ad partẽ KT reſiduam, & pars DB ad partem TI, vt AB ad AI totum, vel vt DA ad AT alterum totum. Cum ergo ſit CD ad KT, vt DB ad TI erit etiam *permutando* CD ad DB, vt KT ad TI: Sed CD eſt ad DB, vt AC ad AB, ex hypotheſi: Ergo etiam KT erit ad TI, vt AC ad AB: ſed vt AC ad AB, ita eſt AK ad AI. Ergo erit AK ad AI, ſic differentia KT ad differentiam TI: ſed etiam ex propoſ.13. lib.6. eſt ſecta ſimiliter, ac AB, ergo habemus intentum: Sic dices de alijs lineis AQ, & AX, & quibuſcumque ſimilibus.

EXPENSIO II.

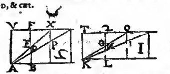
De comparatione vnius ſeriei harmonicæ ad aliam.

Viſa continuatione ſeriei muſicæ; modo eam alij ſeriei comparare oportet.

THEOR. I. PROPOS. V.

* *Duæ ſeries Harmonicorum proportionalium baſibus ſuis ſibi inuicem æqualibus ſitæ, & à linea aliquota incipientes; eandem proportionem inuicem ſemper ſeruant.*

Sint duæ ſeries proportionalium Harmonicorum ſecunda BF, & BE, & BD, & AC. Prima LZ, & LO, & LN, & quarum radij cuiuſcumque in baſes æquales terminent, & primus ſit tota linea FF, vel LZ ſecundus medietas BE, & LO, & ſic de reliquis. Dico eam proportionem, quam habet LZ ad BF primus terminus vnius ſeriei, cum primo termino alterius perpetuò ſeruari reſpectu terminorum ſequentium ita, vt alter alteri correſpondenti ſit in eadem proportione, nempe ita erit, vt tota LZ ad totam BF, ſic OL ad BE, & LN ad BD, & cæt.



* Prob.Prog.1. Namcum QZ ſit medietas & pariter XF ſit medietas lineæ XV; ita erit QZ ad QT vt XF ad XV, ideoque ZO ad KT, vt EB ad AV. quare permutando erit OZ; ideſt OL ad BF, vel BD vt KT ad AV. Deinde Pr.2. vt KO ad BQ, ſic eſt ON ad QI, ideſt æqualem NL, & vt AE ad AX, ſic ED ad XP, ideſt æqualẽ CB, ſed vt BO ad BQ, ſic eſt AE ad AX, ergo, vt ON ad NL, ſic eſt ED ad DB, vel *conuertendo* NL ad ON vt DB ad BD. Quare erit OZ ad KT, vt EF ad AV ex primo progr. & ON ad NL, vt ED ad DB ex ſecundo, & ideo permutando OZ ad EF, vt KT ad AV, & ON ad ED, vt NL ad DB.

Cum ergo ſit quoque ZO ad KT, ideſt EF ad VA, vt ON ad NL, ideſt ED ad DB, vt demonſtrationis ſerie dictum eſt, erit quoque *permutando* ZO ad ON, ideoque EF ad ED, vt KT ad NL, & ideo, vt VA ad DB. Igitur erit permutando, vt KT ad VA, ſic NL ad DB.

Quod vt clariùs innoteſcat faciamus, quòd linea FB ſit 48 partium, & linea TK, ſeu ZL 36. nimirum $\frac{3}{4}$ ipſius FB. In prima ergo diminutione ex propoſ. 3. huius SB erit $\frac{1}{2}$, ideſt 24. & OL $\frac{3}{8}$ ideſt 18. At vero 18 ad 24. ſeruat proportionem, quam habet tota ad totam, quæ eſt $\frac{3}{4}$. Sic linea DB erit partiũ 16. & NL partiũ 12. quia quælibet erit $\frac{1}{3}$ totius, at vero 12. ad 16. eſt eadẽ proportio 3. ad 4 &c.

PROBL. I. PROPOS. VI.

* *Seriem proportionis Muſicæ ſimiliter alteri ordini propagare.*

Sit datus ordo primus, & oporteat alium ordinem in data proportione extendere: Fiat primus terminus AB ordinis propagandi maior, vel minor iuxta placitam longitudinem, & tot numero partes cuiuſcomque magnitudinis illæ ſint inuicem æquales intermedient inter centrum A, & primũ terminũ BF in hac ſecunda ſerie, quot numero intermediant inter centrum K, & terminum primum ZL in primâ ſerie, & in præced. propoſ. ſchemate, & deinde ordo conſequens terminorum propagetur, vt docuimus propoſ.2. huius, & erit progreſſua harmonicos 2. ſimilis propoſito primo.

Probatur eodem modo, ac præced. propoſ.

THEOR. II. PROPOS. VII.

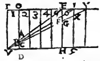
* *Omnes proportiones muſicæ ſimiles ſunt in proportione Geometrica alteri ab vnitate denominatæ, ſi tamen ſint rationales.*

Sit proportionis Muſicæ ſeries AD, & BD & CD tres termini. Dico tres terminos EH, & FH, & OH eſſe quoq; muſicè proportionales, & quamuis alius denominationis; eſſe tamen geometricè ſimiles præcedentibus.

* Probandum itaque primo tres terminos BH, & BH, & OH eſſe muſicè proportionales, & hoc oſtenditur. Quoniam vt eſt primus EH ad vltimum GH, ſic eſt differentia EF ad differentiam FG.

In ea proportione eſt EF ad TV ex 4. prop. lib 6. vt EI ad IT, & IF ad IV, & EG ad XV, vel æquales VC ad VX, ſed vt VC ad VX; ita eſt CD ad XK, ſed CD æquatur IX, ſunt enim æquales ob ſimilitudinem triangulorum VCD, & XIY æqualium quoque laterum YI, & VD ex hypotheſi. Quare erit VC ad VX, vt IX ad XZ ſed vt XI ad XZ, ſic ex Coroll. prop. 4. lib.6. eſt FG ad GH. Ergo FG ad GH, erit, vt VC ad VX: ſed vt VC ad VX, ſic eſt VB ad IV, vel æquales FI ad IV, & vt FI ad IV, ſic eſt EI ad IT, & EF ad TV. Ergo ex 16 l.5.el. vt FG ad GH, ſic eſt EF ad TV, ideſt æqualem EH. Vnde *permutando*, vt eſt FG ad EF differentiæ ſic GH ad EH terminos. Vnde cum ſit differentia ad differentiam, vt terminus ad

terminum erunt termini EH, & FH, & GH Harmonicè proportionales.



Probatur quoque. Sint alius denominationis, quam ea priùs propoſita, quæ denominatur ab vnitate, vt ea in quam diuideretur ON, quæ eſt tota [illegible]. Nam FH primus terminus poſt totam lineam HE eſt ad totam HE, vel IZ, vt VF ad VI: ſed VF ad VI ſe habet ex hypotheſi, vt 5. ad 6. Ergo etiam ſecundus terminus HG ſe habebit ad primum, vt 5. ad 6. Sic tertius terminus GH ad totam ſe habet, vt VG ad VY; ſed VG ad VY ſe habet, vt 5. ad 7. Ergo etiam GH ad totam HE ſe habebit, vt 5. ad 7. & ſic procedendo quartus erit, vt 5. ad 8. vnde ſeries erit tota $\frac{5}{6}\ \frac{5}{7}\ \frac{5}{8}\ \frac{5}{9}$, &c.

Probatur tãdem, quod ſint in eadem proportione Geometrica cum ſerie, quæ denominatur ab vno. Nam ex Coroll. prop. 4. lib. 6. vt differentia AB ad differentiam BC, ſic EF ad FG, differentiæ quoque alius ſeriei, & vt CA ad CD, ſic EG ad GH. Quare *componendo* AC cum CD idest AD terminus maior ad CD minorem, ſic EG cum GH, ideſt EH terminus maior in alia ſerie ad GH terminum minorem. Patet etiam, quia [illegible], & [illegible] ex Tract. 13. Coroll. prop. 27. ſe habent, vt 1. ad 5. & ſic [illegible], & [illegible] habent 1. ad 5. & ſic ſemper eodem modo ſe habet.

PROBL. II. PROPOS. VIII.
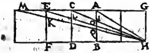
Series Harmonicas proportionalium reperire datæ denominationis in aliqua linea.

Sit Schema præcedens, & velimus reperire proportionem harmonicam in data linea EH, quæ ſe habeat ad aliam in eadem linea continuatam, vt 1. ad 5. Per extremum E ducatur linea TI, & quinque æquales partes, vt AE numerentur ab E verſus T; erigaturque TV æqualis datæ EH. Deinde rurſus in alteram partem portiones primis æquales numerentur, quantùm placet, vt EI, & IV, & cæt. ducanturque ab V rectæ, vt VI, & VY, & cæt. nam diuident lineam EH in partes, quæ ad aliam ſeriem datam, in quam diuiſa eſt OD erunt ſinguli termini, vt 1. ad 5. Patet ex præced. oſtenſione.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series harmonicas proportionalium reperire iuxta datam proportionem in pluribus lineis.

Sint reperiendæ plures lineæ, quæ dicant inuicem proportionem harmonicam, & ſint ad alias proportionem harmonicam dicentes vt 3. ad 1. fiant lineæ parallelæ AB; CD, & EF, & æquali diſtent interuallo, & recta coniungantur A, E puncta, & erunt æquales AC, & CE. Sumantur ergo in AC duæ partes æquales ipſi AC, & ducatur parallela GH ipſi AB. Deinde per E recta parallela ipſi GE ducatur, quæ cum GH conueniet in H: Ab H ergo ad C, & E, & cæt. radij ducantur, & ex præc. AB erit diuiſa in terminos harmonicos iuxta datam proportionem, ita vt AB tota [illegible] IB [illegible] OB [illegible] QB [illegible], & ſe habebunt ad aliam [illegible], vt 3. ad 1. modo dico, quod etiam lineæ AI, CL, & EK ſunt in eadem proportione ac IB, & OB, & QB. Vnde ſe habebunt ad ſeriem [illegible] eodem modo ac 3. ad 1, cum, & etiam ipſi ſint [illegible].



Probatur triangulum HIB eſt æquiangulum triangulo AIC, ob angulos C, & H inter parallelas alternos; & angulos apud I ad verticem. Quare erit ex 4. lib. ſexti AC ad AI, vt HB ad IB, & *permutando* AC ad HB, vt AI ad IB. Rurſus HOB triangulum eſt æquiangulum triangulo CLE ob eandem rationem. Quare ſimiliter arguendo ex 4. l. ſexti & *permutando* CA erit ad HB, vt CL ad OB. Rurſuſque triangulum HQB eſt æquiangulum triangulo EKM, quare erit eodem modo EM ad HB, vt EK ad QB. Sed tres, vtpote æquales AC, & CE, & EM habent eandem proportionem ad eandem HB. Ergo etiam tres AI, & CL, & EK ad tres IB, & OB, & QB, vtpote eiuſdem proportionis trium æqualium ad HB habebunt eandem proportionem. Quare erit IA ad AI, vt CL ad OB, & EK ad QB. Quare permutando AI erit ad CL, vt IB ad BO, & CL ad EK, vt OB ad QB.

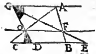
LEMMA I. PROP. X.

Si inter duas parallelas crura duorum triangulorum æqualium baſium ſe intercipiant, linea per eorum interſectiones ducta erit parallela baſi, & triangula, quæ fiunt æqualis altitudinis.

Sint duo triangula quæcumque ABC, & GED quorum crura ſe decuſſent in F, & O. *Dico, quod linea FO ducta per F, & O eſt parallela baſi EC.*

Probatur triangulum AFG eſt æquiangulum triangulo EFB, quod angulus B ſit æqualis angulo G nigro, vtpote alterni inter parallelas ex propoſ. 30. lib. 1. Elem. & anguli quoque apud F ſint ad verticem, & ideo æquales: vnde, & reliqui ex Coroll. 2. prop. 17. lib. 1. Elem. Quare AG ad AF, vt EB ad FB, & *permutando* AG ad EB, vt AF ad FB: Sic quoque dicendum de triangulis AOG, & DOC ob angulos alternos nigrum ad D, & ſeminigerrimum ad G æquales, & angulos ad verticem æquales quoque. Quare erit, vt AG ad AO, ſic DC ad OC. Quare *permutando* erit AG ad DC, vt AO ad OC, ſed EB, & DC ſunt æquales cum baſes triangulorum præſupponantur æquales; Vnde ablata parte BD communi, reliquum EB, & DC eſt æquale. Quare AG ad EB, & eadem AG ad DC dicet eandem proportionem ex 7. lib. 5. vtpote ad æquales. Quare erit etiam eadem proportio AF ad FB, quæ AO ad OC. Quare cùm crura trianguli ſint diuiſa proportionaliter linea tranſiens per diuiſiones F, & O erit parallela baſi BC ex prop. 2. lib. 6. & triangula EFB, & DOC ex propoſ. 40. lib. 1. Coroll. 2. erunt æqualis altitudinis.

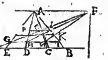
THEOR.



THEOR. III. PROP. XI.

** Si plurima triangula æqualia æqualiũ baſium in vnum verticem conueniant, & recta aliqua baſi non parallela in ea incidat, & ſecet, parallelæ baſibus à ſectionibus crurum ductæ omnia crura ſecabunt harmonicè proportionaliter.*

SInt triangula ASC, & ACD & AED, & cæt. quæ in vnum verticem A conueniant, & eorum ſint æquales baſes: ſecetque eorum crura aliqua FG. Dico, *quòd ſi ducantur per eorum interſectiones parallelæ baſi* BE *iſta in partes harmonicè proportionales diuident omnes lineas ſectas, & crura triangulorum.*



* Quod vt oſtendatur ducatur baſi BE parallela FA à verticibus triangulorum; donec occurrat obliquæ ſecanti GF; occurret enim, cùm incidens FG baſibus parallela non ſit, & à puncto F, ducatur FH, & FN Quia ergo HN, NI, & HG sũt æquales, q. ex Cor prop. 4. l. 6. el. HG eſt ad HN, & NI; vt æquales ex theſi, DE ad DC, & CB. Ex I. propoſ. AB erit ſecta harmonicè proportionaliter, & AI, & KA & AL erunt tres termini harmonici, quo ſuppoſito.

* Probatur. Parallelæ ductæ ab interſectionibus O, P, G crurum ab FG incidente factis tranſeunt neceſſariò per puncta IKL. Ergo eam diuidunt in partes proportionales harmonicè FA, & KA, & LA. Triangula HPG ex præced & IKN ſunt æqualis altitudinis. Ergo parallela à P diſcedens incidet in punctum K ex prop. 39. Cor. l. I. in verticem trianguli IKN. Sic triangulum NOC æqualis altitudinis eſt velut ILH: Ergo parallela diſcedens ab O incidet in punctum L: Quare eodem modo IA diuidetur in partes proportionales, ſic à radijs NF, FH, & FG, vt à parallelis LO, & KP, & IH. Cùm ergo IA ſit diuiſa in partes harmonicè proportionales, etiam omnes CA, DA, & EA ab iiſdem parallelis erunt diuiſæ ex propoſ. 4. huius.

COROLLARIVM.

*HIncque patet quomodo poſſimus diuidere in partes harmonicas plurimas lineas ſimul, & plures ſeries harmonicorum terminorum efficere.

EXPENSIO III.

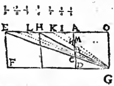
De interpoſitione Harmonicorum terminorum.

INterpoſitio terminorum eſt cum inter duos terminos alij termini interiaciuntur, ita tamen, vt ſit adhuc continua ſeries proportionalium eo modo, quo continuatur proportio Harmonica.

PROBL. I. PROPOS. XII.

** Terminos continuè proportionales harmonicè inter terminos harmonicos conijcere.*

SInt dati tres termini continuè proportionales harmonicè AD, & BD, & CD nempe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. & oporteat inter eos alios terminos interponere, qui proportionem continuent. Sint verò termini AD, & BC, & CD inter parallelas AF, & EF, lineiſq à centro G egredietibus GH, & GE determinati, eruntq; æquales AH, & HE. Diuidantur itaq; AH, &



HE ſecundum terminos, quos volumus interponere V. g. 3. ita quòd primus terminus ſit, vt 3. ad 3. ſecundus, vt 3. ad 4. tertius, vt 3. ad 5. &c. Deinde ad ſingulas diuiſiones à centro G rectæ ducantur GI, & GH, & GL, & cæt. & erit factum, & ſic procedent termini.

$$\frac{3}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{9}$$

*PRobatur. Nam ea prælibatis huius in prima propoſ. AD primus terminus erit ad AD vltimum, vt differentia AM ad differentiam MN, & MD erit ad BO, vt differentia MN ad differentiam NB. Ergo inter AD, & BD duos terminos termini duo interpoſiti ſunt MD, & ND: Et ſic dicas de cæteris, quod verò ſint datę denominationis patet ex prop. 8. huius.

EXPENSIO IV.

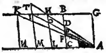
De terminis inuicem comparatis, & differentijs.

IAm ex ipſa definitione proportionis harmonicę notum eſt duas differentias harmonicas inter tres terminos eſſe inuicem, ut primus terminus ad tertium, & ideo etiam permutando eſſe differentiam maiorem ad maiorem terminum, vt minor differentia ad minorem terminum: reliquas igitur proportiones indagabimus.

THEOR. I. PROP. XIII.

* *Maior terminus eſt ad ſummam omnium differentiarum, vt æquales baſes cum intercepta ad ipſas æquales baſes.*

SIt ſecta BC in partes proportionales harmonicè in D, E, F. Differentiæ erunt BD, & DE, & EF, & ſumma earum BF. Dico, *quòd ita ſe habet* AC *primus terminus ad totam ſeriem, & ſummam differentiarum* BF, *vt* AC *intercepta, vel æqualis* GB *cum æqualibus baſibus* omnibus ſimul ſumptis BH, & HI, & IK, ad ipſas æquales baſes ſimul ſumptas.



Probatur. Nam ex 4. lib. 6. vt BK ad KA, ſic eſt BF ſumma differentiarum ad AC primum terminum.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Minor terminus omnium ita eſt ad ſummam omnium differentiarum, vti intercepta ad omnes baſes æquales.*

SIt figura, quę præcedentis propoſ. Minor terminus omnibus alijs terminis erit FC, & ſumma differentiarum erit FB. Intercepta AC omnes baſes æquales BK. *Dico, quòd* FC *ſit ad* FB, *vt* AC *eſt ad* BK.

* Probatur AFC triangulum eſt æquiangulum triangulo BFK: quia anguli apud F ſunt ad verticem anguli verò ad A, & K alterni. Ideoque ex propoſ. 11. lib 6. elem. AC erit ad FC, vt BK ad FB ideo *permutando* AC erit ad BK, vt FC ad FB.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Termini ad inuicem maior ad minorem ſunt in eadem proportione, ac æquales baſes cum intercepta ad ipſas æquales baſes cum intercepta minus vna æquali baſi.*

SIt eadem fig. quæ ſupra. *Dico* BC *terminum eſſe ad* DC, *vt* GH *ad* GB, *&* DC *eſſe ad* EC, *vt* GI *ad* GH, *& è contra inuertendo.*

Probatur. Nam ADC, & DBH ſunt æquiangula triangula: Ergo ex 11. lib. 6. AC erit ad DC, vt BH ad BD: Quare *permutando* AC vel GB ei æqualis erit ad BH, vt DC ad DB, & ideo *componendo* AC, vel GB cũ BH erit ad GB, vt DC cum DB ad DC, ideſt HG ãddita baſis, & intercepta erit ad interceptam BG, vt terminus BC ad terminum DC.

* Probatur quoque de reliquis terminis: nempe de termino DC reſpectu termini BC. *Dicoque quòd* DC *ſit ad* BC, *vt* GI *ad* GH.

Triangulum HIO eſt æquiangulum triangulo ABC ob parallelas, inter quas eſt. Quare vt priùs AC erit ad BC, vt HI ad HO; quapropter *permutando* AC, vel GB æqualis erit ad HI, vel æqualem BH, vt BC ad HO: ſed eadem AC erat in præced. part. huius prop. ad BAH, & ideo ad æqualem HI ex hyp. vt CD ad BD. Ergo ex 16. l. 5. vt CD ad BD ita BC ad HO, & hinc *permutando* CD ad BC, vt BD ad HO: Sed producta AH in T ob æqualitatem triangulorum HTI, & HBD ipſa TI æquatur ipſi BD: Proportione autem reſpondet TI, ideſt BD ad HO, vt TA ad AH, & vt IG ad GH, & conſequenter ex 16. l. 5. CD erit ad BC, vt IG intercepta cum additis omnibus ad GH interceptas cum additis vna minus, ita in quam erit terminus CD ad terminum BC.

Eſt autem IG ad HG, vt TA ad HA, quia ob triangulorum THI, & HGA ſimilitudinem TH eſt ad HA, vt IH ad HG, ideoque *componendo* TA eſt ad HA, vt IG ad HG, & ideo, vt TI, vel BD ad OH.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

* *Si intercepta ſit irrationalis, etiam termini Muſici erunt irrationales, ideſt nullo numero exprimibiles.*

SIt AC intercepta irrationalis: Dico, *quòd termini erunt irrationales* BC, *&* DC, *&* EC.

* Probatur. Quia AC ponitur irrationalis ipſi BH ideſt æqualis CL etiam compoſitũ LA erit irrationale ex propoſ. 10. lib. 10. vtrique parti componenti, nempe ipſi CL, & ipſi AC. Sed vt eſt AL ad AC, ſic BC terminus ad DC terminum: Ergo ex propoſ. 5. lib. 10. elem. termini ipſi inuicem erunt incommenſurabiles BC, & DC.

Idem argumentaberis de terminis DC, & EC. Nam AC ponitur incommenſurabilis ipſi CL: Ergo etiam ipſi æquali LM. Quamobrem, & compoſitũ ipſarũ AL erit incõmenſurabile ipſi LM. Vnde ſi LM, & AL incõmenſurabiles cõponantur AM totũ erit incommenſurabile ipſi AL; ſed vt MA ad AL, ſeu, vt IH ad GH: ſic eſt ex 15. huius DC ad EC, Ergo, & DC ipſi EC erit incommenſurabilis, & ſic dicas de reliquis.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Poſita intercepta incommmenſurabili, reliquæ omnes differentiæ inuicem erunt incommenſurabiles.

POnatur intercepta incommenſurabilis. Dico differentiam DB eſſe incommenſurabilem ipſi differentiæ DE.

Probatur DE eſt ad FE differentiæ, vt termini DC ad CF: ſed termini ſunt incommenſurabiles, ergo ex 5. lib. 10. & ipſæ differentiæ, quòd verò primus terminus ad tertiũ incõmenſurabilis. Prob. ſit DC eſt ad EC, vt AM ad AL, & ex prop. 15. huius EC eſt ad FC, vt AN ad AM: Ergo DC eſt ad FC ex æquo, vt AN ad AL, Sed NA, & AL ex dictis in præc., ſi AC ſit incommenſurabilis, ſunt incommenſurabiles, Ergo etiam DC, & FC termini.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

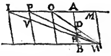
De progreſſionis Harmonicæ extremo.

SIcut in ptogreſſionis Geometricæ continuatione extremum eſt, ad quod nulla progreſſio, quantumuia multiplicata, peruenire poteſt; ita & Hatmonicum extremum eſt, quòd nulla progreſſio harmonica valet conſequi, quod vt demonſtratione firmetur ſit.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

* *Nulla progreſſio harmonica extremum ſuum conſequi poteſt, quamuis vt vtlibet multiplicata.*

SInr termini hsrmonici AB: & DB, & CB, & HB. *Dico, quod etiam ſi ſine meta multiplicentur nunquam poterunt conſequi extremum B.*



* Probatur ex propoſ. 15. huius: Nam terminus penultimus CB erit ad vltimum HB, vt MI ad MP; ſed MI ad MP habet minorem proportionem. quàm omnes slij termini præcedentes, & ideo MP ad MI maiorem. Ergo BH sd CB hahebit maiorem proportionem omnibus terminis præexiſtentihus: ſed CB eſt linea: Quare etiam BH linea erit. Quoniam comprehendit plutes partes ipſius CB, quàm omnes antecedentes termini cõprehendant terminorum maiorum. Quod autem MP ad MI ſit maior proportio, quàm MO ad MP patet. Quia creſcit linea MI per continuam additionem vnius. Maior eſt autem proportio 2. ad 3. quàm 1. ad 2. & 3. ad 4. quam 2. ad 3. & ſic ſueceſſiuè.

* Probatur quoq; alio modo. Nsm quacunq; poſitâ terminorum multiplicatione ſemper NHB erit triangulum, & centrum N diſtabit à puncto B. Ergo etiam H diſtabit ab eodem puncto B.

Tandem Probatur 3. Refertur BN ad AI, vt HB ad HA, & ideo *permutando*, vt BN ad HA ita eſt AI ad sũmã differentiarum HA: ſed omnes differentię HA ad omnes baſes AI ſunt quid quantum; Ergo etiam BH reſpectu BN.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

* *In qualibet data linea abſque fine quæcumque progreſſio Harmonica continuari poteſt.*

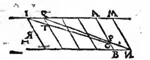
PRobatut in præced. fig. ad partes æquales aſſumptas in linea baſium æqualium MI à centro N, poſſunt duci infiniti radij; quià partes AO, & OB, & PI poſſunt multiplicari in infinitum, & à ſingulis ab N radius duci poteſt: ſed omnis radius in AB deſignat terminum harmonicum ex dictis propoſ. 1. huius; nec ex præc. datur terminus harmonicus, cuius longitudo excedat punctum B: Ergo in AB termini harmonici in infinitum multiplicari poterunt abque eo, quòd perueniatur ad punctum B.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Aſſignatâ qualibet in proportionis harmonicæ ſerie ad minorem perueniri poterit.

PEr additionem partium æqualium fit ſemper minor proportio totius cum addito ad totum ſolùm V.g. 3. habet proportionem minorem ad 2. quam 2. ad 1. & 4. ad 3. quàm 3. ad 2. & 5. ad 4. quàm 4. ad 3. & ſic continuè.

Aſſignetur ergo linea R, cui habeat minorem proportionem intercepta NB, quam E. g. 7. ad 3. eritque R ad NB maior proportio, quam 7. ad 3. Ad MA addantur tot partes, vt maior ſit proportio MI cum additis ad MN; quam 7. ad 3. & ducatur ad illud extremum radius NI.



Quoniam igitur triangulum MIN eſt trisngulo IQT, & ideo æquali NOB æquiangulum erit MI ad MN, vt NB ad BO: ſed MI habet maiorem proportionem ex effectione ad NM, quàm 7. ad 3. Ergo etiam NB habet maiorem proportionem ad BO, quàm 7. ad 3. ſed eadem NB habet minorem proportionem ad R, quam 7. ad 3. Ergo R maior erit, quam BO. Vnde lineâ aſſignatâ R poterit in AB minor linea aſſignari in proportione harmonica.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Termini harmonici vltra omnem aſſignatam quantitatem diminui poſſunt.

SIt aliqua data R in præcedenti fig. Dico, quod in progreſſione Harmonica procedendo terminus aliquis minor, quàm R dari poteſt.

Aſſignatæ R habeat aliqua ex ipſis baſibus, vt QI minorem proportionem, quam quilibet aſſignatus numerus 30. ad 3. Addsnturque tot baſes donec MI ad MN hsbeat maiorem proportionem, quàm 30. ad 3. quo poſito.

Probatut Propoſ. Triangulum QIT eſt æquiangulum triangulo MIN. Quare erit MI ad MN, vt QI ad QT: Sed MI habet maiorem proportionem ad MN, quàm 30. ad 3. Ergo etiam QI habebit maiorem proportionem ad QT, quàm 30. ad 3. ſed QI ad R habet minorem proportionem ex hypotheſi, quam 30. ad 3. Ergo R eſt maior, quàm QT. Eſt autẽ QT terminus harmonicus, vt ex prop. 2. h.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Si ſeries infinitorum terminorum muſicorum continuetur relinquet tandem aliquam differentiam aſſignata qualibet quantitate minorem.

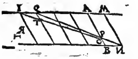
ASſignetur quantitas aliqua minima R. *Dico in* AB *differentias muſicas adeo poſſe multiplicari, vt tandem aliqua ſit minor, quam* R.

Probatur. Nam termini adeo poſſunt multiplicari, vt aliquis ſit minor, quàm R ex præced. multiplicentur, & ſit QT minor, quam R; Ducaturque NQ. Dico differentiam PO eſſe minorem, quam R. patet. Nam PO eſt ad QT, vt NP ad NQ, vel MA ad MQ: ſed MA minor eſt, quam MQ ex hypotheſi. Ergo PO minor eſt quam QT. Ergo minor etiam eſt, quàm R.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Quæcumque infinita differentiarum muſicarum ſeries æquat primum terminum.

PRobatur. Nam enim minor erit, quia in BA primo termino infinitæ differentiæ capere poſſunt ex propoſ. 18. h. & ideo infinitam differentiarum multitudinem capere. Sed nec erit maior: Si enim eſt maior ſit maior V. g. quantitate CB: Multiplicentur itaque termini adeo, vt aliquis tandem inueniatur ex propoſ. 20. minor aſſignata quantitate BO. Ergo ſeries illa in infinitum procedens in quantitate AB relinquit minus reſiduum; quam BO. Quare BA primus terminus non ſuperat ſeriem infinitam differentiarum quantitate BO, & ſic ſemper valebit argumentum: ergo ſeries infinita differentiarum muſicarum æquat primum terminum.



TRACTATVS XVII.

De Proportionalitatibus Rationum.

LIcet iſte Tractatus ſit vniuerſalis, & omne genus quantitatis complectatur, tum diſcretæ, tum continuæ; quia tamen numeris faciliùs, & euidentiùs proportionum ſimilitudines explicantur, hinc eſt, quòd numeris exempla dabimus, non lineis, aut ſuperficiebus, cum tamen propoſitiones genericè ſint intelligendæ, & omni generi quantitatis applicandæ.

EXPENSIO I.

De principijs.

EGimus in præcedentibus de ſimilitudine Rationum, & continentiarum, iuxta quas vna quantitas aliam continet: nunc autem agimus de ſimilitudine ipſarum ſimilitudinum Rationum, & in eo conſiſtit, quòd ipſæ rationes, quibus inuicem duæ quantitates, & duæ in ſe continendo aſſimilantur ipſæ quoque inuicem ſint ſimiles. Quamobrem proportionalitas requirit ad minus duas proportiones, & ideo quatuor Rationes, nam duæ Rationes vnam proportionem efficiunt, & tandem octo terminos, inter quos quatuor rationes reperiantur.

DEFINITIO I.

P*Roportionalitas eſt proportionum ſimilitudo.*

Sint duo numeri $\frac{2}{4}$ duobus numeris proportionales $\frac{1}{2}$; ſint deinde etiam alij duo $\frac{3}{6}$ duobus alijs $\frac{4}{8}$ proportionales, hæc proportio, quæ inter primos quatuor reperitur ſi ſit ſimilis proportioni, quæ inter hos extremos proportionatur, dicitur *Proportionalitas*.

DEFINITIO II.

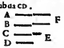
R*Ationum denominatores vocantur quantitates, quæ ſuis partibus exprimunt continentiam vnius quantitatis reſpectu alterius.*

Sint $\frac{2}{8}$, & $\frac{3}{9}$ Denominatores harum quantitatum ſunt primæ 4. ſecundæ 3. quia indicant quot vicibus vna quantitas in alia contineatur; ſic quater 2. continetur in 8. & 3. in 9. ter continetur. Sic ſi exhiberentur duæ lineæ pertica, & palmus. Linea quædã, quæ demonſtret ſuis partibus continentiam palmi in pertica, dicetur denominator. V. g. ſemipalmus diuiſus in 6. vncias poterit dici denominator, quia indicabit ſuo ſexagenario partium continentiam ſex pedum, quas pertica complectitur.

DEFINITIO III.

S*Imilitudo proportionum conſiſtit in ſimilitudine denominatorum.*

Et hoc quidem verum eſt in quantitatibus rationalibus, & in irrationalibus, nam exprimuntur earum ſimilitudines per mutuam duarum quãtitatum habitudinem. Sic ſit $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{12}$, poterit exprimi denominator proportionis, quam habet 2. ad 6. & 3. ad 12. eſſe eam, quæ eſt inter 3. & 4. nempe ipſa denominatores, qui indicant, quot vicibus capiat 2. in 6. & 3. in 12. Sic ſi ſint duæ irrationales ab ſimiles alijs duabus CD.



Sinique duæ aliæ lineæ, quæ exprimant V. g. F continentiam B in A, & E, quæ demonſtret continentiam D in C, iſtæ rationum ſimilitudines licet irrationales poterunt exprimi per illos duos Denominatores F, & E, & dicere, quod ſicut eſt F ad E, ita eſt proportio AB ad proportionem CD.

DEFINITIO IV.

P*Roportiones ſimiles illæ ſunt, quæ iiſdem, vel æqualibus denominatoribus gaudent.*

Sint V. g. $\frac{2}{4}$, & $\frac{8}{16}$: iſtæ proportiones ſunt ſimiles, quia ita 4. continet 2. gemina vice, ſicut 16. continet 8. gemina vice: quare ſunt ſimiles in continendo, cùm contineant, tam vna, quam alia iiſdem vicibus, quarè, & ipſæ continentiæ ſunt ſimiles.

PRINCIPIVM.

Q*Vantitas rationis, ſiue denominator ductus in conſequentem producit antecedentem, ſi ſit maioris inæqualitatis, at è contra ſi ſit minoris, nam diuiſus conſequens per denominatorem, antecedentem, & manifeſtat.*

Sit

C 4 — A 12 D 3 C $\frac{1}{4}$ A 3 D 12

Sit proportio A 12 ad D 3. quæ exprimatur denominatore 4. C. Si 4. ducatur in 3. producat 12. quia 4. ſuis vnitatibus indicat vices continentiæ 3. in 12. Sit rurſus proportio rationis A 3. ad D 12. denominator $\frac{1}{4}$, quia 4. numerat vices, ſeu partes ex quibus A 3. ſibi aſſumit vnicam, ideo ſi 12. diuidatur per 4. denominatorem producetur antecedens 3. Sic ſi denominator 2. & $\frac{2}{5}$, quam habet 5. ad 12. diuidat 12. producet 5. at ſi detur ratio 12. ad 5. & 2. $\frac{2}{5}$, denominator multiplicet 5. producet 12.

Aduerte autem; ſi quando iubemus reperire, vel tertium, vel quartum, vel medium proportionale, id præcipimus iuxta regulas, vel in numeris traditas lib. 7. & 8. Elem. & iuxta Tract. 13. de numeris proportionalibus. In lineis iuxta dicta lib. 6. element. Expenſ. 4. Si agatur de ſuperficiebus, vel de corporibus iuxta tradenda ſuis locis, licet enim exempla in numeris exhibeamus, in omni tamen genere quantitatis valet iſte Tractatus. Vnde iuxta cuiuſcunque quantitatis modum præcepta ſunt operi demandanda.

EXPENSIO II.

De Proportionibus ad denominatores collatis, & ad terminos.

PRiùs videndum eſt, quomodo Denominatores, terminique in proportionibus exprimendis ſe gerant, vt deinde earum compoſitionē cognoſcere, multitudinemque poſſimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Proportiones eundem terminum habentes inuicem referuntur, vt denominatores.

*SIt A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. Dico *has proportiones eſſe inuicem, vt denominatores*, ideoque A $\frac{3}{7}$ eſſe ad B $\frac{4}{7}$ in proportione, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ proportionis A ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B.

Denomin. C 2 $\frac{1}{3}$ D 1 $\frac{3}{4}$

A $\frac{3}{7}$ B $\frac{4}{7}$

*Probatur. Nam toties fundamentum A 3. continetur in termino 7. quot vnitates ſunt in ſuo denuminatore C 2 $\frac{1}{3}$, nempe gemina vice, & $\frac{1}{3}$: Sed etiam fundamentum 4. continetur in termino 7. quot vnitates ſunt in denominatore D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B; Silicet vnica vice, & $\frac{3}{4}$: Ergo denominatores ſunt ſimiles in vnitatibus, vt termini, ſeu conſequentes in continentijs fundamentorum, & ita vnitas continetur in Denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, vt fundamentum 3. in termino 7. & vnitas ineſt in denominatore 1 $\frac{3}{4}$, vt fundamentum 4. in termino 7. quare ex defin. 1. lib. 7. elem. ita erit C 2 $\frac{1}{3}$ ad D 1 $\frac{3}{4}$, vt A $\frac{3}{7}$ ad B $\frac{4}{7}$.

Et idem dicas etiam ſi proportio eſſet maioris inæqualitatis, vt A $\frac{6}{2}$ B $\frac{8}{2}$; nam terminus 2. multiplicatus per denominatorem C 3. producit antecedentem 6. proportionis A, & idem conſequens B 2. per denominatorem proportionis B 4. multiplicatus producit 8. Ergo multiplicatur continentia 2. in 6. toties, quoties vnitas in denominatore 3. continetur, & vt 2. in termino 8. comprehenditur ita vnitas in denominatore 4. ipſius. Ergo ex defin. 1. lib. 7. elem. vt eſt 3. ad 4. denominatores, ita eſt proportio A $\frac{6}{2}$ ad proportionem B $\frac{8}{2}$.

THEOR. II. PROP. II.

Duæ rationes habentes commune conſequens eam ſortiuntur rationem, quæ inter fundamenta reperitur.

SInt rationes A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. *Dico eas eam conſequi rationem, qua inter fundamenta reperitur*; nimirum 3. & 4. Si tamen eodem termino gaudeant, & ita eſſe Rationem A $\frac{3}{7}$ ad Rationem B $\frac{4}{7}$, vt 3. ad 4.

Probatur. Nam fundamentum A 3. ductum in denominatorem ſuum 2 $\frac{1}{3}$ producit terminum 7. & rurſus fundamentum B 4. ductum in ſuum Denominatorē D 1 $\frac{3}{4}$ ꝑducit terminum eundem 7. Ergo ex 17. lib. 7. ita erit A 3. ad B 4. vt Denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denuminatorem D 1 $\frac{3}{4}$. Sed, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem $\frac{3}{4}$ ſic eſt Ratio A $\frac{3}{7}$ ad rationem B $\frac{4}{7}$, Ergo Ratio A $\frac{3}{7}$ ad Rationē B $\frac{4}{7}$ eſt vt 3. fundamentũ ad fundamẽtũ 4.

Et idem erit in proportione minoris inæqualitatis, vt A $\frac{3}{2}$, & B $\frac{4}{2}$, nam erit A ad B, vt 3. ad 4. eadem ratione: & fundatur in propoſ. 17. lib. 7.

THEOR. III. PROPOS. III.

Proportiones eoſdem antecedentes habentes, erunt inuicem, vt termini inuerſo ordine, vt ſecundus terminus ad primum.

A $\frac{2}{3}$ B A $\frac{2}{4}$ C E 1 $\frac{1}{2}$ B 3

FIat enim, vt C ad A; nimirum 4. ad 2. ita B 3 ad aliud E, 1 $\frac{1}{2}$; erit ratio AB ad rationem EB, vt A 2. ad E 1 $\frac{1}{2}$ ex anteced. ſed eadem eſt ex effectione EB proportio, ac AC. Ergo proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$ eſt, vt A ad E, ſed ex effectione, vt C eſt ad A; ſic B eſt ad E. Ergo permutando, vt C 4. terminus ſecundus eſt ad B 3. primum; ſic A eſt ad E, & ideo etiam proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$, quæ oſtenſa eſt, vt A ad E, erit etiam, vt terminus ſecundus C 4. ad primum B 3.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Datæ ſint quotcumque rationes earum denominatores reperire.

DAtæ ſint proportiones A $\frac{4}{6}$, & B $\frac{2}{4}$, & oporteat reperire harum proportionum denominatores.

Duplici modo id fit. Primo efficiatur, vt 4. ad 2. in proportione B, ſic in proportione A 6. ad aliud, quòd ſit E 3. quartum proportionale in eadem ſpecie quātitatis. Dico E 3. & B 4. *eſſe Denominatores A 4. quidem proportionis A, & E 3. proportionis B.*

A $\frac{4}{6}$ B $\frac{2}{4}$

E 3

Probatur. Nam ex effectione B 4. terminus eſt ad ſuum fundamentum B. vt A 6. terminus eſt ad aliud 3. Ergo *inuertendo* in proportione B 2. erit ad 4. vt E 3. aliud inuentum ad A 6. Cum ergo ſit ratio alius E 3. ad A 6. quæ 2. ad 4. erit etiam ita proportio A $\frac{4}{6}$ ad B $\frac{2}{4}$, vt proportio eadem A $\frac{4}{6}$ ad aliud inuentum E $\frac{3}{6}$, cum ergo 4. & 3. habeant eoſdem terminos 6. & 6. erit proportio fundamentorum 4. & 3. eadem, ac Denominatorum ex 8. propoſ. huius, ideoque 4. & 3. erunt Denominatores proportionum, ita, quòd, vt refertur 4. ad 3. ita continentia A 4 ipſius 6. ad continentis B 2. ipſius 4. Poteſt etiā fieri alio modo: Nam datis pro-

A $\frac{4}{6}$ & B $\frac{2}{4}$ A $\frac{4}{}$

E 8

porptionibus fiat, vt 2. ad 4. terminum in proportione B, ſic 4. ad aliud E 8. in proportione A. Dico, *quòd 6. & 8. erunt Denominatores.*

Probatur. Nam ex effectione in B proportione 2. eſt ad 4. vt in A proportione 4 eſt ad 8. Quare ita erit proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt ad proportionem E $\frac{4}{8}$: ſed proportio $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{4}{8}$ eſt, vt 8. ad 6. ex 3. huius. Ergo proportio A $\frac{4}{6}$ ad rationem B $\frac{2}{4}$ eſt, vt 8. ad 6. quare 8. & 6. erunt Denominatores 8. quidem rationis A, & 6. rationis B.

COROLLARIVM.

COllige hinc: Quomodo duas proportiones diuerſorum conſequentium, ſeu antecedentium reducantur ad idem conſequens, ſeu antecedens: nimirum, ſi fiat, vt in praxibus prædictis. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ eædem proportiones ſunt, quæ $\frac{4}{6}$, & $\frac{3}{6}$. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ ſunt eędem, ac $\frac{4}{6}$, & $\frac{4}{8}$, vt in demonſtratione oſtenſum eſt.

COROLLARIVM II.

ERuitur hinc: Rationes eſſe inuicem in proportione, vt ſunt denominatores. Siquidem proportio A $\frac{4}{6}$ eſt ad proportionem B $\frac{3}{6}$ ob eundem terminum 6. vt 4. ad 3. Sed proportio B $\frac{3}{6}$ eſt eadem, ac proportio B $\frac{2}{4}$. Ergo eſt proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt Denominator 4. ad denominatorem 3.

PROBL. II. PROP. V.

Data ratione, & duabus quantitatibus, alias duas quantitates reperire, quæ ſint in proportione data cum iſtis exhibitis.

SIt data Ratio AB $\frac{2}{5}$, & quantitates C 3. & D 6. & alias duas quantitates oporteat inuenire, quæ faciant proportionalitatem ſimilem ad datas quantitates collatæ, vt eſt proportio AB $\frac{2}{5}$.

A 2 C 3

Proportio —— Datę

B 5 D 6

G 7 $\frac{1}{2}$ E $\frac{5}{4}$ F

D 6

Fiat, vt A ad B rationes, ſic C ad aliud G 7 $\frac{1}{2}$ Deinde fiat, vt D 6. ad inuentum G 7 $\frac{1}{2}$. Sic quælibet alia quantitas F 4. ad aliud E 5. Dico, *quòd proportio CD $\frac{3}{6}$ ad proportionem EF $\frac{5}{4}$ eſt, vt A 2. ad B 5.*

Probatur. Quoniam ex effectione, & inuertendo, vt G 7 $\frac{1}{2}$ eſt ad D 6. ita eſt proportio E 5. ad F 4. Et ex 2. huius, proportio CD ad proportionem GD ob eundem terminum D eſt, vt C ad G: Ideo proportio CD ad proportionem EF, eandem cum GD, erit vt C ad G; ſed, vt eſt A ad B ita effectum eſt C ad G: Ergo, vt A 2 ad B 5. ita eſt proportio CD $\frac{3}{6}$ quantitatum datarum ad proportionem EF $\frac{5}{4}$ quantitatum inuentarum.

PROBL. III. PROPOS. VI.

Duas Rationes exhibere, quæ datam habeant rationem.

A $\frac{3}{}$ B 7 A $\frac{3}{}$ C 8 B $\frac{7}{}$ C 8 E $\frac{6}{}$ F 16

SIt data Ratio AB $\frac{3}{7}$, & poſtulentur duæ ſimiles huic rationi; Componatur A 3. alicui cuicumq; quantitati C 8. & ſic etiam B 7. eidem copuletur, ſintque proportiones AC $\frac{3}{8}$, BC $\frac{7}{8}$, & erit factum, quod poſtulatur. Nam ex propoſ. 3. huius, proportio AC ad rationem BC, eſt vt A ad B.

Quod ſi nolimus conſequentes eoſdem eſſe fiat, vt A ad C; ſic quælibet alia E 6. ad quamlibet aliam F 16. & erit, vt conſtat EF $\frac{6}{16}$ ad BC $\frac{7}{8}$, vt AC proportio eadem ex effectione, ac EF ad BC; Sed AC ad BC ſunt, vt A ad B: Ergo etiam EF ad BC ſunt, vt A ad B.

PROBL. IV. PROPOS. VII.

Rationes duas aſſignare duabus datis proportionales eiuſdem denominationis.

SInt duæ datæ Rationes AD $\frac{5}{4}$, & CD $\frac{3}{4}$, & oporteat exhibere duas rationes illis proportionales; quæ eoſdem obtineant Denominatores. Fiat, vt D 4. ad C 3. Sic B 5. ad aliud E 3 $\frac{3}{4}$. Erit

 ratio

ratio BA ad rationem AE, vt E ad A ob idem antecedens E ex 3. huius, & *inuertendo* AB erit ad EB, vt A ad E; & quia eſt eadem Ratio E ad B ex effectione, quæ D 4. ad C 3. & *inuertendo* C ad D, quæ E ad B, ideo erit ratio AB ad rationem CD, vt A ad E. Ponatur itaque quæuis alia V.g. F 6. Dico *Rationem* BF, *& Rationem* AF *eoſdem denominatores habere*.

B 5 B 5

$\frac{A\ 2}{B\ 5}$ $\frac{C\ 3}{D\ 4}$ $\frac{E\ 3\frac{3}{4}}{F\ 6}$ $\frac{A\ 2}{F\ 6}$

Probatur. Proportio AF $\frac{2}{6}$ ad proportionem $\frac{3}{4}$ EF eſt, vt A 2. ad B 3. $\frac{3}{4}$ ex 2. huius: Sed vt A 2. ad B 2 $\frac{3}{4}$, ita oſtenſa eſt Ratio AB ad rationem CD. Ergo ratio AF ad Rationem EF eſt, vt Ratio AB ad Rationem CD. Ideoque, cum Rationes habeant eandem proportionalitatem; obtinebunt quoque eoſdem denominatores.

PROBL. V. PROPOS. VIII.

Aſſignare proportionalitatem ſimilem proportioni datæ, cum quantitates quoque datæ ſint antecedentes, vel conſequentes.

SIt data Ratio AB $\frac{2}{3}$, & quantitates C 4. & D 5. & voluntas ſit reperiendi duas alias proportiones, quibus ſint C, D quantitates antecedentes, ſed ſimiles, ac proportio A ad B.

A 2 C 4 quantitates L 6 G 12
Propor.
B 3 D 5 datæ L 6 E 10

Sumantur quæuis L, & fiat, vt A ad L; ſic C ad aliud G: Deinde fiat, vt B ad L, ſic D ad aliud E. Dico *proportionem* CG *ad proportionem* DE *eſſe, vt* A *ad* B.

Probatur. Nam Ratio AL ad Rationem BL eſt vt A ad B; ſed, vt eſt A ad L, ſic ex effectione eſt C ad G; Vnde eius loco ſubſtitui poteſt, & vt B ad L, ſic eſt D ad E; Vnde pariter vicaria illius BL hæc DE eſſe poteſt: Subſtitutis ergo iſtis CG, & DE, erit Ratio CG ad rationem DE, vt A ad B.

At è contrariò efficies, ſi placeat terminos datos C, & D eſſe conſequentes.

L 6 A 2 C 4 G 1 $\frac{1}{3}$
L 6 B 3 D 5
E 2 $\frac{1}{2}$

Vt L 6. quælibet eſt ad A 2. ſic C 4. ad aliud G; & vt L 6. eadem priùs electa ad B 3. ſic D 5. ad E 2 $\frac{1}{2}$. Eritque ratio GC ad rationem ED, vt A ad B.

Probatur. Vt Ratio AL eſt ad Rationem BL, ſic eſt A ad B: Sed vt A ad L, ſic eſt G ad C; quia affectum eſt L ad A, vt C ad G; ideoque *inuertendo* erit A ad L, vt G ad C: Quare proportio GC poteſt ſubſtitui loco proportionis AL. Sic dicas de proportione L ad B, quæ ex effectione eſt, vt D ad E; ideo inuertendo E ad D erit, vt B ad L: ideoque proportio ED poterit poni loco proportionis BL: iſtis itaque illarum loco poſitis Ratio GC erit ad Rationem ED, vt A ad B ſicut erant priùs AL ad BL, vt A ad B.

PROBL. VI. PROPOS. IX.

Data Ratione, & quantitate aliqua cum duobus denominatoribus aſſignatæ quantitati terminum reperire, vt Ratio data ſit ad rationem, cuius, quæſitus eſt terminus, vt Denominator ad Denominatorem.

SInt Denominatores C 4. & D 3. & proportio data AB $\frac{2}{6}$, & quantitas E 5. cui terminus debeat aſſignari V. g. F: ita vt proportio BA ſit ad proportionem EF, vt Denominator 4. ad Denominatorem 3.

Propor. $\frac{A\ 2}{B\ 6}$ $\frac{C\ 4}{D\ 3}$ Denomin.

G 1 $\frac{1}{2}$ F 1 $\frac{1}{4}$
B 6 E 5

Fiat, vt C ad D, ſic A ad aliud G 1 $\frac{1}{2}$: Deinde B 6. ad G, 1 $\frac{1}{2}$ ſic quantitas data E 5. ad aliud F, 1 $\frac{1}{4}$ & erit F terminus quæſitus. Dico *quod* AB *Ratio proportionem ad Rationem* FE, *vt Denominator* C *ad Denominatorem* D.

Probatur. Ex effectione vt E 5. ad F 1 $\frac{1}{4}$, ſic B 6 eſt ad 1 $\frac{1}{2}$, & *inuertendo*, vt F eſt ad E, ſic G ad B. Proportio verò AB ad proportionem GB ob eundem terminum B refertur, vt A ad G, ideoque AB erit ad FE loco rationis GB eiuſdem poſitam, vt A ad G. Sed vt A ad G, ita factum eſt C ad D. Ergo vt C ad D; ita eſt Ratio AB ad rationem EF.

A 2 C 4 G 1 $\frac{1}{2}$ E 5
B 6 D 3 F 10

Quod ſi quis cupiat quantitatem datam E 5. eſſe non conſequentem, ſed antecedentem: Poſtquam fecit, vt C ad D, ita A ad G. Deinde è conuerſo faciat, vt G eſt ad B, ſic data quantitas E 5. ad aliquam aliam F 10. eritque AB ad rationem FE $\frac{5}{10}$ vt C ad D.

Probatur. Ex effectione E eſt ad F, vt G eſt ad B, ſed vt Ratio AB eſt ad rationem GB, ſic eſt A ad G ex 2. huius, ideoque erit etiam AB ad rationẽ EF eandẽ, quã GB, vt A ad G; ſed A ad G ità facta eſt, vt C ad D: Ergo, vt C ad D, ita erit proportio AB ad proportionem EF, in qua quantitas E data eſt antecedens.

EXPENSIO III.

De proportionum compoſitione.

EXplicauimus Tract. 9. in Elementis, quid ſit compoſitio proportionum: modo aliquas inſigniores compoſitionum proprietates, quæ ad arguendum in proportionibus ſunt neceſſariæ, demonſtrare oportet.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X.

Inter magnitudines; ſi interponatur quælibet magnitudo, proportio primæ ad vltimam dicitur componi ex proportione primæ ad interpoſitam, & interpoſitæ ad extremam.

*SInt propoſitæ duæ magnitudines A 2. & B 12. & interponatur quælibet V. g. 4. C, proportio 2. ad 12. componitur ex proportione A 2. ad C 4. & 4. ad B 12.

Reperiantur denominatores proportionum 2. ad 4. & ſit D 2. & C 4. ad B 12. & ſit F 3. Dico, quòd, & ſi 2. multiplicet 3. quantitates denominatoreſque proportionum producetur H 6. quæ quantitas erit denominator proportionis 2. ad 12. & ideo, quòd proportio A 2. ad B 12. componetur ex proportione 2. ad 4. & 4. ad 12. Quia quantitates, ſeu denominatores ipſarum proportionum D 2. & F 3. inuicem multiplicati producunt quantitatem proportionis, quam habet A 2. ad B 12. vt vult definitio 8. Tract. 9. part. 1.

Termini	A	2	C	4	B	12
Denominatores	D	2	F	3		
Quantitas Proportionis inter AB.	L	*	H	6	Quantitas D in F.	

* Prodatur. Reperiatur Denominator, ſeu quantitas proportionis A ad B, & ſit quantitas L, & oſtendam; quòd hęc quantitas L eſt eadem, quam quantitas H 6. ex multiplicatione denominatorum D 2. & F 3.

Quantitas ergo L eſt illa ex principio huius 1. quæ multiplicans terminum A 2. producit B 12. alium terminum: ſed etiam quantitas H 6. multiplicans terminum 2. producit 12. B; Ergo ſunt quantitas L, & H 6. æquales ex prop. 19. lib. 7. Eucl.

Id autem patet: Nam D 2. multiplicans F 3. facit H 6. & idem D 2. multiplicans 2 A facit C 4. interpoſitam; Ergo ex propoſ. 19. lib. 7. ita erit F 3. ad A 2. multiplicati, vt H 6 ad C 4. geniti, & permutando ita erit F 3. ad H 6. vt A 2. ad C 4. Quare ex propoſ. 19. lib. 7. extremæ quantitates 3. & 4. producent eandem quantitatem inuicem ductæ, ac mediæ H 6. & A 2. nempe 12. Quod etiam erit verùm; quamuis maior quantitas interponatur V. g. C 16. inter A 2. & B 12. Nam Denominator proportionis 2. ad 16 eſt D $\frac{1}{8}$, & 16. ad 12. eſt F $\frac{4}{3}$: Si ergo 8. multiplicet 2. producet interpoſitam 16. & ſi multiplicet alterum denominatorem $\frac{4}{3}$ facit 6. Ergo ita erit $\frac{4}{3}$ ad 2. vt 6. ad 16. ideo producent eundem numerum 12.

	A	2	C	16	B	12
Denominatores	D	8	F	$\frac{4}{3}$		
Quantitas Proportionis inter A, & B.	L	*	H	6	Quantitas ex D in F.	

THEOR. II. PROPOS. XI.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum antecedentium, & conſequentium inuersè ſumptorum.

SInt datę Rationes A 3. ad B 4. & C 5. & D 8. Dico *proportionem* AB $\frac{3}{4}$ *ad* CD $\frac{5}{8}$ *componi ex proportione* A 3. *ad* C 5. *& proportione* D 8. *ad* B 4.

$$A\ \frac{3}{4}\ B \qquad C\ \frac{5}{8}\ D \qquad E\ 2\,\frac{1}{2}$$

Fiat, vt D ad C, ſic B ad aliud E. Erit ex prop. 4. huius AB proportio ad CD proportionem, vt A ad E: Quia eſt ex effectione B ad E, vt D ad C, & inuertendo E ad B, vt C ad D: Eſt autem A B ad B E proportionem, vt A ad E; ideoque AB ad CD proportionem, vt A ad E. Sed ratio A ad E componitur ex proportionibus A ad C, & C ad E ex præaſſ. 2. Tract. elementaris; quia ſufficit ponere quid intermedium; vt extrema ex ea proportione dicatur compoſita. Igitur proportio Rationis AB ad rationem CD componitur ex proportione A ad C, & C ad E; quia verò ex conſtructione eſt, vt D ad C; ſic B ad E, & *permutando* eſt, vt D ad B, ſic C ad E: Ergo proportio A ad E componitur ex proportionibus, nedum A ad C, ſed etiam D ad B, quæ eſt eadem, quæ C ad E, quare etiam proportio AB ad CD componitur ex proportione A ad C, & D ad B.

Quod verò AB componatur ex proportionibus A ad C, & C ad E, nempe 3. ad 5. & 5. ad 2 $\frac{1}{2}$ poteſt etiam videre ex præced.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum alterius, quidem directè alterius autem proportionis inuersè ſumptorum.

$$A\ \frac{1}{3}\ B \qquad C\ 2 \quad D\ 5 \qquad E\ 1\,\frac{1}{5}$$

SIt A 1 ad B 3. at C 2. ad D 5. *Dico proportionē* AB $\frac{1}{3}$ *eſſe compoſitam ex proportione* A 1. *ad* B 3. *&* D 5. *ad* C 2. *inuersè ſumptorum.* fiat, vt D 5. ad C 2. ſic B 3. ad aliud E 1. $\frac{1}{5}$. Erit ex 4 huius, vt in pręc. Ratio A ad E, quam habent rationes AB ad CD. Sed ratio A ad E 1 $\frac{1}{5}$ eſt cōpoſitum ex Ratione A 1. ad B 3. & B 3. ad E 1 $\frac{1}{5}$ ex 10. h: proportio verò B ad E eſt eadem, quę D ad C: Ergo etiam Ratio AB ad Rationem CD eſt compoſita ex ratione A ad B, & B ad E hoc eſt D ad C, ſicut eſt compoſita proportio A ad E, quæ eſt eadem, ac Rationum AB, & CD.

THEOR. IV. PROPOS. XIII.

Duas Rationes ſimiles non inuicem, ſed cum alijs duabus compoſitæ producunt proportionem ſimilem alteri ex duabus Rationibus ſimilibus compoſitis conſurgenti.

*Sit data proportio AD $\frac{6}{3}$ ſimilis proportioni FE $\frac{4}{2}$, & alia proportio CA $\frac{5}{4}$ ſimilis alteri HL $\frac{16}{8}$. Dico, quòd, ſi inuicem proportiones componantur AD, & CA inter ſe diſſimiles, ſed ſimiles alijs duabus FE, & HL, quæ inuicem etiam componantur atq; producant proportiones IK $\frac{30}{12}$, & MN $\frac{40}{16}$. Dico inquam *proportiones eſſe ſimiles*, eſſeque I ad K, vt M ad N.

A 6 — D 3   F 4 — E 2   Denomin. 2. 2   C   I 30 — K 12

C 5 — B 4   H 16 — L 8   Denom. 1 $\frac{1}{4}$ — 1 $\frac{1}{4}$ M 40 — N 16

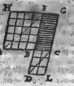
Sint Denominatores proportionis AD 2. & FE pariter 2. eo quod proportiones ponantur ſimiles ſilicet ab eodem, vel æquali denominatore denominatas ex defin. 3. huius.

Item denominatores CA, & HL erunt 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{4}$ Si ergo denominatores iſti componantur 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, & 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, quæ compoſitio fit multiplicando, producent denominatorem æqualem 2 $\frac{1}{2}$ & 2 $\frac{1}{2}$. Sed iſti ſunt denominatores proportionum compoſitarum IK, & MN ex def. 8. Tract. 9. Ergo ex defin. 3. huius compoſitæ proportiones IK, & MN erunt ſimiles.

Et licet hęc propoſitio ſit vniuerſalis, etſi numeris explicata, eam tamen, & rectangulis applicabimus ad maiorem explicationem aliquarum prop. Conicarum, cui eſt neceſſaria.



* Sit baſis AC ad AB in rectangulis AO, & AH ſicut in rectangulis AH, & BL baſis AB ad CD, & AF ad AD, in primis, vt FB, & BD in alijs. Ergo rectangulum AO ſuper AC erit ad nigrũ AL eiuſdem altitudinis ſuper AB, vt rectangulum BH ſuper alteram baſim AB ad nigrum BG eiuſdem altitudinis ſuper BC. Sed nigrum AL eſt ad eiuſdem altitudinis rectangulum ſeminigrum AD, vt BG nigrum, & eiuſdem altitudinis ad BL ex prop. 26. lib. 6. Quia baſis priorum AF ad AD ponatur, vt BF ad BD in poſtremis. Quare ex æquo in prima fig. rectangulum AO erit ad ſeminigrum AH, vt AB rectangulum ad rectangulum BL in poſtremã.



THEOR. V. PROPOS. XIV.

Si ex duabus proportionibus ſimilibus auferantur duæ proportiones ſimiles, reliquæ proportiones remanent ſimiles.

Sint proportiones IK, & MN, vt in præced. propoſ. & detrahantur ex ipſis duæ proportiones ſimiles AD, & FE. *Dico reſiduas eſſe quoque proportiones ſimiles* CB, & HL.

Probatur, nam ſint proportionum integrarum IK, & MN denominatores 2 $\frac{1}{2}$, & 2. & $\frac{1}{2}$ erunt enim denominatores æquales, quia proportiones dicuntur ſimiles ex definit. 3. huius. Rurſuſque ſint denominatores ablatarum proportionum 2. & 2. qui etiam erunt æquales ob ablatarum proportionum ſimilitudinem. Auferantur itaque iſti denominatores à primis, quæ ablatio ꝓportionalis fit diuidẽdo, cùmq; ab ęqualibus ęqualia demãtur, vel æqualia per æqualia partiãtur, reſidua remanebunt æqualia 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{4}$, quare etiam proportiones remanentes ex defin. 3. h. erunt ſimiles.

COROLLARIVM

Hinc ergo patet modum argumentandi in compoſitione rationum ſimilium, vel diuiſione efficaciter conuincere, quia ex eò, quòd duæ proportiones ſint compoſitæ ex proportionibus ſimilibus arguitur eſſe ſimiles etiam compoſitas ex ipſis: Sicque ex eo quòd à proportionibus ſimilibus auferantur proportiones ſimiles, efficaciter deducitur reſiduas proportiones eſſe inuicem ſimiles, quos modos arguendi deſcripſimus ad definit. 27. Tract. 9. Elem. part. I.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Componere proportiones.

Datæ ſint proportiones AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$, quas oportet multiplicare.

Fiat, vt C 3. ad D 5. ſic B 4. ad aliud E 6 $\frac{2}{3}$. *Dico proportionem* AE *eſſe compoſitam ex proportione* AB, *&* CD.

A 2 — B 4   C 3 — D 5   E 6 $\frac{2}{3}$ — B 4

Prob. proportio AE eſt compoſita ex proportione A ad B, & B ad E: ſed proportio BE eſt eadem, ac proportio CD. Ergo proportio AE componitur ex proportione AB, & CD; quòd verò AE componatur ex proportione A ad B, & B ad E patet ex propoſ. 12 huius Expoſ.

PROB. II. PROPOS. XVI.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit ſe ipſam.

Sit data ratio æqualitatis AB $\frac{2}{2}$ 1 & alia ratio CD $\frac{1}{4}$. *Dico, ſi ducatur* AB *in* CD, *quòd ipſam* CD *Rationem producet.*

Fiat

Fiat, vt C 3, ad D 5. ſic B 2. ad aliud E $3\frac{1}{3}$ ex antecedẽ. Ratio AE erit compoſita ex AB Ratione, & CD Ratione.

A 2 C 3 E $3\frac{1}{3}$

B 3 D 5

Sed Ratio AE eſt eadem, ac ratio BE; quia A, & B ſunt æquales, & Ratio BE eadem, ac ratio CD ex effectione: Ergo Ratio CD ducta, ſeu compoſita ex proportione æqualitatis AB ſemet generat.

COROLLARIVM.

Hincque educitur; quòd multiplicatio rationum per proportionem æqualitatis nihil addit rationibus; ſed relinquit, vt erant.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Datis quatuor Rationibus exhibere proportionem, quam producunt duæ rationes inuicem ductæ ad duas alias Rationes inuicem ductas atque compoſitas.

Sint quatuor Rationes AB $\frac{2}{3}$; CD $\frac{1}{2}$ EF $\frac{3}{6}$, & GH $\frac{4}{5}$. quarum duæ componantur AB, & CD, aliæ duæ EF, & GH. componantur, & ſit inquirendum, quam proportionem producant.

A 2 A 2 E 3 E 6

P 6 B 3 F 6 Q 15

C 1 G 4

L $2\frac{1}{2}$ D 2 H 5 O 3

Fiat vt propoſ. 15. vt C 1. ad D 2. ſic B 3. ad aliud P 6. eritque proportio A P $\frac{2}{6}$ compoſita ex proportionibus AB, & CD ex propoſ. 15. huius. Rurſus fiat, vt G 4. ad H 5. ſic F 6. ad aliud Q $7\frac{2}{4}$: eritq; proportio E Q $3.7\frac{2}{4}$, vel $\frac{6}{15}$ compoſita ex proportione EF, & GH.

Si ergo ex propoſ. 4. denominatores proportionum compoſitarum reperiantur A P $\frac{2}{6}$, & E Q $\frac{6}{15}$, qui erunt huius O 6. & illius L 5. Et erit proportio O 6. ad L 5., ſeu, vt explicemus alijs terminis 3. ad $2\frac{1}{2}$ illa, quę eſt inter compoſitas proportiones A P ex Rationibus AB, & CD, & aliam EQ ex Rationibus EF, & GH confectam.

Prob. ex eadem propoſ. 4. nam ibi probatur ita eſſe proportio ad proportionem, vt denominator denominatorem.

THEOR. VII. PROP. XVIII.

Si quatuor quantitates dentur; proportio primæ, & ſecundæ ducta in proportionem ſecundæ, ad quartam eandem producit rationem, quæ proportio primæ, & tertiæ ducta in Rationem tertiæ ad quartam.

Sint quantitates A 2. B 3. C 5. D 4. Dico, quod Ratio AB $\frac{2}{3}$ in BD $\frac{3}{4}$ ducta producit eandem Rationem, ac AC $\frac{2}{5}$ in Rationem CD $\frac{5}{4}$ ductam.

Probatur. Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, ſeu producitur ex proportionibus AB, & BD. Eademque Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, ſeu producitur ex proportione AC, & CD ex 10. huius. Ergo Ratio A B ducta in Rationem BD eandem producit Rationem AD; ac AC ratio ducta in CD rationem.

THEOR. VII. PROP. XIX.

Ratio ducta in ſeipſam conuerſis terminis producit rationem æqualitatis.

Sit ratio AB $\frac{2}{4}$, quæ ducatur in ſe, ſed conuerſis terminis BA $\frac{4}{2}$. Dico, quòd *producit Antecedens, & conſequens æquales*. Aſſumatur quantitas C 2. æqualis ipſi A 2. & ordine poſitis terminis A 2. B 4. C 2. Ratio AB componitur ex proportione A ad B, & B ad C: ſed ratio BC eſt eadem, ac ratio BA; Ergo AC producitur quoque ex multiplicatione rationum AB, & BA conuerſis terminis, ſed ratio AC $\frac{2}{2}$ eſt ratio æqualitatis. Ergo ratio AB ducta in rationem BA producit rationem æqualitatis.

EXPENSIO IV.

De proportionum ſimilitudine commutatis terminis.

Vt poſſimus in proportionibus argumentari aliqua de earum ſimilitudine priùs conſideranda ſunt, in quà vis argumentorum fundatur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si ſint datæ rationes, & termini inuerſi ſumantur; inuerſæ quoque Rationes eandem proportionem habebunt, quam priùs habebant.

Sint duæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$ inuertantur termini DC $\frac{5}{3}$, & BA $\frac{4}{2}$. Dico, quòd ita erit AB ad CD, vt DC inuerſis terminis ad BA ipſas proportiones inuertendo.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, ita B ad E; $2\frac{2}{5}$, & erit, vt A ad E; ita Ratio AB ad Rationem CD.

A 2 C 3 E $2\frac{2}{5}$

B 4 D 5

Prob. Proportio BE ad BA ob idem fundamentũ eſt, vt A ad E ex 3. b. Sed ratio B ad E eadẽ eſt, ac Ratio D ad C ex conſtructione. Ergo Ratio DC ad BA eſt, vt A ad E; ſed vt A ad E, ita eſt AB ad CD ex dictis prop. 4. Ergo vt AB ad CD, ita eſt DC ad BA.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Proportiones duæ adſint, quarum termini permutatè ſumantur, dicent quoque eandem proportionem.

Sit AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & termini permutatè ſumantur AC $\frac{2}{4}$, & BD $\frac{3}{5}$. Dico, quod Ratio AB

ad rationem CD eſt, vt AC ad BD proportionem.

A 2 C 4 A 2 B 3 F $2\frac{2}{5}$
——— ——— ——— & ——— ———
B 3 D 5 C 4 D 5 E $2\frac{2}{5}$

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, ſic B ad aliud E $2\frac{2}{5}$ Eritq; vt AB ad CD rationem ita A ad E.

Fiatque Rurſus ex rationibus quarum permutati termini, vt D ad B; ſic C ad aliud F.

Probatur itaque. Quia eſt, vt D ad C, ſic B ad E ex effectione. Erit permutando D ad B, vt C ad E: Sed; vt D ad B, ita facta eſt ratio C ad F. Et ideo cũ C ad F ſit idem cum ratione D ad B ex 16. l. 5. erit C ad E eadem ratio, ac C ad F: quare ex nona quinti E, & F erunt quantitates æquales.

Cum ergo ſit AB ad CD rationem ex effectione, vt A ad E, & inuerſis terminis ratio AC ad BD rationem, vt A ad F, & AE, & AF ſint eędem rationes etiam AB ad CD, & AC ad BD eandem habebunt ſimilitudinem.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si ſint datæ duæ Rationes, quarum inuertantur, & permutentur termini erunt adhuc in eadem ratione.

Sint AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & inuersè permutatèque ſumantur termini DB $\frac{5}{3}$, & CA $\frac{4}{2}$. Dico quod AB eſt ad CD, vt DB ad CA.

A 2 C 4 D 5 C 4
——— ——— ——— ———
B 3 D 5 B 3 A 2

Proportio AB eſt ad CD ex 20. vt Ratio DC ad BA ſed ex præced. vt DC ad BA, ſic eſt DB ad CA. Ergo ratio AB ad rationem CD eſt, vt ratio DB ad rationem CA.

EXPENSIO V.

De proportionum Dialectica.

Sicut quatuor terminis argumentamur in Tract. elementarijs; ſic etiam octo terminis poſſumus argumentari. Scilicet cũ pro terminis ponuntur non quantitates ipſæ, ſed quantitatum Rationes, quæ dicantur ſimiles alijs duabus rationibus, ex quarum ſimilitudine deducatur arguendo ſimilitudo inter eaſdem rationes; ſed alio modo combinatas, vnde 7. modi argumentandi, quos ex Euclide enumerauimus Tract. 9. etiam proportionibus conuenire hic oſtendemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Sit Ratio fundamentum ad rationem terminum ſit, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum; Erit quoque permutãdo Ratio fundamentum ad aliam rationem fundamentum, veluti ratio terminus ad aliam rationem terminum.

Sit Ratio A $\frac{2}{4}$ ad rationem B $\frac{2}{6}$ terminum, vt alia ratio C $\frac{5}{10}$ ad aliam rationem D $\frac{3}{9}$. Dico quod permutatione vti poterimus, eritque A $\frac{2}{4}$ fundamentum ad rationem C $\frac{5}{10}$ fundamentum, vt B $\frac{2}{6}$ terminus ad D $\frac{3}{9}$ terminum.

E 2 F 5
————————

A $\frac{2}{4}$ ad B $\frac{2}{6}$ vt C $\frac{5}{10}$ ad D $\frac{3}{9}$ Ergo A $\frac{2}{4}$ ad C $\frac{5}{10}$ vt B $\frac{2}{6}$ ad D $\frac{3}{9}$

————————
H $1\frac{1}{2}$ L $3\frac{1}{3}$.

Reperiatur ex propoſ. 4. huius Denominatores proportionum E 2. rationis A $\frac{2}{4}$, & F 5. rationis C $\frac{5}{10}$. Sic H $1\frac{1}{2}$ rationis B, & tandem L $3\frac{1}{3}$ rationis D. Eritque ex Coroll. propoſ. 4. huius A ratio ad B Rationem, vt denominator E ad denominatorem H.

Sed ex hypotheſi, vt eſt ratio A ad rationem B ſic eſt ratio C ad D rationem, & C ratio eſt ad D rationem, vt Denominator F eſt ad denominatorem L, quare ex *æquo*. Ita erit denominator E ad H denominatorem, vt denominator F ad denominatorem L, quare, & permutando erit E ad F, vt H ad L denominatores, vnde ex Coroll. propoſ. 4. erit etiam ratio A ad rationem C, vt ratio B ad D.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si ſit ratio fundamentum ad rationem terminum, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum: erit etiam inuertendo ratio terminus ad rationem fundamentum, vt alia ratio terminus ad aliam rationem fundamentum.

Sint rationes eædem, quæ ſuperiores.

E 2 F 5
————————

A $\frac{2}{4}$ vt C $\frac{5}{10}$ B $\frac{1}{3}$ vt D $\frac{4}{12}$
ad ad Ergo ad ad
B $\frac{1}{3}$ D $\frac{4}{12}$ A $\frac{2}{4}$ C $\frac{5}{10}$

————————
H $1\frac{1}{2}$ L $3\frac{1}{3}$

Dico, quod ſi Ratio A ſit ad Rationem B, vt ratio C ad rationem D erit etiam inuertendo ratio B ad rationem A, vt ratio D ad rationem C.

Probatur. Nam denominator E rationis A eſt ad H denominatorem B, vt ipſa ratio A ad B ex Cor. 2. propoſ. 4. & ratio A eſt ad rationem B, vt C eſt D rationes, & ratio C ad D, eſt, vt denominator F rationis C ad denominatorem L rationis D. Ergo ex æquo denominator E rationum A ad H denominatorem rationis B erit, vt denominator F rationis C ad denominatorem L Rationis D. Quare, & inuertendo H erit ad E denominatores, vt L ad F. Quare ex Coroll. propoſ. 4. etiam ratio B erit ad A, vt D ad C inuertendo.

THOR.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Sit ratio pars ad rationem compartem alicuius totius rationis, vt alia ratio pars ad aliam rationem compartem alterius totius rationis: erit etiam componendo totum ad ſuam partem, vt alterum totum ad aliam ſuam partem.

INuentis enim denominatoribus cuiuſcumque proportionis.

E 3 F 6

$A\,\frac{3}{4}$ $C\,\frac{6}{8}$ Ergo $AB\,\frac{3}{12}$ ad $\frac{3}{4}$ A vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $\frac{6}{8}$ C

$B\,\frac{2}{3}$ $D\,\frac{10}{15}$.

$H\,2\,\frac{2}{3}$ $L\,5\,\frac{1}{3}$

$A\,\frac{3}{4}$ $C\,\frac{6}{8}$ Vel etiam $AB\,\frac{3}{12}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $CD\,\frac{60}{120}$ ad $D\,\frac{10}{15}$

$B\,\frac{2}{3}$ $D\,\frac{10}{15}$ Ergo

Sint E 3. rationis A, & H $2\frac{2}{3}$ rationis B, ſic F 6, rationis C, & L $5\frac{1}{3}$ rationis D denominatores. Erit itaque ex Inductione præcedentium propoſ. duarum E ad H, vt F ad L ob rationum ſuppoſitam ſimilitudinem A ad B, vt C ad D.

Sed E, cum H, denominatores, eſt ad H, vt F cum L, denominatores, eſt ad L *componendo*: Ergo etiam ratio AB ſimul, vt totum ad A partem erit, vt ratio CD ſimul, vt totum ad rationem C partem, quòd eſt componendo arguere.

Poteſt autem etiam referri compoſitum AB ad compartē B, vt compoſitum CD ad compartem D.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

Si ſit ratio totum ad partem ſuam, vt aliud totum ad partem quoque ſuam: Erit etiam diuidendo pars ad ſuam compartem, vt alia pars ad aliam compartem ſuam.

SIt eadem diſpoſitio proportionum quę priùs, & ratio compoſita AB ſit ad rationem ſimplicem A, vt ratio compoſita CD ad rationem ſimplicem C. Dico, *quòd ratio ſimplex, & pars* A *erit ad ſuam compartem ſimplicem* B *diuidendo vt ſimplex ratio* C *eſt ad ſuam compartem rationem ſimplicem* D.

EH 1 FL 2 E 3 F 6

$AB\,\frac{6}{12}$ $CD\,\frac{60}{120}$ Ergo $A\,\frac{3}{4}$ ad $B\,\frac{2}{3}$ vt $C\,\frac{6}{8}$ ad $D\,\frac{10}{15}$

$A\,\frac{3}{4}$ $C\,\frac{6}{8}$

E 3 F 6 $H\,2\,\frac{2}{3}$ $L\,5\,\frac{1}{3}$

Conſtituātur ſingularum proportionum denominatores E, H, F, L. Quoniam Ratio AB ad A eſt, vt ratio CD ad C: erit etiam denominator EH ad E prioris combinationis rationum, vt denominator FL ad F poſterioris rationum combinationis ex Coroll. 2. propoſ. 4. huius. Quare diuidendo, quia EH eſt ad E, vt FL eſt ad F erit etiam E ad H, vt F ad L ſuos denominatores partiales. Quare etiam ex Coroll 2. prop. 4 huius ratio A erit ad rationem B, vt ratio C eſt ad rationem D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

Si ſit ratio compoſita ad rationem ſimplicem ſuam partem, vt alia ratio compoſita eſt ad aliam rationem ſuam partem ſimplicem: Erit etiam ratio prior compoſita ad ſuam alteram compartem rationem ſimplicem, vt ſecunda ratio compoſita ad ſuam alteram portionem ſimplicem.

SIt quoque eadem diſpoſitio rationum, vt in præcedenti.

EH 1 FL 2 EH 1 FL 2

$AB\,\frac{6}{12}$ $CD\,\frac{60}{120}$ Ergo $AB\,\frac{6}{12}$ $CD\,\frac{60}{120}$

$A\,\frac{3}{4}$ $C\,\frac{6}{8}$ $B\,\frac{2}{3}$ $D\,\frac{10}{15}$

E 3 F 6 $H\,2\,\frac{2}{3}$ $L\,5\,\frac{1}{3}$

Et ſint inuenti rationum denominatores compoſitarum EH compoſitæ rationis AB, & FL rationis CD. Sicque denominatores rationum ſimplicium E, & H, nec non, & F, & L.

Igitur ex Cor. 2 p. 4. quia eſt AB, ad A, vt CD ad C: Erit etiam denominator EH ad E, vt FL ad F, cum eorum rationes ſint eædem, ac rationum proportiones: Quia itaquè eſt EH ad E, vt FL ad F erit quoque *conuertendo* EH ad H, vt FL ad L: quare etiam proportiones ſimiles ſuis denominatoribus ex Coroll. propoſ. 4. ſimili correſpondentia conuenient, & AB, erit ad B, vt CD erit ad D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVIII.

Si ſit ratio ad rationem, vt altera ratio ad aliam rationem, & iſta altera ſit ad tertiã rationem, vt hæc alia ad tertiam quoque rationem aliam, erunt etiam ex æquo prima ratio ad tertiam, vt alia ratio prima ad aliam tertiam.

$$A\,\frac{1}{3}\quad C\,\frac{4}{9}\quad E\,\frac{4}{8}\quad A\,\frac{1}{3}\quad E\,\frac{4}{8}$$

Ergo

$$B\,\frac{2}{6}\quad D\,\frac{8}{12}\quad F\,\frac{2}{4}\quad B\,\frac{2}{6}\ \text{ad}\ F\,\frac{2}{4}$$

SInt datæ Rationes, & prima in priori ſerie A ſit ad C, vt in poſteriori B eſt D; At in priori C ſit ad E, vt in poſteriori D eſt ad F. Dico, *quòd ex æquo erit quoque ratio* A *ad rationem* E, *vt ratio* B *ad rationem* F.

Probatur Progreſſ. 1. Ratio A eſt ad C, vt B ad D, ergo permutando A erit ad B, vt C ad D.

Progreſſ. 2. Rurſus, vt reſpicit ratio C rationem E reſpicit quoque ſimiliter ratio D rationem F: Quare permutando C erit ad D, vt E ad F.

Sed iam oſtenſum eſt C referri ad D progreſſ. 1. vt A ad B. Ergo etiam A referretur ad B, vt E ad F. Quare rurſus permutando A proportione correſpondebit ipſi E, vt B correſpondet ipſi F, quod erat demonſtandum.

COROLLARIVM

HInc eſt, quòd etiam ſi proportio ſit perturbata idem eueniet: vt videre in expoſitis rationibus.

$$A\,\frac{1}{3}\quad C\,\frac{6}{9}\quad E\,\frac{3}{4\frac{1}{2}}$$

$$B\,\frac{4}{12}\quad D\,\frac{2}{6}\quad F\,\frac{8}{12}$$

Ergo vt

$$A\,\frac{1}{3}\qquad \text{ad}\ E\,\frac{3}{4}\ \frac{1}{2}$$

$$B\,\frac{4}{12}\qquad \text{ad}\ F\,\frac{8}{12}$$

EXPENSIO VI.

De proportionum Algorithmo.

HIc agimus de multiplicatione, diuiſione, ſubductione, additioneque proportionum oſtendendo omnes iſtas varietates operationum, quæ conueniunt numeris, etiam proportionibus ſuo modo conuenire.

THEOR. I. PROP. XXIX.

Partium ſimul ſumptarum ratio eſt ad quantitatem datam eadem, ac compoſitum ex ipſis ad eandem quantitatem datam.

$$A\ \frac{2}{D\ 4}\qquad B\ \frac{1}{D\ 4}\qquad AB\ \frac{3}{D\ 4}$$

SIt data quantitas A, & B, & ſimul comparentur ad D. *Dico, quod ſi comparetur* AB *compoſita ex ipſis ad D, eadem omnino proportio eſt.*

Probatur Ratio A ad D, & B ad D eſt illa ipſa quantitatis A ad B ex 3. huius. Ergo componendo erit Ratio AD vnà cum ratione BD ad BD, vt ratio A vnà cum ratione B refertur ad B, hoc eſt, vt AB 3. ad B 1. Quamobrem proportio AD cum BD ad BD erit, vt AB 3. compoſitum ad D quantitatem datam.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Datæ rationis duplam aſſignare, aut dimidiatam, aut aliam in alia ratione.

SIt data ratio AB, cuius duplum, aut dimidium poſtuletur. Fiat quantitas aliqua C dupla quantitatis A. Dico rationem C ad B eſſe duplam proportionis A ad B, & rationem BC eſſe dimidiam eius, quam habet B ad A.

$$\begin{matrix} A & 3 \\ B & 4 \end{matrix}\qquad C\ 6$$

Probatur. Ratio CB ad AB eſt eadem, quam habet C ad A ex propoſ. 2. huius: ſed C ad A ex effectione habet proportionem duplam, ergo ratio AC ad AB habebit proportionem duplam.

Ratio quoque B ad C, & B ad A eſt, vt A ad C, ſed A ad C habet proportionem dimidiatam. Ergo etiam BC ad BA habebit proportionem dimidiatam.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Datas proportiones diuerſorum antecedentium, vel conſequentium ad eadem antecedentia, ſeu conſequentia habentem proportionem reducere.

DOcuimus id Coroll. 2. propoſ. 4. ſed in quantitatibus rationalibus multiplicabimus ſimul terminum vnius, cum fundamento alterius, & huius terminum cum fundamento prioris, & deinde termini inuicem V. g. data proportione $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{7}$, quæ reducenda ſit ad eundem terminum multiplicabimus 4. per 5. & generabitur 20. deinde 3. per 7. & generabitur 21. & tandem termini 5. & 7. & producetur 35. Proportio itaque $\frac{3}{5}$ erit ea, quæ habebit eundem terminum 35. ac proportio $\frac{4}{7}$.

$$\frac{3}{5}\ \text{X}\ \frac{4}{7}\qquad \frac{20}{35}\qquad \frac{21}{35}$$

Probatur

Probatur: Quia cum 5. multiplicauit 4. & 7. erit ex propoſ. 19. ſeptimi 4. ad 7. vt genitus, 20. a 135. Rurſus. Quia 7. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio 3. ad 5. quæ 21. ad 35. Ergo erunt $\frac{3\ 2}{3\ 5}$ eadem proportio, quæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{2\ 5}{3\ 5}$, quæ $\frac{4}{7}$.

Si vero quis cupiat antecedentes multiplicet, vt priùs terminos, cum fundamentis alternatim, deinde fundamenta inuicem, & producet $\frac{1\ 2}{2\ 0}$, & $\frac{8\ 2}{2\ 0}$, quæ rationes habent idem antecedens 12.

Patet eadem ratione. Nam quia 4. multiplicauit 5 & 3. erit eadem proportio generantium 5. & 3. quę genitorum 12. & 20. ex 19. ſeptimi. Sic, quia 3. multiplicauit 4. & 7. erit eadem proporcio generantium 4. ad 7. ac genitorum 12. ad 21. ergo erit eadem ratio $\frac{3}{5}$ ac $\frac{1\ 2}{2\ 0}$, & eadem quoque $\frac{4}{7}$, & $\frac{1\ 2}{2\ 1}$.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

Datis quibuslibet rationibus eas in vnicam ſummam aggregare.

Sint rationes AB, & CD vnà aggregandæ. Reperiantur denominatores faciendo, vt B ad C, ita correſpondeat proportione B ad aliud F. Deinde aſſumatur aliqua quantitas H illis A, & F denominatoribus ſimul ſumptis æqualis. Dico HB *eſſe ſummam proportionum* AB, *&* CD.

A 3 C 4 F 3 $\frac{1}{5}$ H 6 $\frac{1}{5}$ I 3 M 1 $\frac{1}{2}$ N 7 $\frac{7}{10}$

B 4 D 5 B 4 L 8 B 4

Ratio AB, & FB eſt eadem, ac ratio AB, & CD. quia CD, & FB eadem ratio eſt ex Coroll. 2. prop. 4 huius: ſed ratio HB eſt æqualis illis duabus ex 30. prop. Ergo proportio AB, & CD in vnam ſummam redacta eſt.

Quod ſi placeat, & alias aggregare ipſi HB. idem fiat; ſic V. g. IL $\frac{3}{8}$, & debeat aggregari proportioni HB; Fiat, vt 8 ad 3. ſic 4 ad aliud M, aſſumaturque quantitas æqualis quantitati H, & M ſ. N, & erit proportio NB ex omnibus illis aggregata; nempe ex AB, CD, & IL, vt patet; quia NB ob eãdem prædictam rationem eſt aggregatum proportionum HB, & IL. Proportio verò HB eſt aggregatum proportionum AB, & CD. Ergo NB erit aggregatum proportionum earundem AB, & CD, & inſuper rationis IL.

Si verò agatur de numeris ipſis, vel quantitatibus, quæ proportionum præbent fundamenta, Addenda ſimul ſunt antecedentia ſimulque conſequentia, & numerus ex additione collectos eric ſumma exoptata. V. g ſint 2 $\frac{2}{5}$, ideſt $\frac{1\ 2}{5}$, & 3 $\frac{4}{5}$, vel $\frac{2\ 3}{6}$ in vnam ſummam colligendi. Colligantur ſimul fundamenta proportionum 12 & 13. in minimas partes redacta, & fundamentum fiet 25. deinde termini 5. & 4. & fient 9. erit ergo ſumma collecta $\frac{2\ 5}{9}$, vel 2 $\frac{7}{9}$. Patet, quia cum additi ſint ſimul, & antecedentia, & conſequentia, etiam ſimul additas earum proportiones hoc in ſenſu neceſſe eſt fateri. Patet quoque, quia ſi auferatur à proportione $\frac{2\ 5}{9}$ proportio $\frac{1\ 2}{5}$ reſtituitur proportio $\frac{1\ 3}{4}$.

Aduerte tamen, quod Denominatores non ſunt ſimul addendi V. g 2 $\frac{2}{5}$ cum 3 $\frac{1}{4}$; ſed ipſa proportionum antecedentia 12. & 13. neque hic modus addendi eſt propriè addere proportiones: ſed proportionum terminos.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIII.

Datam proportionem minorem à maiore detrahere.

Sit data proportio minor AB, quam oporteat ſubducere à proportione maiore CD.

A 2 C 6 E 4 $\frac{1}{2}$ F 1 $\frac{1}{2}$

B 4 D 9 D 9 D 9

Fiat, vt B ad A, ſic D ad aliud E. Subducaturq; quantitas E 4 $\frac{1}{2}$, vel detrahatur à quantitate C 6. & remanebit F, 1 $\frac{1}{2}$, & F, 1 $\frac{1}{2}$ ad D 9, habet proportionem reſiduam, & quod proportio FD ſit reſidua proportionis AB à proportionis CD ſubductione.

Probatur. Nam ex 29. huius rationes ED, & FD rationi quantitatũ E, & F ſimul ſumptarũ ęquantur, ideſt ipſi C ad D: ſed proportio ED eſt eadem, ac AB, ergo proportio AB, & FD æquantur ipſi CD. Quare proportio FD erit reſiduum ſubducta proportione AB à proportione CD. Quantitates autem tenùs non autem quoad proportiones ſubductio fit detrahendo fundamenta à fundamentis, & terminos à terminis proportionum. Sic ſi vellemus à proportione $\frac{2\ 5}{9}$ deducere proportionem $\frac{1\ 2}{5}$ ſubduceremus 12. à 25. antecedentia, & 5. à 9. termini ambo, & reſiduum erit proportio $\frac{1\ 3}{4}$. Patet, quia ſi ſimul vt priùs addantur, reſtituitur proportio $\frac{2\ 5}{9}$, cuius denominator eſt 2 $\frac{7}{9}$.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

Datam rationem per aliam multiplicare.

Multiplicare idem eſt, ac componere; ideoque eodem modo, ac propoſ. 15. hoc prob. operi demandabimus, quod ſi placeat efficere, vel multiplicando, ita faciendum erit.

Sit data proportio AB $\frac{2}{3}$, & alia CD $\frac{5}{9}$, quas oporteat multiplicare. Aſſumatur toties quantitas 2. quot partes ſunt in 5. nempe quinque duenarios, ideſt 10. E, & toties quantitas 3. quot partes ſunt in 9. eritque quantitas compoſita F 27. Dico, *quòd proportio* 10. *ad* 27. *eſt proportio genita ex multiplicatione* AB *in* CD.



Probatur. Nam aſſumatur toties quantitas 3. quot vnitates ſunt in 5. & fient I 15 ordineque ponantur quantitates E 10. I 15 F 27. proportio E ad F componetur ex proportione E 10. ad I 15. & I 15. ad F 27. ex propoſ. 10. huius.

Sed ex propoſ. 17. lib. 7. quia 5. multiplicat 2. & 3. & facit 10. & 15. eadem proportio erit inter genitas quantitates 10. & 15. quæ inter generantes 2. & 3. Sic quia 3. multiplicauit 5. & 9. & fecit

15.& 27.eadem proportin erit genitorum 15.& 27. quæ generantium 5.& 9. Cùm ergo 10. & 15. ſit eadem proportio, quæ 2. ad 3. & 15. ad 27. quæ 5. ad 9. Proportio 10. ad 27. dicetur quoque compoſita ex proportionibus 2. ad 3.& 5. ad 9.

Iſte verò modus erit optimus pro numeris, & quantitatibus rationalibus;præſcriptus autem propoſ. 15. huius prorſus eſt vniuerſalis.

PROBL. VI. PROPOS. XXXV.

Datis rationum Denominatoribus ipſas rationes multiplicare.

SInt datæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CO $\frac{3}{9}$, & dentur denominatores ipſarum AB denominator GH, & CD denominatur EF, qui ſimul multiplicentur ex propoſ 15. huius; Et producetur denominator alius, qui proportionem compoſitam denominabit N $\frac{2}{12}$.

			E	$1\frac{2}{4}$	2
				——— N —	
A 2	C 3		F	4	12
		Denom.	G	2	Vel $2\frac{2}{3}$
				——— N —	
B 4	D 9		H	4	16

Probatur ex defin.8. Tract. 9. Elem. Nam rationum quotitates, ideſt denominatores inter ſe multiplicati efficiunt rationem compoſitam. Vnde N $\frac{2}{12}$ erit proportio compoſita ex AB, & CD.

Et hic modus, tum quantitatibus rationalibus, tum irrationalibus conuenit.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Datam rationum proportionem per alteram proportionum rationem multiplicare.

SInt datæ duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{3}{5}$, ſic, & aliæ duæ EF $\frac{2}{4}$, & GH $\frac{5}{6}$. Reperiantur earum denominatores; & quidem rationis AB ſit P 2. rationis verò DC ſit Q $1\frac{2}{3}$. Deinde rationis EF ſit M 2. & rationis GH ſit N $3\frac{2}{4}$.

		A 2	E 2			
10	P 2	——	——	M 2 ——		12
		B 3	F 4			
15						14
		C 3	G 5			
9	Q $1\frac{4}{5}$	——	——	N $3\frac{0}{4}$		20
		D 5	H 6			

Probatur. Ratio P ad Q denominatores eſt, vt rationis AB ad rationem CD; item proportio denominatorum M ad N eſt eadem, ac rationum EF ad GH. Quare ſi methodo præc. vel 15 h. rationes denominatorum inuicem multiplicentur, & Q, $1\frac{2}{3}$ ad P 2. vel redacta ad eaſdem partes 9. ad 10. & ratio M $3\frac{2}{4}$ ad rationem N 2. vel 20. ad 12. multiplicentur ſimul, & fiant 9. ad 6. Ratio 9. ad 6 erit ea, quæ ex ratione denominatorum, & ideo ipſarum rationum conſurgit, vel alio modo erit proportio 180. ad 120. vt docuimus prop.34. huius.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Datam rationem in duas ipſam componentes rationes partiri, quæ inter ſe datam obtineant rationem.

SIt data proportio A 6. ad B 27. & oporteat hanc proportionem in duas diuidere, quę inuicem datam obtineant rationem E 2. ad F 4.

	A 6	E 2	A 6	B 27	A 6 C 9
Rat.	Prop. data	——	—— C 9		—
	B 27	F 4	D 3	D 3	C 9 B 27

Fiat itaque, vt refertur F ad E, quòd ſic referatur A ad aliud O. Deinde inter O, B media proportionalis ſtatuatur C. Dico factum eſſe, quòd proponebatur, & rationem AB eſſe diuiſam in rationes AC, & CB, quæ inter ſe rationem obtinent, quæ eſt inter E, & F.

Probatur. Quoniam B eſt ad C, vt C ad D per conſtructionem, erit etiam inuertendo D ad C, vt C ad B: ſed vt A ad D, ſic ex 3. huius eſt ratio AC ad rationem DC ob eundem terminum C, & ratio DC, eſt eadem, ac CB: Vnde ratio AC ad rationem CB eſt A ad D hoc eſt ex conſtructione, vt E ad F.

Proportio autem AB componitur ex proportione AC, & CB interpoſito termino C ex 10. huius. Ergo Ratio AC, & ratio CB ſunt duæ rationes, quæ ſe habent, vt E ad F, quæ componunt proportionem AB.

PROBL. IX. PROPOS. XXXIX.

Datam rationem diuidere.

SIt ratio AB $\frac{4}{7}$ diuidenda per rationem CD $\frac{3}{5}$ fiat, vt D ad C, ita 7. ad aliud, & prodibit E $4\frac{1}{5}$, itaque ratio AB $\frac{4}{7}$ ſubductâ ratione CD $\frac{3}{5}$ remanet ratio E 4 ad $4\frac{1}{5}$, ideſt 20. ad 21.

Probatur. Nam toties AB continet rationem CD, quoties A continet E, quia A, & E ſunt denominatores Rationum; & ſicuti diuiſo numero quotiens demonſtrat vices, quibus diuiſor continetur in diuiſore; ſic, & hic denominatores A, & E oſtendunt quoties ratio CD continebatur in ratione AB nempe, vt 20. in 21.

Si verò agatur de numeris, vel de quantitatibus rationalibus; fundamenta Rationum cum terminis alternatim multiplicentur.

V. g Sit proportio AB $\frac{3}{5}$ auferenda à proportione CD $\frac{4}{7}$ multiplicetur fundamentum huius 3. cum termino alterius 7 & producetur 21. Deinde fundamentum 4. alterius cum termino huius 5. & fient 20. eritque proportio $\frac{20}{21}$, illa, quæ erit quotiens, & demonſtrabit, quomodo proportio $\frac{3}{5}$ contineatur in proportione $\frac{4}{7}$.

Probatur. Nam fundamenta 3. & 4. quoque multiplicentur ſimul; producent 12. Itaque quia 3. multiplicauit modo 4. & prius 7, erit eadem proportio 4. ad 7. quæ genitorum 12. ad 21. ex prop. 17. lib.7. Proportio verò 12. ad 21. eſt compoſita ex proportione 12. ad 20. & 20. ad 21. ex propoſ. 10. huius: Proportioque 12. ad 20. eſt eadem, quę 3. ad 5. cùm ſint 12. & 20. numeri geniti ab eodem 4. qui vtroſque 3. & 5. multiplicauit ex propoſ. 17. lib.7. Quare ſubducta proportione 12. à 20. eadem, quę 3. ad 5. remanebit proportio 20. ad 21.

Quod

Quod autem ratio 20. ad 21. ſint quoque quotiens, patet; ſi inuicem multiplicentur termini: Fiet enim terminus 35. communis vtriſque, vt ſuprà docuimus propoſ.13. huius; ideoque ex propoſ.2. huius erit ratio $\frac{3}{5}\frac{9}{7}$ ad rationem $\frac{3}{5}\frac{8}{7}$, vt 20. ad 21 quare proportio 20. ad 21 indicabit, quoties ratio $\frac{3}{5}\frac{9}{7}$ contineatur in ratione $\frac{3}{5}\frac{8}{7}$. Vnde proportio $\frac{3}{5}\frac{9}{7}$ erit quotiens.

COROLLARIVM.

Hinc quoque patet idem eſſe in proportionibus ſubducere, ac diuidere, ſicut idem eſt multiplicare, & componere, quia ſubductâ vnâ ratione ab aliâ, ratio reſidua eſt quoque quotiens, & multiplicata ratione per aliam, vt diximus, fit ratio compoſita

PROBL. X. PROPOS. XL.

Datis rationibus, quæ inuicem habeant rationem inæqualitatis aſſignare exceſſum minoris proportionis ſuper maiorem.

A 3 / B 12 C 6 / D 10 E $7\frac{2}{10}$ I $1\frac{9}{12}$ K 5

Sit data ratio AB $\frac{3}{12}$, & Ratio maior CD $\frac{6}{10}$. Fiat, vt D ad C, ita B ad aliud exhibebit E $7\frac{2}{10}$ Ideoque ex 4. huius, vt AB ad CD rationem; ita erit A ad E: ponitur autem maior ratio CD ratione AB; erit ergo maior E quantitas, quantitate A. Subducatur itaque, & auferatur ab B quantitas æqualis ipſi A 3. & remanebit reſiduum E $4\frac{2}{10}$ denominatoris ſubducto denominatore A 3. Fiat itaque, vt denominator A 3. ad reſiduum denominatoris A $4\frac{2}{10}$ ſic AB $1\frac{9}{12}$ ad aliam rationē IK ex propoſ.9. huius, & 5. *Dico rationem* IK *eſſe exceſſum, quò ſuperat ratio* CD *rationem* AB.

Probatur. Quoniam, vt A ad B totum, denominatores, ſic AB ad CD, rationes. Ergo, ex 22 l.5. vt ſublatū ad reſiduum denominatoris E, ſic AB ablatū ad reſiduum rationis CD. Sed vt A ablatum ad reſiduum denominatoris E, ſic ex effectione eſt ratio AB ad rationem IK. Ergo ratio IK eſt eadem, ac reſiduum rationis CD. Quia eadem vos ratio AB eiſdem CD, & IK dicit eandem proportionem, quam A denominator ablatum ad reſiduum denominatoris; B, quod erat oſtendendum.

Hæc autē IK eſt eadē ac 3 ad $1\frac{9}{12}$ vt patet, ſolúq; exceſſus ſub alijs terminis, ſi placeat exquiri poteſt, Patet verò 3 ad $4\frac{2}{10}$, vel 30. ad 42. eſſe, vt denominator 4. proportionis AB $\frac{3}{12}$ ad denominatorem IK $1\frac{9}{12}$ ad 5. vel 21. ad 60 qui eſt 2. & [illegible], quoniam redacti ad numeros planiores ſunt 60. & 84. qui ſunt in eadem proportione, ac 30. ad 42.

EXPENSIO VI.

De proportionum ſimilium continuatione.

Sicut datis duabus quantitatibus, vel tertia, vel media proportionalis reperitur, & datis tribus quarta proportionalis reperitur, idem ſentiendum eſt de proportionibus ipſis, in quibus ſi dētur duæ, media, vel extrema poterit inueniri; & tribus datis quarta perſcrutari valebit.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inter duas datas rationes mediam rationem proportionalem inuenire.

Datæ ſint rationes AB $\frac{2}{5}$, & GH $\frac{9}{10}$, inter quas oporteat reperire mediam proportionalem. Fiat, vt H ad G; nempe 10. ad 9. ſic 5. ad aliud E $4\frac{1}{2}$. Interque A 2. & E $4\frac{1}{2}$ media proportionalis quantitas inueniatur A 2 K 3. & E $4\frac{1}{2}$ Deinde fiat, vt A 2 ad K 3. ſic ratio AB $\frac{2}{5}$ ad rationem CD $\frac{3}{5}$ ex propoſ. 9. huius, vel 5. Dico *hanc eſſe mediam proportionalem, ſicque* AB, *&* CD, *&* GH *in continua proportione.*

A 2 / B 5 G 9 / H 10 A 2 K 3 E $4\frac{1}{2}$

AB $\frac{2}{5}$ CD $\frac{3}{5}$ GH $\frac{10}{9}$

Probatur. Nam, vt A ad K; ſic effecimus rationem AB $\frac{2}{5}$ rationi CD $\frac{3}{5}$ correſpondere proportione. Ratio autem A ad E eſt duplicata rationis A ad K ex 10.h. erit quoq; ratio A ad E duplicata rationū AB $\frac{2}{5}$ ad CD $\frac{3}{5}$. Sed ratio A ad E eſt eadem, quæ ratio AB ad rationem GH, cùm A, & E ſint denominatores ex 4. huius, Ergo AB ad rationem GH eſt duplicata rationis AB ad CD, & ſic CD eſt media proportionalis; quæ exponitur, & AB, CD, & GH erunt in continua proportione.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Datis duabus rationibus tertiam rationem proportionalem inuenire.

Dentur duæ rationes AB $\frac{2}{5}$, & CD $\frac{8}{12}$, & oporteat ipſis tertiam proportionalem inuenire. Fiat, vt D ad C, ſic B ad aliud I. 3. & $\frac{2}{8}$ vt autem A 2. ad I. $3\frac{4}{12}$, ſeu 24. ad 40. ſic fiat ratio CD ad rationem aliam GH $3\frac{1}{3}$ ad 3. vt docuimus pr.5. ad 3. Dico, quod proportio GH eſt tertia proportionalis, & quod Ratio AB. & GD ſit in continuâ Analogiâ trium AB, CD, & GH.

A 2 / B 5 C 8 / D 12 G $3\frac{1}{3}$ / H 3 B 5 / I $3\frac{1}{3}$

Probatur. Nam ratio AB eſt ad rationem CD ex propoſ.4. huius, vt A ad I; ſed vt A ad I, ſic facta eſt ratio CD ad rationem GH: Ergo Ratio CD ad

GH habet eandem proportionem, quam AB ad CD. Vnde tres AB, CD, & GH ſunt in continuâ Analogiâ.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Datis tribus rationibus quartam proportionalem adinuenire.

Sint datæ tres rationes AB $\frac{1}{3}$, CD $\frac{2}{4}$, EF $\frac{3}{5}$, & oporteat Innenire quartam proportionalem.

Fiat, vt D 4. ad C 2. ſic B 3. ad aliud X, 1 $\frac{1}{2}$; inueniaturque ex propoſ. 6. huius ad rationem EF alia ratio GH, quæ ſit in proportione, vt A, 1 ad X, 1 $\frac{1}{2}$, & erit GH $\frac{9}{10}$. Itaque GH eſt illa, quæ exquiritur, proportioque AB eſt ad proportionem CD, vt ratio EF ad rationem GH.

A	1	C	2	X	1 $\frac{}{2}$		E	3	G	9
B	3	D	4				F	5	H	10

Probatur. Ratio AB eſt ad rationem CD ex 4. huius, vt A ad X, ſed vt A ad X; ita effecta eſt ratio EF ad rationem GH: Ergo ratio AB ad rationem CD erit, vt ratio EF ad rationem GH.

Vbi vides, quòd ad hoc, vt rationes ipſæ ſint ſimiles, non eſt neceſſe, quòd termini ipſi ſint proportionales, & quod ita ſit A 1. ab B 3. vt C 2. ad D 4. nec E 3. ad F 5. vt G 9. ad H 10. vti eſt neceſſe in ſimilitudine ipſorum terminorum ad hoc, vt enim ſimilis ſit ratio A ad B, quæ C ad D, neceſſe eſt, vt etiam ipſi termini ſint ſimiles, & A 2. ſit ad B 4. vt C 3. ad D 6. & tunc ratio 2. ad 4. dicetur eadem, quam 3. ad 6. Sed in rationibus ipſis AB $\frac{1}{3}$ ad Rationem CD $\frac{2}{4}$ eſt, vt ratio EF $\frac{3}{5}$ ad rationem GH $\frac{9}{10}$, & tamen termini ipſi ſunt diſſimiles: Imo, & rationes ipſæ: neque enim eadem ratio eſt $\frac{1}{3}$, quæ $\frac{2}{4}$, aut $\frac{3}{5}$, quæ $\frac{9}{10}$, vt patet; & tamen ita eſt AB ratio ad rationem CD; vt EF ad GH, quod, & ipſo experimento percipies, ſi reduces omnes proportiones ad eoſdem terminos AB $\frac{4}{12}$ CD $\frac{6}{12}$ EF $\frac{30}{50}$, & GH $\frac{45}{50}$: nam cum iſtæ proportiones habeant eoſdem terminos erunt, vt antecedentes, & erunt, vt A 4. ad C 6. ſic E 30. ad G 45. vt patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLIV.

Propagare proportiones ſecundum datam rationem.

Sit data ratio AG $\frac{2}{3}$, & oporteat reperire rationẽ triplicatam ad rationem AH, ſed in ratione A ad G.

Diſponantur quantitates proportionales ab eadem quantitate incipientes in ratione AG 2. ad 3.

A	2	B	4	C	8	D	16	E	32
A	2	H	6	L	18	M	54	N	162
						K	36	P	108

Dico, quod factum eſt id, quod requiritur. Nam proportio tertia DM habet ad proportionem ad primam eius duplicatam proportionem B ad H, & EN quadruplicatam ad eandem BH eius, quam habet B ad H.

Nã expt. 8. tr. 16. p. 1. D ad M habet ꝓportionẽ triplicatã eius, quæ eſt B ad H. Fiat, vt M ad B, ſic M ad K, eritque ex 4. h. ratio DM ad rationem BH, vt D ad K. Ratio verò DK componitur ex proportione D ad M, hoc eſt, vt dixi triplicata rationis B ad H eius, quam habet A ad A, cuius denominator 1; & M ad K, quę ex effectione eſt eadem, ac ratio HB. At qui rationes BH, & HB producunt compoſitæ rationem æqualitatis ex propoſ. 19. huius.

Ergo ratio D ad K componitur ex ratione eius, quam habet A ad A triplicatã rationis BH, & ideo duplicatam B ad H, & ratione æqualitatis, ſed Ratio æqualitatis nihil addit ex Coroll. propoſ. 15. in compoſitione rationum, ergo ratio D ad M eſt duplicata rationis B ad H. Sed vt D ad M, ita ratio DK ad rationem BH, ergo ratio DM ad rationem BH habet duplicatam proportionem.

Ita dicas de ratione EN, quæ eſt triplicata rationis BH. Fiat enim, vt H ad B, ſic N ad aliud P. Eritq; ex 4. h. E ad P, vt proportio EN ad proportionẽ BH.

Ratio vero E ad P componitur ex proportione E ad N, & N ad P, & ideo quadruplicata eius, quam habet A ad A, & triplicata eius quam habet B ad H, & H ad B, ſiquidem ex effectione NP eſt eadem ac HB, ſed HB, & BH producunt rationem æqualitatis, quę nihil addit in ꝓportionibus, ideo ꝓportio E ad P eſt triplicata rationis, quam habet B ad H, ſed vt eſt E ad P, ita eſt ratio EN ad proportionem BH, ergo proportio EN eſt triplicata rationis BH.

Et idem erit ſi cupias quintuplicare rationes, & ſextuplicare addendo terminos in eadem proportione.

COROLLARIVM.

Eruitur itaque ex hoc Tractato multos vnius cuiuſcumque proportionis reperiri denominatores; & ſi agatur de denominatoribus numericis.

Primo reperitur denominstor propriè dictus, qui ita eſt ad vnitatem, vt aliqua quantitas ad ſuam partem, V. g. Proportio 6. ad 3. habet denominatorem propriè dictum numerum 2. quia ita 2. eſt ad 1. vt 6. ad 3. ex hoc ſenſu multi numeri, nempe omnes primi in ijs proportionibus, non poſſident alium denominatorem, niſi ſe ipſos; quia ex propoſ. 1. lib. 8. Element. ſunt minimi in illis rationibus, & ipſis minores eiuſdem proportionis dari nequeunt. vt ſunt $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, & de iſtis intelligitur principium illud, quod multiplicantes conſequens producant antecedens, vel diuidentes iuxta exigentiam proportionis maioris, vel minoris inæqualitatis.

Secundo adeſſe denominatores impropriè dictos, ſub quo genere, non dum numerici; ſed, & quantitatis continuæ concluduntur, nempe quantitates; quæ ſint in proportione ad aliquam ſuam partem, vt duæ quantitates ſunt ad inuicem, quarum proportionem denominant; & hoc ſenſu omnes etiam irrationales proportiones obtinent ſuum denominatorem; ſi non minorem ſaltem maiorem; vt proportio 6. ad 3. habet denominatorem $\frac{4}{2}$ $\frac{8}{4}$, & irrationales, vt explicauimus in defini. 3. h.

Tertio adeſſe denominatores proportionales, qui ſua habitudine ad aliam oſtendunt proportionalitatem, quam habet vna ratio ad aliam V. g. proportio 6. ad 3. habet denominatorem 2. & 4. ad 10. numerum 2 $\frac{1}{2}$, vel prima 4. & ſecunda 5. vel prima 12. & ſecunda 15. Iſti ergo omnes denominatores ſunt proportionales, qui ſuis partibus

tibus idem officium exequantur, quod denominatores ſimplices 2. & 2 $\frac{1}{2}$.

Quatto reperiri denominatores proportionis maioris inæqualitatis; qui exprimontur numeris integris etiã fractionibus copulatis, ſed tali modo, vt vel vnitas in propriè dictis, vel pars aliquota ſuppoſita ſubintelligatur, vt $\frac{2}{2}$ $\frac{4}{2}$ proportionis 2. ad 6. quo ſignificetur, antecedens continere in ſe duas partes, quarum conſequens eſt vna. At minoris inęqualitatis vnitas, vel pars aliquota ſuperpoſita eſt ſubintelligenda, vt $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{4}$, quo notetur quantitatem antecedentem eſſe partem, vel ſecundã, vel tertiã ſequentis. Id tamen ſcribi non ſolet, eo quia commodè non poſſit, cum denominator, cui adhæret fractio (vt multoties euenire ſolet) ad modum fractionis exarari non debeat, nec poſſit; quamuis ſi denominatores calculo ſubigantur intereſt, vt ad eorum ſignificationem percipiendam aliquo modo notetur.

In proportionalibus autem denominatoribus nullo modo id ſit neceſſarium; cùm ſufficiat habitudo ipſa quantitatum ad exprimendam proportionem rationum.

TRAC-

TRACTATVS XVIII.

De Flexis.

VIſis lineis rectis ſecundum ſe, antequam videamus de ipſis, prout circulo inexiſtunt, vel ſecant, vel eum tangunt, & vt latera quoque ſunt omnium figurarum, quæ circulo deſcribuntur, & ideo omnes etiam, vt earum latera conſiderentur; priùs de ipſis Flexis agendum eſt, & in primis de circulo.

EXPENSIO I.

De circuli deſcriptione, atque menſura.

FLexæ; aliæ ſunt, quæ ex corporum ſectionibus exoriuntur, quæ per motum puncti, & lineæ in plano nullo modo explicari poſſunt; aliæ, quę in plano ſolùm deſcribuntur, itant ad corpus nullam relationem poſſideant, aliæ vero, quæ & plano deſcribi queant, & tamen ſectiones quoque corporum ſint; aliæ, licet corporum ſectiones non ſint; ſolis tamen corporibus rotundis, & flexis deſcribi queunt.

Primi generis ſunt, Hiperbola, & aliqua talis quæ per lineæ motum, vel puncti nullo modo explicari poſſunt, vel ſaltem de facto non explicantur, & ſectiones Coni ſunt. Quarti verò generis Helix Cilyndro, ſeu Cono, ſeu ſphęrę circumuoluta, quæ eſſentialiter poſcunt illud ſubiectum; nec plano deſcribi queunt. Secundi verò generis eſt ſpiralis Conchilis, Aſymtotos; & huiuſmodi. Tertij verò Circulus, qui & plano, & ſphera eodem modo deſcribi poteſt, ſicut Ellipſis, & Cylindro Conoque, & etiam plano duobus centris adhibitis, vel motu lineæ per angulum rectum, vt infrà. Hìc agemus de lineis, quæ plano deſcribuntur: reliquæ enim lineæ, cognitiones ipſorum corporum poſcunt: vnde eas ſuo loco ſeruabimus: at hìc in primis de circulo.

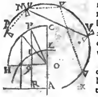
Licet facilis deſcriptio circuli ſit cum planum liberum eſt, & breue: cum tamen magnum, & impeditum non eſt adeo facilis; quare de hoc loquentes ſit.

PROBL. I. PROPOS. I.

Arcùm circuli, cuius centrum haberi nequeat, deſcribere.

SIt deſcribendus circulus, & centrum A haberi nequeat. Fiat angulus VMP obtuſus, & claui figantur plano in punctis M, & P, moueanturque altera lambendo clauos, V. g. à P per M vſque ad V; vertex enim M deſcribet portionem circuli PMV, quam produces. Si latus MP transferas per arcum factum: nam aliud latus MV ſua extremo arcum XV continuabit.

Probatur ex propoſ. 24. lib. 3. Nam in ſegmentis æqualibus eiuſdem circuli capiunt anguli æquales. Cum ergo angulus VMP, ſit ſemper æqualis, erit ſemper in æquali circumferentia eiuſdem circuli vertex eius M, & eius extrema V, & P; quare eundem circulum deſcribent. Huius autem circuli inuenies diametrum ex 1. lib. 3. vel per calculos.



* Sed etiam alio modo deſcribi poterit. Nempe faciendo centrum O in alio loco, & ducendo circulum CH cum non poſſit in A, nam LC longitudo, ſeu maior ſeu minor ea fuerit menſurata à circulo CH in qualibet linea parallela ipſi OC velut eſt PI ſuo extremo I circulum deſcribet.

Probatur. Nam ablato impedimento ſit AL radius æqualis radio OC, & ducatur perpendicularis AR ad AO. Cum ergo ſit LA æqualis OC: ablata ergo communi LO, erit LC æqualis ipſi OA: ſed IP eſt æqualis LC ex hypotheſi. Ergo & OA, & conſequenter æquali QR, & ideo QR erit æqualis IP: ſi addatur itaque QI vtriſque erit RI æqualis QP; ſed QP ſuo extremo P eſt in circumferentia circuli: Ergo etiam RI vel PI ſuo extremo I erit in circumferentiâ circuli æqualis.

THEOR.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. II.

Secto angulo alicuius trianguli biſariam, ambo crura ad baſim totam, habent eandem proportionem, quam ipſum crus ad ſegmentum baſis ſibi vnitum.

SIt triangulum ABC. Diuidaturque angulus ad A biſariam per lineam FA. Dico *quod* AB, *&* AC *ſimul eandẽ proportionẽ habent ad* BC *crus alterũ, quã ipſũ crus* AC *ad ſegmentum baſis ſibi vnitum* FC.

Probatur ex propoſ. 3. lib 6. ita eſt CF ad FB, vt CA ad AB. Quare *componendo*; ita CF, & FB baſis ſegmenta ſimul ad alterum ſegmentum baſis CF; vt crus AC, & crus AB ſimul ad crus AC illi ſegmento CF vnitum: Quare, & *permutando* ita erit CF, & FB ſegmenta baſis ad cruta AC, & AB, vt ſegmentum baſis CF ad crus ſibi vnitum AC. Vel *inuerſè* CA, & AB ad CB, vt CA ad CF. Hoc eſt fundamentum Archimedeę demonſtrationis ſequentis.

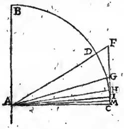


THEOR. I. PROPOS. III.

Cuiuſlibet circuli peripheria eſt tripla diametri, & adhuc parte ſeptima ipſius inſenſibiliter minor eſt.

SIt circulus, ſeu quadrans, quòd ſufficit ABC. Sitque in eo angulus DAC ad centrum 30. Gr. Latus CF trianguli AFC erit dimidium baſis FA, ex illis, quæ dicta ſunt lib. 4. elem. propoſ. 15. Siquidem eſt latus hexagoni FV cuius duplum, ſeu 60. Gradus ſubtendit, & ideo æquat baſim AF, & cum CF ſit tangens, CAF triangulum eſt rectangulum.

Progreſſ. 1. Si ergo CF ponatur 153. partium FA eius dupla erit 306. Vnde ex propoſ. 11. elem. lib. 2. exquiremus latus AC. Nam quadratum numeri 153. eſt 23409. quo dempto à quadrato numeri 306. quod eſt 93636. remanet quadratum 70227. à quo ſubducta radix quadrata ex prop. 20. Tract. 13. dat latus AC paulo maius, quam 265. vnde iunctum ſimul lateri AF 306. erunt 571.



Progreſſ. 2. Quia itaque, vt ex Lemmate duo crura AF, & AC 571. ſunt ad baſim CF 153. vt vnum crus AC ad ſegmentũ ſibi vnitũ CG diuiſo angulo FAC biſariam in G, erit crus AC ad ſegmentum CG paulo maius in proportione, quam 571. ad 153. & ideo poſito. quòd CG ſit 153. AC crus excedet 571. ſed non integra vnitate, neque enim perueniet ad 152.

Progreſſ. 3. Cum ergo habeamus nota AC, & CG in triangulo ACG rectangulo, eodem prorſus modo progrediemur, vt in primo progr. Nam diuiſo angulo GAC biſariã in H eodẽ tenore argumẽti procedemus: Quia poſuimus ſegmentum CG eſſe 153. partium quadratum eius erit, vt dictum eſt 23409. & quia poſuimus AC eſſe 571. & paulò magis, quadratum eius erit 326041. & ſimul faciet ferè quadratum AG ex 11. lib. 2. elem. partium 349,450. licet quadratum ipſius AG ſit paulo maius, eiuſque radix paulo maior, quam radix 591 $\frac{1}{8}$ prædicti numeri 349450. Vnde proportio AG ad CG erit 591 $\frac{1}{8}$, & aliquid amplius ad 153. baſim CG: & ſi iungantur ſimul duo crura AC, & AG 571. & 591. & $\frac{1}{8}$ erunt vt 1162 $\frac{1}{8}$ ad baſim CG 153.

Quamobrem arguentes, vt ſecundo progreſſu. Quia ex propoſ. 2. duo crura AC, & AG ad baſim CG ſunt, vt crus AC ad ſegmentum ſibi vnitum CH, ideo ſi ponatur CH 153. partium, erit crus AC 1164 $\frac{1}{8}$, & paulo maius.

Progr. 4. Secabimus rurſus in triangulo HAC angulum A in duas ęquas partes in I: & eodem argumentandi ritu procedemus. Iungemus enim quadratum AC paulò maius, quàm 50534 $\frac{1}{4}$ $\frac{9}{4}$ quadratum inquam numeri 1164 $\frac{1}{8}$ ei cruri penè æquale, & quadratum baſis CH 23409. & facient quadratum 1373943 $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$, quod penè æquabit duo quadrata facta ex crure AC, & baſi CH, quadrato ipſi ex crure AG ex 11. lib. 2. æqualia, & deficiet, nec quidem integra vnitas; vnde extracta radix quadrata dabit numerũ 1172 $\frac{1}{8}$, qui proximè æquabit crus HA. Vnde HA erit ad CH ferè vt 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, & ſi ſimul iungantur duo crura AH 1172 $\frac{1}{8}$, & AC 1164 $\frac{1}{8}$ erunt, vt numerus 2332 $\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, quã ipſe numerus 2334 $\frac{1}{8}$. Quapropter cum duo cruta AC, & AH ſint ad totam baſim CH, vt crus AC ad ſegmentum CI, ob diuiſum angulum biſariam in I. Si ponamus hoc ſegmentum CI eſſe 153. partium crus AC, erit 2334 $\frac{1}{4}$, & paulò ampliùs.

Progreſſ. 5. Secabimus deinde angulum IAC in M biſariam, iungemuſq; quadratum baſis IC ſemper idem 23409. & quadratum cruris AC 2334 $\frac{1}{4}$ quod eſt 5448723 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$, & paulò ampliùs, fietque quadratum 5472090 $\frac{1}{4}$, cuius radix 2339 $\frac{1}{4}$ eſt crus IA, & etiam paulo auctior; Vnde crus IA erit ad CI, vt 2339 $\frac{1}{4}$ proximè ad 153. & crura ſimul poſita CI 2339 $\frac{1}{4}$, & AC 2334 $\frac{1}{4}$ erunt vt 4673 $\frac{1}{2}$, & paulò ampliùs, quam ipſe numerus ad 153. Quarè, ſi ponatur CM ſegmentum 153. ex Lemmate, & 2. propoſ. huius erit crus AC paulò maius, quam 4673 $\frac{1}{2}$ ſed non maius adeo, vt ęquet 4674.

Progreſſ. 6. Sicque iam habemus multilaterum circulo circumſcriptum, cuius ſemilatus CM eſt 153. ad ſemidiametrũ AC, quod eſt paulo maius, quã 4673 $\frac{1}{2}$, quia ergo DC eſt tertia pars quadrantis dimidium GC, erit ſexta; & huius dimidium CH duodecima, & huius dimidium CI vigeſima quarta, & huius dimidium CM quadrageſima octaua pars erit quadrantis: Vnde CM erit ſemilatus multilateri, quod ſubtendet 48. partem quadrantis. Sed duplicatum, vt ſit latus integrum ſubtẽdet 24. partem quadrantis; & ideo ob quatuor quadrantes multiplicatum per 4. nonageſima ſexta pars totius circuli; nempe Polygonum laterum 96. & quia ſemilatus eius, vt probauimus progreſſ. 5. eſt ad ſemidiametrum, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$ ferè; ideo totum

tum

tum latus erit ad totum radium, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$. cum ita ſit dimidium ad dimidium, vt totum ad totum ex propoſ. 18. lib. 5. Quapropter ſi multiplicemus latus CM 153. per 96. latera, quibus polygonum conſtat, habebimus latera totius polygoni 14688.

Si ergo dicas, regulam auream adhibendo ſi 22. dant 7. ideſt ſi 3. & $\frac{1}{7}$ dant 1. quid 14688.? & exhibebunt 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$. Quare Polygoni ambitus ad 4673 $\frac{1}{2}$ habet minorem proportionem, vtpote ad numerum maiorem, quam ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{0}{2}$. Quare, & ad ipſum diametrum maius, quam 4673. $\frac{1}{2}$ habebit adhuc polygoni ambitus minorem proportionem, vtpote adquid maius. At circumferentia, vtpote interior ipſi polygono eſt minor, quàm ambitus polygoni: Ergo dicet tanto amplius minorem proportionem ad diametrum ex propoſ. 8. lib. 5. ideſt, quàm 14688. ad 4673 $\frac{0}{2}\frac{0}{2}$, vel quàm 22. ad 7.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. IV.

Triangulum in ſemicirculo, cuius vnus angulus ſit medietas alterius trianguli in eodem ſemicirculo, habet crus maius ad minus in eadem proportione, quam habent duo crura maioris trianguli ad totam baſim.

SIt triangulum ABH in ſemicirculo AGB, cuius angulus ad A, ſit medietate minor, quàm angulus A in triangulo maiori BAG. Dico, quòd AH crus refertur ad HB latus, vt duo crura AG, & AB trianguli maioris referuntur ad baſim BG.

Probatur. Triangula AHB, & paruum MBH ſunt æquiangula, quod ſint rectangula, & in æquali peripheria BH, & HM ex 21 lib. 3. Ergo latera in eadem proportione verſabuntur ex propoſ. 4. lib. 6. Ergo erit ita proportionatum crus AH maius in triangulo magno ad crus BH maius crus in paruo, vt ipſum BH crus quoq; minus in magno ad HM in paruo triangulo crus minus, ideſt vt AH ad BH, ſic BH ad HM. Et ita erit baſis BA in magno ad baſim BM in paruo, vt crus minus BH trianguli magni BAH ad crus minus MH parui trianguli BMH.



Sed iam dictum eſt, quòd HA ad HB prorſus eiuſdem proportionis reperiatur, vt HB ad HM parui. Ergo etiam hæc duo crura reſpicient baſes eadem proportione, quà reſpiciebant BH, & HM ex 16. lib. 5. Ideoq; ita erit AB baſis ad baſim BM, vt crus AH ad crus BH. Sed ex 2. huius propoſit. vt BA, & AG, vt vnum ſumpta reſpiciebant baſim GB, ſic crus BA reſpiciebat BM crus ſibi vnitum, & ſegmentum baſis maioris trianguli BAG, Ergo etiam AH crus maius ad BH crus minus eandem proportionem dicet, quam duo crura BA, & AG ad baſim BG trianguli maioris BAG dicebant.

THEOR. II. PROP. V.

Circumferentia cuiuſlibet circuli diametrum continet ter, & inſuper magis, quàm eius octauam partem.

PRobatur ferè eodem modo, quo ſecunda propoſitio. Fiat itaque circulus, ducaturque diameter AB, & latus hexagoni BG. Quod BG ſtatuatur partium 780. erit diameter AB, vtpote eius duplum partium 1560. cuius quadratũ erit 2433600. Quadratum verò lateris hexagoni BG 608400. quod dẽptũ à quadrato diametri remanet 1815200. quadratum lateris AG, cuius radix quadrata eſt paulò minor, quam 1351. Vnde latus AG erit paulò minus, quam 1351. & ſimul vtrumque crus AB, & AG erit paulò minus, quam 2911. & baſis BG latus hexagoni part. 780.

Progr. 1. Diuidatur angulus ad A bifariam linea AH, & iungatur BH, fietque rectangulum ABH; Quia ergo, vt 4. propoſ. huius oſtenſum, ita eſt vtrumque crus AG, & AB ad baſim GB, vt crus AH ad crus BH; ideo, ſi ponatur; quòd crus BH ſit partium 780. crus HA erit partium 2911. nempe, vt eſt baſis GB ad duo crura AB, & AG. Ideoque ex quadratis laterum rectanguli BAH inquiremus baſim AB: cum ergo quadratum cruris BH, ſit 608400. quòd crus ſupponitur 780. partium, & quadratũ AH cruris, quod ponitur hoc progr. 2911. partium ſit 8473921. ſi vniantur ſimul, vt fiat numerus 9082321. hoc erit quadratum baſis AB rectanguli AHB, cuius radix quadrata eſt 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ paulò auctior, & ideo AB erit paulo minor partibus 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$, & ſimul vtrumque crus AB, & AH part. 2911. erunt partiũ 5924 $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$, & crus HB 780.

Progr. 2. Secto rurſus angulo ad A in triangulo BAH bifariam per lineam AF, ex prop. 4. huius, ita erit vtrumque crus BA, & AH ad baſim HB, vt crus AF ad crus BF. Vnde, ſi ſtatuatur baſim BF eſſe 780. partium crus AF, erit parùm minus, quàm 5924 $\frac{1}{4}$; nimirum, vt baſis HB ad duo crura AB, & AH: Quare ſi horum quadrata vniantur ſimul in rectangulo BFA dabunt baſis quadratum BA: cùm ergo quadratum BF ſit 608400. & quadratum FA 35102662. Iuncta itaque ſimul dabunt quadratum 35711062. cruris BA, cuius radix quadrata eſt 5975 $\frac{1}{2}\frac{4}{8}$, & paulò magis. Itaque crus BA erit paulò minus, quàm 5975 $\frac{1}{2}\frac{4}{8}$, quod iunctum cruri AF 5924 $\frac{1}{8}$ facient numerum amborum crurum AF, & BA paulo auctiorem, quàm 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ baſis verò BF erit 780.

Progreſſus 3. diuidatur rurſus angulus BAF in duas partes æquales per lineam AI, & per 4. prop. huius, ita erit vtrumque crus trianguli maioris BA & AF ad baſim BF; vt crus AI ad crus BI. Ideoq; ſi ſtatuatur baſis BI part. 780. erit crus IA par. 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$, nẽpe vt baſis BF ad duo crura AB, & AF, & quia BIA eſt triangulum rectangulum: Ideo quadratum duorum crurum BI, & AI erit æquale quadrato baſis BA. Quadratum verò cruris AI eſt 141628090. & quadratum BI eſt 608400. iuncta ſimul erunt 142236490. cuius radix quadrata eſt 11926. $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ paulò auctior: vnde AB baſis erit paulò minor quam

quam 11926 $\frac{1}{2}\frac{4}{6}$, quod iunctum cruri IA 11900. $\frac{1}{2}\frac{4}{6}$ dat 23826 $\frac{1}{2}\frac{1}{6}$: baſis verò, ſeu crus IB erit 780.

Progr. 4. Diuidatur tandem angulus IAB biſariam linea AV, & quia ea propoſ. 4. huius ita eſt ſumma crurũ AB, & AI ad baſim IB, vt crus AV ad crus VB ideo diuiſo angolo BAI biſariã rectâ AV, ſi ſtatuatur crus VB 780. partium erit VA 238526; cuius quadratum eſt 567706867. & iunctum quadrato cruris VB 608400. partium efficiet, quadratum AB 568315267. cuius radia quadrata eſt 23839 $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$, & paulò magis: vnde baſis AB erit paulo minor, quam prædictus numerus 23839 $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$.

Progreſſus 5. Cum itaque iam habeamus diametrum AB paulo minorem, quam 23839 $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$, & crus VB 780; habemus quoque latus polygoni 96. laterum. Nam BG eſt hexagonum, quadere eius dimidium BH erit duodecagonum, & huius dimidij dimidium BF figura 24. laterum, & huius BF dimidium BI 48. laterum, & tandem huius dimidium BV 96. Cùm itaque iam habeamus VB latus polygoni 96. laterum partium 780. ſi multiplicemus per 96. habebimus ambitum totius polygoni 74880.

Progreſſ 6. Si ergo dicas auream regulam adhibendo; ſi 25. dant 8. ideſt 3. & $\frac{1}{8}$ dant 1, quid 74880.? & factus computus exhibebit 23961 $\frac{3}{5}\frac{1}{5}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$ habet, vtpote ad numerum minorem maiorem proportionem, quàm ad 23961 $\frac{3}{5}$, & tanto maiorem ad diametrum ipſum, qui eo numero 23839. $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$ paulò minor eſt: Sed circumferentia vtpote exterior ipſi polygono, maior eſt ipſius ambitu: Ergo obtinebit tanto maiorem proportionem ad diametrum ea prop. 8 l. 5. quàm 74880. ad 23961. $\frac{3}{5}$, vel quam 25. ad 7. ideſt, quam 3 $\frac{1}{8}$ ad 1.

Et hæc ad oſtendendam propoſitionem ſufficiunt, verùm ad hoc, vt videas præciſionem huius operationis, & quàm proximè ad verùm accedit fiat, vt 223. ad 71. ideſt quam 3. & $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ ad 1, ſic 74880. ad aliud, & regula proportionum inuenies eſſe 23840 $\frac{2}{2}\frac{6}{2}\frac{0}{3}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$ dicet maiorem proportionem, quam ad numerum 23840 $\frac{2}{2}\frac{6}{2}\frac{0}{3}$, qui ſe habet, vt 223. ad 71. & tanto maiorem ad diametrum, qui eo numero 23839 $\frac{1}{7}\frac{4}{8}$ minor eſt, & tantò maiorem proportionem dicet, circomferentia ipſa, quæ vtpote exterior polygono illo ipſo maior eſt.

Quare circumferentia ea hac quidem propoſitione maior euadit diametro ſumpto ter cum octaua ſui parte, vel ſumpto ter cum decem ea 71. partibus, at ex propoſ. 3. huius, circomferentia eſt minor, quam diameter ſumptus ter cum ſui ſeptima parte. Ergo inter has duas proportiones conſiſtit, altera quidem tripla ſeſquiſeptima, altera verò tripla ſeſquioctaua.

COROLLARIVM.

COllige ex iſtis duabus propoſitionibus 3. & 5. quòd circumferentia eſt inter duos iſtos terminos maiorem 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{8}$, & minorem 3. & $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ diametri. Vnde ſi diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}$ producetur numerus minor, quam diameter, at è contra ſi multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}$ producetur maior numerus, quam circumferentia: Si verò multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ procreabitur minor numerus; quam circumferentia, & ſi diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ procreabitur maior numerus; quam diameter.

EXPENSIO I.

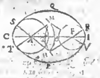
De circuli ſegmentis in figuram circularem coaptandis.

NOn mediocre Architecturæ, quandóque affert emolumentum, cæteriſque ſimilibus artibus diuerſorũ circulorũ ſegmenta varia in vnã flexam componere, vt molli quodam flexu nullos efficiant angulos: primo autem docebimus de ſegmentis in ſe ſe redeuntem lineam efficientibus, deinde de ſegmentis in ſpiralem ſe flectentibus.

PROBL. I. PROP. VI.

Segmentum circuli duos circulos tangens ducere,

SInt duo circuli, ſiue contigui, ſeu ſe interſecantes, ſeu quocumque ſpatio diſſiti, ſeu æquales, ſeu inæquales (hic exhibemus exemplum circulorum inæqualium, & ab inuicem remotorũ) Ducatur recta per eorũ centra tranſiens CI: Hinc ſumantur rectæ æquales TG, & CO, quæ dimidium per centra tranſeuntis CI ſuperẽt, & à centris illorum circulorum A, & F interuallo AO, & FO, duæ portiones circulorum educantur MOH, & MOH. punctaque interſectionum M, & H rectis coniungantur MAT, & MFV ſicut, & HFR, & HAS, & cęt. quæ traſeant per centra A, & F: Factoque centro in H, circuli deſcribatur arcus SQR. interuallo HS, vel HR. ſic facto centro in M alius arcus deſcribatur TPV, quem arcum *dico tangere circulos propoſitos.*



Probatur. Quia AM, & AO ſunt æquales additis portionibus æqualibus ſi radijs CA, & AS remanebunt æquales totæ HS, & CO. Sed CO ex conſtructione æquatur ipſi GI, & GI ipſi HR. Ergo HS, & HR erunt æquales. Vnde circuli arcus centro H tranſibit per puncta S, & R. Quòd verò GI ſit æqualis ipſi HR patet; quia GF, & FH ſunt æquales, additis itaque portionibus æqualiqus FR, & FI totæ GI, & HR remanebunt æquales.

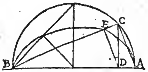
COROLLARIVM,

CVm verò circuli arcus tangit alium arcum, adeo bene inuicem ſe accommodant vt nullum angulum efficiant, vt ſatis experimento conſtat. Vnde etiam addiſces lineam ſpiralem ducere ſegmentis circulorum productam: ſi omnia centra arcuum ſuper eandem rectam collocaueris, vt eſt centrum H arcus SQR. Alios verò modos, qui id exquiſitè efficiant, alio reſeruamus, cùm eorum hic proprius locus non ſit.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Lineam oualem propriè dictam efformare.

PRæcedens figura pcopriè oualis oon eſt, cùm ooo omnino ouum imitetur,quod altera paete aeotios eſt; Propterea figuram eahibemus, quę illum præcisè imitetur, & ad Inueniendas duas medias proportionales intee duss dstas perutilis ſit.



Supee AB, ſemieirculo facto ACB, à puncto B plucimis choedis ductis, vt BC, & cæt. à punctis extremis demitaotur perpendiculsces, vt CD, & à puncto D, quo ſecaot diamettum Inquálibet chordam, vt CA (ex cuius eatremo in diametrum petpēdiculatis CD deducta eſt) in quamlibet inquam talem chordam alia perpendiculsris deducatur DE: hæc enim ſignsbit puoctum E in qualibet chocda, pet quæ æqoabili msnu ducta linea oualem figucam deſecibet, hanc autem apellamus oualem, ex ſimilitudine, quam cum smbitu oui conſequitur.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

Ope oualis figuræ inter duas extremas lineas duas proportionales proijcere.

SIt iam deſcripta lineaouails AEB. Super lineam maiorem ea datia AB, & io ouato altera mioor data sccommodetur BE, vt ex prop. I lib. 4. Eucl. quæ prodocatuc vſque ad C, à quo demitstuc perpendicularis CD: quis verò BEA eſt facta ex pecpendicolacibus à D in E ductis, etiam talis erie ducta DE. Et Ideo ecit AB ad BC, vt BC ad BD, & BD ad BE: & ideo CB, & BD erunt duæ mediæ pcoportiooales.

Probatur ob triangulorum æquiangulotum ſimilitodioem ACB, & DEB ob parallalas AC, & DE, linea AB erit ad CB, vt DB ad BE. Sed vt AB ad CB, ita quoque ex Coroll. prop. 8. elem. eſt CB ad DB, & DB ad AE: ergo ſunt quatuor AB, & CB, atque DB, & tandem BE continoè proportionales.

COROLLARIVM.

OVatum qnoque deſctibetuė, ſi deſctibaotut, vt infra duæ ellypſes, quarum malocis minoe axis deſeruist pro maiori axi minoris Ellypſis; Ellypſium autem deſeciptionem infra dabimus.

EXPENSIO III.

De linea Spirali.

SPiralis linea digns fuit, quæ Archimedis snimum alliceret in ſui ſpeculationem, tsotumque geometram ſuatum propcietatum peopaliatorem habecet, vſus verò eius ioſignis eſt in volutis espitelloeum in Architecturs protioluėodis, aliiſqoe ſimilibus ocnameotis. Verùm non ea omnia,quæ Archimedes demonſtraolt in mediom adſeremus de lineis esm taogentibus, earumque ad peripheclam, vel pcoportione, vel æqualitate, cùm ea inutilia ſint; oeque aliis de quibos agendum, deſeruiant: ea verò ſpeculatos eſt Acchimedes; vt Inueniret lineam peripherię eiecull ęqoalem, ob qusm eam menſutare poſſet, quod tamen aſſecutus noo eſt.

DEFINITIO I.

LInea ſpiralis eſt linea formata à motu puncti per ſemidiametrum; dum ſemidiameter ſuo extremo puncto efformat circulum illis pràportionaliter eodem tempore ſe mouentibus.

Sit IB ſemicadius lo ſeq. fig. ponatorque mooeri pet peripheriam BDB esm efformando ſuo motu, & interim punctum ab I diſcedat, & pec ſemidiametrum AI aſcendat ád B, ita vt quot partes peripheriæ perfeeetlt extcemom B, tot partea diametri perficlat punctum in eo ſe mouens, ex 16. V.g. partibus, lo quibus diuiſus eſt tam ſemidiametet, quam pecipheria: hic motos puncti deſecibit ſpiram BEFGPI puoctatam.

DEFINITIO II.

VOcetur autem I principium ſpiræ manens, & B principium circularis.

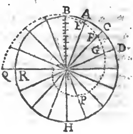
DEFINITIO III.

REcta linea IA ſpacium ſpirale concludens ſpacium verò ſpirale BCPI primum, quod ſi ſequatur in Q ſecundum, & ſi poſt completam reuolutionem adhuc ſequatur tertium, & ſic deinceps.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Lineam ſpiralem in plano per puncta deſcribere.

DIuidatur cieeumfereotia BACD in tot partes æqoales, quot piaeuerit, & io totidem ſemidia-



midiameter (quò plures erunt eò exactior erit operatio) V.g. in 8. transferanturque ſingulæ partes ſemidiametri ſemper accipiendo vnam minus in ſingulos radios AI, & IC, & ID, & cæt. ductos à circumferentiâ ad centrum, quę imprimeni puncta EFG, & cæt. *Per ea itaque puncta manu æquabili ducatur flexa, quæ erit quæſita ſpiralis.*

Probatur. Quia punctum E eſt 15. partibus diſtans ab I in diametro IA ſicut peripheria BRA eſt 15. partibus diſtans à puncto B. Sic in radio IC punctum F 14. partibus diſtat ab I, ſicut BRHC 14. partibus peripheriæ diſtat à B. Sic punctum O 3. partibus diſtat ab I, ſicut peripheria BRD 13. partibus diſtat à B. Ergo, cum eodem partium decremento, tum circumferentię, tum diametri puncta, tum punctum B in extremo diametri translatum in ACD, quàm punctum aliud per ipſum diametrum aſcendendo à DI in O, F, & E hęc puncta erunt in ſpirali iuxta definit. I. quòd, ſi ſecundum ambitum ſpiralis exoptemus, prolungentur diametri, vt IQ, & partes ſe eodem exceſſu ſuperantes ex HT transferantur ſucceſſiuè in diametros prolungatos, & per ea puncta flexa ducatur, quæ erit voluta in alias circumuolutiones promota.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. X.

* *Si omnium circulorum æquali diminutione decreſcentium arcus ſinguli componantur integrabunt dimidium ambitum totius maximæ peripheriæ, & dimidium maximi arcus. ſi verò à progreſſione terminus primus excludatur, tunc minus erunt dimidio ambitu eadem maximi arcus medietate.*

*PRæaſſumpt. ſupponendum eſt ſingulas peripherias, & earum partes, quatum diametri ſe æquali augmento ſuperant, ſe etiam inuicem æquali augmento ſuperare, & etiam ſubtenſas illis partibus ſe ſuperare æquali augmento. Ratio eſt, ex 43. 44. 45. tertij Elem. Siquidem ita inuicem ſunt peripheriæ, & radij, & cordæ arcuum ſimilium, & arcus ſimiles, vt diametri. Cum ergo diametri æquali ſe ſuperant augmento, etiam, & arcus, & cordæ, & peripheriæ æquali augmento ſe ſuperabunt; Ideo in figurâ AH cùm arcus ſimiles ſint, AE, BC, & CD ſimiles ſint, cordæ, & arcus ſe æquali augmento ſuperabunt. Quod diametri OX, OB, OC, OD ſe æquali augmento ſuperent.

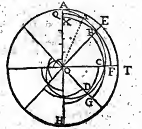
Sit itaque diuiſa peripheria 8. circulorum ſimiliter decreſcentium in partes 8. & ex ſingulis accipiatur vnicus arcus V. g. AE, BC, & CD, & cæt. Dico, *quòd octo partes decreſcentes iſtæ facient ſemicirculum* AEH, *& inſuper dimidium arcus maximi* IE.

Sic ſi ſit diuiſa peripheria 16. circulorum æquali diminutione decreſcētiū in partes 16. Et ex ſingulis peripherijs accipiatur vnicus arcus, & omnes iſti arcus 16. decreſcentes ponantur ſimul. Aſſero, *quod facient lineam æqualē ſemigyro maximo, & inſuper dimidio maximi arcus.* Nam arcus ſinguli ſint partes 24 Ergo, vt deficiant æqualibus 16. decrementis ſinguli deficient $1\frac{1}{2}$, & ſtabit progreſſus Arithmeticus decreſ. 24. $22\frac{1}{2}$, 21. 19$\frac{1}{2}$, 18. $16\frac{1}{2}$, 15. $13\frac{1}{2}$, 12. $10\frac{1}{2}$, 9. $7\frac{1}{2}$, 6. $4\frac{1}{2}$, 3. $1\frac{1}{2}$, 0, qui omnes efficient numerum 204. at verò maximus circulus, cuius vnica pars decima ſexta conſtat 24. particulis, eſt 384. cuius medietas eſt 192. Quare dimidius gyrus eſt 192. particularum; & arcus decreſcentes ſunt 204. nempe 12. particulis ampliùs, quæ ſunt dimidiatâ pars decimaſexta gyri maximi; quæ conſtat 24. particulis.

Si verò pars decima ſexta maximi gyri excludatur: tunc erunt reliqui arcus decreſcentes minus, quàm ſemiperipheria maxima 12. particulis, erunt enim tantum 180. particulæ, & deficient 12. ad 192. dimidium gyrum maximum, cuius decimaſexta pars eſt 24. particularum.

Ratio eſt petenda à propoſ. 9. de propor. numericis Arithmet. Tract. 14. vbi oſtendimus maximum terminum vnitum primo facere totam ſummam progreſſionis Arithmeticæ, ſi multiplicetur per dimidium numerum terminorum, ſiue autem terminus primus $1\frac{1}{2}$, & vltimus 24. per eundem numerum dimidium terminorum 8. multiplicētur ſeorſim, & faciant 12. 192. & deinde in vnam ſummam redigantur, ſiue ſimul vniantur, & poſtea multiplicētur per 8. idē num. fit 204. vt pr. 2. l. 9. el.

Numerus verò 24. per 16. numerum terminorum ductus facit totum circulum maximum. Vnde per dimidium 8. ductus efficiet dimidium circuli ex propoſ. 17. lib. 7. cum ſint ita multiplicati 8. ad 16. vt geniti 192. ad 384. Ergo Progreſſionis Arithmeticæ ſumma erit maior circuli maximi dimidio 192. nempe genito ex multiplicatione maximi termini 24. per numerum dimidium terminorū in termino primo $1\frac{1}{2}$, ſed multiplicato per eundem dimidium terminorum numerum 8. qui gignit 12. Quia ſi 16. multiplicando $1\frac{1}{2}$ facit 24. ergo 8. eundem $1\frac{1}{2}$ multiplicando faciet 12. cum ita ex propoſ. 17. lib. 7. ſit 8. ad 16. multiplicati, vt 12. ad 24. geniti. Itaque Progreſſio Arithmetica erit maior dimidio circulo maximo ipſo primo termino $1\frac{1}{2}$ in 8. multiplicato, & facto 12. qui eſt dimidium maximi termini 24. quod verificatur in progreſſionibus, quæ incipiunt à nihilo, vt propoſita.

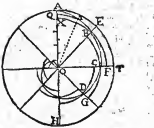


Quoad ſecunda pars quoque patet; nam excluſo à collectione omnium maximo termino, excluditur ne dum dimidium maximi termini ipſius, quo ſuperabat ambitum ſemicirculi; ſed etiam aliud dimidium, nempe totum maximum arcum, vnde à ſemicirculo eadem medietate illius deficit.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XI.

* *Summa omnium arcuum, cuiuſcumque circuli Arithmeticè decreſcentium, ſi ſucceſſio decrementi ſit infinita, æquat ſemicirculum.*

SInt arcus AE, & BC, & CD, & ſubdiuidantur, vel intelligantur ſubdiuiſi in infinitum. Dico, quod hæc progreſſio arcuum decreſcentium æquat ſemicirculum.



* Prob. Quo ſucceſſio arcuũ numero eſt maior, eò maximus terminus eſt minor V. g. ſi ſemidiameter OA ſit diuiſus in 8. partes, erunt octo circuli decreſcentes, & ex eis ſingulis octo arcus, & terminus maximus AE. Verùm ſi ſint 16. partes in radio OA arcus erunt 16. & ideo maximus arcus AI dimidio minor. Quamobrem quo maior erit ſubdiuiſio radij, & ideo circulorum decreſcentium ſucceſſio maior, eò minor erit differentia, qua collectio omnium arcuum excedit dimidium circulum includendo maximum. & incipiendo ab A, ita, vt ſint termini AE, & BF, & CG. Et tantò minor erit quoque differentia; quà excluſo maximo termino, & incipiendo ab X, vt ſint XB, BC, & & CD, collectio arcuum decreſcentium deficit à ſemicirculo. Ergo ſi iſtæ ſeries infinitè creſcãt numero, infinita erit diminutio differentię qua deficit à ſemicirculo: ſed facta infinita diminutione ſubdiuidendo tandem vltimus terminus quantitatis acquiritur, & abſumitur ipſa quãtitas ex propoſ 15 Tract. 16. part 1. Ergo differentia eius poſt infinitam ſubduplam diuiſionem fit nulla, & ſic ęquabitur, ſiue progreſſio maximum terminum includat, ſiue excludat toti ſemicirculo.

THEOR. I. PROPOS. XII.

* *Spiralis ſenſibilis eſt linea infinitis circulorum ſegmentis ſenſibilibus ſucceſſiuè minoribus coagmentata.*

* PRob. Ita eſt AT arcus ad TC diametri portionem, vt EA ad BE, & ſi ſubdiuidatur, ita erit ſubdiuiſi circuli portio ad ſubdiuiſi diametri portionem, vt AT ad CT, & rurſus portio hæc ſubdiuiſa circuli ad aliam ſubdiuiſam portionem, vt diametri arcus AT ad portionem CX, & ſic ſemper in infinitum: ſed AT eſt maior. quàm CT, cum peripheria ſit maior, quam radius, & conſequenter omnes eius partes proportionales erunt maiores, quam proportionales ipſius radij: Ergo ex Coroll. 1. propoſ 12. lib. 5. etiam omnes arcus quòquò decremento diminuti erunt maiores, quam partes diametri ſimiliter diminutæ.

Probatur nunc principaliter propoſitio. Nam quò arcus ſunt minores, è magis IX arcus intimus accedit extimo. Ergo ſi ſint minores vltra omnem ſenſibilitatem, tantò magis IX minor longitudine vltra omnem ſenſibilem factus accedet ad arcum extimum EA V. g. arcus diminuatur ſub dupla longitudine, & fiat IQ, accedet quoque ſubduplò ſpatio ad EA, & ſic de alijs in infinitum minoribus, cumque ſemper ſit maior quacunque diuiſione proportionali præſtita, arcus, quàm portio diametri, decreſcet ſemper magis portio diametri minor, quàm arcus maior. Vnde, ſi diminuitur vltra omnem ſenſibilitatem ſpatium inter A, & E, tanto minus erit ſenſibile ſpatium XA, & BE. Quòd, ſi eſt vna linea, vt ſpatium ſenſibiliter non mediet inter E, & A: Ergo ſpira BA inter illos EA, & IX incedens erit idem cum ipſa ſaltem quoad ſenſum.

COROLLARIVM.

* HInc eſt, quòd ſi aſſumatur magna aliqua progreſſio Arithmetica per internallum 1 procedens, & eius vltimus terminus reperiatur ex Tr. 14. p. 2. Propoſ. 13. de proportionalit. & ex inde omniũ ſumma ex propoſ. 9. eiuſdem; hæc ſumma proximè exprimet Spiralem, ſi verò maximus terminus multiplicetur in ſe exprimet circulum. Sic ſi putetur diuiſus circulus in 256. partes, quarum ſingulæ 256. particulis conſtent, vt ſinguli arcus vna particula diminuantur. Arcuum decreſcentium ſumma erit 23896. at verò peripheria, cuius 256. partes ſingulę 256. particulis conſtant, & medietas partis vnius 128. erit particularum 65536. quarum medietas eſt 32768. quæ ſubducta à ſumma arcuum dat pro reſiduo 128. nempe vnam dimidiam ex particulis 256. nimirum $\frac{1}{512}$ totius peripheriæ.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Spiralis æqualis eſt generanti ſemicirculo in ſua circumuolutione integra.

PRobatur. Arcus ſe diminuentes Arithmeticâ proportione, & interiores ſimul ſumpti, & exteriores ſimul item ſumpti ſemper accedunt magis ad ſemicirculum, quantò magis multiplicantur, ſed quantò magis multiplicantur, tantò magis accedunt ad ſpiralem. Ergo ſi in infinitum multiplicentur accedent ſimul ad ſemicirculũ, & ad ſpiralem. Ergo ſpiralis cum ſemicirculo eiuſdẽ longitudinis erit. Patet conſeq. quia arcubus ad hoc vt æquẽt ſpiralẽ, & fiant ſpiralis multiplicatio infinita ſubmultiplex deeſt, vt præced. pr. & eorum ſummæ, vt euadant ſimul æquales ſemicirculo ex propoſ. 11. multiplicatio infinita deeſt. Ergo ex eadem, ſi hęc pręſtita pręſupponatur euadent ſpiralis, & ſumma arcuum decreſcentium æquales ſemicirculo.

Hæc propoſ. eſt audacior, quam antecedens, ſed ſi nõ placeat alicui, ãplexetur priorẽ, quę ſufficit.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

De Linea Quadratrice.

LInea Quadratrix, quam ad circuli quadraturam excogitauere Dinoſtratus, & Nicomedes, ex Pappo lib. 4. Mirabilis eſt, plurimoſq; vſus in Geometricis obtinet; ideoque non eſt prętermittenda.

DEFINITIO

QVadratrix eſt linea, quam proportionali motu radius ductus per circumferentiam, & perpendicularis per diametrum ſe interſecando producunt.

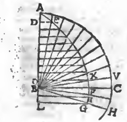
Hoc autem ex ipſa deſcriptione patebit.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Quadratricem lineam deſcribere.

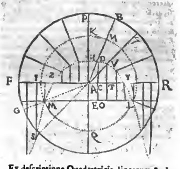
FAcilior modus Geometricè Quadrandi circulum eſt linea Quadratrix, quam deſcribit Clauius lib. 6. Elementorum ad finem iuxta antiquos, & lib. 7. Geometr. pract. Mndus autem deſcribendi talis eſt.

Centro B fiat portio circuli maior quadrante ACH. Et ſit quadrans BAC; cuius circumferentia diuidatur in tot numero partes, in quot radius (quò plures erunt, eò exactior erit deſcriptio) nos diuiſimus in 10. partes, quarum aliquæ diametri, in diametrum BA prolungatam in L, & aliæ circumferentiæ quadrantis AC, in ipſam pariter prolungatam, vt CH inſuper ſignatæ fuere. Ducantur deinde radij à centro B, ad circumferentiæ ſingulas partes, vt V, & H, & à diametri ſingulis partibus perpẽdiculares ipſi radio BA, vt ſunt DE, & OX, & cæt. educantur donec terminent in ſingulos radios; prima in primum, vt DE ſecunda in ſecundum, & cęt. Deinde æquabili manu per puncta terminationum ducatur flexa AEFG, hæc enim erit linea quadratrix. Ideò verò prolungauimus ab F in G, quia cum F nequeat reperiri, cum radius ſit idem, ac perpendicularis: reperitur tamen inueniendo puncta infra ipſam, qualia ſunt F, I, O, quæ puncta, quo erunt plura, eo quadratricis curuitatem exactiùs prodent.



Probatur: Quia quadratrix eſt linea, quam diametri per circulum, & perpendicularis ipſi per ipſum diametrum motus proportinnalis efficit, ita vt tot partes perpendicularis per diametrum ſno motu conficiat, quot radius per circumferentiam: ſed interſectiones aſſignatæ, per quaa quadratrix ducitur tales ſunt ea effectione: Ergo ea puncta in quadratrice ſunt.

Aliã deſcriptionem lineæ Quadratricis inuenit in ſua Cylomathia Vincentius Leotaudus Delphinas, de qua etiam acutiſſimè inſignes proprietates demonſtrat, eſt autem eadem, ac antiqua, ſęd auctior, ne dum circuli quadrante deſcripta: ſe toto circulo ſuis radijs interſectiones præbente, quam ſic deducit prædictus auctor. Centro A deſcribatur circulus cuiuſcumque magnitudinis, & in plurimas æquales partes diuidatur incipiendo à P (nam quo plures erunt eo exactior erit deſcriptio) per quarum ſingulas à centro A radij emitantur, vt AP, AB, & cæt. Tum diameter PA in partes æquales inuicem tot, quot in circulo deſſignatæ fuerunt diuidatur, & per ſingulas diuiſiones perpendiculares erigantur, vt CD, & cæt. Etenim iſtæ initio facto ab AP radio, & prima parallela CD ſucceſſiuè ſe interſecabunt, cum radijs V. g. in punctis D, & V per totum dimidium circulum; & idem dicas de parallelis, & radijs ad alteram partem circuli ſucceſſiuè ſe elongantibus à prædicto radio AP. Per iſtas ergo interſectiones ſucceſſiuas ducenda eſt manu æquabili linea flexa punctata SHL, quæ erit quadratrix integra.



Ex deſcriptinne Quadratricis, linearum, & circulnrum, quę eam ſecant nomina, & definitinnes licet haurire.

DEFINITO.

CIrculus, & radius generans eſt ille, qui adhibetur in ſecunda deſcriptione ad totam Quadratricem deſcribendam.

Talis eſt Radius AR, & circulus PRSF.

DEFINITIO II.

CEntrum quadratricis idem eſt, ac circuli generantis.

Tale eſt centrum A.

DEFINITIO III.

AXis quadratricis eſt recta, quæ in verticem quadratricis terminat, & deinde ad alteram partem

pvrtem in infinitum producitur, & Quadratricem in duas partes curuas dirimit. Cuius pars inter centrum circuli generantis, & verticem intercepta vocatur Baſis ſeu Sagitta.

Talis eſt HQ, quæ hinc terminat in verticem H inde ad Q in infinitum procedit, cuius pars AH Sagitta, ſeu Baſis dicitur.

DEFINITIO IV.

APplicatæ ſunt lineæ perpendiculares ipſi axi vtrinque in Quadratricem deſinentes, & Primaria inter eas eſt portio diametri, quæ intra quadratricem concluditur.

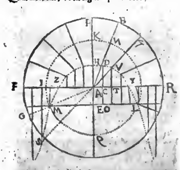
Itaque applica erit ML, & primaria erit ZY, quę tranſit per centrum A; eſtque portio diametri axi perpendicularis, quæ ab ipſa Quadratrice intercluditur.

PROBL. II. PROPOS. XV.

Dato centro quadratricis, eiuſque ordinatim quacumque applicatâ ipſam quadratricem totam deſcribere.

DAtum ſit futuræ Quadratricis centrum A, & applicata quęcumque EL, & oporteat totam quadratricem deſcribere.

Centro A per verticem L applicatæ EL tranſeat circulus punctatus LKM. Tum hic arcus LKM interceptus in partes inuicem æquales ſecetur, ſicut, & applicata EL parem multitudinem partiū, ac arcus interceptus, obtineat; hæc in punctis E, & O, & cæt. circulus verò in punctis K, N, & cæt. Deſtinentur itaque ad has circuli partes, radij, quos parallelæ à partibus applicatæ EDOV, & cæt. prodeuntes ſecent in D, V, & alijs, & hæc puncta erunt ad quadratricem. Et ad hoc, vt vlterius producatur ipſa Quadtatrix vltra L, & M partes æquales, ac prædictæ, vſque quo poſſunt replicari in reſiduo arcus LQ ſignentur ſicut, & par multitudo partium æqualium, vt EO in applicata prolungata extra Quadratricem numerentur. Nam ſucceſſiuæ interſectiones parallelarum, & radiorum erunt ad Quadratricem, vt in figura ipſa videre eſt.



Probatur. Quia ducta RA per centrum diuidetur in partes æquales à parallelis, ſicut, & circulus generans RBP in partes æquales à radijs productis diuiditur, & tot numero, tum ſemicirculi, tum diametri partes erunt: Ergo eodem pacto, ac ſi circulus primarius, & generans RPF, & diameter AR in partes æquales, & pari numero diuiſus fuiſſet, puncta in quadratrice obuntur.

Dices. Poterit occurrere, vt arcus LQ vltima pars non ſit æqualis cæteris arcus KL.

Reſpondetur vltimam partem in Q terminantem in Quadratrice non eſſe neceſſariam, ſicut nec vltima pars diametri, quæ terminet in R: quia parallela ipſi AQ radio ducta ABR non poteſt occurrere radio AQ, vt patet, cum ſit ipſa eadem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Radio ad quemcumque angulum ad axem conſtituto per deſſignatum in eo quodcumque punctum deducere Quadratricem.

IN eodem Schemate ductus ſit radius AM ad axem PA faciens angulum GAP, & aſſignatum in eo ſit punctum M.

Per punctum M ducatur circulus MKL, & ab eodem axi perpendicularis EM, quæ erit applicata. Vnde cum obtineas applicatam EM, & centrum A deduces per M datum punctum, & in dato radio AM Quadratricem ex præc. propoſ.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato quouis Quadratricis puncto, & centro, punctum è diametro oppoſitum aſſignare.

DAtum ſit quadratricis punctum V, cui oportet aliud è diametro oppoſitum definire. Per centrum A agatur ab V linea, & per centrum A, radius generans RAF, ad quam ab V puncto dato perpendicularis ducatur VT. A puncto T igitur ſumatur TI æqualis generanti ſemidiametro RA, & ab I perpendicularis demittatur occurrens lineæ VA productę in S, & interſectio S erit in Quadratrice.

Probatur. Nam tot partes æquales enumerare debet arcus RZBPOS, quot dinumerat diameter RTI, vt parallela IS ſecet radiū VS: ſed ſemicirculus additus ZPS conſtituit radium TS. Ergo ſemidiameter TI punctum I deſſignabit. Siquidem iuxta documenta propoſ. 14. huius, tot partes debent fieri in ſemicirculo, quot in ſemidiametro generante.

COROLLARIVM

HInc patet etiam modus continuandi in maximam diſtantiam Quadratricem. Quoniam punctis datis D, V, & cæt. puncta oppoſita M, S reperiri poterunt, per quæ producatur.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Perpendiculares à Quadratrice ad axem deductæ ita ſunt ad totum diametrum, vt arcus à radio interceptus, & axi, ad totum ſemicirculum.

SIt quadratrix MHL, & à centro eodem A eiuſdem fig. ac præced. tum circuli, tum quadratricis educatur radius AG, & à puncto M, quo ſecat quadratricem, demittatur applicata EM. Dico *ita eſſe hanc applicatã* EM *ad totum radium; vt arcus* PG *ad ſemicirculum*.

Probatur ex effectione, vel defin. 1. Qualis pars eſt arcus PG ſemicirculi talis pars eſt AZ ſemidiametri. Ergo ita erit arcus BG ad ſemicirculũ vt AZ ad radium; ſed applicata EM eſt æqualis, cum ſit inter parallelas ipſi AZ. Ergo etiam applicata EM ita erit ad ſemidiametrum, vt arcus PG, ad ſemicirculum, vel etiam *conuertendo* diameter ad applicatam, vt ſemicirculus ad arcum.

COROLLARIVM.

HInc enaſcitur eſſe quoque applicatam ad applicatam, vt circuli arcus ad arcum ab applicatarum radijs, vſque ad axem AP deductum. Namque omnes applicatę habent eandem proportionem ad diametrum, quam arcus intercepti à radijs per verticem applicatarum tranſeuntibus obtinent ad ſemicirculum V. g. in fig. ſequenti AM eſt ad radium, vt arcus ACK ad ſemicirculum, & EL eſt ad radiũ, vt arcus CX ad ſemicirculum, ergo *conuertendo* radius eſt ad FL, vt ſemicirculus ad arcum CK quare *ex æquo*, vt MA ad LF, ita arcus ACK ad arcum CK.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Arcus ab extremo applicatæ ductus eſt ad applicatam, vt radius ipſius ad ſagittam.

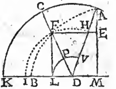
SIt ſagitta DB applicata MA, circuli arcus ACK, & diameter eius AD, qui prodeant ab extremo A. *Dico ita eſſe.* Arcum ACK ad applicatam MA, vt radius AD ad ſagittam DB.

Probatur. Per reductionem ad impoſſibile. Nam ſi non eſt ACK arcus ad MA applicatam, vt radius AD ad ſagittam DB; erit forte ad maiorem, quàm ipſa ſagitta. Sit ergo, ſi ita placet ACK ad MA, vt AD ad DI maiorem, quam BD.

Caſus, & Progreſſus 1. Quoniam ergo eſt ex aduerſarijs, vt ACK ad AM, ita AD ad DI, & vt propoſ.45. lib.6. elemenr. ſit quoque arcus ACK ad HFI arcum, vt AD ad radium DI. Conſequenter proportio arcus ACK ad AM applicatam, & ACK arcus ad arcum HFI erit eadem proportio, ex prop. 16. lib.5. cùm ſit eadem proportioni tertiæ AD ad DI.

Quamobrem, cùm eadem quantitas arcus ACK ad duas AM radij, & HFI arcus eandem dicat proportionem, ex 9. lib.5. erunt inuicem arcus HFI, & applicata AM æquales.

Progreſſ. 2. Deinde, cùm ex anteced. Coroll, ſit arcus ACK ad arcum CK, vt applicata AM ad applicatam FL, & idem arcus ACK ad minorem arcum CK, vt arcus HFI ad arcum minorem IF, eſſet conſequenter eadem proportio ex 16. lib.5. applicatę AM ad FL perpendicularem, & applicatam, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, cùm ſit eadem proportio, quæ ACK ad arcum minorem CK. Cùm



ergo ſit AM applicata ad applicatam LF, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, erit etiam *permutando* applicata AM ad arcum HFI maiorem, vt applicata FL ad arcum minorem FI. Sed ex primo progreſſ. cognouimus eſſe AM æqualem ipſi arcui HFI: Ergo, & applicata LF eſſet æqualis arcui FI, quem ſubtendit, quod eſt abſurdum. Non erit itaque ACK ad AD, vt AM ad DI. Cùm ergo non ſit AM ad maiorem DI, erit fortè ad minorem.

Caſus 2. Progreſſ. 3. Arcus itaque ACK ſit ad AM applicatam, vt radius AD ad aliquam DL minorem, quàm ſagitta DA, & eodẽ modo ſequetur abſurdum.

Siquidem ab aduerſarijs ponitur arcus ACK ad applicatam MA, vt AD radius ad radium DL, & propoſ.45. lib.6. elemenr. vt ACK arcus eſt ad arcum VPL, ita eſt AD radius ad radium DL.

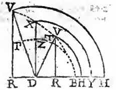
Quare ex 16. lib.5. erit eadem proportio arcus ACK ad diametrum AD, & arcus ACK ad arcum LPV, cum ſit eadem, ac tertia proportio AD ad DL; cùmque idem arcus KCA ad duo applicatam MA, & arcum LPV eandem dicat proportionem, eſſent DA & arcus VPL æquales.

Progreſſ. 4. Deinde cum ex anteced. ſit arcus ACK ad arcum minorem KC, vt applicata AM ad applicatam PL, & idem arcus ACK eam proportionem dicat ad arcum minorem CK, vt arcus VPL ad arcum ſe minorem PL, eſſet conſequenter eadem proportio ex 16. lib.5. applicatæ AM ad FL, quę VPL arcus ad arcum minorem PL. Quapropter *permutando*; ita eſſet AM ad VPL arcum, vt FL ad LP: ſed applicata AM, & arcus VPL oſtenſi ſunt æquales in 3. progr. Ergo etiam FL, & arcus LP eſſent æquales, quod non poteſt eſſe; nempe, quòd tangens ſit æqualis arcui, cuius eſt tangens.

Cùm itaq; arcus ACK nõ poſſit eſſe ad AM applicatam, vt diameter AD ad maiorem DI, quam ſit ſagitta DB, ex primo caſu, neque ad minorem ex 2. caſu DL; Radius AD erit ad æqualem ipſi ſagittæ DA, taliter qualis eſt arcus ACK ad applicatam AM, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

HInc eſt, ſi quando contingat applicatam eſſe idem, ac diametrum alicuius circuli, vt eſt DX in fig. ſeq. quadrantis XY, quod radius ille, & applicata ſit media proportionalis inter ſagittam, & quadrantem: itaque eſſe DB ſagittã ad applicatam DX, vt eadem DX radius quoque ad arcum XY, qui eſt quadrans, & è contra *conuertendo* quadrantem XY eſſe ad diametrum XD, vt idem XD applicata quoque ad ſagittam DB.



COROLLARIVM II.

HIne quoqoe enaſcitur, qoòd ſi ſagitta Quadratricis ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli, diameter DX, erit æqualis quadranti illius ZB. Nam probatur iuxta tenorem præced. pr. & Coroll. quòd cum ſit arcus XY ad DX applicatam, vt DX ad radium DB, & ſit quoque ex propoſ. 43. lib, 6. elem. arcus XI ad areum ZB; vt radij DX ad radium DZ, ſeu DB ſagittam qood conſequenter ſit eadem proportlo arcus XY, qui eſt quadrans ad quadrantem ZB, quæ eſt eiuſdem arcus XY ad radiom XD, cum tertiæ proportioni ſit eadem radij XD ad radlum DZ, quare cum ldem arcus XY ad duas quantitates ſemidiametrum XD, & ZE arcum eandem dicat rationem erunt arcus ZB, & ſemidiameter DX æquales; cumque ZA ſit quadrans DX quater aſſumpta eireulum æquabit, cui ſit ſagitta BD radius.

COROLLARIVM III.

INſuper colligitur quoque ex eodem argumento, & fig. præced quameumque applicatam RV eſſe æqualem arcoi TB per verticem B ducti; cui ſagitts quadratricis pro radio deſeruiat.

Qooniam enim ex præced. eſt radius DV, ad ſagittam BD, vt arcus HV ad appllcatam RV, & arcus HV, ita eſt ad arcum TB, vt diameter VD ad diametrum TD, ſeu ſagittam BD æqualem erit quoque ex 16. lib 5. urcus HV ad applicatam RV (cum eidem proportioni DV ad BD dicant conſimilem proportionem) vt arcus HV ad arcum TA: Cum ergo idem arcos HV, tum applicatæ RV, tum arcui BT eandem dicat proportionem arcus BT, & applicata RV erunt equales.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Sagittæ, atq́, applicatæ arcum tertium proportionalem aſſignare.

SIt Quadratrix ABC in fig. ſeq & ſagitta DA, necnon, & applicata EC, & oporteat arcum circuli reperire tertiom proportionalem, ita vt ſagitta AD ſit ad applicatã EC, vt ipſa EC ad arcũ reperiendũ.

Longitudo applicatæ CE traaſferatur ſuper radium DC, & ſit DH; perque punctum H ducatur IB parallela axi, & ſecet in B Quadratricem, perque B ducatur radius BD, & centro D quadratricis fiat circulus interuallo EC, ſeu DH æqualibus. *Dico inuentum eſſe, quòd quærebatur, & ſagittam* DA *eſſe ad applicatam* EC, *ſeu* DH, *vt* DH *ad arcum* HL.

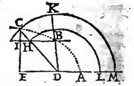
Probatur. Ita eſt ſagitta AD ad radium DC, vt applicata EC ad arcum CKM *conuertendo* propoſ 16. & *pè mutando*. Ita eſt ſagitta AD ad applicatam EC, ſeu DH, vt radios DC ad arcum CKM. Sed vt radius DC ad arcum CKM, ita eſt radius DH ad arcum HL ex propoſ. 46. lib. 6. elem. ergo ex *æquo*, vt eſt DA ſagitta ad DH, ſeu æqualem EC applicatam; ita eſt DH, vel EC ipſa ad arcum HL; Ergo arcus HL erit tertia quantitas proportionalis, quam animo inſederat reperire.

Si verò quis cupiat reperire tertium proportionem in ipſo arcu MKC id efficiet ex propoſ. ſequenti.

PROB. VI. PROPOS. XXI.

Sagittæ, & applicatæ tertium proportionalem arcum reperire in ipſo arcu ab applicatæ extremo prodeunte.

FIant omnia, quæ in præced. praxi, & ſemidiameter DB protendatur vſque in K ducto arcu CKM per extremum applicatæ BC; & dico *arcum* KM *eſſe tertium proportionalem*; & ita eſſe ſagittã AD ad radium DC; vt radius DC ad KM arcum.



Probatur Progreſſ. 1. Vt ſemidiameter DC ad radium DH, lta eſt arcus CM ad arcum HL, ex prop. 45. lib. 6. Sed vt CD ad HD; ſic ob paraſlelliſmum llnearum in trlangulo DCE eſt CE ad IB: ergo, vt eſt CE ad IE, ita eſt arcus CKM ad arcum HL.

Progreſſ. 2 Sed etiam in eadem proportione eſt areus ipſe CKM ad ſui arcum minorem MK, quâ CE ad IE ex ipſa cõſtructione quadratricis ex Coroll. propoſ h 18. Ergo idem arcus CKM duobus arcubus KM, & HL ex primo progr. eandem dicit proportionem, quam CE ad EI. Quare KM, & HL licet inæqualium clrculorum erunt æquales ex propoſ. 9. lib. 5. Cum ergo, & ſagitta AD appllcata EC, & HL ſint continuè proportionales ex præc. etiam AD, & EC, & arcus KM erunt continuè proportionales.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Quadratrix ad axem Aſymptota eſt, & numquam axem conſequi; ſed ſemper ad illum accedere poteſt.

PRobatur. Nam in fig. prob. 1. quanto magis diulditur CV in minores, mlnoreſque partes in ratione ſubdupla, ſemper tamen remanet pars reſidua ex Tract. 16. de progr. lln. propoſ. 12. Quare numquam poterimus conſequi punctum, quod ſit in ipſo BC; veròm ſemper aliquatenus accedendo minus perpetuò remouebitur, & materialiter quidem accedet, non ſpeculatiuè, vt dixi Tr. 1. prop. 6.

EXPENSIO V.

De Quadratricis, & Elicis comparatione.

QVoniam non inutilem hanc comparationem agnoui: hinc eſt, quod illam præterire non potuerim, pro quo ſit.

DEFINITIO

COnnata Helici Quadratrix ea dicitur, quæ habet ſemidiametrum circuli ſe generantis æqualem diametro circuli generantis Quadratricem.

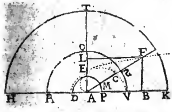
Eſt igitur connata Helix DE CV Quadratrici DEF; quòd ſemidiameter eam generans, & primam reuolutionem complens AH, vel AX circuli HTX ſit æqualis diametro VAR circuli ROV generantis Quadratricem, & ideo AR radius eſt medietas radij AH.

THEOR. I. PROP. XXIII.

Applicata Quadratricis, & radius Helicis, qui productus ei connectatur ad verticem in ipſa quadratrice, ſunt æquales.

SIt AC radius Helicis, qui productus in quadratrice DEF inueniat extremum F, applicatæ BF. Dico *huic applicata* BF *radium Helicis* AC *æqualem eſſe*.

Ducaturque gratia oſtendendæ propoſ. à puncto F axi parallela FL.



Probatur ex conſtructione Helicis eadem ratio reperitur radij totius AS ad radium AC, quæ eſt arcus ROV ad arcum ROS. ſed, quæ proportio eſt arcus ROV ad ROS arcum, eadem ex conſtructione Quadratricis eſt radij OA ad radium AL. Ergo radius OA, ſeu AV habet ad duas AL, quę æquatur BF applicatæ, & ad radium Helicis AC eandem proportionem, quam arcus ROV ad arcum ROS. Ergo AC, & AL, vel BF erunt æquales ex propoſ. 9. lib. 5.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Omnes radij Helicis abſcindunt à circulo, cui radius eſt ſagitta quadratricis, arcus ſibi æquales.

SVpra oſtenſum eſt propoſ. 20. Coroll. 2. omnes applicatas, vt BF eſſe æquales arcubus DM circuli DMP, cui radius eſt ſagitta à radio, vt AF, terminante in ipſum applicatæ extremum F receſſis: ſed applicata BF ex præced. propoſ. oſtenſa eſt æqualis radio Helicis, ergo radium Helicis æqualis eſt arcui MD, cui radius eſt ſagitta AD.

EXPENSIO VI.

De linea Ellipſi.

ELlipſis eſt inter omnes figuras Mathematicas flexas, & in ſe ſe redeuntes poſt circulum celebrior. Eſtque veluti circulus figura plana, & etiam ſolidis corporibus conueniens.

DEFINITIO.

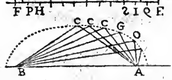
ELlipſis eſt motus puncti circa duo puncta talis, vt quantùm accedit ad alterum, tantùm remoueatur ab altero.

Sint A, & B duo puncta, punctumque aliud C ita moueatur per locum CCCCO, vt quantùm remouetur à puncto B, tantùm accedat ad punctum A, linea hoc motu deſcripta Ellipſis eſt: an verò ſit illa ipſa, quæ eſt ſectio coni, id erit videre in Conicis, cum oſtendemus hanc ipſam proprietatem, & illam obtinere, & ſic quoque, vt hęc illam deſcribi.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

Lineam Ellipticam deſcribere.

LInea BF in partes, quaſcumque placeat, diuidatur, & deinde ſuper alteram duobus punctis, vtcumque electis BA interuallo V. g. QF, aſſumatur FI, & in B facto centro deſcribatur arcus, & reliqua aſſumatur IE, & facto centro in altero puncto A, rurſus arcus verſus eaſdem partes deſcribatur, vbi ſe decuſſant in O Ellipſis circumferentia tráſiet. Simili modo itaq; inueniantur alia puncta CCCC, & cæt. tum infra, tum ſupra lineam AB, & per illa ducatur flexa. Nam illa erit Ellipſis, quam definiuimus.



Patet. Singula puncta ex conſtructione, tantùm ſunt remota ab vno puncto, quantùm alteri approximant, nam quantum eſt FI, & IE, quâ ſignatum eſt tantùm eſt OS, & SE, quo punctum C inuentum eſt, & ſic de cæteris.

Hoc autem fit mechanicè in duobus punctis A, & B clauos infigendo, & chorda AOA liberè circum excurrat; Nam ſi ſtylo O; dum AO, & OB Chorda tenſa teneatur linea imprimatur in ſubiecta planitie, ea erit ellipſis; infra tamen eam vberiùs deſcribemus, cùm de Conicis.

EXPENSIO VI.

De linea Conchili.

CONchilis eſt inuentio Nicomedis non inutilis. Nam per illam inter duas extremas interponit duas medias proportionales, & angulum quemcumque in tres partes diuidit; deſeruitque in Architectura ad tumores columnarum ritè delineandos, vt apud Vignolam.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

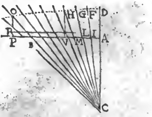
Conchilem deſcribere.

LInea ducta AB, ducatur ei perpendicularis CD & electo in ea quolibet puncto C plurimæ rectæ ducantur quolibet interuallo ab inuicem diſſitę, (quò propinquiores erunt eò meliùs) & ſint CD, & CF, & CG, & CH, & cæt. Deinde arbitrarium interuallum AD ſuper quamlibet lineam transferatur, à linea AP verſùs alteram partem, qua lineæ non conueniunt, & ſint IF LG, & MH, æquales ipſi arbitrariæ AD. Tandem per puncta extrema D, F, G, H, linea flexa æquâ manu ducatur, *& erit Conchilis.*

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Conchilis eſt linea Aſymptotos: ideſt nunquam conueniet cum AP, *licet ſemper ei appropinquet, conueniet tamen cum qualibet alia illi parallela, etiam ſi propinquiſſima.*

PRobatur prima pars; quòd ſemper propinquior fiat. Nam data baſi æquali MH V. g. & BO, cum angulus PBO ſit minor angulo VMH, etiam perpendicularis minori angulo oppoſita PO, erit minor, quam VH. Quòd verò nunquam conueniat, patet, quia ex conſtructione punctum quodlibet conchilis, vt O diſtat à quolibet puncto lineę AB, quanta eſt BO, æqualis AD, quòd verò quam-

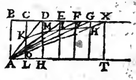


libet aliam lineam parallelam ipſi AP, vt RL inter Conchilem, & AP ductam tandem debeat ſecare, patet, quia producta in infinitum ſemper diſtantiam diminuet. Ergo etiam minimâ datâ qualibet minor euadet. Quare etiam diſtantiâ PR minor euadet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

Aliam lineam Conchilem deſcribere, quæ nec minimam, nec maximam diſtantiam aſſequi queat.

SVper lineam BX plurimæ perpendiculares æquidiſtantes erigantur, vt AB, & CL, & cæt. atq; electo pũcto A ducantur plurimę rectę ad puncta D, E, F, G, X, & cæt. nam quælibet perpendicularem antecedentem ſecabit. V. g. quæ terminat ad D, antecedentem perpendicularem CL in puncto K, quæ finit in I ſecabit DM in M, & cæt. Si ergo p iſtas omnes interſectiones deſcribatur linea KH. Dico *eſſe conchilem talem*, quæ nec ad maximam concham, ſeu diſtantiam à linea AT, in quâ maior concha eſt, nec ad minimam diſtantiam à linea AT poſſit peruenire.



Probatur prima pars. Nam puncta K, M, I, V, & H, quò magis procedunt, eò viciniora ſunt lineæ BX. Nam ob paralleliſmum linearum BE, & CK, vt eſt CD ad DB, ita eſt CK ad AB: ſed CD eſt dimidia AB, ergo CK erit dimidia AB; rurſus, vt DE ad EB, ſic DM ad BA: ſed DE eſt tertia pars EB. Ergo etiam DM erit tertia pars AB, & ſic de reliquis, cum ergo eiuſdem AB linea DM ſit $\frac{1}{3}$, & CX $\frac{1}{2}$, patet eſſe minorē; ergo ſemper KH propinquior fiet: Nunquam tamen perueniet. Nam AX ſemper diſtabit à lineâ BX in puncto ab X remoto V. g. in H. Sed talia ſunt omnia pũcta p quę ducitur KH, ergo nunquam ad lineam BX perueniet, & tamen ſemper accedet. Sed accedendo ad BX ſemper concha ſit maior, & diſtans ab AT. Ergo nunquam ad maximam ſuam concauitatem perueniet, & tamen ſemper accedet.

Probatur ſecunda pars. Quod nec ad minimam peruentura ſit. Nam minima eſſet in linea AB, cum ſi vltra AB producatur rurſus ad BX prolungatam accedat: ſed ad AB nunquã perueniet, & ideo, nec ad minimam diſtantiam ab AT.

Probatur minor. Nam non poteſt produci verſùs AB; niſi ſubdiuidendo lineam BC, primo per medium; deinde alteram partem mediam, vt ſit $\frac{1}{4}$, & hanc mediam, vt ſit $\frac{1}{8}$: ſed hoc modo, vt ex propoſ. 12. Expenſ. 4. de linear. Geomet. progreſſ. patet, nunquam ſectio finitur: Ergo nec vnquam ad AB conchilis KH peruenire poteſt.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De lineæ Ciclicæ deſcriptione .

Linea Ciclica eſt illa, quam in Cęlo perſegunt planetæ dum Epiclis prouoluuntur, & quam rotæ Clauus ſuo extremo deſcribit, dum Currus trahitur, quamuis Ciclica planetarum ſuos anfractus in gyrum torqueat, at rotę amfractus ſuos in directum continuet.

DEFINITIO.

Linea Ciclica deſcribitur à motu puncti circa circulum, dùm ipſe circulus ſuo centro motu recto, ſeu circulari mouetur.

Itaque ſi moueatur V. g. circa rotam aliquod punctum ipſius rotæ, & ipſa rota vertendo ſe circa axem transferatur de loco ad locum efficitur quædam linea flexa, quæ Ciclica vocari poteſt.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Lineam Ciclicam per puncta deſcribere.

Linea Ciclica triplex eſt, vel enim eſt motus centri velocior, quam puncti in circumferentia circuli, vel æquè velox, vel minus velox; ſed quocumque modo ſe habeat, linea quidem diuerſa eſt, ſed eodem modo deſcribitur. Sit linea AB equalis circuli, cuius centrum B, circumferentiæ; cùm ſilicet motus centri æquè velox eſt, ac motus puncti in eius circumferentia, vel maior, cùm velocior eſt motus centri, quàm puncti in circumferentia, vel minor, cùm tardior eſt motus centri, quam motus puncti in circumferentia. Diuidaturque in quallibet partes V.g.12. eriganturque perpediculares lineæ AB æquales diametro à ſingulis partibus lineæ AB, & in eut



numero partes diuidatur circulus, & facto centro in quibuſlibet punctis LMN, & cæt. diuiſionum lineæ AB deſcribantur portiones circulorum: Sitque DF vni parti circuli æqualis EG, duabus, HI tribus, & cæt. Si ergo per puncta CFGI, & cæt. extrema arcuum tranſeat linea æquabili manu ducta, hęc erit linea Ciclica, quam ſilicet quodlibet punctum in rota ſignatum deſcribit, dum currus mouetur, vel planetæ in epiciclis deſcribunt, quę differt ab ea in eo, quod rectę perpẽdiculares, vt CB & LD, & cæt. ſunt radij excentricorum circulorum & ad centrum alterius magni circuli tendunt, cui eſt circumferentia linea BA.

TRACTATVS XIX.

De Angulis.

MVlta de Triangulis egit Euclides lib. 1.: ſed ea erant elemetaria, quæ non ab alijs pendebant, ſed potiùs alijs ſequentibus fundamenta vniuerſaliſsima ſternebant. Modò de ipſis triangulis, quæ elementaria non ſunt tradenda, quæ tamen neceſſaria ad multa in ſequentibus percipienda.

EXPENSIO I.

De baſi triangulorum, atque lateribus in vnum verticem conuenientium.

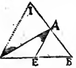
HÆc Expenſio neceſſaria eſt, tum figuris Iſoperimetris percipiendis tum tractatui de Sphæricis, tum Stereometriæ, & multis alijs.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo trianguli crura inæqualia fuerint, ducta à vertice recta, quæ bifariam baſim ſecet, hæc diuidet angulum, eritque maior anguli pars minori cruri adiacens; minor verò maiori.

SIt triangulum ABC, & AE diuidat baſim in duas partes æquales BE, & EC. Dico *angulum non eſſe ex æquo diuiſum*, ſed *angulum album apud* A *adiacentem cruri minori* BA *eſſe maiorem angulo nigro apud* A, *adiacente cruri maiori*.

Progreſſ. 1. Ducatur CI parallela AB; eritque producta AI æqualis cruri minori BA; Quod patet: Nam in triangulo IBC ob paralleliſmum linearum AE, & IC, vt eſt BA ad BI ex 4. lib. 6. elem. ita eſt BE ad BC: Quare ex 16. lib. 5. elem. ablatis proportionalibus BA, & BE, reliqua erunt in eadem proportione; ſed EC eſt dimidium BC ex hypotheſi: Ergo etiam AI erit dimidium IB, & ideo æqualis ipſi BA.



Progreſſ. 2. Cum ergo AI æquet lineam BA, & ex hypotheſi AC ſit maius, quã crus AB, erit maius, quàm producta AI. Vnde erit maior angulus I, quàm niger apud C, vt ſubtendens AC maiorem baſim, quam AI. Sed niger apud C eſt æqualis nigro apud A trianguli BAE ex prop. 30. lib. 1. elem. ob lineas parallelas: Ergo angulus albus apud A in triangulo BAC; eſt maior nigro apud A in triãgo BAC eodem, quod erat probandum.

THEOR. I. PROPOS. III.

In omni triangulo rectangulo ſegmentum cruris ad reliquum adiacens angulo recto habet maiorem proportionem, quàm angulus ipſi inſiſtens, angulo inſiſtenti reliquo ſegmento.

SIt triangulum ABC, & ſecetur in D. Dico *ſegmentum* AD *habere maiorem proportionem ad ſegmentum* DC, *quàm angulus albus ad angulum nigrum apud* B *perpendiculari adiacentem.*



Probatur. Ex 1. lib. 6. Elem. ita eſt triangulum BAD ad triangulum BDC, vt eſt baſis AD ad baſim DC, & ex 39 lib. 6. vt eſt ſector FDB ad ſectorem BDE, ita eſt angulus albus ad nigrum apud B. Triangulum verò ADB. eſt maius, quàm ſector FDB, & ideo eſt proportio maioris inæqualitatis, at triangulum DBC minus, quàm ſector DBE; ideo eſt proportio minoris inæqualitatis. Proportio verò maioris inæqualitatis maior eſt, quàm minoris inæqualitatis; ſiquidem maior continet minorem, & inſuper aliquid, at minor ne dum non continet, ſed aliquid ei deficit. Quare maior erit proportio trianguli BAD ad ſectorem BFD, quàm trianguli BDC ad ſectorem, DEB, quo poſito propoſ.

Probatur maior eſt proportio trianguli BAD ad ſectorem BFD, quàm trianguli BDC ad ſectorem BED: Ergo *permutando* maior erit proportio trianguli

anguli EAD ad triangulum DBC, quàm ſectoris FDB ad ſectorem DEB: Sed hæc triaogulorum eſt eadem, vt ſupra ooſtendimus, quę baſium. Proportio verò ſectorum eadem eſt, ac angulorum ex 39. lib. 6. ergo erit maior proportio baſis AD ad baſim DC quàm aoguli albi ad nigrum apud B.

COROLLARIVM I.

Hinc & ex 39. lib 6. elem. deducitur quoque, quod habet maiorem proportionem ſegmẽtum AD ad ſegmentum DC; quam areus FD ad arcum DE: quia proportio arcuum eſt eadem, ac aogulorum ſuorum: Vnde eom AD ad DC ſegmenta dicant maiorem proportionem, quam anguli albus ad nigrum; dicent etiam maiorem proportionem; quam areus FD ad areum DB illis ſubtenſos.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam videte licet, quòd etiam ſi ſegmẽtum non immediatè adiaceat, angulo recto, attamen remotius dicet ſemper maiorem proportionem ad propinquius, quàm angulus remotiori ioſiſteos, aogulo propinquiori inſiſtente. Sic DA dicet maiorem proportionem ad AB aogulus albus ad nigrum apud A, quòd triangulum DAB ſit maius ſectore BDF. Triãgulum verò ADC ſit minus ſectore BDB, vnde in figura ſiniſtra ioteres idem argumentum, quòd in propoſitione deductum eſt.

THEOR. III. PROPOS. III.

Maior arcus habet maiorem proportionem ad minorem; quam chorda maioris ad chordam minoris in ſemicirculo.

Dico LH *arcum habere maiorem proportionem ad* HA*; quam chorda* LH *ad chordam* HA. Ducatur LA, & diuiſo arco ABL bifariã in B ducatur HB, & angulus LHA in ſegmento erit ſectus bifariam. Deinde per punctũ D centro B, arcus ducatur IAF. Baſis autem LA ſecta quoque ſit bifariam ab BB in triangulo æquicruro LBA.



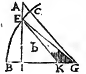
Prob. ex præc. maior eſt proportio DA ſegmenti ad DC ſegmentum, quàm arcus DF ad DB arcum ex 3 h. Ergo inuertẽdo DC ad DA erit minor proportio, quam DB ad DF. Ideoque *componendo* CD, & DA ſegmentorum erit minor proportio ad DA ſegmentum; quam ED, & DF arcuum ad DF areum, & ideo dupli ſegmeotorum LA erit minòr proportio ad ſegmentum DA, quàm dupli arcuum IEF ad arcum DF. Quadere *diuidendo* erit minor pportio LD partia ad DA compartem baſis LA, quam Arcus ID ad DF, ſed vt para LD ad compartẽ OA baſis, ita eſt crus ad LH crus HA ex 3. lib. 6. elem. ob angulum H biſariam ſectum, & vt areus ID ad DB ad centium, Ita eſt arcus LH ad HA ad circumferentiam ex 39. lib. 6 Elem. Ergo erit minor proportio LH ad HA chordæ, quam arcũ LH ad HA. Vnde LH arcus habebit maiorem rationem ad HA; quam chordæ LH ad chordam HA.

THEOR. IV. PROP. IV.

In omni triangulo rectangulo erit maior proportio totius cruris ad ſuum ſegmentum angulo recto adiacens, quàm anguli acuti adiacentis ſegmento ad angulum acutum adiacentem ipſi cruri.

Sit triangulum rectangulum EIG, & ab angulo acuto quolibet V. g. E ducatur recta EK ad latus oppoſitum IG. Dico *maiorem eſſe rationem cruris* GI *ad* KI, *quàm anguli* EBI *ad angulum nigrum* G.

Ab angulo itaque G ducatur parallela GA ad EK, centro G tranſeat per verticem E circulus AEC, & quia longior eſt AG baſis, crure GE ob angulum obtuſum, quem ſubtendit, apud E; ideo circulus BEC ſecabit intra triangulum AEG, & ſector CGE minor erit triangulo GEA. Rurſus; quia GE maius eſt, quam crus GI ob angulum rectum, quem ſubtendit, circulus EB extra triãgulum cadet; maiorque erit ſector BEG triangulo IEG.



Aduertendũ autẽ eſt triaogula GEI, & AGE, quod ſint eiuſdem altitudinis ſe habere ad inuicem, vt baſes ex 1 lib. 6. & ſectores item, vt ſupra monuimus, vt anguli inuicem ſe babent ex 39. lib. 6. Elem.

Probatur. Triangulum GAB eſt maius ſectore GCB, quare ſi comparentur eidem triangulo GBI maior erit proportio trianguli maioris, quam ſectoris ad dictum triangulum GBI: Sector verò iſte GCB babet maiorem rationem ad dictum triangulum GAI, quàm ad alterum ſectorem GEA triangulo ipſo GAI maiorem, quare multò maiorem rationem habebit triangulum AGE ad triangulum GAI, quàm ſector GCE ad ſectorem GEA; cùm multò maius ſit triangulum AGE comparatum triangulo GEI, & ſic elus comprehendet magis, quam ſectoe CGB reſpectu ſectoris AGK: quare etiam cõpooendo triangulum AIG compoſitum, ad triangulum ſimplex GAI maiorem rationem habebit, quam ſector totus compoſitua OCA ad ſimplicem ſectorem GEB; Et ideo etiam angulus totus ſeminiger ad G ad angulum nigrum apud G, vt præmonuimus, & ideo inſuper ita erit baſis tota AI ad baſim IE ſegmentum; ſed vt eſt ex 4. lib. 6. AI ad ſegmentum TE; ita quoque GI tota ad ſegmentum KI; Ergo OI babebit maiorem proportionẽ ad KI, quam angulus ſemialbus G parti nigræ; ſed angulus totus ſemialbus O eſt æqualis angulo K ob paralleliſmum linearum GA, & KE: Ergo tota baſis GI dicet maiorem proportionem ad ſegmentum KI; quam angulus K ad angulum nigrum G.

COROLLARIVM.

Colige quoque, quod erit quoqoe GK ſegmentum in maiori proportiooe ad BI, ac angulus GEB, quod opponitur nigro G, ad ipſum G nigrum; quia probatum eſt eſſe in maiori proportione AE ad EI; quam angulus albus O ad nigrum G; ſed angulus GEK eſt æqualis albo; erg AE ad BI,

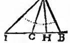
BI, & ideo GK ad KI ob eandem proportionem, erit in maiori ꝓportione, quã GEK angulus ad nigrũ G.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si ſit maior proportio lateris ad latus, quam baſis ad baſim in triangulis duobus alterum crus commune habentibus, & baſim eiuſdem lineæ; erit etiam angulus ſubtenſus ſegmento baſis maiori maior angulo minori ſegmento inſiſtente.

SIt ABI triangulum; & in eo ducatur AH, ſitq; maior proportio AI ad BA, quàm ſegmenti IH ad ſegmentum HB. Dico, *& angulum* HAI *eſſe maiorem angulo* BAH.

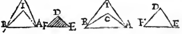
Prob. Nam, cum ſit maior ratio HI, detruncetur talia portio, vt ſit AC ad AB, vt CH ad HB ex propoſ. 3. lib. 6. erit angulus HAC ęqualis angulo BAH. Ergo HAI erit maior, vtpote, quòd HAC ſit eius pars.



THEOR. VI. PROP. VI.

Si dentur duo triangula, quorum lateris ad latus ratio ſit maior, quam baſis ad baſim angulus verticalis erit minor. At ſi ſit minor laterum proportio, quam baſis, erit angulus maior.

QVoniam latera ponuntur maioris proportionis, quam baſes, & AC eſt ad ED in maiori proportione, quam AB ad EF. Pone AI eſſe ad ED vt AB ad EF, ideo quoq; AC habebit maiorem proportionem ad ED, quam IA ad ED. Vude ex 10. l. 5. AC maior erit, quã AI. Sic dicas de crure BI ſi fiat ad DF, vt AB ad EF baſes, quare erit maior proportio CB ad DF, quam IB ad DF; erit itaque maior, vnde crura, cum ſint maiora ex 21. lib. 1. conuenient extra triangulum, & minorem angulum concludent, quam IA, & IB & minorem, quam EDF, quia ex 5. lib. 6. ſunt trianguls ABI, & EDF æquiangula.



Sic dicas de minori proportione laterum, quam baſium. Si enim dicat minorem proportionem AC ad ED, quam AB ad EF; fiat AI ad ED, vt AB ad EF, quare AC dicet minorem proportionem ad ED, quam AI ad ED: Vnde erit minor AC, quam AI. Sic dicas de latere BC, quod dicit minorem proportionem ad FD, quam AB ad EF, quare ſi fiat IB ad DF, vt AB ad FE, crus CB dicet minorẽ proportionẽ ad FD, quã BI ad FD, quare erit crus CB minus ex propoſ. 10 lib. 5. quam BI, ideoq; triangulum AIB erit maius, quam triangulum ACB quod erit minus angulusq; ACB maior, quam AIB, ſed AIE eſt æquiangulum triangulo EDF, ex 5. lib. 6. Ergo ACB erit angulus maior, quam angulus EDF.

THEOR. VII. PROP. VII.

Baſes trium triangulorum in vnum verticem conuenientium erunt continuè proportionales, ſi anguli duo exceſſuum ſint æquales, & medium ſit iſoſcelum.

SInt triangula ABC, & BAD, & BAH, quorum anguli, quo vnus alium ſuperat niger, & nigerrimus ſint æquales. Dico, & baſes futuras eſſe continuè proportionales BC, & BD, & BH, dummodò latus BD ſit ęquale lateri BA.

Probatur. Angulus ADC niger eſt æqualis duobus internis, & oppoſitis angulo nempe H, & angulo ad A nigro in triangulo DAH; angulus verò niger ad D eſt æqualis angulo ſemialbo ad A, nempe BAD ob æqualia crura ſubtenſa, quare angulus ſemialbus ad A erit æqualis nigro ad A, & ad H. Angulus verò nigerrimus pars ſemialbi eſt æqualis nigro; quare reſiduum album erit æquale angulo ad H. Itaque triangulum HAB erit æquiangulum triangulo BAC; ſiquidem angulus B communis eſt; angulus albus A æqualis angulo H; quare, & reliquus BAH erit æqualis angulo C nigro ex Coroll. propoſ. 17. lib. 1. quare hæc triangula habebunt latera proportionalia, ex 4. l. 6. & BC erit ad BA, ſeu BD, cui ipſa BA æquatur, vt BA, ſeu BD ad BH.



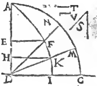
EXPENSIO II.

De triangulis, quo ad angulos ſecundùm rationem datam conſtituendis.

ANtiquitas tota; totuſque ingeniorum neotericorum nixus in id elaborauit, vt poſſet angulos in triangulis iuxta datam proportionem diuidere, maximè ſi de triſariatione agitur; & preter ea, quæ antiquitùs inuenta ſunt, nihil inuenit noua ætas, quód antiqua inuenta promoueret; Dinoſtratus itaque, & Nicomedes quadratricem lineam ad id inuenere, & Nicomedes Conchoideam lineam; quos modos breuiter tradere intendimus:

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Angulum datum mediante quadratrice iuxta proportionem datam diuidere.



SIt exhibita Quadratrix AFI, proportioque V ad T, & angulus S. Fiatque ei ęqualis ãgulus CDN, & parallela ad baſim ducatur FE. Fiatq; vt V, & T ad T ex pr. 16.

EF. lib.6. elem. Sic BD ad aliam, & inuenietur DH à puncto itaque H ducatur parallela HK ad baſim ID, & per a agatur radius DM, eritque arcus CM ad arcum MN, vt V ad T.

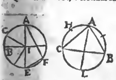
Probatur. Nam ex propoſ. 18. tract. 18. de lineis curuis, vt eſt portio lateris DB ad latus DA, ſic eſt arcus NC ad quadrantem totum CA, vt autem DA latus ad HD partem, ſic Quadrana CA ad arcum MC ex eadem cit. propoſ. Ergo *ex æquo*, vt pars DE ad partem HD lateris, hoc eſt, vt V, & T ad T ex conſtructione. Sic CN arcus ad CM arcum. Quare *diuidendo* EH erit ad HD hoc eſt *diuidendo* quoqꝫ V ad T veluti NM ad MC.

PROBL. II. PROPOS. IX.

Triangulum conſtituere, cuius duo anguli inter ſe habeant proportionem datam.

SIt quadrans circuli AB ope Quadratricis diuiſus in C ſecundum proportionem datam; menſureturque arcus AC gemina vice in circumferentia AF; ducaturque AF, & FE, habebitque triangulum AFE duos angulos, qui habebunt proportionem datam arcus AC ad arcum CB; nempe angulus ad E erit æqualis AIC ad centrum, vtpote quod ſubtendat duplo maiorem circumferentiam ex effectione, & ſic angulus ad A duplus anguli CBI.

Quod ſi velimus, & tertium angulum datam habere proportionem, totus ſemicirculus ACL ſecundùm proportionem datã diuidatur, replicando in AH, HC, & CL quadrantis arcus datos, & quilibet arcus in circulo gemina vice menſuretur, vt omnes rurſus replicati æquent totam circumferentiam, & puncta ABC coniungantur, & erit factum, quod poſtulatur; habebuntque anguli eam proportionem, quam habent partes arcuum AH, & HC, & CL ſecundum proportionem datam eo modo, quo diximus ope Quadratricis inuentam.

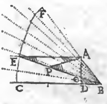


PROBL. III. PROPOS. X.

Angulum datum ope Conchoidis trifariam ſecare.

SIt angulus datus acutus ABC, & à quolibet puncto lateris, quod placuerit, demittatur perpendicularis in aliud latus AD, proiungeturque latus BD in C, & ſit DC addita pars dupla alterius lateris BA, & ab A ducatur parallela AE ipſi DC, deſcribaturque centro B Conchois CEF, & ad punctum E, quo ſecat, à puncto A ducatur AE; anguluſque niger B erit tertia pars totius anguli ABD dati, & altera pars alba eius duplum erit.

Probatur OE ea deſcriptione Conchoidis æquatur ipſi DC: Quare diuiſa in P biſariam OP æquabitur dimidiatæ DC, & ideo ipſi BA, cui tota DC dupla eſt ea conſtructione; & quia OAE angulus ex effectione rectus eſt, circulus centro P deſcriptus tranſibit per tria puncta OAE ex propoſ.18.lib.3. elem. Quare AP erit radius, & æqualis OP, & PE, & BA; quare anguli nigri ad A, & B erũt æquales ex 14 lib.1. elem. & angulus niger ad P, vtpote externus illis duobus erit æqualis, & duplus vni eorum B: at ob æqualitatem laterum BA, & AP angulus P niger æquatur albo A: quare angulus A albus erit duplus anguli B nigri: ſed hic, vtpote ab incidente in parallelas AE, & BC ex propoſ.30. lib.1. elem. factus æquatur angulo B nigro: Ergo angulus albus B eſt duplus anguli nigri A; & ſic ABD ſectus eſt, & diuiſus in tres partes, quarum duæ ſunt pars alba, reliqua pars nigra.



EXPENSIO III.

De Angulis, quoad latera ſecundùm datam rationem conſtituenda.

VIdimus modum conſtituendi angulos proportionales; modo reſtat videndum quomodo, & latera proportionalia ſecundùm datam rationem efficiamus.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato angulo à puncto extra illum ducere lineam, quæ crura iuxta datam proportionem detruncet.

SIt datum punctum A, & ab eo ducenda ſit linea, quæ iuxta datam proportionem B ad C detruncet latera anguli E; ita vt ſit vnum ad alterum, vt C ad B. Eligatur quodlibet punctũ F, & fiat, vt C ad B ex propoſ.15. lib.6. elem. ſic AF ad EG, & GF ducatur dein ab A parallela ipſi FG, quę ſit AIH, & *erit* IE *ad* EH, *vt* C *ad* B.



Patet ex prop.4. lib.6. elem. Nam FE eſt ad EG, ideſt, vt C ad B ex effectione; vt AI ad EH: Ergo erit EI ad EH, vt C ad B. Quod intelligitur etiam ſi intra triangulum hęc praxis operi demandetur.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Ad datum punctum intra angulum lineam ducere, quæ ab eo puncto remaneat diuiſa ſecundùm datam rationem.

SIt in præcedenti fig. datum punctum K per quod ducenda ſit linea, vt K diuidat eam in proportiones datas B ad C.

Ducatur parallela AI lateri GE, à puncto K; & fiat, vt B ad C, ſic EI ad IF, & ducatur à puncto F per punctum K linea recta FG. Dico KG *eſſe ad* KF, *vt* B *ad* C.

Patet,

Patet. quia eſt ex ad KF, vt a c ad IF, nempe, vt B ad C ex conſtructione, ergo etiam ox erit ad FK, vt B ad C.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

A dato puncto extra angulum ducere lineam, quæ diuidatur à lateribus anguli ſecundùm datam rationem.

SIt datum punctum B, & angulus A, & ducatur quæcumque à B puncto, quæ ſecet anguli A latera, & deinde fiat, vt data proportio K ad L, ſic CB ad CD, & à puncto D ducatur parallela ipſi CA, & occurrat lateri AF prolungato, ac tandem ducatur BF iungens B, & F puncta, Dico BE *eſſe ad* EF, *vt* K *ad* L.



Patet, quia ex 4. lib. 6. eſt, vt BC ad CD, quæ ex effectione eſt, vt K ad L; ſic BE ad EF. Ergo BE ad EL eſt, vt K ad L.

EXPENSIO IV.

De potentijs laterum triangulorum quorumcumque.

LIcet ſupra viderimus l.2. elem. potentias laterum triangulorum comparatas ad inuicem remanent tamen aliqua, quæ vtpote vtilia ſuperficiebus conorum non rectorum proximè inueniendis, hic non debent poſthaberi.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

In omni triangulo quadrata laterum ſimul ſumpta ſunt æqualia quadratis duobus ſumptis, tum dimidiæ baſis; tum quadratis duobus lineæ à vertice in eam medietatem deductæ.

TRes caſus habet propoſitio, ſecundùm quòd perpendicularis cadit, vel enim extra triangulum ducitur. vel intra latera ipſius trianguli, ſeu eſt latus ipſius trianguli, vt in rectangulis, quos omnes caſus ſeorſim oſtendemus, eſt autem prop. Pappi, ſed aliter eam dabimus.

Cadat primùm perpendicularis intra triangulũ, vt eſt AF in triangulo BAC; ſitq; BC baſis bifariam diuiſa in E, & ducta AE. Dico, *quòd quadrata ex cruribus* BA, *&* AC *ſimul ſumpta æquātur duobus quadratis lineæ* AF, *ſimulq; duobus quadratis medietatis* BE.



Probatur. Quadratum AB ex 14. lib. 2. eſt minus quadratis ex BE, & AE rectangulo BE, & EF bis ſumpto; quod eſt BO ex eò quia angulus BEA ſit acutus, & triangulum Oxigonium. Rurſus quadratum AC maius eſt quadratis AE, & EC ex 13. lib. 2. rectangulo ex EC, & FE bis ſumpto: quod eſt CG, eo quia angulus CEA ſit obtuſus, & triangulum Amblygonium, quare tantò maius eſt quadratum ex AC quadratis ex AE, & EC; quantò minus eſt BA ijſdẽ quadratis AE, & CE, vel ęquali BE, cum enim BE, & EC ſint æquales, & FE eadem etiam rectangula BG, & CG bis hinc inde ſumpta erunt æqualia: Quare ſi ex AB, & AE quadrata gemina vice ſumentur, æquabunt quadrata BA, & AC, cum tantum reponat quadratum AC quantum tollit quadratum BA.

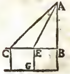
* Sit ſecundus caſus, in quo perpendicularis extra cadat in triangulo ſecundo, & adhuc affirmo *quadrata* BA, *&* AC *ſimul ſumpta æquari quadrato duplici ex* AE, *& quadrato item duplici ex* BE *medietate baſis.*

Probatur. Quadratum ex AC, vtpote in Amblygonio oppoſitum angulo obtuſo B in triangulo ACB maius eſt quadratis crurum AB, & AC duobus quadratis ex BA, & EC ęqualibus, & duobus rectangulis ex BE, & FB, ſ. rect. CB, & BF, vt lib. 2. elem. p. 13.



Quadratum verò BA minus quadratis AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, vt oſtendam. Ergo, cum tantùm defficiat quadratum ex BA quantùm augeſcit quadratum ex AC, ſuper quadrata AE, & EC, ſi hæc duplentur, illa ſimul ſumantur, ſuppleante altero deffectum alterius quadrata laterum BA. & AC æquabunt duo quadrata ex AE, & duo ex EC, vel AB.

Quòd autem BA quadratum deficiat à quadrato AE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, patet ex 13. lib. 2. elem. Nam ex AE quadratum maius eſt lateris AB, & BF quadratis duobus rectangulis ex BE, & BF, ita quòd AE quadratum contineat in ſe quadratum ex BE, & duo rectangula ex BE, & BF, & quadratum ex AB, cui quadrato AB ſi addamus inſuper ex BE quadratum iſtud AB cum addito BE ſuperabit quadratum, ex AB duobus quadratis ex BE & duobus rectangulis ex BE, FB: quare AB quadratum minus erit quadrato ex AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF.



Caſus 3. Cadat perpendicularis, & ſit ipſum crus AB in triangulo BAC tertio. Tunc ex AC quadratum erit maius quadratis ex AE, & EC duplici rectangulo EC, & AB, ex 13. lib. 2. quod eſt quadratum CG bis ſumptum: BA verò deficiet, à quadratis EA, & AE quadrato BE bis ſumpto, quia AB cùm BE quadratum illud AE ex prop. 11. lib. 2. exæquat. Quare defectus cruris BA æquatur exceſſui cruris AC, ſuper quadrata ex AB, & BE. Quare ſimul poſita ex BA, & AC quadrata æquabunt quadrata ex AE, & BE bis ſumpta.

Ex-

EXPENSIO V.

De angulis in figuris rectilineis.

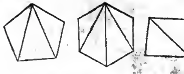
VIſa angulorum ſecundùm ſe conſtitutione, cognitiſque proprietatibus modo eos, vt figuris rectilineis applicatos conſideramus, ſiue illę regulares ſint, ſeu irregulares.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Quælibet figura rectilinea continet bis tot angulos rectos, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

QVælibet figura rectilinea continet angulos bis tot æquales rectis quota ipſa eſt inter figuras rectilineas. V. g. prima figura eſt triangulum; illius anguli duobus rectis æquabuntur. Secunda, ſeu oblonga, ſeu Trapezia; illius itaq; anguli, eo quòd ſit ſecunda bis tot rectis, nempe quatuor erunt æquales. Tertia eſt Pentagonum, ſeu æqualium laterum, ſeu non. Sex itaque rectis eius anguli æquales erunt.

Ratio eſt, quia quælibet figura in tot triangula diuidi poteſt, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas trahendo à quouis angulo rectas ad vnum aliquem illorum: Sic triangulum non niſi in triangulum diuidi; quadrata verò figura in duos angulos: at pentagona in tres, ſexagona in 4. vt vides hic factum.



At ex 17. lib 1. propoſ. demonſtratum eſt internos cuiuſcumque trianguli angulos æquales eſſe duobus rectis: Quare quæ figura non poteſt diuidi, niſi in vnum angulum trahendo de angulo ad angulum rectas, vt triangulum, ęquabitur duobus rectis, quæ in duos, vt quadratum quatuor rectos exæquabit, quæ in tres, vt pentagona ſex rectis æquos angulos obtinebit ſexagona octo angulos rectos complebit, & cæt. Sed quæres, quà ratione cognoſcatur figura inter figuras talem ſedem occupare V. g. eſſe decimam, vel vndecimam figuram.

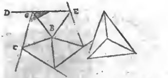
Reſpondetur numeranda eſſe latera, vel angulos, & detractis duobus (duo enim latera figuram conſtituere nequeunt, ſicut nec duo anguli ſolum, vt patet) ille numerus reſiduus, quam ſedem occupet in ſerie figurarum demonſtrabit V. g. data figura 20. vel angulos, vel latera numeret detrahe 2. remanebit 18. alia itaque figura inter figuras erit decimaoctaua.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Anguli cuiuſcunque figuræ rectilineæ æquantur bis tot rectis, quot angulos obtinet, ſeu latera detractis rectis quatuor.

VVlt propoſ. quòd numerentur latera, ſeu anguli cuiuſcunque figuræ, & eo numero duplicato detrahantur quatuor, & reſiduus numerus angulos rectos demonſtrabit, quibus anguli æquales ſunt. V. g. Pẽtagoni ſunt anguli, vel latera; quinq; duplica hunc numerum 5. erunt 10. à quo ſi detrahas 4. remanebunt 6. indicans quinque angulos pentagoni ſex rectis eſſe æquales.

Probatur. Quia figura quælibet in tot triangula diuidi poteſt à ſingulis eius angulis trahendo lineas ad aliquod punctum in medio aſſumptum, quot ipſa habet latera, ſeu angulos, vt vides hìc factum in triangulo, & pentagono.



Quare cum ex propoſ. 17. lib. 1. elem. quilibet trianguli angulus ſit æqualis duobus rectis, ſequitur, vt triangula ea in qualibet figura iuxtà numerum angulorum, vel laterum facta ſint æqualia bis tot rectis, quot ſunt anguli illi: ſed omnes illi habent angulos circa punctum medium figurę conſiſtentes omnes ſimul ſumptos æquales quatuor rectis, vt collegimus propoſ. 12. lib. 1. qui ad angulos figuræ non pertinent: quare ſi detrahatur, remanebunt reliqui ad figuram pertinentes; Sic, ſi ex 10. auferantur 4. erunt reliqui 6. anguli recti, quibus 5. anguli pentagoni æquales ſunt.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

Anguli cuiuſcumque figuræ externi à latere producto, & ſibi coniuncto effecti æquant ſolùm quatuor rectos.

ANgulos exteriores cuiuſcumque figuræ, qui fiunt à lateribus verſus eandem partem ſeriatim deductis, vt vides factum in pentagono B omnes ſunt æquales tantum 4. rectis.

Deducitur ex propoſ. 10. lib 1. elem. vbi aſſeritur, quòd linea ſuper aliam conſiſtens angulos duos, hinc, & inde facit duobus rectis æquales, quare cum quodlibet latus figurę cuiuſlibet inſiſtat ſuper alium productum, vt eſt CG ſuper DE; ſequitur, vt angulus niger figuræ internus, & angulus albus externus ſint æquales duobus rectis, & cum omnes ita ſe habeant, ſequitur eſſe ęquales omnes interni, & externi bis tot rectis; quot ipſi ſunt V. g. in fig. 5. angulorum decem angulis rectis; quia 5. interni, & externi 5. ſunt; Sed iam diximus internos eſſe æquales ſex rectis: ſequitur, quòd externi ſint ſolum æquales 4. rectis.

COROLLARIVM.

Hinc poteſt colligi modus cognoſcendi in figuris rectilineis, & equilateris regularibus quot gradus quilibet eius angulus, tum internus, tum externus, tum ad centrum contineat, cum enim quilibet rectus angulus 90. partes, gradusque contineat fit, vt ex cognitione rectorum deueniamus in cognitionem continentiæ, quam anguli figuræ poſſidet ſic cum anguli ad centrum ſint 4. rectis æquales; qui 360. gradus continent, & illi V. g. in Pentagono ſint 5. ſi per 5. diuidatur 360. dabit 72. numerus ſilicet graduum, quem continet angulus B, & quia anguli externi, vt C quatuor quoque rectis ſunt æquales, angulus quoque C 72. gradus continebit, ſed quia anguli interni 6. rectis ſunt æquales, qui dant 540. gradus diuiſo hoc numero per 5. dabit 108. grad. pro continentia cuiuſcumque anguli interni.

TRACTATVS XX.

De Lineis circulo circumpoſitis.

VIſis Linearum proprietatibus ſecundùm ſe, modo incipimus eas conſiderare, vt margines ſuperficiei, atq; figuræ; & quia vt 3 lib Elem. vidimus, omnes figuræ perfectę adiumentò circuli deſcribuntur; ideo eas, vt applicatas circulo conſideramus.

EXPENSIO I.

De principijs huius Tractatus.

PRæcipuus ſcopus huius Tractatus eſt conſiderare lineas, quæ circuli peripheriæ, vel eius datis portionibus ſubtenduntur, quatenùs menſurabiles ſunt, vel menſura adæquata, ſi lineę ſint ſemidiametro commenſurabiles, quę tanquam rationalis reſpectu omnium aſſumitur, & tanquam ea, iuxta cuius partes omnes alię lineæ diuidendę ſunt; vel, ſi ſint incommenſurabiles, ſaltem menſurâ proximâ.

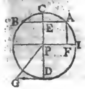
Circulus omnis ex libito hominum in 360. partes diuiditur, quæ Gradus appellantur, & omnis gradus in 60. partes, rurſùs intelligitur diuiſus, quæ minuta dicuntur; rurſuſque omne minutum in 60. partes ponitur diuiſum, quæ ſecunda, & quodlibet horum in 60. partes inciſum iterum, quæ Tertia vocitantur, & ſic Quarta, Quinta, Sexta, ſemper ſubdiuidendo vſque ad 10.

Iſtis itaque partibus circuli linea aliqua ſubtenſa vel circumſcripta ſi non omnibus ſaltem Gradibus, & minutis notæ longitudinis reſpectu radij reperire fuit neceſſarium; ſi non adequatè, ſaltem proximè, & cum inſenſibili differentia à vero.

Linearum verò rectarum, quæ circa peripheriam circuli conſiderantur aliæ ſunt intra, aliæ ſunt extra, aliæ eam ſecant. Quæ intra circuli peripheriam exiſtunt illæ ſunt ſubtenſę, quæ, & cordę dicuntur, & Sinus.

DEFINITIO I.

CHorda itaque eſt recta linea in circulo dirimens eum in duo ſegmenta, & vtrumque pariter ſubtendens.



Talis eſt AB in circulo ABCD, quæ ſubtendit ſegmentum BCA, & BDA, quòd licet verum ſit, tamen, cù ſitù EA in ſe continens accipitur, vt minorem portionem BCA ſubtendens conſideratur.

DEFINITIO II.

SInus Rectus eſt dimidiata chorda à diametro ei perpendiculari ſecta.

Talis eſt EA. Sinus verò eſt nomen Arabicum vſurpatum in hanc ſignificationem à Mathematicis. Licet Vitalis in ſuo Lexico Mathematico ex eo velit ſinum appellatum, quòd claudat curuitatem arcus.

DEFINITIO III.

SInus Verſus eſt diametri portio chordæ, ſeu ſinui recto perpendicularis inter chordam ipſam, & peripheriam incluſa.

Talis eſt CE inter BCA ambitum, & EA ſinum, ſeu BA chordam exiſtens, qui etiam dicitur ſagitta.

DEFINITIO IV.

SInus complementi eſt ſinus rectus illius arcus, qui alium complet.

Talis eſt AF, qui eſt ſinus arcus AI complentis arcum CA vſque ad quadrantem, qui dicitur etiam ſinus ſecundus.

DEFINITIO V.

SInus totus eſt radius ipſius circuli.

Aſſumitur verò radius: vt rationalis reſpectu omnium aliarum, ſeu chordarum, ſeu ſinuum, ideoque à recentioribus ſupponitur diuiſus in partes 10000000. licet Ptholomeus eum poſuerit partium 60. Arzael par 150. ſed experimentum docuit minutiorem diuiſionem eſſe maioris commodi.

Lineæ, quæ extra peripheriam ſunt communi nomine dicuntur ſecundæ, & ſunt tangentes, quarum definitionem lib. 3. def 2. explicauimus. Talis eſt DG quarum terminus eſt ſecans aliqua, quæ prouenìat à centro, & in ipſam tangentem terminet, vt PG. Itaq; cum ſemper diameter PD in punctum contactus ductus faciat angulos rectos, cum tangente ex lib 3. Elem. prop. 20. Radius cum tangente, & ſecante ſemper faciet triangulum rectangulum, cui ſecans PG baſis ſit.

EXPENSIO II.

De lineis portionibus peripheriarum inſcriptis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt.

QVę lineæ circulo inſcriptæ aliquam figuram regolarem conſtituuot notiores ſunt, & fundamentum, quo cæteræ inueniantur. Vnde ab iſtis doctriua exordienda. Vidimus autem propoſ. 15. lib. 4. elem. Latus Hexagoni ęquari radio; vnde de reliquarum figurarum lateribus ſermo erit.

THEOR. I. PROPOS. I.

Latus Trianguli circulo inſcripti potentiâ triplum eſt ſemidiametri.

SIt triangulum ABC ęquilaterum in circulo ABC. Dico *eius latus poſſe inſeruire pro latere quadrati, quod erit triplo maius, quàm quadratum ſemidiametri*, BO, qui æqualis eſt BL lateri hexagoni ex propoſ. 15. lib. 4. Euclid.

Probatur. Quadratum baſis AL in rectangulo BAL eſt æquale quadratis rectarum BA, & BL, ex 11. lib. 2. quòd angolus B in ſemicirculo rectus ſit ex 28 lib. 3. Sed quadratum à diametro factum eſt quadruplum quadrato ſui dimidij, & ſemidiametri BL, vel BO, ex Coroll. propoſ. 6. lib. 2. Ergo reliquum quadratum ex BA æquat reliquas tres partes, quæ vna cum quadrato ex BL, vel BO quartæ parti æqualis, omnes quatuor partes quadrati AL exæquat: vnde ſolom quadratum ex AB erit triplum quadrati OA radij, & conſequenter ipſum latus AB triplo ampliùs poterit.



COROLLARIVM.

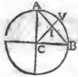
HInc eſt, quod ſi diametrum in ſe multiplices, & quadres, ſic, & ſemidiametrum; deinde quadratum ſemidiametri à totius diametri quadrato ſubducas, & à reſiduo radicem quadratam extrahas; quòd inquam ea radix erit latus trianguli AB, & chorda, quæ ſubtendit 120. grad. cuius medietas eſt ſinus 60.

Aduerte autem, & hoc ſit vniuerſale monitum, quod vt exactiſſimus ſit calculus ſinus totus duabus xiſris augendus, & à radice quadrata, deinde vna figura abijcienda eſt; in qua aliquis error in maiori, vel minori exceſſu ineſſe poteſt.

THEOR. II. PROPOS. II.

Latus quadrati circulo inſcripti poteſt duo quadrata ex ſemidiametro conſtituta.

PAtet. Nam latus quadrati in circulo ſubtendit quadrantem: Ideo angulus C rectus: Vnde ex 11. lib. 2. quadratum ex baſi BA rectanguli ACB æquatur duobus quadratis alteri ex ſemidiametro AC alteri ex ſemidiametro CB.



COROLLARIVM.

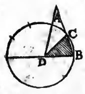
COlligitur. Quòd ſi quadretur ſemidiameter auctus duabus xiſtis, & duplicetur, & à toto radix quadrata eruatur, illa abiecta vltima figura datura ſit latus quadrati, & chordam AB, cuius medietas eſt ſinus 45. grad.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum componantur tota recta linea extrema, & media ratione ſecatur.

SIt latus decagoni BC; & ei addatur AC æqualis ſemidiametro DB, quę, & erit latus hexagoni. Dico *totam* AB *ſectam eſſe in* C *extrema, & media ratione*. Nempe quadratum contentum ſub AC eſſe æquale rectangulo ſub AB, & CB contento.

Prob. Progreſſ. 1. Triangula AOB totum, & nigra pars ſunt ęquiangula, vt oſtendam; Ergo ex 4. lib. 6. ita eſt proportionatum AB latus ad OB baſim in triangulo maiori ADB, vt latus DB in triangulo nigro minori vel ęquale AC ex conſtructione baſi CB. Cùm ergo ſit tota AB ad ſegmentum maius AC, vt idem ad minus CB ex prop. 19. lib. 6. erit rectangulum ſub extremis contentum æquale quadrato mediæ.



Remanet ſolum probandum triangula ABD, & minus nigrum eſſe æquiangula.

Progreſſ. 2. Angulus niger apud O eſt quinta pars ſemicircumferentiæ nimirum duorum rectorum, vtpote angulus decagoni, quòd AC ex Theſi ſit latus decagoni. Ergo reliqui duo C, & B nigri æquales inuicem ob æqualitatem laterum ſubtenſorum erunt quatuor partes duorum rectorum, vt omnes ſimul ſint æquales duobus, rectis ex 17. propoſ. lib. 1. & ſinguli duæ partes, nempe dupli anguli nigri apud O. Sed angulus C niger eſt æqualis ex prop. 17. l. 1. duobus interois, & oppoſitis A, & albo apud D, qui ęquales inuicē ſunt ob cętera DC, & CA ſuptenſa ęqualia. Ergo duplus vni eorum V. g. angulo A, ſed, & erat duplus angulo nigro apud D, ergo iſti angulus A, & niger apud O erunt æquales.

Progreſſ. 3. Hincque probabitur angulum O totum nigrum, albumque trianguli maioris eſſe æquale angulo C nigro minoris. Nam eſt totus duplus anguli A; cùm quilibet, nempe niger D, vt oſtenſum eſt, & albus O ob æqualitatem laterum ſint æquales ipſi A: Ergo totus albus, nigerque D ipſi A duplus, ergo totus æqualis nigro angulo B du-

B duplo quoque, vt ſecund. progreſſ. anguli nigri D.

Tandem angulus B eſt communis, ergo triangulum magnum, & paruum nigrum ſunt æquiangula; cum de ſingulis angulis probata ſit æqualitas in ambobus, & hinc erit AB ad AC, vt AC ad CB: quare recta AB, quæ conſtat ex latere decagoni, & hexagoni extrema, & mediâ ratione ſecta eſt.

COROLLARIVM

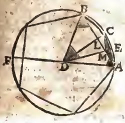
HInc, ſi diametrum auctum duabus ſiſtis, & hoc quadratum diuidas per ſemidiametrum ſimiliter auctum exciples latus decagoni.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, pentagoni latus poteſt quod poteſt, & latus decagoni, & latus ſexagoni.

DVo intendo demonſtrare alterum, quòd pentagoni latus poſſit latus ſexagoni, quod poſſit quoque latus decagoni; ideoque, vt ambo.

Probentur. Sit BA latus pẽtagoni, quod ſubtẽdat arcum BCA; iſque arcus diuidatur per medium in C; ducaturque à centro D ſemidiameter DC; connectanturque ſubtenſę, quę erunt latera decagoni CB, & CA; ſemidiametrique ducantur BD, & DA, & rurſus diuiſo arcu CA per medium in E, ducatur ſemidiameter DE; & ſecet chordam BA in M, & CA in I; connectaturque MC.



Probatur duo triangula BAD. & BMD ſunt, vt deinde oſtendam, æquiangula & angulus apud D niger eſt æqualis angulo A nigerrimo, & angulus niger B communis, ergo ita erit BA ad BD, vt BD ad ad BM. Ideoque rectangulum ſub extremis contentum BA latere Pentagoni, & BM, eius portione erit æquale quadrato ex media BD, radioque ex 19. lib. 6.

Progreſſ. 2. Æquiangula quoque ſunt, vt oſtendam, triangula nigrum totum CMA & maius ipſo ABC, cuius angulus B eſt æqualis angulo nigro C, & niger apud A communis, Ergo eadem ratione erit AB ad AC, vt AC ad MA: Ideoque rectangulũ ſub AB, & MA extremis æquale erit quadrato mediæ CA ex 19. lib. 6. Sed hæc rectangula, nempe primi progr. ſub BA, & BM, & ſecundi ſub BA, & AM æqualia, ſunt quadrato ex tota BA, ex 4. prop. lib. 2. Ergo talia quoq; erunt quadrata illis æqualia, nempe quadratum ex BD æquale rectangulo, & tota AB, & maiori ſegmento, & quadratum CA æquale rectangulo ex tota, ex minori ſegmento, iſta inquam duo quadrata erunt æqualia quadrato ex BA: Ergo BA latus pentagoni poteſt quadratum BD lateris ſexagoni, & CA lateris decagoni.

Remanet primo oſtendendum triangula BAD, & minus BMD eſſe æquiangula. Quod ita conuincitur. Angulus A nigerrimus eſt in peripheria: Ergo vt ſit æqualis BDE ad centrum debet eſſe ſupra duplò maiorem circumferentiam, cum ſuper æqualem ſit ſubduplus ex 23. lib. 3. Talis verò eſt circumferentia FB, nempe duplo maior ſuper quã inſiſtit A nigerrimus angulus ad circumferentiam reſpectu BCE circumferentiæ, quam comprehendit angulus niger D ad centrum, vt conſideranti patet, cum FB ſit 6 ex circuli 20. partibus BE verò 3. Angulus verò niger apud B eſt communis. Ergo reliquus reliquo æqualis, cum tres anguli cuiuſcumque trianguli duobus rectis æquentur ex propoſ. 17. lib. 1. Coroll.

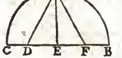
Prob. Deinde triangula BAC maius, & ſeminigrum CMA eſſe æquiangula. Nam anguli in minori nigro apud A, & apud C niger ſunt inuicem æquales ob æqualitatem laterum, vt conſideranti patet; item angulus A albus eſt æqualis angulo apud B trianguli CBA maioris, cum ſint ſuper ęquales circumferentias CA, & CB. Ergo idem angulus apud B albus trianguli ABC erit æqualis alteri nigro minoris trianguli apud A, & conſequenter angulo C nigro ei æquali: Cùm ergo B maioris, & C nigri minoris trianguli ſint æquales, & reliquus albus apud A communis, erunt quoque duo reliqui æquales: Vnde triangulum maius BAC erit angulo minori AMC erit æquiangulum.

PROBL. I. PROPOS. V.

Latera decagoni, & hexagoni in eodem circulo inueſtigare.

SIt circulus, vel quod ſufficit ſemicirculus CAB, cuius diametro AB ſit perpendicularis EA, & diuiſo bifariam ſemidiametro in F ducatur FA, cui æqualis ſumatur FD, & à puncto D ducatur ad A recta AD. Dico rectam ED eſſe latus Decagoni, & ſecundo AD eſſe latus Pentagoni.

Probatur. Nam DB eſt ſecta media, & extrema ratione in E: quare ED minus ſegmentũ erit latus decagoni, & EB maius ſegmentum erit latus ſexagoni ex propoſ. 3 huius.



Probatur antecedens, quod DB ſecta ſit media, & extrema ratione. Nam ex propoſ. 8. lib. 2. Radius EB ſectus eſt bifariam in F, & ei addita eſt recta ED. Vnde rectangulum ex tota DF, & addita DE vnà cum quadrato ex EF medietate eſt æquale quadrato medietatis, & additæ vt vno latere FD facto, ſed FD eſt æqualis lineæ AF ex conſtructione. Ergo ipſius AF quadratum dicto rectangulo, & quadrato ex medietate radij æquale erit. Sed quadratum ex AF eſt quoque æqual. quadratis AE radio, & EF eiuſdem medietatis ex 47. lib 1. Quamobrem, ſi quadratum illud EF dematur, remanebunt quadratum ex AE, vel quod idem ex maiori ſegmento EB, nempe

nempe radio, & rectangulum ex tota DB, & additâ DE comprehenſo æqualia: Quare OA erit ſecta extre ma, & media ratione.

Probatur ſecunda pars. Nam ex 11. ſecundi AD poteſt, & quadratum ex SA, & quadratum ex DE: ſed OE eſt latus decagoni, vt modo oſtenſum eſt EA hexagoni, cùm ſit radius. Ergo ex propoſ. antecced. eſt latus pentagoni.

COROLLARIVM.

Hinc patet modus, quo eruatur latus Decagoni. Nam numero radij in ſe multiplicato, & numero medietatis radij quoq; in ſe ducto, ābo ſimul colligantur, & ex toto radix quadrata eruatur, & obtinebitur linea AF, à qua dempto numero medietatis radij, nempe AF remanebit DE latus decagoni. Radius verò duabus zifris augendus, vt præciſior ſit calculus, & deinde ex radice extructa expungenda figura vltima eſt.

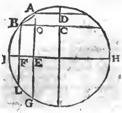
COROLLARIVM II.

ET hinc quoque fit, quòd ex antec. pentagoni latus habeatur. Nam numero radij aucto duabus zifris ad maiorem præciſionem in ſe ducto, & Decagoni quoque in ſe ducto, ſi à toto ſimul aggregato radix quadrata extrahatur dabit DA latus pentagoni.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Quindecagoni latus poteſt quadrata linea, quà differt ſemilatus trianguli à ſemilatere Pentagoni, & eorum ſinuum verſorum differentiæ.

PRobatur per 16. lib. 4. Euclid. recta inſcripta inter baſim trianguli, & pentagoni latus tertium eſt latus quindecagoni, vt AB, quæ eſt inter punctū A, in quo cadit baſis trianguli, cuius vertex in H, & B, quo item incipit à pũcto B tertium latus



pentagoni ab H: Erit ergo AE ſemilatus trianguli & FA pentagoni, & differentia OA. Sinus verò verſus ſemilateris pentagoni eſt CB, & trianguli eſt DA, & eorum differentia OB; cum ergo OBA triangulum ſit rectangulum: ex 11. lib. 2. baſis AB quadratum æquabitur quadratis ex OB, & OA.

COROLLARIVM.

QVare Colligitur, quod ſi ſemilatus FE ſubducatur AE relinquetur AC, qui in ſe ducetur. Repartitia verò complementis DA, & CB, vt infra doceho, & minori à maiori ſubducto relinquetur OA, qui in ſe multiplicabitur: numeri verò in ſe ducti, tum AQ, tum O E aggregentur. Nam extracta radix quadrata dabit chordam AB, & latus quindecagoni Gr. 24. quæ dimidiata erit ſinus Gr. 12.

EXPENSIO III.

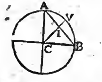
De proportione laterum figurarum circulo inſcriptarum, cum diametro.

NE fruſtra quandoque laboremus in lateribus prædictarum figurarum inueniendis, oportet priùs videre, an ſint lineæ rationales, & ideo numeris exprimibiles: ſi namq; numeris partium, in quas diameter diuiſus eſt exprimi nequeat earū longitudo, fruſtra quis neſcius calculum reiteraret, vt tandem partes numero exprimeret, quæ exprimi nequeant.

THEOR. I. PROPOS. VII.

In quadrato diametrum incommenſurabile eſt lateri, ſeu ſemidiametro cui eſt inſcriptum.

PRobatur ex demonſtratis lib. 2. & propoſ. 6. in Coroll. Quadratum factum ex diagonali AB eſt duplum quadrati facti ex latere, & radio CA: Ergo hęc quadrata non poſſident rationem talem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum debet habere: ſed quam numerus ad numerum ex Coroll. 1. enim propoſ. 16. lib. 8. inter numeros, quorum vnus ſit duplus alterius non cadit medius



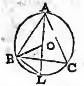
proportionalis; & ſic inter eos non poteſt intercedere proportio, quæ inter quadratos numeros mediat ex eadem 16. propoſ. Cum ergo quadratum diametri diagonalis AB ad quadratum lateris ſit ſolum, vt numerus ad numerum ex propoſ. 6. lib 10. erunt longitudine duo incommenſurabiles latus, & radius AC, & diagonalis AB, quæ eſt chorda ſubtenſa quadranti, & ideo etiam diametro toti incommenſurabilis erit.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

In triangulo latus ipſius ſemidiametro, in quo inſcribitur incommenſurabile eſt.

PRobatur. Nam ex propoſ. 1. latus trianguli AB poteſt inſeruire pro quadrato, quod erit triplo maius; quam ſemidiametri AO: Sed 1. ad 3. non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum ex Coroll. 12. lib. 8.

Ergo



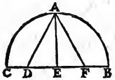
Ergo nec quadratũ ſemidiametri ad quadratũ lateris inſcripti trianguli. Quare ex prop.6.lib 9.latera horũ quadratorum erunt incommenſurabilia.

THEOR. III. PROPOS. IX.

In Pentagono, & Decagono latus diametro eſt incommenſurabilis linea, tum longitudine, tum potentia.

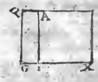
*PRobatur primo de Decagono. Nam aſſumpta fig. prop. 5. præcedentis quadratum dimidij radij EF eſt quarta pars quadrati totius EA. Sed linea AF poteſt efficere quadratum æquale duobus quadratis, & lineæ AE, & lineæ EF. Ergo poteſt quintuplo magis, quam dimidius radius EF. Quare lineæ EF & DF longitudine incommenſurabiles erunt ex propoſ.10. lib.10. quia poſſunt quadrata, quæ proportionem habent, vt numerus ad numerum; non autem, vt quadratus numerus ad numerum quadratum.

Si itaque à DF recta æqualis ipſi FA auferatur ſemiradius EF rationalis reſpecto totius diametri, eique commenſurabilis. Cum à linea integra maiori DF, poteſtque magis, quàm minor EF quadrato rectæ AF, quæ linea toti maiori eſt incommenſurabilis, quia quadratum AF eſt quater, & DF quinquies maior, quàm EF, & ideo cum quadrata ſe gerant, vt numerus ad numerum; ipſe latera erunt incommenſurabilia. Cum ergo maior DF plus poſſit, quam minor EF quadrato DE lateris ſibi maiori incommenſurabilis, ipſaque minor EF ſit expoſitę, Rationali nempe diametro commenſurabilis longitudine, & potentia, recta DE ablata EF minori erit Apotome; Et quia EF quadratum eſt ad quadratum ex FD, vt numerus ad numerum; ideo DE erit Apotome quinta ex 24. vel 21. propoſ. lib.10.



Probatur ſecundo de latere pentagoni AD. Nam poteſt efficere quadratum æquale quadrato lateris DE, & EA. Linea verò DE eſt irrationalis cùm oſtenſa ſit Apotome.

Cùm ergo DE ſit irrationalis, quadratum eius, vtpote ex irrationali factum, erit omninò irrationale ex 26. lib.10. Vnde ſi applicetur ad rationalem AE rectangulum illius quadrato ęquale ex 35. lib.1, Hoc efficiet latitudinem, ſeu alterum latus EO rationali ipſi EA incommenſurabile lõgitudine, cum rectangulũ ZA ſit ad rectangulum AX, velut baſis GE ad baſim XE ex pr. 1. lib.6. & ideo ex prop.5.lib.10. GE, erit incõmẽſurabile ipſi EX. Vnde additũ ipſi rationali EX efficiet totam lineam GX longitudinem incommenſurabilem ipſi Rationali AB, atque irrationalem ex prop. 10. lib.10.

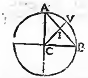


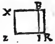
Erunt itaque incommenſurabiles GX, & AE idest GZ: Vnde ex propoſ.26. lib.10. rectangulum, quod continent XZ erit irrationale. Sed huic rectangulo eſt æquale quadratum EX DA: Quia rectangulum GA ex conſt: factum eſt æquale quadrato, ex DE conſtituto. Ergo linea AD potens hoc rectangulum eſt irrationalis ex prop.25. lib.10.

THEOR. IV. PROPOS. X.

Latus Octogoni eſt diametro incommenſurabile.

*PRobatur. Nam conſiderato ſchemate prop. 2. ſit radius CI perpendicularis ipſi lateri quadrati AB; eritque ſemiquadratum CIB. Vnde diagonalis huius quadrati CB erit duplo maior in potentiâ, quàm CI, & ideo vt ex prima propoſ. huius Expenſ. conſtat erunt longitudine incommenſurabiles CI, & CB, ablata itaque CI, à radio CV, vel CB reliqua erit Apotome, nempe irrationalis etiam potentiâ, & ideo eius quadratum irrationale. Applicetur itaque rationali potentiâ IB, vt in antecedenti fecimus rectangulum æquale quadrato rectæ IV, & ſit BR, & erit longitudo IR ex 2. lib.10. Irrationalis ipſi IB, vel ęquali IZ; ideoq; cùm duæ ZI, vel æqualis IB, & IR ſint irrationales tota erit irrationalis, & ex Cor. 2. propoſ.26. lib. 10. rectangulum XR erit quoque irrationale. Vnde latus octogoni VB potens efficere quadratum huic rectangulo XR æquale erit irrationale. Poteſt autem efficere quadratum rectangulo XR æquale. Quia poteſt efficere quadratum æquale quadratis duobus VI, & IB: quæ æqualia ſunt huic rectangulo XR ex effectione.





EXPEN-

EXPENSIO IV.

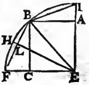
De circulo inſcriptis, quæ figuram non conſtituunt.

EGimus de lineis inſcriptis circulo, quæ figuram faciebant, modo de illis, abque reſpectu ad figuram vllam, ſed determinatæ quantitati graduum ſubtenſis: Eas vero in duas claſſes diuidemus, & hìc agemus de illis ſubtenſis, quę vt inueniātur radicis quadratę extractionem depoſcunt: deinde alias trademus, quibus tractandis radix quadrata adhibenda non eſt.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Sinus complementi, & ſinus recti quadrata æquantur quadrato radij. Sicut, & quadrato chordæ æqualia ſunt ſinus verſi, & ſinus recti quadrata.

PRobatur BAE rectus eſt angulus. Vnde ex 11. lib. 2. Quadrata ex BA ſinu, & AE, vel æquali BC ſinus complementi erunt ęqualia quadrato radij BE.



Probatur ſecunda pars. Nam angulus C rectus eſt. Ergo ſinus verſi CF quadratum, & recti ſinus CB erũt æqualia quadrato chordæ BF, & eſt eadem ratio de ſinu recto BA, & verſo AI, qui æquantur chordæ BI.

COROLLARIVM I.

HInc dato ſinu recto BA ſi ducatur in ſe, & ſubducatur à ſinu toto in ſe ducto, & à reſiduo dematur radix quadrata; Illa dabit ſinum complementi EC, quo ablato à ſinu toto remanebit ſinus verſus IA.

COROLLARIVM II.

SI verò hic ſinus verſus in ſe multiplicetur, & coniungatur cum quadrato ſinus recti V. g. quadratum fiat ex FC, & coniungatur cum quadrato ex CB, vel quadratum BA cum AI Radix quadrata ſubducta à toto dabit chordam BF, vel BI, cuius medietas eſt ſinus dimidiati arcus BI, vel BF, vt eſt ſinus BL arcus BH.

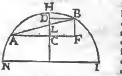
COROLLARIVM III.

QVod ſi duplices ſinus complementi, & ſinum rectum habebis chordas, quæ totum arcum ſubtendunt, nam ſi duplices EC ſinum complementi habebis Chordam duplicis arcus FB, ſicut ſi duplices ſinum rectum BA habebis Chordam duplicis arcus BI.

THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Chordæ cuiuſlibet quadratum eſt æquale quadrato duorum ſinuum ſimul poſitorum, quorum arcus ſimul illa ſubtendit, & quadrato differentiæ ſinuum verſorum.*

SIt Chorda AB ſubtendens arcum AHB, qui ſit diuiſus in quaſcumque duas portiones AH, cuius ſinus rectus AC verſus CH, & HB arcum, cuius ſinus DB rectus, & verſus DH. Dico, *quod ſi ſinus recti cōponantur ita vt efficiant* ACF, & deinde ſinus minor verſus DH à ſinu maiori CH ſubducatur, vt remaneat DC, vel ęqualis FB, dico inquam, quòd quadratũ Chordæ AB eſt ęquale duobus quadratis, quorum vnum eſt factum ex latere AF aggregato ſinuum rectorum, & alterum DC, vel BF differentia ſinuum verſorum.



Probatur facilè. Quia triangulum ABF eſt rectangulum. Ergo quadratum ex AB ex 11. lib. 2. eſt æquale quadratis ex AF, & FB.

Quòd autem triangulum ABF ſit rectangulum, patet, cùm anguli ad C, & D ſint recti, & latera CF, & DB ſint æqualia, ſicut, & DC, & FB ex effectione. Vnde etiam angulus F rectus erit.

COROLLARIVM.

MOdus vniuerſaliſſimus hinc enaſcitur, quo plurimi ſinus reperiantur. Nam ſi duo quæcumque latera, ſeu chordas ſuperius Expenſ. 3. inuentas dimidiaueris erunt ſinus recti, quibus ex præcedenti reperies ſinus complementi; qui ſubducti à ſinu toto relinquent ſinus verſos. Si ergo duos ex ſinibus ita repertos iunxeris, & quadratè multiplicaueris, & eorum ſinus verſos minorem à maiori ſubduxeris, differentiamque quadratè quoque multiplicaueris, multiplicatoſque numeros ſimul iunxeris, & ab aggregato radicem quadratam ſubduxeris; illa erit Chorda, quæ illos duos arcus inęquales ſubtendit, quę diuiſa per medium dabit ſinum medietatis ſummæ arcus, quam ſimul vniti efficiunt. V. g. ſit chorda decagoni Gr. 36. 6180340. poſito ſinu toto 10000000. Medietas erit ſinus Gr. 18. nimirum 3090170. Sic Sexagoni Grad. 60. eſt 10000000. medietas eſt 5000000. Gr. 30. Hinc ſinus complementi Gr. 18. nimirum Gr. 72. eſt Par 9510565. qui ſubductus à ſinu toto relinquit ſinum verſum 489435. Sic ſinus complementi Gr. 30. ſunt Gr. 60. quorum ſinus eſt 8660254. ſubductus à ſinu toto relinquit ſinum verſum 1339746. à quo ſubductus ſinus verſus alter primo inuentus dabit latus BF 850311. qui in ſe multiplicādus. Sic iuncti ſinus 5000000. & 3060170. dant 8060170. qui pariter multiplicādus in ſe, & deinde iungendi numeri ita multiplicati; à quorum ſumma extracta radix quadrata dabit chordam Gr. 18. & 30 ſimul nempe 48. quæ dimidiata erit ſinus Gr. 24. Par. 4067361.

Sic ſi iunctis ſinibus Gr. 24. & 30. & in ſe multiplicatis, multiplicata quoque differentia ſinuum verſo-

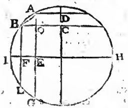
verſorum in ſe, deinde aggregentur numeri ita multiplicati, & ab aggregaro radix excipiatur, illa dabit chordam Gr. 54. & dimidiata ſinum Gr. 27.

Sic idem agas iunctis ſinibus 24. & 27. habebis ſinum Gr. 26 $\frac{1}{2}$. Et ſi iongas 27. & 30. Gr. ſinus habebis ſinum 28 $\frac{1}{2}$, & cær. At ſi iungas ſinum Gr. 30. cum ſinu Gr. 36. nimirum cum dimidiata chorda pentagoni habebis ſinum arc. 33. Si verò medietates, vt ſupra reperiantur continuè dabunt multò plures ſinus.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Quadratum chordæ differentiæ duorum arcuum eſt æquale quadratis differentiæ ſinuum verſorum, atque rectorum eorumdem ſinuum.

Reſſumatur fig. propoſ. 6. in qua AB; & BF ſint ſinus cuiuſcumque arcus ABIG, & BIL differentia eorundem ſinuum erit AO. Sic eorum ſinus verſi ſint FI minoris arcus, & IB maioris differentia erit FB, vel OB. Dico, *quòd quadrata harum differentiarum ſunt æqualia quadrato chordæ* AB.



Probatur. Quia triangulum AOB, eſt rectangulum, ergo ex 11 lib. 2 Euclid. vera erit propoſitio, & quadrata ex lateribus differentijſque OX, & OA æqualia erunt quadrato chordæ, & baſis AB.

COROLLARIVM

Hæc propoſitio deſeruit ad inueniendas eas chordas quarum arcus vniti ſuperant quadrantem. Nam tunc poterimus vti ſubtractione ſubducendo à ſinu tum verſo, tum recto arcus, ſinum arcus minoris, vt habeatur gemina differentia ſinuum OA, & OB, ex quibus differentijs tanquam ex lateribus in numerum quadratum redactis, & vnitis, ſubducendo radicem quadratam reperiemus chordam differentiæ dictorum arcuum, nempe illius arcus AB, quo differt IB ab IA.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Quadratum cuiuſlibet chordæ vna cum rectangulo gemino, quòd fit à ſinu complementi, & toto ſinu, tanquam ex lateribus, æquatur geminis quadratis factis à ſinu toto.

Sit Chorda BF. Dico, quod eius quadratum minus eſt quadratis radiorum BE, & FE rectangulo duplici comprehenſo ſub FE radio, & CE ſinu complementi.

Probatur ex propoſ. 13. lib. 2. Euclid. Quia chorda BF, vt in fig propoſ. 11. & duo ſinus toti EB, & FE faciunt triangulum oxigonium, ergo ea propoſitio hic verificabitur, quę eodem ſenſu vniuerſaliter ibi probatur.

COROLLARIVM.

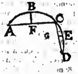
Hinc deducitur; quomodo reperta chorda, ſiue per additionem, ſiue per ſubductionē, vt ex 12. & 13. propoſit. huius reperiatur ſinus verſus, & complementum ſinus, nec non, & ſinus rectus illius arcus, cuius chorda componendo, vel ſubducendo duos ſinus inuenta ſit.

Pone itaque chordam inuentam eſſe FB, & cupis ſcire ſinum verſum FC. Quoniam quadratum FB, ſi vniatur cum rectangulo ex FE ſinu toto, & EC ſinu complementi bis accepto ęquatur quadratis laterum FE, & EB, qui ſunt ſinus toti. Multiplicetur chorda FB in ſe, ſicut, & ſinus toti in ſe ducantur gemina vice, & ab hoc numero aggregato ſinus totius geminâ vice in ſe ducti dematur numerus chordę in ſe ductus: nam reliquus erunt duo rectangula ex EF ſinu toto, & CE ſinu complementi. Diuidatur bifariam, & medietas erit vnum ex rectangulis, cuius latus FE notum eſt; quod eſt ſinus totus. Vnde diuiſa medietas remanens per ſinum totum dabit latus CE ſinus complementi quo habito, & ſubducto à ſinu toto, remanebit FEC ſinus verſus, cuius quadratum, vt ex 11. huius ſubductum à quadrato Chordę FB relinquet numerum, à quo ſubducta radix quadrata, dabit ſinum rectum CX.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Eſt maior proportio arcus maioris ad minorem, quam chordæ ſubtenſæ maiori ad chordam ſubtenſam minori.

Id non probabimus eâ euidentiâ, qua Regiomontanus, & nos ſupra oſtendimus prop. 3. Tract. 19. cum res per ſe clara ſit. Dicit itaq; quod arcus maior ABC comparatus ad minorem CED comprehēdit plures partes minoris, quam comprehendat chorda maioris AC partes minoris CD. Oſtenditur verò ſic. Nam certum eſt; quòd magis curuatur ABC arcus ſuper CA Chordam, quam CED arcus ſuper ſuam Chordam CD, patet ex ſagitta FX, & OB: ſed quo magis curuatur aliqua linea, eo plures partes continere neceſſe eſt, cùm longiùs ſpatium menſuret. Ergo arcus ABC, qui magis curuus eſt ſuper rectam AC, quam minor arcus, plures partes continebit illius arcus, quam quòd contineat AC Chorda maior reſpectu minoris Chordę CD.



COROLLARIVM.

Hinc eruitur, quod chorda vnius gradus ſenſibiliter non differat ab arcu ſuo ſicut, nec ſinus 30. minutorum; cum ſenſibiliter ſuper illam non dum arcus curuetur. Sic quod maior proportio arcus vnius Gradus ad arcum 45. minutorum, quam chordæ ad Chordam. Ideſt, quod

ſi arcus vnius Grad. comprehendit m. 45 & inſuper 15. minuta tertiam eorum partem; quod chorda vnius gradus non comprehendet totam Chordam 45 minutorum, & inſuper eius tertiam partem; ſed paulò minus. Sic quod ſit arcus Gradus 1 m. 30. comprehendit arcum vnius gradus vnica vice, & inſuper eius medietatem; quòd Chorda ipſius arcus Gr. vnius, & m.30. non cõprehendet chordam arcus Gr. vnius ſemel, & inſuper chordæ eius medietatem, ſed paulò minus, & idem dicas de ſinubus.

COROLLARIVM II.

Hinc eruas quoque; quomodo propè verum Sinum vnius gradus requiras, licet non certò, nec infallibiliter, ſed tamen adeo propè veritaté, vt nullus error ſenſibilis ſubrepi queat. Diuidatur ſinus 261769. repertus propoſ. 11. huius Coroll. Arcus Gr. vnius m. 30. in ſex partes, & ſexta pars erit 43628 $\frac{1}{6}$. Sic ſinus 130897. minutorum 45. in tres partes, eritque tertia pars 43632. Si ergo datemus ſinui vnius gradus quatuor vicibus ſextam partem hanc 43618 $\frac{1}{7}$ ſinui vnius Gr. m. 30. eſſet ipſe ſinus Gr. vnius part. 174512 $\frac{4}{6}$. Et ſinus ipſe Gr 1. m.30 eum comprehenderet ſemel, & inſuper dimidiam ipſius partem, aut vicibus quatuor ex ſex, quibus conſtat ipſa maior, vt arcus Gr. vnius m.30. comprehendit gradum vnum, nempe 4. vicibus ex ſex partibus, quibus ipſe grad. maior Gr.1. m.30. conſtat.

At ſi daremus quatuor partes, ex quibus tribus conſtat ſinus minutorum 45. & comprehenderet ſinum 45. vt Gr 1. arcum m. 45. eſſet 174528. Differentia autem eſt par. 16 $\frac{4}{6}$, vel 17. Quamobrem electis $\frac{1}{4}$, & quid minus, nimirum partibus 12. proximè addemus eas partibus 174512. vel reſiduum 4. ſubtrahemus partibus 174528. & efficiemus ſinum partium 174524., quæ ſinum minutorum 45. non continebit ſemel cum tertiâ parte: quia ſic deberet eſſe 174528. at eſt paulò minùs, & continebitur à ſinu Gr. vnius m.30. non ſemel cum medietate eius, ſic enim eſſet 174512. ſed paulò minus. Vnde proportio arcus maioris Gr. vnius ad arcum minorem m.45. erit maior, quia illum continet, ſemel cum tertia parte, quàm ſinus maioris ad minorem, qui eum non continet ſemel cum tertia parte; ſed paulò minùs, & maior arcus Gr.1. m.30 ad arcum vnius grad habebit maiorem proportionem, quàm ſinus maior ipſius ad ſinum minoris, quòd contineret arcum minorem ſemel, & medietatem eius; ſinus verò maior minorem ſinum contineat ſemel, & minùs medietate.

COROLLARIVM III.

Hinc verò ſinum arcus habebis minorem 15. minutis; medietas enim Chordæ vnius gradus dabit Sinum m.30 par. 87264. cuius reperies chordam ex Coroll.2. propoſ.11. cuius medietas erit minutorum 15.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Tabulam ſinuum ordinare, & omnino complere.

Doctrinæ, quam tradidimus ſufficiet ad tabulam ſinuum condendam, licet, vel facilitatis gratia, & maioris abundantiæ, etiam cæteras regulas trademus infrà.

Itaque ex lateribus inuentis figurarum regularium Quadrati, Pentagoni, Exagoni, & Quindecagoni, ita cæteri ſinus educentur. Nam illi erunt chordæ arcuum, quos ſubtendunt, & medietates ſinus, quorum dimidiabis arcus ex Coroll.2. propoſ.11. & harum ſemiſſium inueniantur ſinus. Deinde harum ſemiſſium reperiantur complementa ex Coroll. 1. eiuſdem. Inuentorum autem cõplemẽtorum accipiantur ſemiſſes, & earum ſinus reperiantur ex Coroll.2. prop. eiuſdem, & ſic ſucceſſiuè, vt in appoſitis tabellis videre potes.

Tabella arcuum ex latere Gr. 24. Quindecagoni naſcentium.

Arcus N.	Gr.	M.		Complementa N.	Gr.	M.	
1	12	0	2079117	1	78	0	9781476
2	6		1045285	2	84		9945219
3	3		523360	3	87		9986295
4	1	30	261769	4	88	30	9996573
5	0	45	130896	5	89	15	9999143
Comp.1. Semiſſes.				Comp. Semiſſium.			
6	39	0	6293204	6	51	9	7771460
7	19	30	3338069	7	60	30	9426415
8	9	45	1693495	8	70	15	9856013
Comp.2. Sem.							
9	42		6691306	9	48		7431448
10	21		3583679	10	69		9335804
11	10	30	1822355	11	79	30	9832549
12	5	15	871557	12	84	45	9961947
Comp.3. Sem.							
13	43	30	6883539	13	46	30	7258744
14	21	45	3705574	14	69	15	9288097
Comp.4. Sem.							
15	44	15	6977905	15	45	45	7163019
Comp.6. Sem.							
16	30	30	5075384	16	59	30	6661292
17	15	15	2630312	17	74	45	9647873
Comp.7. Sem.							
18	30	15	5037740	18	79	45	8638355
Comp.9. Sem.							
19	24.		4067366	19	66	9	9135455
Comp 10. Sem.							
20	34	30	5664062	20	55	30	8241262
21	17	15	2965416	21	72	15	9550199

Comp.

Comp.11. Sem.				Compl. Semiſſiom.			
N.	G.	M.		N.	G.	M.	
22	39	45	6364390	22	50	15	7688418
Comp.13. Sem.							
23	23	15	3947439	23	65	30	9187912
Comp.16. Sem.							
24	29	45	4972165	24	30	15	8681988
Comp 19. Sem.							
25	33		5446390	25	57	0	8386706
29	16	30	2842153	26	73	30	9588197
27	8	25	1434926	27	81	45	9896514
Comp.20. Sem.							
28	27	45	4656145	28	62	15	8849876
Comp.13. Sem.							
29	32	45	5409745	29	57	15	8410390
Comp.25. Sem.				Comp.			
30	28	30	4771588	30	61	30	8788121
31	14	15	2461533	31	75	45	9692309
Comp.26. Sem.							
32	36	45	5983246	32	53	15	8012538

Tabella Sinuum, qui naſcuntur à latere Sexagoni Gr. 60.

Arcus,& Semiſ.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	30		5000000	1	60		8660254
2	15		2588190	2	75		9659268
3	7	30	1305262	3	82	30	9914449
4	3	45	654031	4	86	15	9978589
Compleměti 1. Sem.				Compl.Semiſſium.			
5	37	30	6087614	5	52	30	7933533
6	18	45	3214395	6	71	15	9469301
Comp.3. Sem.							
7	41	15	6593458	7	48	45	7518398
Comp 5. Sem.							
8	26	15	4421887	8	63	45	8968727

Tabella Sinuum, qui naſcuntur ex latere Pentagoni Gr. 72.

Arcus, & Semiſ.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N	Gr.	M.	
1	36		5877852	1	54		8090170
2	18		3090170	2	72		9510565
3	9		1564345	3	81		9876833
4	4	30	784591	4	85	30	9969173
5	2	15	392598	5	87	45	9992290
Semiſ. 1. Comp.				Compl. Semiſſium.			
6	27	0	4539905	6	63	0	8910065
7	13	30	2334454	7	76	30	9723699
8	6	45	1175374	8	83	15	9930685
Semiſ. 3. Comp;							
9	40	30	6494480	9	49	30	7604060
10	20	15	3461171	10	69	45	9381913

Semiſ.4. Comp.				Compl. Semiſſium.			
N.	G.	M.		N.	G.	M.	
11	42	45	6788207	11	47	15	7343225
Semiſ 6. Comp.							
12	31	30	5224986	12	58	30	8526402
13	15	45	2714405	13	74	15	9624552
Semiſ 7. Comp.							
14	38	15	6190940	14	51	45	7853169
Semiſ.9. Comp.							
15	24	45	4186597	15	65	15	9081432
Semiſ.12. Comp.							
16	29	15	4886212	16	60	45	8724960

Tabella Sinuum, qui naſcuntur à latere quadrati Gr. 90.

Arcus,& Semiſ.				Complementa.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	45		7071068	1	45		7071068
2	22	30	3826834	2	67	30	9238795
3	11	15	1950903	3	78	45	9807853
4	33	45	5555702	4	56	15	8314696

COROLLARIVM I.

EX his itaque tabellis habebis iam inuentos ſinus arcuum 120. qui ſe ſuperant m. 45 & licet ordo ſit confuſus; poteris tamen in ſeriem collocare, & ſic 45. minutorum augmentum ordinatum dignoſcere.

Si autem, & arcuum, qui ſe ſuperant min. 15. tantummodo, ſinus percupias, id deinde efficies ex propoſ. 12. huius addendo ſinum arcus 39. grad. ſinui arcus Gr. vnius, & exquirendo chordam grad. 40. ex notâ ſinuum verſorum ipſorum differentiâ, vt ibi docemus, hic itaque arcus grad. 40. & eius Semiſſes, & complementa eodem modo, ac præcedentes tabellę compoſitę ſunt, dabunt multos, multoſque arcus, qui prædictos 15. minutis ſuperant.

Tabella Sinuum ex additione ſinus grad. 39. & Gr. 1. reſultans, nempe ex latere Nonagoni.

Arcus,& Semiſ.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	20		3420201	1	70		9396926
2	10		1736482	2	80		9848078
3	5		871557	3	85		9961947
4	2	30	436194	4	87	30	9990482
5	1	15	218142	5	88	45	9967620
Semiſ.1. Comp.				Semiſſium, Compl.			
6	35	0	5735764	6	55	0	8161520
7	17	30	3008058	7	71	30	9537169
8	8	45	1521234	8	81	15	9883515
Semiſ.2. Comp.							
9	40, & cęt.		6427876	9	50		7660445
Semiſ 3. Comp.							
10	42	30	6755902	10	57	30	7372773
11	21	15	& cæt.	11	68	45	& cæt.

Et ſic produces ipſam tabellam vſque dum poteris ;illa enim ferè omnes gradus è 15. in 15.minuta progredientes adimplebit,ſi iungantur, & in ordinem redigantur cum arcubus præced.tabellarum ipſius arcus cum ſinibus adiunctis.

Deinde ex arcu Gr. 52. m.30. ſubducemus arcum m. 30.& acquiremus arcum Gr.52.cuius chordam perquiremus ex 13. propoſ. huius, & habebimus ſinum grad. 26 cuius perquiremus complementa,& ſemiſſes, & complebit omninò numerum Grad.360. qui excreſcunt 15. minutis ſe ſurgendo: ſicque illius tabulæ ſtabit initium.

Tabella Sinuum enaſcentium ex ſubductione arcus m.30, ab arcu Gr.52.m.30.

Arcus N.	Semiſ. Gr.	M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	26	0	4383712	1	64	0	8987940
2	13	0	2249511	2	77	0	9743700
3	6	30	1132032	3	83	30	9935058
4	3	15	566928	4	86	45	9983917
Semiſ.2. Comp.				Compl. Semiſſium.			
5	32		5299192	5	58		8480481
6	16		2756573	6	74		9612617
7	8		1391731	7	82		9902681
8	4		657565	8	86		9975640
9	2		348995	9	88		9993908
10	1		& cæt.	10	89		& cæt.

COROLLARIVM II.

VErùm, ſi pigeat tanti laboris, ſatis aliquos vti differentijs ipſis inter ſinus Arcuum ſe ſuperantium m. 45. & earum partibus proportionalibus.

Itaque diſpoſitis ſinubus arcuum ſe 45.minutis ſuperantium hoc modo.

G.	M.	Sinus	Differentiæ Pr.
11	15	1950903	
12	0	2079117	128214
12	45	2206974	127857
13	30	2334454	127480
14	15	2461533	127179

Subduces ſinus minores à maioribus,vt habeas differentias ipſas primas, quas ſingulas in tria partes æquales diuides. Inde ſinui datorum graduum V. g. 12. addes, & habebis ſinum maiorem minutorum 15. nempe Gr.12 m. 15. ſaltem proximè, & ſi adhibueris in ſupputationibus ſinum maiorem ſaltem duabus zifris etiam admodum exquiſita hæc regula erit, vſque ad grad.45. Nam poſtea cæteri Sinus per inuentorum ſinuum arcuum ſe ſuperantium m. 15. complementa inuenien- di ſunt.

Sit ergo Sinus Gr 12.ſiilicet 2079117. differentia eſt à ſinu maiori Gr. 12. m.45. Par. 2206974. differentia inquam eſt Partium 127857 quæ trifariam diuiſa tertiā partem exhibebit 42619. Addeſq;deinde ſinui G.12.m.15qui eſt 2079117.& erit 2121736. qui erit quidem paulo minor, quam is, qui in ſinubus ponitur ; Sed abiectis duabus figuris,quæ abundant ad dextram erit exquiſitus ſinus 21217. Gr.12, m. 15. poſito ſinu toto 100000. at ſi maior ſupponatur ſinus, vt in tabulis : tunc ſinus inuenti ex ſinu aucto inſuper duabus zifris erunt maiores quàm hic ponuntur : vnde error etiam, qui in hac regula contingere poteſt abiectis 2. figuris corrigetur. Cum non poſſit vltra duas primas figuras ad dextram extendi.

Si verò cupias ſinum Gr. 12. m. 30. addes prædicto 2121736. eandem differentiam, & fiet ſinus 2164355 abiectiſque duabus figuris dextris erit ſinus exquiſitus Gr. 12. m. 30. poſito ſinu toto 100000. & ſic de cæteris vſque ad 45. Gradus : ex inde enim mediantibus regulis traditis, vel tradendis complementa exquiri debebunt ſinuum arcuum inuentorùm, & ſic omnes ſinus arcuum excreſcentium m. 15. acquiſiti erunt.

COROLLARIVM III.

HInc quoque cognoſces ; quomodo ſinus minutorum reperiantur. Namque ſi iam, vt præſupponitur reperti ſint præced. tabularum ſinus adhibendo ſinum totum auctum duabus zifris, cum vix differat grad. o. m. 1. vſque ad 45. Gr. ſinus adeo parua additione aucti à curuitate ipſius circuli ipſi arcui additâ; hinc fit,quod per regulam proportionum poſſint exquiri.

Primò itaque accipe differentiam inter ſinum V g. m. 30. & min. 45. quæ erit 43632. Diceſque ſi minuta 15.quibus diſcrepat arcus maior à minore dant differentiam 43632. quid m. 5.? & habebis partes 14544. quæ additæ ad ſinum m. 30. Partium 87265 efficient ſinum 101809 minutorum 35.

Iam verò reperto ſinu arcus m.35. Part. 101809. ſi differentiam, qua diſcrepat ab arcu minori in quinque partes diuiſeris, & ſingulas addideris ſinui m. 30. efficies ſucceſſiuè ſinus m 31. & 32. & 33. & cæt. & hoc exactius ſuccedet ; ſi, vt monui, aſſumptus fuerit ſinus totus auctus duabus zifris. Quinta igitur pars differentiæ 14544. eſt partium 2908 $\frac{4}{5}$, quam addes ſicut tabella oſtendit.

Ita verò ſequeris differentias inter ſinum arcus maioris Gradibus 15. ab arcu minori in quinque ſecando, & ſinui minori ſingulas quintas partes ſucceſſiuè addendo vſque ad arcum Gr. 45. Nam repertis ita omnibus iſtis ſinubus, quęrenda ſunt deindè modo ſupra tradito Coroll. 2. prop. 11. huius, eorum complementa, & ſic tota Tabula omnibus Sinibus appoſitis erit completa.

Sinus m. 30		87265
		2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 31		90173 $\frac{4}{5}$
		2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 32		93082 $\frac{3}{5}$
		2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 33		85991 $\frac{2}{5}$
		2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 34		98900 $\frac{1}{5}$
		2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 35		1018090

EX-

EXPENSIO V.

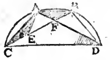
De Sinibus, Chordiſque inueniendis ſine extractione Radicis Quadratæ.

QVæ diximus ſupra ſatis ſunt ad tabulam ſinuum efficiendam. Verùm ad ampliorem eruditionem, & vt laborioſam, & minus notam inuentionem radicis quadratæ effugiamus ſuppoſitis cognitis lateribus figurarum regularium; ex inde ſequenti doctrina eam quoque tabulam condere poterimus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si in circulo quadrilaterum ſit deſcriptum, rectangulum ex diametris factum eſt æquale duobus rectangulis ſimul ſumptis qui ſub oppoſitis lateribus comprehenduntur.

SIt ABCD rectangulum deſcriptum in circulo, ſeu ſegmento. Dico *rectangulum deſcriptũ ex duabus diagonalibus* AD, *&* BC *eſſe æquale rectangulo* deſcripto à duobus lateribus oppoſitis AB, CD, & rectangulo à CA, & DB lateribus oppoſitis contento.



Quod vt probetur.

Progr. 1. Eligatur aliquis angulus à latere diagonali comprehenſus, vt BAF niger apud A, qui vel ſit æqualis, vel minor, quam alter ad eandem partem eodem diametro: & latere contiguo comprehenſus qualis angulus CAD ad A. Si eſt æqualis nihil fiat; ſi eſt minor, vt in exemplo eſt A in maiori abſcindatur æqualis angulus, & ſit ad A angulus niger trianguli CAE, quibus nigris, & æqualibus; ſi addatur albus communis EAF remanebunt æquales niger, albuſque EAB, & niger, albuſque CAF, diagonalis verò CB erit ſecta in duas partes in E; Quapropter ex 3. lib. 2. Euclid. rectangula duo ſub partibus, & altera diagonali AD comprehenſa erunt æqualia rectangulo ſub duabus CB, & AO concluſo.

Progr. 2. Triangula BAE, & CAO ſunt æquiangula, anguluſque niger apud A, & albus in maiori triangulo CAD eſt æqualis nigro, & albo BAB ex conſtructione.

Anguli verò B, & O nigri, eo quòd inexiſtant eidem circumferentiæ AC ſunt ęquales ex 24. lib. 3. Euclid. Quare, & reliqui ad E, &c. Ergo ex 4 lib. 6. Euclid erit eadem proportio CD baſis ad crus AD maioris, ac baſis BE ad crus AF minoris trianguli. Ergo ex 18. lib. 6. rectangulum ſub extremis CO, & AB erit æquale rectangulo ſub medijs BE, & AD.

Progr. 3. Idem dicendum eſt de triangulo nigro CAE, quod eſt æquiangulum triangulo AAD: Nam nigri CAE, & FAB apud A ſunt anguli æquales ex conſtr. albus verò apud O, & niger apud C; eò quod inexiſtant eidem circumferentiæ AB ſunt quoque æquales, quare, & reliqui. Ergo eodem argumento. Ita erit in proportione AD ad BD, vt AC ad CE: Ideoque rectangulum ſub extremis lineis clauſum, nempe AD, & CE erit æquale illi, quod à medijs BD, & AC clauditur.

Progr. 4. Notandum eſt itaque, quòd rectangulum ex 2. progr. eſt factum ex tota diametro AD & maiori portione alterius diametri EB, & æquatur rectangulo laterum AB, & CD oppoſitorum, & rectangulum ex 3. progr. eſt ex eodem diametro AD, & minori portione alterius diametri CE æquaturque rectangulo ex reliquis lateribus oppoſitis BD, & AC. Rectangula autem duo ex diametro tota, & portionibus alterius facta æquantur illi facto ex integris diametris AO, CB, vt prænotauimus ex 3. l. 2. Eu. progr. 1. Quare hoc rectangulum ex diametris erit æquale duobus rectangulis quorum quodlibet ex duobus lateribus oppoſitis quadrilateri circulo inſcripti componitur.

COROLLARIVM I.

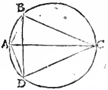
HInc eruitur quomodo datis duabus chordis, & chordis repertis complementorum vſq; ad ſemicirculum ex Coroll. . propoſ. 11. poſſimus venire in cognitionem chordæ, quæ inter duos arcus datarum chordarum intercipitur, vel quo ſimul ſuperant ſemicirculum, vel quo arcus datus ſuperat alium; ſine extractione Radicis quadratæ. Nam datis Chordis CA, & BD multiplicabuntur ſimul, vt fiat rectangulum ſub ipſis comprehenſum: Deinde repertis chordis complementorum vſque ad ſemicirculum AD, & CB arcuum ASD, & CAB inuicem pariter multiplicabuntur, & erit rectangulum æquale rectangulo ex CA, & BD, & rectangulo ex AB, & CD. Subducito itaque rectangulum notum ex lateribus CA, & BO, remanebitque rectangulũ ex DC, & AB, quo diuiſo per totum diametrum dabitur chorda arcus AB, quæ diuiſa per medium dabit ſinum dimidij arcus AB, quò dati arcus FO, & AC deficiunt à ſemicirculo. Hunc autem ſinum obtinebis quoque ſi opereris dimidio diametro, & dimidijs omnibus chordis acceptis. Nam ita eſt totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Quod ſi ponas vnum arcum eſſe CAB, alterum ASD, chorda AB reperta erit arcus illius, quo dati arcus ſimul ſumpti ſuperant ſemicirculum: At ſi arcus dati ſint CA, & CAB reperta chorda eſſet illius arcus quo vnus ſuperat alium, vt patet.

COROLLARIVM II.

HInc quoque chorda ſummæ duorum arcuum reperitur. Pone itaque te habere notas Chordas AB, & AO; earum complementa ad ſemicirculum reperiantur BC, & DC: Deinde lineę diagonales ducantur, quarum vna ſit diameter AC, altera BD in quadrilatero ABDC: Multiplicetur itaque AB latus per oppoſitum DC; item AD per oppoſitum BC habebimuſque duo rectangula æqualia rectangulo facto ex diagonalibus AC, & BO, ſi ergo aggregatum duorum rectangulorum ex lateribus AB, & CD necnon,

&

& AD, & BC diuidatur per totum diametrum prodibit Chorda BO, quæ diuiſa bifariam dabit ſinum



dimidij arcus BAD. Poteris quoque vti dimidiatis lateribus, & dimidio diametro, & prodibit idem ſinus dimidij arcus BAD.

COROLLARIVM III.

POteris quoque datâ chordâ ſimplicis arcus, & chordâ dupli arcus reperire chordam tripli. Sit ergo chorda arcus AC ſimplicis, & arcus ACD duplicis. Inuenietur chorda tripli BACD, ſi chorda ſimplicis arcus multiplicetur in ſe nimirum chorda CD, & æqualis AB laterum oppoſitorum quadrilateri BACD, deinde multiplicetur in ſe



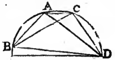
chorda dupli arcus, nempe diagonalium AD, & BC, & ab hoc rectangulo per multiplicationem facto deducatur rectangulum primo factum per multiplicationem laterum BA, & CD, & reſiduum æquabitur rectangulo ex lateribus oppoſitis AC, & BD. Vnde ſi hoc rectangulum diuidatur per latus notum AC; relinquetur latus BD tripli arcus chorda, & ſi vtaris dimidiatis chordis eueniet ſinus dimidij arcus BACD.

COROLLARIVM IV.

SI autem noueris chordam tripli arcus BACD, ſimplicis BA, & cupias chordam duplicis. Oportet multiplicare AB ſimplicis arcus chordam in ſe, & habebis rectangulum ſub lateribus æqualibus oppoſitis comprehenſum, deinde ſimplicis arcus chordam cognitam per arcus tripli chordam multiplicabis, & habebis rectangulum ex BD, & AC, quæ vnita æquabunt quadratum ex diagonalibus AD, & BC. Vnde educta radix quadrata dabit chordam AD, quod licet ad hunc locum minus ſpectet, cum noſtrum inſtitutum ſit docere, quomodo ſine extractione radicis quadratæ datis lateribus figurarum circulo inſcriptarum poſſint omnes ſinus reperiri; noluimus tamen omittere.

COROLLARIVM V.

POteris quoque reperire ex chordis notis dupli arcus tripli, & ſimplicis chordam quintupli arcus. Chorda ſimplicis arcus ſit AC, dupli arcus CD. Si multiplices CD, & BA æquales inuicem habebis rectangulum, quadrilateri BACD ſub oppoſitis lateribus contentum; multiplicabis quoque diagonales BC, & AD in ſe, & obtinebis rectangulum, à quo demes rectangulum ex oppoſitis late-

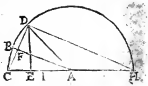


ribus conſtitutum BA, & CD, reſiduumque diuides per latus AC, iam cognitum, & prodibit chorda BD arcus quintuplicis BACD.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

Quadratum ſinus recti eſt æquale rectangulo ex ſinu verſo duplicis arcus, & medietate radij confecto.

*PRobatur. Nam triangulum CDH ad circumferentiam, eſt rectangulum, vt etiam tale eſt CDE, angulusque C communis, ergo ita erit CH diameter, & baſis ad chordam, & latus minus CD trianguli maioris, vt idem latus, chordaque, & inſuper baſis in triangulo minori ad CE latus minus: Et ideo ex propoſ. 19. lib. 6. quadratum ex chorda CD, tanquam ex medio æquale



erit rectangulo ex extremis confecto CE, & CH. Ergo, & quarta pars quadrati ex CD, cuius latus eſt medietas, FD, eſt æqualis quartæ parti rectanguli, quæ comprehenditur à CI ſemiradio, & CE ſinu verſo duplicis arcus, quod eſt intentum: hæc verò quarta pars poſſet conſtitui; ſi placeret ex ſemiſinu verſo, & toto radio CA, vt conſideranti patet.

COROLLARIVM.

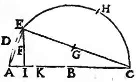
HInc eſt, quod ſi multiplices ſinum rectum CF in ſe, & deinde diuidas per ſemiradium CI quod habeas ſinum verſum duplicis arcus CB, qui ſubductus à ſinu toto dat ſinum complementi BA. Sic quoque, quod ſi multiplices ſinum verſum CE per ſemiradium CI, & ex numero multiplicato radicem quadratam eruas, quod ſinum rectum CF obtineas.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Vt dimidium ſinus totius ſe habet ad ſinum dimidij alicuius arcus, ita ſinus complementi eiuſdem dimidij ad ſinum totius arcus.

SIt dimidium AX, Sinus totus AB; dupletur ipſe ſinus totus, & ſit ABC diameter, & hac diametro fiat ſemicirculus. Sitque in eo ſinus EF dimidij arcus AD totius arcus ADE: Sinus verò totius arcus eiuſdem ADE ſit IE complementum arcus dimidij ED ſit EH, & ducta EC ſinus illius cõplementi EH ſit EG. Dico, *quod ità eſt dimidium* AX *ſinus totius ad ſinum* EF *dimidij arcus, vt refertur ſinus* EG *complementi eiuſdem dimidij in proportione ad ſinum totius* IE.

Quod vt probetur conſidera AEC angulum; quod ſit in circumferentiâ, & AIE ex Hypotheſi eſſe rectangula, angulumque communem eſſe apud C. Vnde, & erunt æquiangula, vt conſtat ex propoſ.8. lib.6. & ideo ex 4. Eucl. lib.6. latera circa æquales angulos erũt proportionalia. Ideoque erit, vt baſis AC trianguli maioris ad crus minus AE, ità baſis EC ad crus minus IE minoris trianguli EIC. Quamobrem dimidium quoq; AB totius diametri, & baſis ſe habebit ad idem ſuum crus minus AE, vt dimidium EG baſis EC minoris IEC trianguli ſe habet ad EI crus minus in ipſo. Radius AB, & GE, itaque iam ſumantur non vt dimidia, ſed cum ſint in eadem proportione, ac ſua tota veluti tota accipiantur, & erit AB ad AE, vt EG ad EI. Vnde eodem argumento; denuò concludemus intentum. Nam dimidium ſinus dimidij & quarta pars AX baſis AC erit ad dimidium ſui cruris AE. nempe ad ſinum EF dimidij arcus ADE, vt ſinus EG complementi ad ſinum IE duplicis arcus.



COROLLARIVM I.

QVòd ſi obtineas cognitionem ſinus recti AF dimidij arcus AE, & ſinus complementi eiuſdem EG potes acquirere cognitionem ſinus duplicis arcus EI per regulam auream. Nam ſi multiplices ſinum complementi EG per ſinum rectum AF, & diuidas per medietatem ſinus totius AX habebis ſinum EI rectum duplicis arcus ADE.

COROLLARIVM II.

SIc ſi obtines cognitionem Sinus duplicis arcus, & ſinus complementi ſimplicis eiuſdem poſſes deuenire per regulam auream in cognitionem ſinus ſimplicis arcus. Nam ſi multiplices dimidium ſinus totius AX, cum ſinu duplicis arcus IE, & aggregatum diuidas per ſinum complementi dimidij arcus EG habebis ſinum ſimplicis arcus FE. Nam EG, qui eſt ſinus complementi dimidij arcus EH eſt ad EI ſinum duplicis arcus, vt dimidium ſinus totius AX eſt ad ſinum ſimplicis arcus AF, quare rectangulum factum ex medijs AF ſinu ſimplicis arcus. & OE complementi eiuſdem æquale eſt rectangulo facto ex extremis AX dimidio ſinus totius, & IE ſinu duplicis arcus.

Si verò è contra diuidas rectangulum ex IE, & AX per ſinum ſimplicis arcus FE habebis ſinum complementi ſimplicis arcus EG, ſicque dato ſinu duplicis arcus, & dimidio ſinus totius, & ſinu ſimplicis arcus deuenies in cognitionem ſinus complementi eiuſdem arcus ſimplicis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

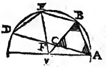
Arcus tertiæ partis Chordâ datâ chordam totius arcus inueſtigare.

SIt data chorda AB, & opporteat inuenire chordam AD, quę arcum totum ſubtendat.

Fiat, vt VA ſinus totus ad AB chordam datam; ita AB ad BC. Deinde rurſus adhibitâ regula proportionum, fiat, vt radius BV ad reſiduum VC inuentę BC, ſic Chorda data AB, vel æqualis BE ad aliud, & inuenietur CF; Quia ergo AC, & FD ſunt æquales ipſis AB, & BE: ſi addatur ipſis nuper inuenta CF efficietur AD, quæ quærebatur.

Quòd, vt oſtendatur, ductâ BV ponatur AC æqualis ipſi AB, & protrahatur in D. Dico in *primis* BED *arcum eſſe duplum arcus* AB, & ideo ABED arcum, quem ſubtendit AD eſſe triplum arcus AB.

Prob. Nam angulus niger B eſt æqualis nigro C ob æqualia crura AB, & AC ex effectione: Quare & angulus A ſemialbus erit æqualis nigro B ob æqualia crura AV, VB, nempe radios, & ideo quoque nigro C, & ſic B, & C anguli nigri trianguli ABC erunt æquales angulis B, & A trianguli BAV: Quare, & reliquus angulus niger A in triangulo ABC erit æqualis albo V in triangulo BAV ex propoſ.17. lib.1. elem. Sed A niger eſt ad circumferentiam. ergo vt æqualis duplo maiorem circumferentiam ſubtendet BED, cum ſi ſubtenderet æqualem ſubduplus eſſet; ideo addito AB totus arcus ABED erit triplus arcus ſolius AB.



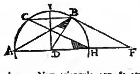
Prob. 2. Quòd radius ſit ad datam AB, vt AB ad BC: cum enim triangula ſint æquiangula habebunt latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo erit, vt AV ad BA baſim, ita eadem cruſque AB ad BC. Et hinc ex 4. lib.6. erit BV ad reſiduum VC inuentę BC, ſubductę à ſinu toto, vt BE ad CF, quæ cum AC, & DF complet ſubtenſam AD.

THEOR.

THEOR. VI. PROP. XXI.

Radius eſt ad chordam, quadrantem ſuperantem, vt ipſa chorda ad diametrum addita Chorda dupli exceſſus.

SIt data AB, quæ ſuperet quadrantem, & dupli B exceſſus ſit CB. Dico, *quod radius* AD *eſt ad* AB, *vt* AB *chorda ad* AF *diametrum cum* HF *æquali* CB dupli exceſſus IB, quo arcus ACB ſuperat quadrantem AI.



Probatur. Nam triangula ABD, & ABF ſunt æquiangula, & angulus A eſt æqualis angulo F ob parallelismum linearum æqualium ipſi AB, quæ ſunt CH, & BF; ſiquidem ob id; tam angulus A, quam F æquantur tertio angulo H nigro, angulus verò A communis vtriſque æquatur angulo B nigro ob equales radios: Ergo, & reliqui ex Cor. 2. propoſ. 17. lib. 1.: Quare habebunt hæc triangula latera circa æquales angulos proportionalia, eritq; AD crus ad AB baſim, vt ipſa AB crus in triangulo ABF ad AF baſim.

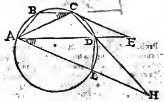
COROLLARIVM.

HInc ſi datâ chordâ AB excedente quadrãtem facias regula aurea, vt ſemidiameter AD ad AB, ita AB ad aliud inuenies AF, à quo inuento ſubduces diametrum, & reſtabit HF ideſt æqualis CB dupli exceſſus, quo ſuperat data chorda quadrantem.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Tres ſubtenſæ prima arcui ſimplici ſecunda duplici, tertia triplici æqualibus ſunt tres continuè proportionales: ſi prima tertiæ addatur, vt ſit vltima proportionalis.

ADdatur AB prima tertiæ AD. Dico AB, AC, & AE *eſſe tres continuè proportionales*.



Extenſâ AD fiat equalis linea CE ipſi AC. Et oſtẽdẽdum *primo* eſſe BA ad CA, vt CA ad AB. Angulus DAB albus eſt biſariam ſectus linea AC, & partes DAC, & CAB equales ſunt: ſed angulus E ipſi CAD ob æqualia crura ex effectione, ſicut C niger albo CAB æquantur. Ergo triangula, ECA, CBA æquiangula ſunt; quare erit, vt crus BA ad baſim AC, ita AC ad AB ex 4. lib. 6. elem.

Deinde oſtendendum eſt ED equari ipſi AB Triãgulum EDC eſt æquiangulum triangulo CBA. Angulus enim B oſtenſus eſt æqualis angulo nigro C: Angulus ABC ſubtendit totam periferiam exceptis duabus partibus BC. & BA; quibus ineſt; ſed angulus CDA ſubtendit duas ipſas partes CB, & BA. Ergo reſiduus angulus exterior EDC totam reliquam peripheriam occuparet, cũ duo anguli apud D duobus rectis æquentur, & ideo ad centrum poſiti inſiſterent ſemicirculo. Vnde ad peripheriam totam peripheriam vſurparent. Quare EDC angulus æquabitur angulo B: cum ergo ſint æquiangula triangula ob duos angulos equales ex Cor. 2. pr. 17. lib. 1. ita erit BA ad CB, vt DC ad DE: ſed BA, & CB ſunt æquales. Ergo etiam DC, & ED lineæ; linea verò DC æquatur ipſi CB ex hypotheſi.

Sit deinde HD æqualis ipſi DA. Dico rurſus CA eſſe ad EA, vt AD ad AH in proportione. Sunt enim BCA, & HDA triangula equiangula ob angulos ipſorum apud A æquales ex Theſi, & conſequenter H, & E; cum triangula ſint æquicrura: vnde, & reliqui æquales ex Coroll 2. propoſ. 17. lib. 1. Quare erit vt CA crus ad EA baſim, ita DA crus ad AH baſim.

Deinde aſſero HL æquari ipſi CA. Nam HLD triangulum eſt æquiangulum triangulo DCA. Nam angulus H æquatur nigro A, & angulus DCA obtuſus ſubtendit totam circumferentiam exceptis tribus partibus, ideſt arcum DCBA: Sed angulus DEA ſubtendit eaſdem tres partes; & eſt internus, ergo reliquus HLD externus equatur ipſi DCA: & totam reliquam circumferentiam in circumferentia poſitus ſubtenderet. Quamobrem DC erit ad CA, vt DL ad LH: quare permutando DC erit ad DL; vt CA ad LH; ſed CD, & LD ſunt æquales. Ergo LH, & CA erunt æquales.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo triplices, & quadruplices, aut quintuplices, & cæt. arcum propoſitum Cuiuſcumque arcus ſubtenſam inuenias. Nam datâ ſubtenſâ arcus ſimplicis BA, & arcus duplicis CA ſi adhibitâ regulâ aureâ multiplices ſubtenſã arcus duplicis in ſe, & diuidas per ſubtenſam arcus ſimplicis habebis AE, cui ſubducta ipſa BA, ideſt DE tertiam ſubtenſam DA arcus triplicis exhibebit. Quoniam oſtendimus BA eſſe ad CA, vt CA ad AB. Deinde ſi rurſus aſſumas DA, & ei addas DE, vel BA, vt fiat BA. & regula proportionum dicas ſi CA dat EA, quid dabit AE? inuenies HA, quæ ſubductâ ipſâ CA, dabit ſubtenſam AL arcus quadruplicis LCA, & ſic de alijs.

COROLLARIVM II.

ELicies. Quomodo ex cognitione chordarum, quæ latera figurarum, de quibus diximus Expenſione prima, & chordarum arcuum, qui earum arcus complent vſque ad ſemicirculum, quæ acquiri poſſunt ex propoſ. 18 poſſimus deuenire in cognitionem ceterorum omnium ſinuum Nam dimidientur chordę, & erunt ſinus dimidij arcus. Sic earum complementa vſque ad ſemicirculũ & erunt ſinus complementorum vſque ad quadrantem

tem. Deinde per propoſitiones poſitas omnes alios arcuum ſinus ſe inuicem ſuperantium 45 minotis poſſumus reperire, & deinde ex dictis Coroll 2. prop. 15. reperto ſinu, arcus vnius. Similiter omnes alios arcus, qui 15. minut. alter ſuper alterum augentur inuenire, ex Coroll. 1. & 2. prop. 16. & tandem ex regula aurea omnes alios, qui vnico minuto continuô excreſcent augmento.

V. g. data chorda decagoni 24. dimidiata erit ſinus Gr. 12. Sicut, & complementi chorda 156. Gr. dimidiata erit Gr. 78. complementi arcus 12. Primo itaque ex Corollar. propoſit. 18. habebis ſinum verſum duplicis arcus Gr. 24. quo ſubducto à Radio erit reſiduum eius complementum Gr. 66 & conſequenter chorda duplicis arcus Gr. 132. Quibus obtentis potes etiam obtinere cognitionem ſinus recti ex prop. 17. Coroll. 1. arcus eius duplicis 43. & eius complementi gr. 42. ex Cor. pr. 18. Deinde cum iam habeas ſinum Gr. 42. potes reperire eius duplum ſinum gr. 84. & eius complementi gr. 6. Ex hinc gr 3. deinde gr. 1. m. 30. & tandem gr. 0. m. 45. Quo habito poteris reperire per ordinem omnes ſinus, qui differunt m. 45. ex Coroll. propoſ. 22. vſquequo compleas 120. arcus inter quos reperies ſinus conuenientes, vt ſupra docuimus. Vel vtendo alijs propoſitionibus poſitis data chorda arcus 12. & arcus 30. ex propoſ. 17. Coroll. 2. inuenies chordam ſummæ datorum arcuum G. 42. cuius ſinum cōplementi ex prop. 18. vel 19. reperies ſinum arcus G. 46. & dimidij huius arcus ex propoſ 19 duplicabiſq; & erit chorda totius arcus 46. Iſtis itaque duabus chordis gr. 12. & G. 46. ex propoſ. 16 Coroll. 2. inuenies chordam ſummæ arcuum illarum chordarum, nempe arcus 58. cuius medietas ſinus erit arcus 29. & ita proſequeris diuerſimodè ſinus, complementisque, & chordas combinando: Nam eodem modo omnes ſinus reperies, qui ſe superant m. 45.

EXPENSIO VI.

De reperiendis ſinubus aliquibus per ſolam ſubductionem, & additionem.

QVia facilitas in omnibus, & temporis compendium placet in multis ſinubus inuiendis ſingulari breuitate, & facilitate hàc regula poſſumus vti; quam præmiſſa vnica propoſitione tradem⁹.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Differentia ſinuum rectorum peripheriarum duarum à circuli ſexta parte æquali interuallo remotarum æquantur ſinus recto peripheriæ alterius internalli à circuli ſexta parte.

SInt in quadrante ABC peripheriæ duæ XF, & ED æquali interuallo ab E circuli ſextantæ remotæ, quarum ſinus DI, vel FI; ſinus verò arcuum, qui ab E circuli ſextante æquali interuallo ſeiunguntur ſint FH ſinus arcus FC, & GD ſinus arcus DC, quorum differentia ſit XD. Dico XD differentiam *eſſe æqualem ſinui recto* FI, *vel* ID *interualli, ſeu* DE, *ſeu* EF. Ducatur itaque AX, & ab L, vbi ſecat AB ducatur LF.

Probatur. Triangulum DFL eſt æquiangulum. Habemus enim duo triangula rectangula prorſus æqualia nigrum, & album. Nam latera quidem IF, & ID æqualia ſunt, latus verò IL commune.



Proptereaex pr. 22. primi, & baſes erunt æquales. Vnde, & anguli ad L albus, & niger æquales: Sed angulus niger ad L eſt partium 30. æquatur enim angulo LAB apud A ex pr 30. l. 1. ob parallelismum linearum AB, & GD. Ergo alter niger ad D erit G. 60 ad hoc, vt cum angulo recto ad I æquetur duobus rectis ex prop. 17. l. 1. Sic philoſofare de albo ad F ob angulum album ad L, æqualē anguload L nigro, qui eſt Gr. 30. qui, & compoſiti facient totum DLF Gr. 60. Ergo æquilaterum erit triangulum, & æquiangulum, & perpendiculares XF, & LB diuident, vt angulos bifariam, ſic, & latera bifariam Ergo erit XD differentia ſinuum rectorum, & IF ſinus rectus interualli, quo diſtat arcus FC ab arcu gr. 60. CB erunt æquales.

COROLLARIVM I.

SI itaque notum habeas ſinum rectum arcus V. g. 36. & ſinum rectum interualli vſque ad 60. arcus Gr. 24. & addas ſimul iſtos duos ſinus efficies ſinum arcus 84. Sinus enim ille V. g. EF gr. 24 æquatur differentiæ XD arcus 84. nimirum arcus, qui compoſitus eſt ex arcus 60. & interuallo 24. qui erat inter 60. & 36. vnde additos FI ſinus G. 24. ſinui arcus FH Gr. 36. facient ſinum GD arcus 84.

COROLLARIVM II.

SIc ſi notos habeas duos ſinus arcuum, qui æqualiter diſtent ab arcu gr. 60. vt ſunt duo ſinus HF arcus 36. gr. & GD arcus gr. 84 & ſubducas vnum ab alio, habebis ſinum arcus interualli; quo alteruter eorum diſtat à gr. 60. nempe DI ſinum arcus ED, vel FE.

COROLLARIVM III.

SIc ſi demas notum ſinum ID interualli ED, à maioris arcus ſinu GD pariter cognito habebis ſinum HF minoris arcus,

Et hoc de ſinibus dictum ſit quatenus ipſi inueniri poſſunt, cùm de cęterò de eis iterum reaſſumendus ſit tractatus, quatenus mediantibus ipſis arcus inueniri queunt.

EXPENSIO VII.

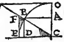
De tangentibus, & ſecantibus.

SEcantium atque tangentium ex præcedentibus inuentis quantitates deducuntur; ex proportionibus enim, quas ad ſinus habent, earum mutuas proportiones breuiter explicabimus.

THEOR. I. PROP. XXIV.

Quam proportionem habet Sinus complementi ad ſinum rectum, eam habet Sinus totus ad tangentem arcus.

PAtet. Nam ſinus complementi AB arcus BO complentis vſque ad quadrantem arcum AA eſt æqualis CD ob parallelogrammum rectanguiũ ABCD: Sed CBD, & CFE ſunt triangula æquiangula, vt patet, & BD, & EF paralleiæ. Ergo ex prop.



4. lib.6. Eucl. Ita erit CO ſinui AB complementi æqualis ad BD ſinum rectum, vt CB radius ad EF tangentem; quod eſt propoſitum.

Quod ſi conſtituas OB pro arcu, & AB pro ſinu recto BO erit ſinus complementi. Quare eadem ratione ſinus rectus AB, vel æqualis CD erit ad ſinum complementi BD, vt CB ad EF; quare in hoc caſu, quam proportionem habet ſinus rectus ad ſinum complementi eam habet ſinus totus ad tangentem ipſius complementi.

COROLLARIVM.

HInc potes dato ſinu recto, & ſinu complementi, & radio inuenire tangentem, ſeu ſinus recti, ſeu complementi. Nam ſi multiplices ſinum totum per ſinum complementi, & diuidas per ſinum rectum, habebis tangentem complementi. Quod ſi multiplices ſinum totum per ſinum rectum, & diuidas per ſinum complementi, tangentem habebis arcus, cui rectus ſinus ſubtenditur.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Radius medio loco proportionalis eſt inter tangentem arcus, & tangentem complementi.

PRobatur. Nam triangula CEF, & COV ſunt æquiangula. Ergo ex propoſ.4. lib.6. ita erit OV crus maius, & tangens ad OC radium, vt radius CE, & crus maius in minori triangulo ad EF crus, & tangentem.

Quod autem triangula VOC, & CFE ſint æquiangula non eſt dubitandum. Nam ſunt rectangula ad O, & E ob tangentes perpendiculares; vnde reliqui anguli nigri ſimul ſumpti C, & F erunt æquales vni recto, quare angulus niger F erit complementum anguli C. Ergo æqualis angulo ad C albo, & eiuſdem complementum, & ob eandem rationem angulus albus V erit æqualis nigro C.

COROLLARIVM.

HInc emergit Rectangulum tangentium eſſe æquale quadrato ſinus ex propoſ.17. lib.6. Eucl. & ideo in ſe ducto ſinu toto; ſi diuidas per notam tangentem arcus habebis tangentem complementi, & ſi diuidas per tangentem complementi, reſultabit tangens arcus.

Vnde faciliter tabulæ tangentiũ extrui poſſunt. Nam ex 24. propoſ. inuentis tantùm tangentibus dimidij quadrantis, cæteras inuenire poteris ex hac propoſitione, & quidem per ſolam diuiſionem quadrati ſinus totius.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Sinus totus medio loco proportionalis eſt inter ſinum complementi eiuſdem arcus, & ſecantem eiuſdem arcus.

PRobatur ex præmiſſis. Nam CBD, & CEF ſunt triangula æquiangula: Ergo ita erit ad baſim, & ſinum totum CB ſinus complementi CO, vel AB, vt idem ſinus totus, cruſque CE, eſt ad ſecantem CF.

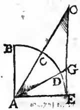
COROLLARIVM.

HInc verò deduces multiplicatum ſinum totum in ſe, & diuiſum per ſinum complementi exhibiturum ſecantes arcuum, quos complent. Ita CE ſinus totus multiplicatus in ſe, & diuiſus per AE ſinum complementi BO exhibebit ſecantem CF arcus EB.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Secans arcus minoris ſemiquadrante addita tangenti facit tangentem arcus, qui prædictum continet, & ſemiſſem ſui complementi.

SIt arcus ED, cuius ſecans AG, tangens GE, complementum ſit arcus DB, & medietas eius DC. Quare arcus continens arcum primo propoſitum ED, & ſemiſſe illius complementi DC erit arcus EC. Dico eius tangentem fieri EO ſi AO ſecans arcus DE addatur tangenti GE.



Probatur. Sunt enim æquales AG, & GO. Ratio eſt; quia anguli nigri ad A, & O ſunt æquales; Vnde, & latera eis ſubtenſa erunt æqualia: Sunt autem æquales; quoniam æquantur vni tertio angulo EAC, quòd eſt anguli CAB, ſeminigerrimi complementum, ſicut angulus niger O eſt complementum eiuſdẽ CAB in rectangulo AEO triangulo.

triangulo. Cùmque BAC, & O niger, eiuſdem CAB ſint complementa erunt æqualia; ſed BAC æquatur ipſi DAC nigro ex conſtructione; ergo niger O, & niger A erunt æquales: quare, & latera AG, & GG ſubtenſa æqualia erunt.

COROLLARIVM.

Hinc habes. Quod cognitis ſecantibus, & tangentibus omnium Gr. vſque ad 45. poſſis per ſolam additionem omnes alias tangentes maiores, quam 45. graduum reperire, addendo ſcilicet ſecãtes tãgentibus V.g ſi habeas tãgentẽ, & ſecantem arcus Gr. 24. & eas addas ſimul efficies tangentem arcus 57. Gr. qui continebit ſemel 24. & inſuper medietatem complementi eius, quod amplectitur gr. 66.

THEOR. . PROPOS. XXVIII.

Secans arcus æqualis eſt tangenti arcus eiuſdem, & tangenti eius complementi.

Sit arcus ED, cuius tangens EG; medietas verò eius complementi DB, ſit DC, vel arcus æqualis FE, cuius tangens EH. Dico, *quòd tota* GH *ex tangentibus arcus, & ſemiſſis complementi æqualis eſt ſecanti* AG.

Probatur. Nam anguli ad H niger, & A niger, & albus in triangulo HGA inuicem ſunt æquales. Ergo, & latera ſubtenſa ex 15 propoſ. lib. 1. Elem. erunt æqualia. Quod verò anguli ſint æquales H niger, & totus A ſemialbus oſtenditur. Nam pars alba ad A ex Hypotheſi eſt æqualis angulo BAC.



Ergo reliquus ad H niger in rectangulo AEH erit æqualis angulo CAE, vt ex propoſ. 17. lib. 1. Eucl. Cor. 2. Talis verò eſt totus angulus HAG, nimirum æqualis angulo CAE, cùm habeat partem nigram communem, & albam ex Theſi angulo BAC, & æquali CAD æqualem; vnde H, & A anguli, & ideo crura in triangulo HGA erunt æqualia.

COROLLARIVM.

Hinc euenit; Quod ſi ſimul componantur tangens arcus V. g. 24. & tangens ſemiſſis complementi eiuſdem, nempe arcus 33. efficiatur ſecans arcus 57. Vnde multæ ex ſecantibus, atque tangentibus ſola additione enaſci poſſunt; Et hęc de ſecantibus, & tangentibus; quatenùs ipſę inueniri poſſunt, quatenùs verò per eas arcus inueniuntur, & quatenus inuicem referuntur infra tractabimus.

TRACTATVS XXI.

De Logarithmis.

MIro, & perutili inuento iungere Geometricis proportionalibus Arithmeticos cogitauit primus Ioannes Neperus Schotus, vt facilior calculus aſtronomicus per ſolam ſubtractionem, & additionem prodiret, quod inuentum licet ab Henrico Briggio aliter, deinde ordinatum ſit; quia tamen eadem proportionum baſi nititur, ideo hic cum (vt moris noſtri eſt) fundamenta rerum tradere cupiamus, Neperi inuentionem ne dum, ſed & ordinem, qui nobis magis arridet, explanabimus.

EXPENSIO I.

Cur Arithmetici proportionales Geometricis vniantur.

ARithmetici quatenus Geometricis proportionalibus vniti vocantur Logarithmi:

Vt ſunt Geometrici	1	3	9	27	81	243	729
Arithmetici	0	2	4	6	8	10	12
Arithmetici	19	17	15	13	11	9	7

Seu ſimul cum Geometricis decreſcant, vel creſcant, ſeu hi deficiant, dum illi augentur.

Annalogia verò, & ſimilitudo, quam habent inuicem proportionales Arithmetici, & Geometrici in cauſa fuit, cur ſimul vnirentur, quàm hic diuerſis propoſitionibus explicabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo numeri Geometrici inuicem multiplicati componunt tertium, eorum Logarithmorum aggregatum erit tertij Logarithmus.

SInt tres Geometrici proportionales

10	100	1000
3	6	9

Dico, *quòd, ſi* 10. *multiplicatus per* 100. *facit* 1000. *quod item primus Arithmeticus vnitus ſecundo facit tertium.* ſic 3. vnitus cum 6. facit 9.

Probatur. Nam extenduntur in maius, ex propoſ. 17. tract. 14. de proport. part. 1. proportionales Geometrici per multiplicationem denominatoris proportionis: at verò ex propoſ. 10. par. 2. Tract. 14. Arithmetici per additionem differentiæ. Si ergo in Geometricis primus terminus ſit denominator, vt hic 10. & in Arithmeticis primus terminus ſit differentia, neceſſariò ſicut 10. multiplicando ſecundùm 100. facit 1000. ita 3. additus 6. faciet 10. tertium terminum.

THEOR. II. PROPOS. II.

Proportio Geometrica applicata proportioni Arithmeticæ incipit à Zifra 0. *vel à millione, vel ſimili numero* 10. *qui vnitate additis zifris conſtet.*

SI ſit proportio Geometrica continua proportionalitate, vt 10. 100. 1000. 10000. & Arithmetica, quę à 0. incipiat, vt 0. 4. 8. 12. 16.

Arithmetica	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Geometrica	1.	10.	100.	1000.	10000.	10000.
Arithmetica	0.	4.	8.	12.	16.	20.

Dico, quod hæc Series Arithmeticorum infra poſitorum benè demonſtrat Geometricos, ex eo quòd reperto arithmetico bene reperiatur correſpondens Geometricus. *Atque ideo eis ſeries Arithmetica bene addita ſit.*

Probatur. In eo enim ſimilitudine correſpondent, quòd ſi duo Geometrici inuicem multiplicati producant tertium, Arithmetici quoq; additi, & ſimul poſiti producunt tertium. Sic quia 10. & 1000. ſe multiplicando producunt 10000. ita 4. Aritmeticus ſub poſitus vnitus arithmetico 12. producit 16: At ſi progreſſio inciperet à 4. tunc primus additus ſecundo non faceret tertium, vt hęc.

4. 7. 10. 13. 16. 19.

Nam nec 4. radicalis additus numero 10. producit 13. nec 10. & 13. producunt 16. Ergo numerus radicalis zifra eſſe debet, vel vnitas iuncta zifris, vt expeditè proportio Arithmetica deſeruiat geometricę. Sic ſi numero 14. addatur 16.

faciet

faciet 30. à quo ablatus 10. vel vnitas ſecundi loci ad ſiniſtram dat 20. ſicut 1000 per 100. multiplicatus dat 100000.

Non intereſt autem; an retrograda ſit, & creſcentibus Geometricis, Arithmetici decreſcant, vt hic

1	2	4	8	16	32	64	128
31	28	25	22	19	16	13	10
100	94	88	82	76	70	64	58

Nam pari modo in oſtendendo tertio proportionali ſe gerunt; ſed creſcentes per additionem oſtendunt tertium proportionalem maiorem; decreſcentes verò minorem. Si tamen numerus radicalis ſit ad maximum appoſitus, vt in prima ſerie ſecùs ſi ſit ad minimum Geometricum, nam; & decreſcentes maiorem quoque oſtendunt.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si numerus Geometricus per numerum diuiſus producit tertium proportionalem, ſic & Arithmeticus à primo ſubductus relinquit tertium.

Vt	1	3	9	27	81	243	729
	0	4	8	12	16	20	24

QVia ergo 27. diuiſus per 3. producit 9. ita 4. ſubductus à 12. relinquit 8. & quia 9 diuidendo 243. producet 27. ſic, & 8. ſubductus à 20. relinquit 12. Logarithmum numeri 27.

Ratio eadem quę propoſitionis primæ adhibita cautela antecedentis propoſitionis, quoad Arithmeticos nempe à ziſra, vel vnitate additis ziſris progreſſionem debere incipere.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Sicut trium Sinuum proportione Geometrica continuatorum quadratum medij eſt æquale quadrato ex extremis inuicem multiplicatis effecto. Ita Arithmeticorum appoſitorum duplum medij æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81
4	8	12	16

SIc multiplicatus 9. in ſe facit 81. vt 3. per 27. at Arithmeticus 8. duplicatus facit 16. quem numerum faciunt 4. & 12 iuncti. De Geometricis patet ex propoſ. 5 tract. 14 part. 1. De Arithmeticis conſtat ex propoſ. 2. part. 2. tract. 14.

THEOR. V. PROPOS. V.

Quatuor Geometricè proportionalium, ſicut factum ex ductu mediorum æquatur facto ex ductu extremorum: Ita ſuorum Logarithmorum aggregatum mediorum, æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81	243	Geometrici.
5	10	15	20	25	Arithmetici.

ITa duo extremi Geometrici 3. & 81. faciunt 243. quem faciunt 9. & 27. medij inuicem multiplicati; ſicut Arithmetici iuncti 5. & 20. extremi faciunt 25. quem faciunt 10. & 15. medij ſimul aggregati.

Patet de Geometricis ex propoſ. 6. part. 1. tractat. 14. de Arith. quoque ex propoſ. 1. part. 2. tractat. 14.

THEOR. VI. PROP. VI.

Sicut ex numero in ſe ſemel ducto producitur quadratus, & iterum in productum ducto efficitur cubus, & rurſus in cubum ducto efficitur ſuperſolidus; ſic Arithmeticus duplatus quadrati efficit Logarithmum, triplatus cubi quintuplatus ſuperſolidi.

Geomet.	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Arithmet.	0	3	6	9	12	15	18	21	24

NAm ex propoſ. 24. lib. 8. Elem. qui ab vnitate continuè proportionales Geometrici tertium quemque habent quadratum. Quartum verò cubum, & duobus intermiſſis quemlibet ſequentem. Septimum autem cubi quadratum, & quinque intermiſſis quemlibet ſequentem, & extra.

Sed ſi ab vnitate continuè proportionalibus Geometricis ſui quique applicentur proportionales Arithmetici incipientes à ſifra, ſecundus erit duplex primi, & quartus triplex ſecundi. Cum enim primus radicalis numerus ſit o. & idem numerus ſemper addatur, ſequitur neceſſariò, quòd ſecundus ſit duplus primi, & quartus duplex ſecundi. Sed ex propoſ. 9. Element. lib. 8. quot inter vnum numerum V. g. 8. ab vnitate continuè proportionalium Geometricorum, & vnitatem cadunt proportionales Geometrici, tot, & inter illum, & alium in eadem ratione exiſtentem vt 64. neceſſe eſt cadere. Ergo quot inter eorum proportionales Arithmeticos, & ſifram cadunt partes eædem, tot etiam inter ipſum V. g. 8 & alium vtpote 64 neceſſe eſt replicare. Tot enim replicantur partes ternæ, quot proportionales Geometrici ſunt. Quia itaque inter 1. & 8. duo proportionales Geometrici reperiuntur, & tres computato ipſo 8. etiam trina vice replicabitur 3. & fient 9. At quia idem numerus proportionalium mediat inter 8. & 64. tricies inſuper idem 3. replicabitur; Vnde fient cum primo 18. Quia ergo inter quodlibet quadratum, & radicem medius proportionalis cadit numerus, hinc eſt. quòd duplicatus proportionalis arithmeticus ſit numerus quadrati: at quia inter radicem, & cubum duo proportionales cadunt, hinc eſt quod debeat triplicari; & quia inter radicem, & quadrati quadratum, vel ſuperſolidū quinque proportionales mediant hinc eſt, quòd quinquies replicatus exprimat ſuperſolidum, & cæt.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Numeri dati Geometrici, ſi radix Quadrata, Cuba, Superſolida extrahatur. Eius Logarithmus bipartitus, tripartitus, vel in quinque ſecatus erit Logarithmus radicis.

PRobatur, quia Logarithmus radicis efficitur Logarithmus quadrati, ſi dupletur; cubi, ſi tripletur, ſuperſolidi, ſi quinquies ſumatur; Ergo Logharithmus quadrati bipartitus efficietur quadratæ radicis numerus, cubicæ tripartitus, ſuperſolidæ per quinque ſectus.

COROLLARIVM.

HInc ergo euidenter patet. Quod multiplicatioui Geometricę correſpondet additio in Arithmeticis ex 1. h. propoſ. & diuiſioni ſubductio ex 2 huius propoſ. Extractioni radicis quadratæ bipartitio, ſicut quadrationi duplatio ex propoſ. 7. & 4.

Regulæ autem additio, & deinde ſubductio ex propoſ. 5 Extractioni Radicis cubæ tripartitio. Superſolidæ per quinque partitio, ſicut quintuplicatio reſpondet ſuperſolidæ multiplicationi, & triplicatio Cubicationi.

Si ergo Arithmetici Geometricis applicentur, patet, quòd inuentis Arithmeticis, inuenientur quoque Geometrici. Cumque Arithmetici per additionem, bipartionem, triplationem, ſubductionem inueniantur, ſequitur, quòd etiam Geometrici correſpondentes eodem quoque modo inuenientur. Sint itaque Geometrici cum applicatis Arithmeticis.

Arith.	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Geom.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
Arith.	0	5	10	15	20	25	30	35	40

Sitque datis 3 & 27. reperiendus tertius proportionalis. Tabellam inſpicio, & Arithmeticos 5. Geometrici 3. & 15. Geometrici 27. colligo; duplicoque 15. & fiunt 30. ſubduco deinde 5. & fiunt 25. Concludo itaque quod 25. eſt tertius proportionalis Arithmeticus. Video itaque quinam Geometricus illi reſpondeat, & ille eſt 243. concludo itaque, quod 243. eſt tertius proportionalis Geometricus, & quòd ita ſit 3. à 27. vt 27. ad 243

Sic datis tribus proportionalibus, quæritur quartus V. 3. & 27. 81. Aſſumo Arith. correſpond. 5. 15. 20. Addo 15. ad 20. fiunt 35 ſubduco 5. relinquitur 30. Logarith. numeri 729. qui ſe habet ad 81. vt 27. ad 3. Sic, ſi quæras quadratum Geometrici 9. duplabis Arithmeticum ipſius 10. & erit 20. Logarithmus quadrati 81. vel, ſi cupias numeri 6165. ſcire radicem; 40. Logarithmum bipartire, & habebis 20. Logarithmum radicis 81. Vel ſi quæras radicem cubam numeri 729. tripartire 30 & habebis 10. indicans Geometricum 9. radicem cubam ipſius: Et idem aſſerendum licet numeri ſint contrario modo, & dum Geometrici augentur Arithmetici decreſcant, vt monui.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque id, quod ferè fundamentum eſt operis. Similiter proportionatorum Geometricorum æquidifferentes eſſe Arithmeticos, ſeu illi parui ſint, ſeu magni. Nempe eam differentiam Arithmeticam mediare inter duos Arithmeticos duorum Geometricorum, ac inter alios duos Arithmeticos, qui ſint aliorũ Geometricorũ, ſeu maiorum, ſeu minorum, ſed eandem proportionem habentium: Ita videas, quòd eadem differentia mediat inter 5 & 20 Logarithmos proportionalium Geometricorum 3. & 81. quæ mediat inter Logarithmos 25. & 40. Geometricorum 243. & 6561. nimirum 10. Ratio euidens ex dictis, Nam quot ſunt proportionales intermedij Geometrici tot additiones ſunt in Arithmeticis; cum itaque ſimiliter proportionati Geometrici habeant, vel eandem proportionem, vel duplicatam, vel triplicatam, vel quadruplicatam, vel certe vno intermedio, vel duobus, vel tribus ſic, & Arithmetici habebunt, vel eandem differentiam, vel duplam, vel triplam, vel quintuplam, & cæt. Vnde ſimiliter proportionalium Geometricorum erunt æquales ſemper differentiæ in Arithmeticis.

EXPENSIO II.

De ſerie facili Geometricorum reperienda, cui Arithmetica ſeries deſeruiat.

PRogreſſio Geometrica admodum difficilis maximè ſi de prolixa ſerie agatur: vnde ad difficultatem leniendam ijs in numeris ea progreſſio eligenda eſt, quæ fiat per ſubtractionem, vel additionem. Iam enim ſupra 1. par. Tr. 14. pr. 19. inuenimus, multas eſſe progreſſiones Geometricas, quæ additione, & ſubtractione obtinentur.

Sed neque hoc quidem ad facilitatem nanciſcendam ſufficit; ſed & fractiones vitandæ, & ſummũ numerorũ augmentum. Sic modus, quem Tract. 19 part. 1. propoſ. 17. inuenimus fractiones non vitat, & proportio dupla fit per additionem. Sed in infinitum prope numerum augetur.

Præaſſumpt. 1. Ad hoc, vt progreſſioni Geometricę poſſit applicari progreſſio Arithmetica debet eſſe continua, ſaltem ſecundum aliquam maiorem partem; alioquin ſi Geometrica non per eandem proportionem progrederetur, Arithmetica continua, quæ ſẽper per æqualia ſpatia progreditur, ei applicari nequaquam poſſet, & fruſtra applicaretur, quia ſilicet ſimiliter proportionatorum non eſſet æquidifferens, vt debet eſſe ex Coroll. 2. expenſ. præced. Logarithmus.

Præaſſ. 2. Duplex progreſſio eſt autem alia continua, & abſoluta; quæ ſilicet nullis tabulis alligatur, alia eſt interrupta, & relatiua, quæ ſinubus apponitur, vt innoteſcant eorũ proportiones. Hæc verò non potuit fieri ſine illâ, cùm enim proportionales ſinus non ſint in eadem proportione continua, ideo ex præaſſumpto 1. huius expenſ. non potuit ei progreſſio Arithmetica continua applicari: Quare priùs debuit conſtrui tabula quædam continua, ex quâ deinde proportionales numeri Arithmetici applicandi proportionalibus ſinuum decerperentur ſecundùm, quòd illi continui Geometri iſtis diſcontinuis occurrebant, &

ijſdem

iiſdem numeris, vel ſaltem valde proximis reſpondebant. Sint V. g. continui

32	64	128	256	512	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici

Sitque alia proportio non continua 32. & 64. & 255. 511. quia hic 32. eſt eiuſdem quantitatis, ac 32 in continua Geometricorum ſerie repertus, dico eius logarith. eſſe 5. ſic quia 64. in non continua eſt eiuſdem quantitatis ac 64. in continua, dico eius logarith. eſſe 10. Sic Geometrici 255. quia accedit ad 256. eſſe 20. & 511. eſſe 25. quia accedit ad 512. & licet vnitas in iſtis paruis numeris generet differentiam ſenſibilem, in magnis tamen numeris vnitas eſt ſpernenda, vt inſenſibilis, quid enim eſt 1. reſpectu 1000000. centum millium?

Præſſumptum 3. Et hinc eſt, quòd magnus numerus eligendus ſit, tum quia differentia, ſi qua eſt, reddatur inſenſibilis in multitudine partium, tum quia, vt propoſ. 7. Tr. 14. par. 1. in magno numero plurimæ latent proportiones, & ideo in longam ſeriem in magno numero proportiones diſtendi poſſunt.

Præſſumptum 4. Tabula quoque, vel ſeries numerorum abſoluta ſecundum duplicem finem, ob quem ſit duplex eſt; alia enim ſit ob computos vulgares, vt proportionalibus quibuſcunque reperiendis deſeruiat, & de hac infra breuiter loquemur; alia, vt ex ea deinde excerpantur numeri Arithmetici, qui ſinibus deſeruire debent, & de hac modò loquimur.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

In prolixam ſeriem Geometricos faciliter, & ſine fractionibus, quæ negotium faciant, in ordine ad tabulas ſinuum Logarithmis exornandas extendere.

Præceptum primum. Ex 10000000. ſinu toto quinquaginta ſex proportionales ſubtractione partis centeſimæ aducantur, quæ eſt 100000. Ideſt reſpectu decem millionum centum millia, ita enim eſt 1. ad 100. vt eſt 100000. ad 10000000. Hoc autem ſit ſubtrahendo primo partem centeſimam à decem millionibus, & à reſiduo eiuſdem reſidui partem centeſimam, & à reſiduo hoc poſteriori centeſimam quoque eiuſdem reſidui partem, & ſic ſucceſſiuè, vt in exemplo.

Quia enim centeſima pars reſidui 9900000. eſt 99000. ideo ſubducitur rurſus eadem figura 99. cum omnibus zifris poſthabitis duabus à primo reſiduo, & remanet 9801000. cuius etiam centeſima pars eſt idem numerus duabus zifris reiectis, ideo rurſus ſubducitur 98010 à 9801000. Vides itaq; facilitatem operis iam, atque etiam ſecuritatem; facilis enim computus, non adeo faciliter errorem admittit.

Habemus itaque 36. proportionales, qui ſe inuicem excedunt proportione, quæ eſt inter 1. & 100. inter quos omnes aut centum millia, aut ferè millia centum intercedunt.

Cur autem non reperiantur plures eſt in cauſa, quod reliqui minores non ſunt neceſſarij eò, quòd ſeries proportionalium Geometricorum ſatis ſit, quæ perueniat vſque ad Sinum 45. Graduum, qui eſt 7071068. Nam iſtis habitis proportionalibus, à quibus decerpi poſſint proportionales Arithmetici; qui applicentur ſinubus, qui ſucceſſiuè ſubtendunt Gradus à 90. vſque ad 45. & reliqui deinde omnes ex iſtis, vt patebit innoteſcent.

Prob. autem propoſ. licet res per ſe clara ſit. Nam cum à quolibet numero ſemper decima pars illius auferatur, ſit, vt quilibet remanens ſe habeat ad integrum, vt 9. ad 10. quare omnes numeri à quibus decima pars ablata ſit, erunt ad numerum ſe immediatè maiorem tanquam 9. ad 10. proptereaque ſemper in eadem proportione reperientur.

Præceptum 2. Sed quia incipiunt in proſequendo aliquæ fractiones suboriri; cum nequaquam ſpernendæ ſint, ideo additis zifris totus numerus in fractiones redigendus; Sic ſi ex 1000. partem 100. auferre volo illa erit 10. & reſiduum erit 990. Cuius pars centeſima erit 9. & $\frac{90}{100}$.

Quare ſi reducas totum integrum 90. in fractiones multiplicando per denominatorem 100. habebis 99000. & 9 $\frac{90}{100}$ huius 99000 numeri comprehendet partes 990. Et hinc eſt, quod additis duabus zifris ad dextram ſit numerus augendus, vt capiat fractiones, & conſequenter hæc ab altera, vt integri ipſi, ſucceſſiuè poſſit extrahi, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. primi Ordinis.

Geometri.		Arithmetici.	
10000000	00		
100000	00		
9900000	00	100543	7632988
99000	00		
9801000	.00	201037	5265976
98010	00		
9702990	00	301631	2898958
97029	90		
9605960	10	402175	0531946
96059	60		
9509900	50	502718	8164934
95099	00		
9414801	50	603262	5797922
94148	01		
9320653	.49	703806	3430900
93206	53		
9227446	96	804350	1063888
92274	46		
9135172	50	904893	8696876
91351	72		
904 820	78	1005437	6329864
90438	20		
8953382	58	1105981	3962852
89533	82		
8863848	76	1206525	1595840
88038	48		

8775210	18 87751 10	1307068	9128828
8687458	18 86874 58	1407611	6861816
8600583	60 86005 83	1508155	4694804
8514577	77 85145 77	1608699	2327792
8429432	00 84294 32	1709242	9960780
8345137	68 83451 37	1809786	7593768
8261686	31 82616 86	1910330	5226756
8179069	45 81790 69	2010874	2859744
8097278	76 80972 78	2111418	0492732
8016305	98 80163 05	2211961	8125720
7936142	93 79361 42	2312505	5758708
7856781	51 78567 81	2413049	3391696
7778213	70 77782 13	2513593	1024684
7700431	57 77004 31	1614136	8657672
7623427	26 76234 27	2714680	6290680
7547192	99 75481 92	2815226	3913668
7471721	07 74717 21	2915770	1556656
7397003	86 73970 03	3016313	9189644
7323033	83 73230 33	3116857	6812631
7249803	50 72498 03	3217401	4455620
7177305	47 71773 05	3317945	1088608
7105532	42 71055 32	3418488	871[illegible]596
7034477	10	3519032	6354584

Præceptum 3. Quia verò iſti proportionales multò minores numero ſũt ſinubus, qui ſubtẽdunt omnes arcus à Gradu Nonageſimo vſque ad 45. Ideo inter quoſcumque iſtorum proportionalium alij reperiendi ſunt, qui inuicem dicant proportionem, vt vnum ad mille, ita vt ſinus totus excedat primum proportionale ſolùm 10. millibus, & quia fractiones adhuc minutiores ſuboriuntur; ideo per adiectionem ziferarum effugienda earum difficultas: tot autem addendæ ſunt ad dextram, quot reliquuntur ad ſiniſtram ratione iam præcepto 2. tacta, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. Ordinis 2. interpoſita inter 10000000. & 990000. præc. tabulæ.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	000 10000 000		
9990000	000 9990 009	10009	0438435
9980010	000 9980 010	20018	0876870
9970029	990 9970 029	30027	1315305
9960059	961 9960 059	40036	1753740
9950099	902 9950 099	50045	2192175
9940149	803 9940 149	60054	2630610
9930209	654 9930 209	70063	3069045
9620279	445 9920 279	80072	3507480
9910359	166 9910 359	90081	3915925
9900448	807	100090	4354360

Tabula 2. Ordinis ſecundi interpoſita inter 7177305. & 7105532. præcedentis Tabulæ.

Geometrici.		Arithmetici.	
7177305	470 7177 305	3317945	1088608
7170128	165 7270 128	3327954	1527043
7162958	037 7162 958	3337963	1965478
7155795	079 7155 795	3347972	1403913
7148639	284 7148 639	3357981	2842348

2 7141490

Geometrici.		Arithmetici.	
7141490	645	3367990	3280783
7141	490		
7134349	155	3377999	3719218
7134	349		
7127214	806	3398008	4157653
7127	214		
7120087	592	3398017	4596088
7120	087		
7112967	505	3408026	5034523
7112	967		
7105854	538	3418035	5472958
7105	854		

Quia ergo 7177. cum fractis $\frac{503}{1000}$ milleſima pars proportionalis 7177503. ideo hæc ipſa ſubducitur, & ad hoc, vt etiam fracti capiant in ea, & ſubtrahi conſequenter poſſint tres zifræ addendę, ſic enim ſeptem milliones centum ſeptuaginta ſeptem millia, & trecentum quinque vnitates multiplicantur per mille, & ſeptem fiunt milliones millionum, reſpectu cuius numerus $\frac{503}{1000}$ qui erat fractio iam euadit integer.

Si verò quis vellet hunc ſecundum tabularum ordinem minutiorem reddere poſſet auferre à ſingulis quingenteſimam partem nempe primo auferendo 5000. quæ eſt quingenteſima pars numeri 10000000. & diuidendo reſiduum per 200. continuè, & quotum, qui prouenit; auferendo ab antecedenti.

10000000	00000
5000	00000
9995000	00000
4997	50000
9990002	50000
4995	00125
9985007	49875

Præceptum 4. Confectis omnibus iſtis tabulis, quia neque proportionales ſufficiunt: Ideo inter quoſcumque proportionales eodem modo alij interſerendi, & cōponendæ minutiores tabulæ, quę ſecundùm decem milleſimam partem altera alteri accreſcat, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima tertij ordinis inter 10000000. *&* 9999000. *interpoſita.*

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	0000		
1000	0000		
9999000	0000	1000	4550242
999	9000		
9998000	1000	3001	9100484
999	8000		
9997000	3000	3002	3650726
999	7000		

Geometrici.		Arithmetici.	
9996000	6000	4001	8200958
999	6000		
9995001	0000	5002	2751210
999	5001		
9994001	4999	6002	7201452
999	4001		
9993002	0998	7003	1751694
999	3002		
9992002	7996	8003	6301936
999	2002		
9991003	5994	9004	0852178
999	1003		
9990004	4991	10004	5402420

Tabula vltima tertij ordinis interpoſita inter 7112967. *& inter* 7105854.

Geometrici.		Arithmetici.	
7112967	5050	3408026	5034523
711	2967		
7112256	2083	3409026	2584765
711	2256		
7111544	9827	3410027	4135007
711	1544		
7110833	8283	3411027	8685249
711	0833		
7110122	7459	3412028	3135491
711	0122		
7109411	7328	3413028	7785733
710	9411		
7108700	7917	3414029	2335975
710	8700		
7107989	9217	3415029	6886217
710	7989		
7107279	1228	3416030	1436459
710	7279		
7106568	3949	3417030	5986701
710	6568		
7105857	7381	3418031	0536943

Præceptum 5. Cum autem iam proportionales inuicem accreſcant, vt ſinuum, quorum differentię ſunt maiores, vel eumdem numerum exequent, vel proximè accedant: ideo (niſi maior ſedulitas, quam par ſit adhibere quis vellit) iam non inter omnes proportionales Tabularum ordinis quarti nouos proportionales Geometricos proijciemus; ſed tantum inter aliquos, qui nimirum ſinui toto viciniores in numeris ſunt. Cum enim tabulam non abſolutam; ſed quæ ſinibus deſeruiat cōdamus: inde eſt, quòd illi ſolùm proportionales ſint inueniendi, qui proximè accedunt ad propor-

tiones ſinuum, & quia ſinus; quò magis appropinquant ſinui toto, eò minoribus diſcrepãt differentijs; inde etiam proportionales inueniendi, quorum proportiones ſint minores inter illos proportionales Geometricos, qui magis accedant ad ſinum totum: Si autem tabulæ abſolutæ conderentur, meliùs eſſet etiam inter omnes interſerere, quo enim minutiores differentiæ, eo exactiores tabulæ abſolutæ; Itaque inter hos poſtremos quarti ordinis proportionales, alios iterum interſeremus, qui iuxta centum milleſimam partem, & ſecundùm vnam ex iſtis partibus ſinguli proportionales maiores exiſtãt, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quarti interpoſita inter 10000000. & 9999000. præced. Tabula.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	00000		
100			
9999900	00000	100	0005024
99	99900		
9999800	00100	200	0010048
99	99800		
9999700	00300	300	0015072
99	99700		
9999600	00600	400	0020096
99	99600		
9999500	01000	500	0025120
99	99500		
9999400	01500	600	0030144
99	99500		
9999300	02100	700	0035168
99	99300		
9999200	02800	800	0040192
99	99200		
9999100	03600	900	0045216
99	99100		
9999000	04500	1000	0050240

Tabula vltima Ordinis quarti interpoſita inte 710656. & 7105857. præcedentis Tabulæ ordinis tertij.

Geometrici.		Arithmetici.	
7106568	39490	3417030	5986701
71	06568		
7106497	32922	3417130	6036725
71	06497		
7106426	25425	3417230	6041749
71	06426		
7106355	18999	3417330	6046773
71	06355		
7106284	12644	3417430	6051797
71	06284		
7106213	06360	3417530	6056821
71	06213		
7106142	00147	3417630	6061469
71	06142		
7106070	94005	3417730	6066869
71	06070		
7105999	88035	3417830	6071893
71	05999		
7105928	72036	3417930	6076917
71	05928		
7105857	66108	348030	6081944

Præceptum 6. Inter autem ſingulos proportionales huius, proportionales alij interponendi, qui dicant proportionem, vt vnum ad millionem, vt in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quinti interpoſita inter 1000000. & 9999900.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	000000		
10	000000		
9999990	000000	10	0000010
9	999990		
9999980	000010	20	0000020
9	999980		
9999970	000030	30	0000030
9	999970		
9999960	000060	40	0000040
9	999960		
9999950	000100	50	0000050
9	999950		
9999940	000150	60	0000060
9	999940		
9999930	000210	70	0000070
9	999930		
9999920	000280	80	0000080
9	999920		
9999910	000360	90	0000090
9	999910		
9999900	000450	10	0000100

Tandem pro vltimo præcepto inter huius poſterioris ordinis proportionales adhuc interſerẽdi ſunt alij numeri, qui ſe habeant, vt vnum ad decem milliones, & quia minutiæ ſunt minimæ potes ſequi, ita vt ſint 100. proportionales interpo-

ſiti

ſiti inter primum, & ſecundum tabulæ quarti ordinis; quibus omnibus creatis deinde Arithmetici apponendi ſunt, vt ſequenti expenſione docebimus.

Et licet inter primum, & ſecundum quartæ tabulæ 10. proportionales interſeri ſit neceſſe; quia in fine, cum appropinquant ſinui toti, ſinus vix creſcunt, inter tamen alias ſufficiet vſque ad quartum ordinem incluſiuè, vel vſque, ſi cupias exactiſſimè operari, ad proportionem, quam habent 1. ad millionem, vt præcepto ſexto.

Tabula extenſa ſexti ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.		Geometri.		Arithmetici.	
10000000			00000000				
9999999	0000000	1	0000010				
9999998	0000001	2	0000002	9999949	0001254	51	0000051
9999997	0000003	3	0000003	9999948	0001305	52	0000052
9999996	0000005	4	0000004	9999947	0001357	53	0000053
9999995	0000009	5	0000005	9999946	0001410	54	0000054
9999994	0000014	6	0000006	9999945	0001464	55	0000055
9999993	0000020	7	0000007	9999944	0001519	56	0000056
9999992	0000027	8	0000008	9999943	0001575	57	0000057
9999991	0000035	9	0000009	9999942	0001632	58	0000058
9999990	0000044	10	0000010	9999941	0001690	59	0000059
				9999940	0001749	60	0000060
9999989	0000054	11	0000011	9999939	0001809	61	0000061
9999988	0000065	12	0000012	9999938	0001870	62	0000062
9999987	0000077	13	0000013	9999937	0001932	63	0000063
9999986	0000090	14	0000014	9999936	0001995	64	0000064
9999985	0000104	15	0000015	9999935	0002059	65	0000065
9999984	0000119	16	0000016	9999914	0002124	66	0000066
9999983	0000135	17	0000017	9999913	0002190	67	0000067
9999982	0000152	18	0000018	9999932	0002257	68	0000068
9999981	0000170	19	0000019	9999931	0002325	69	0000069
9999980	0000189	20	0000020	9999930	0002394	70	0000070
9999979	0000209	21	0000021	9999929	0002464	71	0000071
9999978	0000230	22	0000022	9999928	0002535	72	0000072
9999977	0000252	23	0000023	9999927	0002607	73	0000073
9999976	0000275	24	0000024	9999926	0002680	74	0000074
9999975	0000299	25	0000025	9999925	0002754	75	0000075
9999974	0000314	26	0000026	9999924	0002829	76	0000076
9999973	0000340	27	0000027	9999923	0002905	77	0000077
9999972	0000367	28	0000028	9999922	0002982	78	0000078
9999971	0000395	29	0000029	9999921	0003060	79	0000079
9999970	0000424	30	0000030	9999920	0003139	80	0000080
9999969	0000454	31	0000031	9999919	0003219	81	0000081
9999968	0000485	32	0000032	9999918	0003300	82	0000082
9999967	0000517	33	0000033	9999917	0003382	83	0000083
9999966	0000550	34	0000034	9999916	0003465	84	0000084
9999965	0000584	35	0000035	9999915	0003549	85	0000085
9999964	0000619	36	0000036	9999914	0003634	89	0000086
9999963	0000 45	37	0000037	9999913	0003720	87	0000087
9999962	0000682	38	0000038	9999912	0003807	88	0000088
9999961	0000720	39	0000039	9999911	0003895	89	0000089
9999960	0000759	40	0000040	9999910	0003984	90	0000090
9999959	0000799	41	0000041	9999909	0004074	91	0000091
9999958	0000840	42	0000042	9999908	0004165	92	0000092
9999957	0000882	43	0000043	9999907	0004257	93	0000093
9999956	0000925	44	0000044	9999906	0004350	94	0000094
9999955	0000969	45	0000045	9999905	0004444	95	0000095
9999954	0001014	46	0000046	9999904	0004539	96	0000096
9999953	0001060	47	0000047	9999903	0004634	97	0000097
9999952	0001107	48	0000048	9999902	0004732	98	0000098
9999951	0001155	49	0000049	9999901	0004830	99	0000099
9999950	0001204	50	0000050	9999900	0004929	100	0000100

EXPENSIO III.

De Arithmeticis proportionalibus repertæ Geometricorum ſeriei copulandis.

PRæſumptum 1. Numeris Geometricis poſt confectas omnes ſeries Arithmetici copulandi ſunt, in quo conſiderandum eſt nullius laboris eſſe; ſi numerorum ſeries altera alteri continua proportione copularetur; ſed quia ita non eſt: at quælibet, & proportionem mutat, & ob fractos in eundem numerum non incidit, hinc eſt, quod induſtria ludendum ſit, & ingenio.

Præſumptum 2. Obſeruandum quoque, quòd alicuius quantitatis incommenſurabilis tunc explicatur ſufficienter menſura, cùm inter terminos parùm diſtantes maiorem, & minorem clauditur, ita quòd nec maiore maior ſit, nec minore minor. Termini verò tunc parum diſtant, cùm illi ſunt magni numeri, & parua differentia diſſentiunt, vt 1000 010. & 10000040. Si ergo demonſtretur aliquam quantitatis menſuram inter illos limites contineri, ſufficienter expreſſa dicitur, vt ſi dicatur aliquam quantitatem eſſe inter 10000025. & 10000030. Ratio eſt; quia differentia 5. vnitatum reſpectum magni numeri 10. millionum nullius pretij eſt, nullius ſenſus, & ideo quidquid inter illos numeros adeo parum differentes clauditur, vt æquale putatur, cùm nec ea quidem differentia 5 vnitatum illos à ſenſibili æqualitate eliminet, licet quoad intellectum verè ſint inæquales.

THEOR. I. PROPOS. IX.

In progreſſione Arithmeticâ deſeruiente Geometricæ à quocumque numero, prout libet, poſſumus incipere.

PRobatur. Quia nulla naturali connexione connectuntur Arithmetici, & Geometrici. Dum enim quidpiam V.g. ſe mouens deorſum facit 10. paſſus, & ſecundo æquali tempore faciat centum paſſus augendo Geometricè velocitatem multi alij mouentes ſe progreſſiuè poſſunt facere qui quatuor, qui quinque, qui ſeptem paſſus, vt ſecũdo eodem tempore, eoſdem quatuor, vel quinque, vel ſeptem efficiant. Sic alterans, qui producit 3. gradus caloris in primo inſtanti, & in ſecundo 9. comitem, poteſt habere alium debilem calefacientem, qui non niſi vnum gradum caloris ijs ſingulis inſtantibus efficiat.

Præſumptum Eligatur itaque numerus aliquis V. g. vnitas, qui poſt zifram addendam ſinui toti, addatur, ſecundo proportionali. Incipimus autem à zifra iuxta documenta propoſitionis 2. huius partis. Vnitati quoque multas zifras addimus, vt fiat [illegible], vt in illa intercapedine, quæ eſt inter 1. & [illegible] nempe vnitatem, & decem millionum particulam, in quam vnitas præſuponitur diuiſa, multę fractiones capiant, quæ fortè incidunt, vt experientiâ docebit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Tabulæ totius ſexti ordinis numeros Arithmeticos inſcribere.

HOc faciliter fit. Nam electo primo numero, qui addatur primo proportionali poſt ſinũ totum, cui zifra additur; idem ſemper deinde addendum; ſic ſi primo poſt ſinum totum 9999999 10000000. addatur [illegible], ſecundo 9999998.000001, addendũ erit 2 [illegible]. & tertio Geometrico 9999997 000003. Arithmeticus ſubiungendus 3 [illegible]. Verum expeditiùs loco denominatoris 10000000. addantur numero 3 tot zifræ, quot intermediant inter eam minutiam 3. & vnitatem ſinus totius. Vnde ſemper denominator decem millionum ſubintelligendus eſt.

Probatur autem ex 2. propoſ. expenſ. 1. Nam in progreſſione Arithmetica; quæ incipit à zifra aggregatum duorum generat tertium; ſicut duo Geometrici inuicem multiplicati tertium generãt itaque ſi primo idem primus addatur, generabitur ſecundus, & ſi ſecundus addatur primo generabitur tertius, & ſic conſequenter.

Probatur ſecundo omnes Geometrici proportionales ſextæ tabulæ expanſæ eandem proportionem habent, ergo ex Coroll. 2 expenſ. 1. huius. Omnes Arithmetici eandem differentiam habebunt. Vnde additus primus Arithmeticus, qui eſt differentia, quâ ipſe diſcrepat à 0 habebitur ſecundus, & ſic ſucceſſiuè, donec perſeuerant Geometrici in illa continuâ proportione, quam protraximus vſque ad 100. proportionales, vt vides in ſuperiori exemplo Tabulæ 6. ordinis.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Eodem augmento, vel diminutione augetur, vel decreſcit Arithmeticus proportionalis duorum datorum proportionalium Geometricorum quorumcumque, quo Arithmeticus ſinus totius, & alterius Geometrici proportionalis, ad quem ſimili proportione referatur, ac datus Geometricus ad datum alium Geometricum.



SInt dati Geometrici expreſſi linea AB, & AC, & ſinus totus linea AD, quæ ſit ad AF, vt AC proportionalis maior ad AB minorem. Dico, quod proportionalis Arithmetici differentia, ſeu decrementũ, quo decreſcit Arithmeticus proportionalis Geometrici AC, vt poſſit applicari Geometrico AB eadem eſt, ac qua mediat inter ſinum totum AD & proportionale Geometricum AF.

Probatur. Quia ſimiliter proportionatorum Geometricorum eſt eadem differentia, augmentum, ſeu decrementum ex Coroll 2. propoſ 7. huius. Sed eadem eſt proportio ex Hypotheſi inter

Geo-

Digitized by Google

Geometricos AC, & AB, quæ eſt inter ſinum totum AD, & proportionale Geometricum FA, ergo etiã eadem differentia Arithmeticorum, ſeu (quod idem eſt) augmentum, ſeu decrementum ex Coroll. 2 Expenſ. 1.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces quomodo datis duobus proportionalibus, & ſinu toto elicias per regulam Auream quartũ proportionale in eadem proportione V. g. ſit datus proportionalis minor ſecundus quarti ordinis 9999900. & quinti ordinis vltimus 9999900. [illegible], & ſinus totus 10000000. Sitque reperiendus proportionalis numerus, ad quem ſe habeat ſinus totus, vt datus maior 9999900. [illegible] ad 9999900. Multiplicetur hic per ſinum totum, & diuidatur per 9999900. [illegible], & prodibit quartus proportionalis 9999999 [illegible]. Verum, quia hic computus ob magnitudinem numerorum, & fractionum euadit prolixior infra alium modum in hac ipſa expoſitione trademus; Siquidem in hoc computu oportet ſinum totum multiplicare in 9999900. & deinde ob diuiſionem faciliorem proijcere in fractiones illud multiplicatum, ita vt ſint poſt quinque 9. viginti tres ciffræ, & deinde diuidere totum illum numerum per 9999900. 0004989.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Cuiuſlibet proportionalis Geometrici in tabulis non reperti Arithmeticus eſt inter Arithmeticum maioris proportionalis, & minoris.

Qvia dantur aliqui proportionales Geometrici, qui in continuam ſeriem non ſequuntur, & de ipſis iam viſum eſt, quòd eandem habent differentiam Arithmeticorum, quæ eſt inter ſinum totum, & aliud quoddam proportionale minus, quod in eadem proportione, ſit; Ideo inuento illo proportionali ex Coroll. eiuſdem propoſitionis poteſt euenire, vt euenit ſæpius, vt in aliquem numerum Tabulæ ſexti ordinis, vel etiam aliarum, cum omnes confectæ fuerunt, & de tabulâ ſinuum Arithmeticis, Logarithmiſque exornanda agitur; non incidat, ideo oportet ex ſecunda huius expenſ. praxi videre quinam ſint termini proximi, inter quos includatur. V. g. inuentũ eſt proportionale 9999 99 [illegible] ad quem ſe habet ſinus totus, vt ad 9999900. proportionalis 9999900 [illegible]. Sed nullus eſt proportionalis in tabula ſexta iam logarithmis exornata, quæ talis quantitas ſit; ſed 9999999 [illegible] eſt minor; at ſinus ipſe totus immediatus eſt maior. Dico ergo quod Arithmeticus proportionalis inuenti includitur inter Aritmeticum ſinus totius, & Arithmeticum proportionalis 9999999 [illegible] & ideo quòd eſt inter 0. & 1. 0000001. qui termini propinquiſſimi ſunt, cum non differant, niſi ſolâ vnitate; quæ quidem eſt pars minima reſpectu omnium proportionalium Arithmeticorum, qui tabulam totalem intexturi ſunt.

Probatur autem. Quia non poteſt eſſe æqualis Arithmetico 1000000, eſſet enim Arithmeticus proportionalis Geometrici minoris 9999999 [illegible]; non poteſt eſſe 0. eſſet enim terminus radicalis ipſius ſinus totius: Ergo erit aliquis medius inter 0. & 1. 0000001. ſicut, & ipſe radicalis Geometricus eſt aliquid medium inter ſinum totum, & 999999 [illegible].

COROLLARIVM.

Hinc igitur emergit, quod ſi accipias aliquid medium inter 0. & 1 [illegible] hoc quodcumque illud ſit erit proportionalis Arithmeticus Geometrici inuenti; quia cum ſint termini propinquiſſimi ex præaſſumpt. 2. non differunt ſenſibiliter à vero; Ideoque pro termino Arithmetico proportionalis Geometrici ſuperiùs inuenti 9999999 [illegible]. potes accipere ipſam differentiam, quâ differt ſinus totus à proportionali inuento, quæ eſt [illegible] Igitur Arithmeticus inuenti proportionalis erit 0. [illegible], vel aliquid tale, quæ differentia addita Arithmetico 100. 0000100. fiet 100. [illegible], vel 100 [illegible].

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Differentia, qua augeſcit quodlibet proportionale Arithmeticum à ſinu toto eſt ipſe Arithmeticus, ſi ſeries incipiat à zifra.

Patet ex dictis. Nam cum auferetur terminus radicalis à quocumque termino Arithmetico remanet differentia, quâ differt ipſe à termino radicali; ſed hic terminus radicalis, nempe à quo incipit progreſſio ponitur 0. ex Hypotheſi; ergo ablato eo remanet ipſe numerus, vt erat: Quare ipſe erit terminus, & differentia, quâ differt à termino radicali 0. qui eſt proportionalis Arithmeticus ſinus totius.

COROLLARIVM I.

Hinc autem reſultat, quod cum idem ſit Arithmeticus cuiuſcumque Geometrici inter ſinum totum, & illum ipſum Geometricum, cui ita eſt ſinus totus, vt alius Geometricus ad alium. Si habeamus illam differentiam Arithmeticam ex præced. Coroll. habemus quoque differentiam Arithmeticorum quibuſcumque Geometricis in ſimili proportione exiſtentibus applicatorum. Nam ex Coroll. 2. expen. 1. huius, vbi eſt eadem proportio geometricorum, ibi etiam eſt eadem differentia Arithmeticorum. Quare cum ex Coroll. prop. 11. huius ita ſit 999 ,900. ad 9999900. 0004500. vt 9999999. 9995499. ad 10000000. eademque quoque erit differentia Arithmeticorum.

At quia eadem eſt hæc differentia cum Arithmetico ipſo ex hac propoſ. & iam nouimus ex Coroll. propoſ 11. Arithmeticum ipſum eſſe . 0004924. hinc eſt, quod hic ipſe quoque ſit differentia, quæ deſeruiet etiam pro differentia inter 9999900. 9999900. 0004500. Geometricos eiuſdem proportionis cùmque huius habeamus Aritmeticum 100. 0000100. ſi hanc differentiam ei addamus fiet 100. 0005024. Arithmeticus ſinus 9999900. qui cum minor ſit ſuo comproportionali, eius Arithmeticus

eua debet augeri, cum elegerimus ſeriem Arithmeticam, quæ augetur dum decreſcit Geometrica.

COROLLARIVM II.

HInc obtinebis modum, quo alij omnes proportionales Arithmetici quarti ordinis addantur; ſiquidem, cùm ſecundus Geometricus ſit in proportione ad ſinum totum, vt tertius ad ſecundum, & ita conſequenter, & iam habeamus logarithmum ſecundi ex præc. Coroll. reſpectu ſinus totius nempe 100. 0005024. habebimus quoque logarithmum tertij per additionem eiuſdem quantitatis, vt fiat 200. 0010048. & ſic ſucceſſiuè addendo ſemper eandem quantitatem. Ratio euidens eſt ex dictis, quia ita 9999900. ſecundus eſt ſinui toti, vt tertius 9999800. 00100. eſt ipſi ſecundo 9999900. Appoſitis verò omnibus logarithmis, vltimus illius tabulæ primę 4. ordinis, qui eſt 99990000. 045000. habebit pro logarithmo 1000. 0050240. Dato verò hoc proportionali, & proportionali primo tertij ordinis 9999000 ——, & ſinu toto quęremus proportionale quartum ex Coroll. propoſ. 11. h., quod erit 999999. 9559955., quod ſe habeat ad ſinum totum, vt proportionale Geometricum 9999000 ſe habet ad 9999000. 04520.. Quo reperto ex Coroll. 1. propoſ. 12. ipſa differentia, quà differt à ſinu toto, erit quoque differentia Arithmetica addenda logarithmo noto 1000. 0050240. Geometrici 9999000. 0450., vt fiat Arithmeticus Geometrici 9999000. hæc autem eſt 4400042. quare Arithmeticus erit ferè 1000. 0005024. & quia proportionales quarti ordinis, qui interponuntur inter 9999000. & inter 9998000. 0001400 quilibet ſe habet ad ſuum ſequentem, vt 9999900. ad 10000000. hinc per adiectionem eiuſdem quãtitatis 100. 0005024. poſſunt omnes formari habito proportionali Arithmetico primi Geometrici 9999000. & ſic de alijs interpoſitis inter quoſcumque Geometricos nedum primæ tabulæ quarti ordinis; ſed & omnium tabularum eiuſdem ordinis. Ipſos autem proportionales Arithmeticos apponendos Geometricis quinti ordinis habebis, ſi ſibi addas repertum Arithmeticum 100. 4550842. Ratio eſt toties tacta, quia Geometricus quilibet ſe habet ad ſuum antecedentem V. g. 9999000. 1000. ad 9999000. vt ipſe 9999000. ſe habet ad ſinum totum. Idem quoque ages in exquirendo primo Arithmetico ſecũdi ordinis dato vltimo primæ tabulæ ordinis tertij Geometrico 9990004. 4991. primo ſecundi 9990000. & ſinu toto acquirendo quartum proportionale, & ex illo differentiam Arithmeticam addendam Arithmetico iam dato vltimo tabulæ primæ tertij ordinis 10004. 5408420., quo habito cęteri omnes innoteſcunt. Vnde totus labor conſiſtit in primis ſolum Aritmeticis cuiuſlibet tabulæ primæ inueniendis cęteri enim omnes illis datis habentur. Aduerte autem numeros poſt punctum eſſe fractos, & ſubintelligi lineam ſubductam, & ſub linea tot zifræ, quot ſunt figuræ, & inſuper vnitas ad ſiniſtram, quod & in ſequentibus obſeruabimus.

THEOR. V. PROP. XIV.

Ita eſt maius proportionale ad ſinum totum, vt differentia duorum proportionalium eſt ad differentiam ſinus totius, & alterius ad quod eandem proportionem dicat.



SIt vt prius datus Geometricus CA, qui ſit ad AB, vt AD ſinus totus ad AF. Dico quoque, quòd ita eſt CB differentia ad DF differentiam, vt eſt CA ſinus ad totum ſinum AD.

Nam ſi eſt totum ad totum, vt ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum tale erit, vt eſt totum ad totum ex propoſ. 19. lib. 5. Element. Cum ergo ſit totus CA ad ablatum AB, vt totus ſinus AD ad ablatum AF, ergo, & reliquum nempe differentia BC eſt ad differentiam reliquam DF, vt eſt CA ad totum AD.

THEOR. VI. PROPOS. XV.

Ita eſt maior Geometricus proportionalis ad differentiam inter ipſum, & minorem, vt eſt ſinus totus ad differentiam inter ipſum, & proportionalem alterum ſimili proportione Geometrica affectum.

MAneat eadem constructio, vt prius. Dico, *quod ita eſt proportionalis maior* AC ad differentiam CB, vt eſt ſinus totus AD ad differentiam DF.

Probatur ita eſt in proportione differentia BC ad differentiam DF, vt proportionale AC eſt ad totum ſinum DA, & *viciſſim* ita erit proportionata BC differentia ad AC, vt differentia DF ad ſinum totum AD; vnde, & *conuertendo* AD erit ad DF, vt AC ad BC.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo datis duobus proportionalibus, & ſinu toto elicias quartũ proportionale, ad quod ſe habeat ſinus totus, vt proportionalis datus maior ſe habet ad minorem. Quoniam ita ſe habet maior Geometricus datus ad differentiam, quæ intercedit inter ipſum, ac minorem datum, ſicut ſinus totus ad differentiam, quæ intercedit inter ſe, & alium ſimili proportione ſibi reſpondentem, vt Geometrici dati. Ideo dato Geometrico maiori V. g. vltimo primæ tabulę tertij ordinis 9990004. 4991000. & primo tabulæ primæ ſecundi ordinis 9990000. habebis differentiam 4. 4991000. Itaque proportionali 9990000. & differentia 4.4991000. & ſinu toto exquires quartum proportionale; nempe differentiam inter ſinum totum, & ſinum eo minorem, ſed in conſimili proportione, quæ erit 4, 5035035. quam demes à ſinu toto, & habebis proportionale 9999995 4963985. quod ita ſe habebit ad ſinum totum, vt 9990000. ad 9990003. 4991000. Iuxta itaque documenta propoſitionis 12. huius, quære hoc proportionale in ſexta tabula, & non

repeties

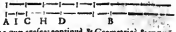
reperies, ſed aliquid maius nimirum 9999996. 0000005. & quid minus 9999995. 0000009. Inter itaque hos terminos conſiſtet Geometricus repertus 9999995. 4963985. & conſequenter etiam Arithmeticus, nempe quid medium inter Arithmeticum 40000004. & 5. 0000005. Geometricis terminis applicatos ſola vnitate diſtantibus, quare poterit eſſe 4. 5036015. ipſa nempe differentis Geometrics. Cum verò Arithmeticus, quo differt Geometricus à ſinu toto ſit etiã differentis iuxta propoſitionem 12. & differentia eadem Arithmetics ſit ſimiliter geometricè proportionatorum ex Coroll. vltimo expenſ 1. huius ſequitur, vt Arithmeticus repertus ſit quoq; differentis addenda Arithmetico noto 10004. 5402420. vt fiat 10009. 0438435. Arithmeticus Geometrici mininoris 9990000. Quo habito omnes habentur eiuſdem ordinis tertij addendo eandem quantitatem antecedenti termino. Sicut, & intermedij omnes qui pertinent ad quarti ordinis tabulas addendo ijſdem Arithmeticis tertij ordinis, à quibus incipit interſitio, primum quarti ordinis Arithmeticum, & ſequendo eandem additionem, donec omnes interpoſiti ſint arithmeticis exornati.

Sic, ſi cupiss Arithmeticum primæ tabulæ primi ordinis, eodem modo poteris inuenire. Datur enim 9900448. 8070000. Geometricus ſecundi ordinis, & 9900000. Geometricus primus tabulæ primæ primi ordinis, quorum differentia eſt 448. 807000. quæ dat adhibitâ regulâ proportionum differentiam geometricam quarti proportionalis à ſinu toto 453. 3198535. quæ differentia ſubducta à ſinu toto dat quartum proportionale 9999546. 6801468. quod in tabula prima ordinis quarti reperitur cadere inter 9999500. 0100000. & inter 9999600. 0060000. & hoc eſt minus quidem repertũ proportionale, ſed maius illo: itaque Arithmeticus numerus quoque erit maior, quam 400. 0020096 & minor, quam 500. 0025150. Vnde differentia Geometrica addita minori Arithmetico dabit proximè Arithmeticum proportionalẽ inter vtrumque medium paucissimis vnitatibus à verò diſtantem. Quia ergo quartus proportionalis differt à maiori 9999600. 0060000. & differentia eſt 53. 325. 8535. Si hanc differentiam, vel quid minus addamus Arithmetico minori 400. 0020096. fiet Arithmeticus 453. 3278128. differentiaque inter Arithmeticos Geometrici 9900448. 8070000. & 9900000. 0000000. Cum autem ſciamus Arithmeticum Geometrici 9900448. & cæt. qui eſt 100090. 4357360 ſi hac differentiam addamus fiet 100543. 7635988 vnde cum ſit vltimus ſecundæ tabulæ ad ſinum totum, vt quilibet primæ ad ſuum antecedentem erit quoque hæc differentia inter quoſcumque Arithmeticos primæ tabulæ.

THEOR. VII. PROPOS. XVI.

Sicut decreſcit, vel augeſcit quodlibet continui progreſſione Geometrica procedens quoad partes aſſignatas maiores; ita quoad ſingulas partes in infinitum minores augetur, vel decreſcit.

PRobatur. Eo, quia eum ſe continuè eadem progreſſione moueat neceſſariò aſſignata quælibet pars motus, quæ menſuretur æquali portione temporis augeſcet, vel decreſcet reſpectu alterius eodem æquali tempore menſurata, quod ſi quælibet alia pars Geometricè procedens menſuretur alia minori parte temporis, adhuc tamen in eadem proportione erit cum alia parte geometrica, quę eodẽ tempore mẽſuretur, quia cum totum Geometrica proportione ſemper eadem creſcendo, vel decreſcendo continuè ſe moueat ſingulæ eius partes aſſignabiles eadem proportione inuicem correſpondere debebunt cum ſint omnes eiuſdem rationis, & eſſentiæ. Ita ſi ſit linea



AS, quæ creſcat continuè, & Geometricè, & augmẽtum menſuretur, à linea XV. æqualiter creſcente, & Arithmetica, ita quod dum creſcit Geometrica ab A in C illa Arithmetica creſcat, ab V in T, & dum hæc ſe auget à C in H illa moueatur à T in S. Si ſumatur VM in geometrica. eiq; correſpondeat AI; ſecundę MT æquali correſpondebit IH, quæ in proportione Geometrica erit cum AI, vt CD cum AC.

COROLLARIVM I.

HInc eruitur alius modus Arithmeticos reperiendi qui Geometricis applicari poſſint V. g. detur numerus Geometricus præcedens 9900448. 807. cuius notum habeamus Arithmeticum 10009. 4354360. cupimuſque ſcire Arithmeticum 9900000. Iam ſcimus quot proportionales cadunt inter 9900448. & cær. & proportionale eo immediatè minus 9890548. 359 nempe tot ex 12. prop 8. Element. quot inter 10000000. & 990000. nempe 10 tertij ordinis inter quos cadunt 10. quarti, & inter hos quoslibet 10 quinti ordinis, ita quod erunt 1000. proportionales. Quot ergo ſunt proportionales Geometrici minores aſſignati inter dictos Geometricos maiores, tot erunt partes æquales in differentia applicatorum ipſis Arithmeticorum, & quia illa differentia eſt 10009 0438435. ideo, ſi diuidatur per 1000. habebimus 10. &. 0090438. partem æqualem, qua ſemper augetur Arithmeticus, dũ Geometrici 1000. accreſcunt inter vnum 9900448. & cæt. & inter 9890548 & cæt. Geometricos maiores.

Incipiamus itaque diſtribuere 10 ſuos proportionales progreſſionem. Sic; donec occurrat Geometricus, vel de quo quærimus, vel ei propinquus.

9900448 8070
990 0448

9899058 7522

Quia ergo iſte primo eductus iam eſt minor eo, de quo quæritur, ideo non progrediemur amplius, ſed cum debeat eſſe inter iſtos maiorem, & minorem, ideo ad hoc, vt illum inueniamus minutiorem inſtituemus progreſſionem ſic.

9900448 80700 A
99 00448

9900349 80252
99 00349

9900052 79650
9 90005

1 9900042 89645
9 90004

9900250.

9900240	79903		2	9900032	99641
99	00240			9	90003
9900151	79650		3	9900023	09638
99	00151			9	90012
9900052	79509	B	4	9900013	19636
99	00052			9	90001
9899953	79457	C		9900003	29635

Erit itaque inter hos duos B, & C poſtremos cum vnus ſit mainr alius minor 9900000. de quo quærimus, quare opporteret adhuc inter iſtos altos proportionales vltimos inuenire in eo ordine, in quo ſunt proportionales quinti ordinis, ſed iſti non poſſunt eſſe plures, quam 52. iuxta numerum vnitatum, quę ſuper 9900000. accreſcunt in Geometrico B 9900052. vt patet ex quinta tabula. Quis, ergo inter A, & illum, de quo quærimus quatuor Geometrici intercluduntur, ideo quater accipiuntur partes Aritbmeticæ ſuperius inuentæ 10. 90438. & fient 40. 361752. qui ſi rurſus multiplicetur per 10. ob proportionales interceptos inter quoslibet eorum minores eiuſdem ſpeciei, vt in quinto ordine fient 400. 3617520. cui ſi etiam addantur 52. vnitates, fient 452. cũ fractis ſuis addendi Arith. 10009. & cęt.

Vel etiam meliùs accipiantur Arithmeticæ differentiæ iuxta ſingulos Geowetticorum ordines, quis ergo inter primum Geometricum A, & de quo quæritur 9900000. nullus intercipitur Geometricus tertij ordinis, ideo nullus accipitur illius ordinis Arithmericus, quia verò intercipiuntur 4. quarti, ideo quater accipitur Aritbmetics differentis quarti 100 0005024. vt fiant 400 0020096. cui addimus Arithmeticum Geometrici 52. quinti ordinis 52. 0000052. & fit Aritbmeticus quæſitus 452. 0020148. addendus Arith. 10009. &c. vt fiat Geometrici 9900000. de quo quærebatur.

COROLLARIVM I.

NOtabis noſtros numeros extremarum tabularum exiſſe paulò maiores in Arithmeticis differentis proximè 2500. quàm quas compoſuit ipſe Neperus. Ratio verò huius rei eſt, quia ipſi eſt primus tabulę primæ 100483. & cæt. nobis vero 100543. & cæt. quia ipſe ſumpſit aliquid minùs, quàm quòd differentia Geometrici dabat, nos quid maius ipſa eadem differentia ſumpſimus, vtpote ad libitum, vt patet ex Coroll. propoſ. 15.

COROLLARIVM II.

ADuerte quoque Arithmeticos, non ſolùm creſcere per numeros integros, ſed etiam per fractiones, quòd in reperiendis illis, qui primis tabularum Geometricis applicantur neceſſariò fractiones eſſent admittendæ, quæ per continuam additionem deinde creſcebãt in immenſum. Vnde ſpretæ ab initio, deinde magnum errorem poterant cauſare, incępit ergo creſcere ſeries Arithmerica, ne dum ſimplici vnitate, ſed addita fractione 000000I. vt in illa fractione daretur locus, quo poſſint ſucceſſiuè, & aliæ, fractiones recipi, & continuè addi. Verùm hæ fractiones in tabula ſinuum, ſeu abſoluta Logarithmica contemnendæ, quòd ſolùm deſeruiant ad continuam earum additionem, ob quam ſucceſſiuè in integros tranſeunt, quam ſingulę ſingulis in progrediendo adduntur.

EXPENSIO V.

De Logarithmis in tabulas ſinuum transferendis.

COnfectis omnibus tabulis, & iis Logarithmorum ſerie inſtructis, vltimus labor poſtulat, vt illos in tabulas ſinuum transferamus, vnde fit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Logarithmos tabulis ſinuum applicare vſq; ad ſinum gr. 45. à ſinu toto.

DAtum ſinum per tabulas ſupra poſitas logarithmis inſtructas quære, vel enim occurret prorſùs idem, vel non pluribus, quam 10. vnitatibus diſtans, ſi perduxiſti tabulas vſque ad ordinem quintum, quòd, ſi vſque ad ordinem quartum differet 100. vnitatibus. Quære ergo in tabula ſexta, quid vnitates illæ, quibus differũt iſti duo Geometri exhibeãt in Arithmeticis, & hoc adde Arithmetico reperti ꝓportionalis ſi ſit minor ſubducito, ſi ſit maior eo, qui in tabulis logarithmicis inuenitur, eritq; logarith. dati ſinus.

V. g. datur ſinus 7107995. requiro illum in tabulis proportionalibus, reperioque in tabuls vltima tertij ordinis numerum proximum minorem 7107989. cuius logarithmus eſt 3415020. differtque Geometricus à dato 6. vnitatibus. Reperio itaque has vnitates in tabuls ſexti ordinis Geometrica, & dant mihi 4. vnitates correſpondentes pro Arithmetico competente, quas addo logarithmo 3415019. fitque logarithmus 3415024. Sinus dati 7107995. fracti verò poſthabeoni, quia illi ad ſolam continuationem tabularum requirebantur.

Veritas verò huius operationis oſtenditur ex propoſ. 15. Poſſet etiam reperiri ex Coroll. prop. 12. & ex Coroll. propoſ. 15. ſed faciliùs per hanc, atque certiùs.

COROLLARIVM I.

HInc omnes ſinus vſque ad centum faciliter dantur per ſolam inſpectionem Tabulę ordinis ſexti. Nam cum ibi proportionales ſola vnitate decreſcant quilibet occurret cum logarithmo addendo ſpretis fractis, vt modo non ampliùs neceſſarijs, cum ſolùm ad condendas tabulas requirantur: ſic ſinus 9999995. reperies logarith. 7. Sic 9999905. reperies logarithmum 95. cum fracto 0000095. qui ſpernendus eſt.

COROLLARIVM II.

REperies quoque ſinuum aliorum logarithmos, qui cadunt in tabulam quinti ordinis, vel quarti, ſic. Dati ſinus 9999105. reperitur proximus proportionalis in tabuls primæ quarti ordinis 9999100. quia ergo ille ſinus eſt maior 5. vnitatibus, logarithmus 900. diminuendus vnitatibus 5. ex tabula ſexti ordinis, ſed quia adſunt

fracti

fracti ſatis ſenſibiles vltra integros, ideo accipiendæ ſunt 4. eritque logarithmus 896. vel 895. ſinus 9999105. Eidemque logaritbmo 35. vnitates ex tabula ſexti ordinis addendæ, vt fiat logaritbmus ſinus ſequentis 9999065. Sicque erit 930, logarithmus ipſius ſequentis, & ſic de omnibus alijs, vt vſus ipſe oſtendet.

Ita quoque fecimus in reperiendo logarithmo applicando ſinui Gr.45 qui neceſſarius eſt ad reliquorum ſinuum logarithmos inueniendos. Namque, cum ſit ſinus ille 7071068. erit inter proportionales primi ordinis 7105532. &c. & 7034477. & cæt. incepimus itaque proportionales ſecundi ordinis interponere, vt vides hic.

			Logarith.
	7105532	420	3418488
	7105	532	
1	7098426	888	
2	7091328	468	
3	7084237	134	
4	7077152	897	
	7070075	745	

Eſt ergo ſinus quæſitus inter hunc vltimum, & penultimum: quare interiaciemus proportionales tertij ordinis. ſic

	7077152	8976
	707	7152
1	7076445	1818
2	7075737	5373
3	7075029	96,6
4	7074322	4607
5	7073615	0285
6	7071.07	6670
7	7072200	3763
8	7071493	1563

Deinde alij proportionales quarti ordinis interponendi quales ſunt.

	7071493	15630
	70	71493
1	7071422	44137
2	7071351	72715
3	7071281	01364
4	7071210	30083
5	7071139	58873
6	7071068	87734

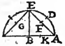
Hic ergo vltimus eſt valdè propinquus, & differt ſolum fractis à ſinu dato. Accipiamus ergo logarithmos conuenientes ordinis primi proportionali, qui eſt 3418488. 8721596. deinde ex prima tabula ſecundi ordinis accipiemus quarti proportionalis logarithmum 40036. 8753740. deinde ex prima tertij accipiemus octaui Geometrici logarithmum 8003. 6301936. tandem ex prima tabula quarti ordinis accipiemus ſexti Geometrici logarithmũ iuxta.n.interpoſitorũ log. 597. 0029847 & omnes in vnam ſummam redigemus, eritque logarith. ſinus Gr. 45. nimirum 3467125 ½. abiectis omnibus fractis.

Præaſſumptum. Quia vſque ad dimidium tabulę ſinuũ tabulas proportionales logarithmicaſq; ordinauimus. Modo quomodo reliquis ſinubus logarithmi applicandi inueniantur docendum eſt; & hoc non, quia vſque ad vltimum ſinum deduci non poſſent, ſed ſolum ad laborem leuandum. Ad id verò eſt neceſſarius logarithmus dimidij ſinus totius. Vnde quomodo reperiatur, tradendum eſt.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Sinus 45. Graduum eſt medium proportionale inter ſinum totum, & dimidium ſinus totius.

SVpra probauimus propoſ.18. expenſ.3. cùm ageremus de ſinibus inueniendis; quòd dimidium ſinus totius AK ſe habet ad ſinum dimidij alicuius arcus EA, vt ſinus complementi illius dimidij BG ad ſinum totius arcus BE; ſed ſinus 45. Grad. eſt æqualis ſuo complemento, & ſinus arcus dupli ipſius eſt ſinus totus; ergo ita ſe habet AK



dimidium ſinus totius ad EF ſinum 45. Grad. vt eius, & illi æquale complementum EG ad ſinum dupli arcus EB, qui eſt ſinus totus, & conſequenter EF, & EG æquales ſunt medium inter AK dimidium ſinus totius, & BE ſinum totum, & ideo ſi ex eis fiat quadratum illud erit æquale rectangulo ex ſinu toto, & dimidio eius facto ex propoſ.19. lib.6. element.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quòd cùm exp.1.huius tract. propoſ. 6. & 4. duplatio Arith. æquiualeat quadrationi, & propoſ.3. ſubductio diuiſioni. Si logaritbmus ſinus 45. gr. dupletur, & ab eo duplato ſubducatur logarith. ſinus totius, qui eſt 0. relinquetur dimidij ſinus totius Arithmeticus, & quia ſupra reperimus Arithmeticum 45. Grad eſſe 3467125 ½, ſi dupletur erit 6934251. & ſubducatur 0. ſilicet nihil ab eo auferatur, erit idem logarithmus ſinus dimidij nempe ſinus 5000000.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Dato logarithmo dimidij ſinus totius, & ſinus maioris arcus, quam Gr.45.cum complemento eius dimidij, reperire dimidij arcus, vel ſinus logarithmum.

PRæſupponitur, quòd ſint appoſiti omnibus ſinibus ſui logarithmi à 90. vſque ad grad.45. & ſint alij, quærendi minores dimidio, & conſequenter minores, quám ſinus Gr. 45. Vnde, & eorum complementum erit cognitum, cùm arcus, qui quæritur ſit minor, quam gr.45. eius complementum erit ſinus arcus maioris, quam Gr. 45. & conſequenter eius logarithmus erit notus. Addantur itaque ſimul arcus dati logarithmus, & dimidij ſinus totius, & à ſumma auferatur logarithmus ſinus complementi dimidij ipſius arcus, & reſiduum erit logarithmus ipſius dimidij.

Probatur autem ex propoſ.15. Expenſ.8. de ſinubus. Nam dimidium ſinus totius ſe habet ad ſinum alicuius arcus, vt ſinus complementi ſe habet ad ſinum dupli arcus. Vnde rectangulum ex medijs ex propoſ.18. Elem. erit æquale rectangulo ex extremis, & ſic in geometricis ſi multiplicentur ſimul extrema, nempe dimidium ſinus, & ſinus dupli arcus, & diuidantur per complementi ſinum, dabit reſiduum ſinum dimidij arcus, vt ibi diximus; ſed vt propoſ.1. expenſ.1. h. diximus in Arithmeticis aggregatio æquiualet multiplicationi, & ex prop.3. ſubductio diuiſioni, ergo aggregatus logarithmus dimidij ſinus, cum logarithmo totius arcus æquiualebit eorundem Geometricæ multiplicationi, & ſubductus logarithmus complementi æquiualebit diuiſioni factæ per eiuſdem ſinum, & conſequenter reſiduum ex ſubtractione logarithmica erit logarithmus dimidij arcus. Exemplum verò tale eſt.

Sit Logarithmus Gr. 45. m. 15. ex tabula tertij ordinis 3415023 complementum dimidij huius arcus eſt Gr. 67 m. 22 ½ culus logarith. ex tabulâ prima per regulas proximè traditas repertus eſt 801930. logarithmus verò dimidij ſinus totius eſt, vt ſupra 6934151. Addo itaque hunc dimidij ſinus totius logarithmum logarithmo ſinus arcus dati 3515023. fitque ſumma 10349174. à quo ſubduco logarithmum complementi, remanetque logarith. 9547344. ſinus dimidij arcus 22. 37 ½.

COROLLARIVM.

HInc datis omnibus logarithmis ſinuum arcuum maiorum, quam grad. 45. obtinere poteris omnes logarithmos ſinuom arcuum vſque ad 22 ½ Gr decreſcentium, & iſtis datis obtinebis logarith. arcuum vſque ad 11. Gr. & m. 15. & ex iſtis rurſus omnium arcuum logarithmos vſque ad gr.5. m.38. & tandem vſq; ad primum prorſus minutum.

EXPENSIO VI.

De Tabulis ordinandis, & Logarithmis tangentium addendis.

PRæceptum 1. In qualibet paginæ facie 9. columnæ, ſeu areulæ oblongæ diſtinguantur lineis tali, tum longitudine, tùm latitudine, vt commodè numeros capere poſſint inſcribendos, ita quod 61. verſus, ſeu lineas numerorum ſecundum longitudinem ſingulæ comprehendant, & latæ, vt 8. numeros capere poſſint, & ſi de tangentibus agitur vſque ad 11. exceptis prima ſiniſtra, & vltima dextra, quæ duos tantum numeros ſua latitudine capere debent, lineamentiſque tranſuerſis decem ad maiorem diſtinctionem decuſſentur.

Præceptum 2. Primæ columnæ ſiniſtræ G. cum numero gradnum, & m. pro indicio minutorum ſuperſcribendus; perque totam longitudinẽ incipiendo à 0. & deſcendendo vſque ad 60 numeri incluſiuè excreſcẽtes notãdi. Nonę verò columnæ dextræ nihil ſupra ſcribendum, ſed incipiendum à 60. & decreſcentibus numeris perueniendum vſque ad 0. incluſiuè, & tandem numerus 89. & hæc de prima, & ſecunda facie paginæ primæ; cæteræ verò ſucceſſiuè habebunt Gr.1. & 88. ſic Gr.2. & 87. & in reliquis hoc ordine eſt procedendum.

Præceptum 3. Secunda verò columna ſiniſtra continebit ſinus illorum minutorum, qui in prima continentur, ſicut, & dextra octaua ſinus illorum, qui nona columna extenduntur, & conſequenter Graduum, qui ſupra ſcripti ſunt primæ, & infraſcripti nonæ. Hos autẽ ſinus, vel repertos habebis ex tractatu de ſinubus, vel deduces ex tabulis ſinuum vulgaribus, vt Reinholdi, &c.

Iſtis autem ſinibus dextris applicabis logarithmos repertos vt ſupra ex Coroll. propoſ.16. primo, & ſecundo, & hi occupabunt 7. dextram columnam. Siniſtris verò ſinibus applicabis logarithmos repertos ex propoſ.19. & iſti extendentur per totam columnã ſiniſtram tertiam, ſexta verò, & 4. inſcribendæ ſunt tangentes, & tandem 5. & media remanente differentiales numeri ſcribendi ſunt, qui pro tangentibus apponuntur, Oriũtur autem iſti à ſubductione logarithmorum ſextæ columnæ, à logarithmis tertiæ, & id quod remanet à ſubtractione inter vtraſque tangentes hac media columna ſcribendum.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Primæ Nonæque columnæ Gradus, & minuta ſibi ſunt inuicem arcus, & complementa.

PRobatur. Nam cùm illa prima incipiat à 0. creſcendo iſta à 60. minutis ſuper 89. fit, vt quantùm creſcit illa prima, tantùm decreſcat nona, & conſequenter, quòd huic tot minuta, ſeu gradus defficiant, quot primę addita ſunt, & è contra. Quare ſimul additi alter alterius complebit numerum, vt fiant 90. Gr. & ſic erunt ſibi inuicem complementa.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

In prima columna continetur angulus acutus rectanguli minor; in nona dextra angulus acutus eiuſdem maior.

PRobatur. Nam ex propoſ.17. lib.1. element. omnis rectanguli anguli omnes duobus rectis ſunt æquales, qui cũ ſit vnus in rectãgulo rectus, alij duo ſimul erunt vni recto æquales; Vnde alter angulus alterius complementum erit, vt ſunt arcus, qui prima, nonaque columna continentur, vt dictum eſt propoſ.20.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Secunda Columna continentur crura minora minores angulos ſubtendentia: in octaua verò crura maiora maiores angulos ſubtendentia.

PAtet, quia in ſecunda minorum angulorum, & arcuum ſinus continentur, ſicut in ſexta ſinus arcuum maiorum, & angulorum.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ex ſinu dextro octauæ columnæ, & ſiniſtro ſecundæ, & ſinu toto rectangulum triangulum componatur.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Logarithmi tertiæ columnæ ſunt Logarithmi proportionis cruris minoris rectanguli ad eius baſim, ſeu Hypothenuſam, ſicut, & logarithmi ſeptimæ ſunt logarithmi proportionis cruris maioris ad eandem Hypothenuſam. Suntque ſibi inuicem antilogarithmi nempe complementorum logarithmi.

PRobatur prima pars. Nam proportio quam habent crura cum baſi tunc innoteſcit cum baſis per crura diuiditur, ita proportio 5000000. ſinus Gr. 30 eſt ad ſinum totum 10000000. vt 1. ad 2. quia diuiſus ſinus totus per crus 5000000. dat 2. Sed ex dictis propoſ. ſubductio in logarithmis æquiualet diuiſioni: Ergo logarithmus cruris ſubductus à logarithmo ſinus totius dabit logarithmum proportionis cruris cum ſinu toto: Sed logarithmus ſinus totius eſt o. Ergo ſubductus relinquit numerũ, vt erat, & ita ne dum eſt logarithmus ſinus: ſed etiam proportionis eiuſdem ſinus cum ſinu toto.

Probatur ſecunda pars. Quia ſinus, quibus applicati ſunt, ſibi dextrorſum, & læuorſum correſpondentes ſunt ſibi inuicem complementa. Ergo, & logarithmi ipſorum ſibi inuicem ſunt antilogarithmi.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Tangentium, & ſecantium, quæ ſuprà ſinum totum excreſcunt logarithmi infra o. intelligendi; ita quod ſint minores nihilo tot vnitatibus, quot ſunt in ipſo logarithmo.

PRobatur. Nam cum à o. creſcant logarithmi noſtri, dum à ſinu toto ipſi ſinus decreſcunt neceſſe eſt, quòd ſi dentur aliquæ lineæ, vt ſunt Tangentes arcuum maiorum, quam 45. Gr. & omnes ſecantes, quę creſcunt vltra ſinum totum, quòd illarum logarithmi vltra o. decreſcant.

COROLLARIVM.

VNde logarithmi poſſunt ſumi, & vt defectiui, & vt abũdantes. Abundantes erunt, ſi intelligantur creſcere ſupra o. vt vſque nunc fecimus: defectiui verò ſi infra o. decreſcere intelligantur, & taliter aliquos intelligere erit neceſſe, ſi tangentibus, & ſecantibus eos applicare voluerimus, quæ vltra ſinum totum excreſcunt.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si Logarithmos tertiæ columnæ ſiniſtræ, & ſeptimæ dextræ, vt defectiuos conſiderauerimus erunt logarithmi Hypothenuſarum, ſeu ſecantium Arcuum, quibus ſunt complementa, & Antilogarithmi.

Sic logarithmi ſinuum arcuum dextrorum fient logarithmi ſecantium ſiniſtrorum arcuum, & è contra.

PRobatur. Nam propoſ. 18 Tr. 20. de ſinubus probauimus ſinum totum eſſe medium proportionale inter complementum arcus, & ſecantem eiuſdem arcus, & ideo, quòd multiplicatus in ſe, & diuiſus per complementum daret arcus illius ſecantem: ſed quia in logarithmis additio æquiualet multiplicationi, & ſubductio diuiſioni, ideo ſi o. logarithmus ſinus totius addatur ipſi o & ab hac ſumma ſubducatur logarithmus complementi arcus V. g. logarithmus arcus dexteri, relinquetur idem logarithmus minus, quam o. ſecans arcus ſiniſtri; cui arcus dexter eſt complementum. Erunt verò logarithmi conſiderandi, vt infra o. deficientes; quòd omnis ſecans ſuper ſinum totum excreſcat, vt modò diximus.

THEOR. IX. PROPOS. XXVI.

Differentiales mediæ columnæ ſunt logarithmi proportionis cruris maioris reſpectu minoris, & logarithmi ſecundarum, ſeu tangentium, tum arcuum dextrorum, tum ſiniſtrorum, ſub diuerſa tamen conſideratione. Nam vt abundantes ſunt differentiales, logarithmique tangentium arcuum ſiniſtrorum minorum Gr. 45. at vt defectiui ſunt logarithmi tangentium arcuum dextrorum maiorum gr. 45.

PRob. ſecunda pars. Nam ex prop. 16. tract 20. habemus, quòd eadem proportio eſt ſinus cōplementi ad ſinum arcus; quam ſinus totius ad tangentem, & ideo, quod multiplicatus ſinus totus per ſinum arcus, & diuiſus per ſinum complementi, exhibeat tangentem arcus; vel è contra multiplicatus per ſinum complementi, & diuiſus per ſinum arcus exhibeat tangentem complementi. Sed in Arithmeticis ex propoſ. 1. & 3. huius, additio ęquiualet multiplicationi, & ſubtractio diuiſioni; Ergo ſi logarithmus ſinus alicuius arcus addatur logarithmo ſinus totius, qui eſt o. & ideo remaneat, vt erat ante, & ſubducatur ab eo logarithmus ſinus complementi dabitur tangens arcus, & ſi ſubducatur ab eo ſinus arcus dabitur tangens complementi, ideo eædem differentiæ erunt, & logarithmi arcuum, & logarithmi complementorum, arcuum quidem, vt abundantes, & quatenùs logarithmi ſinuum maiorum, quam Gr. 45. ſubducuntur à ſinuum minorum maioribus logarithmis, vt relinquatur tangentis logarithmus; complementorum verò quatenus defectiuæ, & logarithmi maiores ſinuum minorum, quam 45. Gr. ſubducuntur à minoribus logarithmis maiorum ſinuum, vt relinquatur tangētis logarithmus. Maiores verò numeri à minoribus ſubducuntur per intellectum; quatenus intelligitur minori tot vnitates deficere, quot ſufficiunt ad hoc, vt ſubduci poſſit; ita 15. ſubducitur à 4. cum intelligitur illi 4. vnitates 11. deficere, quas ſi haberet 4. à 15. poſſet ſubtrahi, cùm tunc eſſet iunctus cum 11; & 4. & 11. faciunt 15. numerus verò 15. à 15. ſubduci poteſt, & ideo differentię logarithmicæ ſumptæ, vt deficiētes. & vt à minoribus logarith licet maioras poſſunt ſubduci; ſunt illæ ipſæ, quas dant minores logarithmi à maioribus ſubducti. Sicut 11. eſt eadem differentia, quam dat numerus 4 ſubductus à 15. & quam dat 15. ſubductus per intellectum à numero 4.

Probatur prima pars, quod differentiales ſint quoque logarithmi proportionis crurum: Nam tunc proportio vnius cruris ad aliud obtinetur, cùm crus minus diuidit maius. Quotiens enim eſt denominator proportionis: Sed in logarithmis deductio æquiualet diuiſioni, & differentiales numeri ſunt orti à ſubductione logarithmorum minoris cruris à maioris cruris logarithmis. Ergo ſunt logarithmi illi numeri differentiales proportionis vnius cruris ad aliud.

COROLLARIVM.

COllige, quod ſi tangentium logarithmis vtaris in exercenda regula proportionum, & iubeat, tāgentis logarithmū debere demi, vel addi, ſi addit ſignū † hoc, quod ſignificat logarithmum tangentis debere ſumi, vt abundatem, tunc obediendum eſt; & cum præcipit regula, quòd ſubducatur logaritmus tangentis; vel addatur; ſi ſigno defectiuo hoc ∼ in tabulis notetur, è contra faciendum.

Logarith.

1 Sinuum G. 45. vſq; ad 90.	2 Tangentium	3 Sinuum G. ab 1. vſq; ad 45.
0	80	90
4	72	76
8	64	68
12	56	68
16	48	64
20	40	60
24	32	59
28	24	52
32	19	48
39	8	44
40	0	40

Quod concipies à ſerie numerorum logarithmicorum hic appoſita, qui imitantur logarithmos ſinuum, atque tangentium in ſuo progreſſu.

Series itaque prima cogitetur, tanquam ſi eſſent logarithmi minoras ſinuum arcuum maiorum, quàm 45. Graduum; Secunda ſint differentiæ, & tanquam tangentium logarithmi habeantur; Tertia putentur tanquam logarithmi ſinuum arcuum minorum, quàm 45. gr. quia ſunt maiores Arithmeticis primæ ſeriai.

Quia itaq; tangens eſt ad ſinum totum, vt ſinus arcus ad ſinum complementi: differentialis tangentis maiorum arcuum, quàm 45. Gr. & conſequanter maior ſinu toto, diuidet logarithmum ſinus totius o. & logarithmum arcus maioris, quam 45. Grad. aggregatos, & prodet logarithmum arcus minoris, quam 45. Gr. V. g. arcus logarith. 24. diuiſus per differentialem 40. daret logarithmum deſideratum; ſed quia differentialis 40. eſt defectiua reſpectu logarith. 24. ideo addenda eſt, & fiet 64 logarithmus arcus minoris, quàm Gr. 45.

At ſi tangens ſit minor ſinu toto; etiā ſinus quæſitus erit minor dato; Vnde logarithmus V. g. 94. additus ſinui toti, & minutus differentiali 32. dat logarithmum arcus maioris pariter 32. quia ſ. hic differentialis 32. conſideratur, vt abundans.

Vides itaque, quod quando deſideratur logarith. ſinus minoris arcus, quam Gr. 45. differentialis, quæ debebat addi ſubducitur, at quando deſideratur ſinus arcus maioris, quàm gr. 45. logarithmus differentialis, quę debebat addi, etiam additur. Quia ſi 24. cum differentiali 32. minorem nihilo, facit 56. qui æquat ipſum 56. maiorem nihilo. Ergo 28. cum 32 facit 60. ob additam differentiam 4. quam addit 28. numero 24. & ſic 32. cum 32. facit 64 & ſic 36. cum 32. facit 68. & cæt. quare addita differantialis logarithmo minori conſtituet maiorem, ſicut ablata minoram logarithmum cum tamen iuxta regulam ſemper deberet ſubduci, niſi differentiales deficerent, & inciperent contrario

trario modo à o. creſcendo dum ſinus deficinnt.

Iraque coilige regulam Generalem, quod in defectiuis addendis cum abundãtibus, ſeu logarithmis ſinuum qui omnes ſunt abundantes, cum differentialibus, ſeu in logaritgmis ſinuum. ſed vt ſecantium ſomptis, & ideo omnibus defectinis, addere idem eſt, ac ſubducere.

In defectiuis verò ab abundantibus ſubducendis, vel è contra, ſubducere idem eſt, quod addere. Quia ſilicet ſubducendo acquiritur id, quod addendo eſſet conſequendum, vel addendo id inuenitur, quod ſubtrahendo debuiſſet reperiri.

EXPENSIO VII.

De Logarithmis numerorum abſolutorum.

CVm ex applicatione logarithmorum ſinubus arruum facilitas ſingularis in regulæ proportionum tractanda emeeſerit, cùm ad inuentionem ipſorum ſinuom adhiberetur. Excogitauere Anthores numeris quoque abſolutis, & naturali propagatione creſcentibus logarithmos addere, vt ipſa regula antea ſimili facilitate conſtaret in numeris abſolutis aſſumpta; quod etiam inuentum ab ipſo Nepero innuitur, ſed obſcuriſſimè, expoſuit tamen, vtcumque Henricus Briggius; ſed fęliciùs operi mandauit in ſuis Chiliadibus, quæ ab 1. vſq; ad 100000. excreſcunt naturali augmento.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

In ſerie numerorum ab vnitate continuè proportionalium, ſi numerus quilib:t alterum multiplicet. Eius logarithmus erit aggregatum logorithmorum ipſis multiplicantibus ſe inuicem, applicatorum naturali ordine progredientium.

SInt proportionales ab vnitate numeri in ſeriẽ diſpoſiti 1. 2. 4. 8. & cæt. & eorum logarithmi naturali ordine propagati 1. 2. 3. 4. & cæt. Dico, quòd ſi aliquis V. g. 2. multiplicet aliquẽ alium nempe 16. & faciat 32. huius facti logarithmum eſſe aggregatom logarithmi duorum numerorum ſe multiplicantiũ idest logar. 1. & 4. nimirum 5. Sic ſi 4. multiplicet 32. & faciat 128 logarithmus huius numeri 128 erit aggregatũ logarithmi 2. & logarithmi 5. applicatorũ numero 4. & 32. quod aggregatum eſt 7.

Propor.	Log.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Probatur ex dictis prop. 1. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si aliquoties numerus aliquis in ſe, & in productum multiplicetur, & vltimum productum diuidatur, genitos excedent quoti ipſi ſolâ vnitate; addito verò primo termino æquabuntur.

PRobatur. Sit 1204. factus ex multiplicatione 2 in ſe, & in productos ſucceſſiuè, erunt geniti 9. at ſi diuidatur ſucceſſiuè per 2. Quoti erunt ijdem vtique V. g. 512. poſtea 256. & cæt. vſque ad 2. ſed 2. inſuper capit in ſe ſemel; Ergo Quoti vnica vnitate vices multiplicationum excedent: at ſi genitis addamus latus, & primam radicem 2. erunt æquales.

Mult.		Quot.
2		1
4	1	2
8	2	3
16	3	4
32	4	5
64	5	6
128	6	7
256	7	8
512	8	9
1024	9	10

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Numeri diuiſi per 10. quoties fieri poteſt, quoti tot erunt numero, quot ipſæ figuræ vna dempta ad dextram.

SIt numerus quilibet 1679087. diuidendus per numerum 10. primus quotus erit 167908. ſecundus erit 16790. tertius erit 1679. quartus erit 167. quintus erit 16. ſextus erit 1. ipſæ verò figuræ vna dempta ſex reſtant.

* Probatur. Quia tot erunt decimæ, & decimę decimarum, & cæt. ex propoſ. 1. tract. 8. quot ſunt loca excepto vltimo loco ad dextram, qui eſt vnitatum locus: Si ergo quilibet numerus V. g. millio per 10. diuidatur habebimus centeſimas millium, vel vnam, vel 2. vel 4. & cæt. vique ad 9. quæ ſi diuidentur per 10. vel duas, vel tres vſq; ad 9. dabũt decimas millium, quæ ſi diuidentur per 10. dabunt vnitates millium, idest decimas centeſimarum, vel 1 vel 2. vel 3. vſque ad nouem; & ſi rurſus diuidantur, exhibebunt decimas decimarum, & tandem vnitatum decimas. Itaque diuiſio per 10. reddit eundem numerum ad locum inferiorem proportionẽ ſignificantẽ per decimas ab vnitate creſcẽtẽ: Quare cũ vltima figura ad dextram, iam decimas non ſignificet, diuidi nequit: Vnde quotus ex diuiſione 10. in vltima figura haberi non poterit: Quadere tot erunt quoti ſi diuidatur numerus aliquis per 10. quot erunt figurę vltima dempta.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Quot ſunt notæ in vno quoque factore, tot erunt in facto, & aliquando vna minus.

SInt multiplicatores 234. & 845. qui inuicem ſe multiplicent, factus erit 197730. nempe totidem figuris, quot ſunt in multiplicatoribus vnitates; at 234. multiplicet 145 genitus erit 24930. nempe minutus vnica figura, ex eo numero figurarum, quo vterque multiplicatus, & genera ſ conſtat. Pro-

* Probatur ex regula multiplicationum tradita prop.14.& 15.tract.8. Nam vltima ſiniſtra figura B multuplicãs poſſint numerũ productum vnitates ſignificantem tertio loco, vt in A. Vel ergo genitus ex dextro vltimæ figuræ ſiniſtræ B facit 3. aut ad ſummùm 4. figuras, vt diximus; ſi tres facit additis duobus locis CD faciũt quinque; ſi quatuor additis duobus locis CD, ſunt ſex: Ergo tot figuræ erunt in genito, quot in vtroque generante, vel tantùm minùs vna.

	234
B	145
	1170
	936
	ACD
	234
	o

THEOR. V. PROPOS. XXXI.

Si ſeries aliqua producatur numerorum duorum ab vnitate continuè proportionalium donec logarithmum vltimus terminus conſequatur, qui ab vtriuſque logarithmorum multiplicatione gignitur; Is terminus erit, tum vnius, tum alterius datorum ab vnitate continuè proportionalium terminus,

D	A	B	C	K
0	1	0	0	0
	2	1		3
	4	2		6
	D 8	3	1	9
	16	4		12
1	E 32	5		15
	264	6	2	18
	128	7		21
	256	8		24
	512	9	3	27
2	1024	10		30
	2048	11		33
	4096	12	4	36
	8192	13		39
	16384	14		42
P3	32768	15	5	45

SIt ſeries numerorum A in qua dati ſint duo numeri 8.& 32. quorum logarithmi 3.& 5. multiplicentur inuicem,& fiant 15. producatur verò ſeries vſq; ad 15. terminos ab vnitate.

Dico, quod vltimus terminus 32768. eſt terminus communis proportionalium datorum numerorũ; ſi ab vnitate excreſcant. V.g. ſi ſtatuatur primus D 8 ab vnitate, & ratio 1. ad 8. in ſeriem cõtinuetur terminus erit prædictus 32768. & ſi ſtatuatur quoque primus terminus ab vnitate E 32. & ſecundùm eam proportionem, quam poſſidet 1. ad 32. ſeries continuetur, illius ſeriei quoque terminus erit prædictus 32768. cuius logarithmus 15.

* Probatur. Inter D, & vnitates tres mediant proportionales: Ergo, ſi 1. ponatur ad 8. ita 8. ad aliud 264. inter 8. & 64. tres proportionales interſerentur ex prop. 9. lib.8. & ſic de aliis. Ergo ſi proportio quinquies repetatur, & producatur vltimus terminus erũt hunc inter vltimũ,& vnitatem 15. termini virtualiter interpoſiti, ideſt poterunt interponi, & numeris exarari eiuſdem proportionis, quæ eſt 1. ad 2. cùm proportio 1. ad 8. quæ quinquies repetitur, ſit proportio 1. ad 2. ter repetita; Ergo vltimus terminus erit idem, ac prædictus 32768. ſiquidẽ eſt iſte decimus quintus terminus progreſſionis proportionis 1. ad 2.

Rurſus ſit alter terminus primus ab vnitate E 32. & fiat, vt 1. ad 32. ita 32. ad aliud P. & proportio producatur, & extendatur in ſeriem, quia ergo inter 1. & 32. quinque termini mediant, etiam inter 32. & tertium P quinque termini interponentur, ſi ergo fiant ex iſtis tres termini virtualiter erunt 15. quia inter 1, & 32. eſt proportio 1. ad 2. quinquies repetita; vnde inter vnitatem, & tertium terminum inuentum erit proportio 1. ad 2. quindecies repetita: ſed etiam 32768. habet proportionem 1. ad 2. quindecies repetitam, ergo iſte erit tertius terminus proportionis 1. ad 32. ſed etiam erat quintus terminus proportionis 1. ad 8. ergo eſt terminus communis harum proportionum.

COROLLARIVM.

HInc enaſcitur, quòd duorum numerorum in aliqua ſerie eiuſdem proportionis, ſed tamen diuerſimodè repetitæ exiſtentium, enaſcitur inquam, quod quotorum numerus reciprocè ſit proportionalis numero logarithmorum; ita numerus E 32. quoti, quibus diuidit 32786. ſunt 3. logarithmi verò 5. at numeri D logarithmus eſt 3. numerus verò quotorum; quibus diuidit eundem numerum 32786. eſt 5. Quare in numero E 32. vt eſt quotorum numerus ad logarithmorum numerum, ideſt vt 3. ad 5. ſic in numero D 8. eſt logarithmorum numerus ad quotos; nempe vt 3. ad 5. quod ſi adhibeas alios logarithmos vt K, idem erit nempe, vt 9. ad 15. ideſt vt 3. ad 5.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Datis duobus numeris in eadem continuè proportionalium ſerie poſitis vnà cum logarithmo naturali vnius, exquirere logarithmum naturalem alterius.

VOcamus logarithmos naturales, qui naturali augmento per vnitates propagantur, vt 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. & cæt.

Sint itaque in præcedenti ſerie dati duo numeri V.g. 8. & 32. deturque huius logarithmus 5. ſitq; exquirendus logarithmus numeri 8. fiat per multiplicationem numeri 8. in ſe, & in productum toties aliquis numerus, donec geniti in numero æquent logarithmum 5. & ſint 5. Sitque vltimus productus 32768. ex prop. præc. hic numerus erit æqualis numero illi, qui fieret ex multiplicatione 32. in ſe, & in factos, qui tot erunt, quot logarithmi naturales numero 8 aſcribendi; quia ita eſt eſt Coroll. numerus quotorum termini 32. quibus diuidit vltimum genitum ad logarithmos naturales ſuos, vt logarithmi numeri 8. ad quotos ſuos, quibus eũdem vltimum genitum diuidit. Si ergo reperiamus quotos, quibus 32. diuidit vltimum terminũ ſuum 32768. qui erunt tres habebimus quoque logarithmum ipſius 8. nempe 3, qui debet aſcribi in ſerie prima in qua etiam eſt logarithmus exhibitus numeri 32. quæ eſt præced. propoſitionis ſeries.

1	0	1	0
32	1	8	1
		64	2
1024	2	512	3
		4096	4
32768	3	32768	5

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duobus numeris, quibuſcumque, & alterius logarithmo ad libitum ei applicato alterius logarithmum exquirere.

SInt numeri dati 2. & 10. & huius logarithmus ſtatuetur 100. quæraturq; logarithmus ipſius 2.

Primus 2. itaq; ſe ipſum multiplicet, & genitū ſucceſſiuè, vt multiplicationum numerus deficiat ſolùm vnica vnitate à dato ſecundi 10. logarithmo, qui logarithmus eſt 100. ideo ſint 99. ſe cum ipſo ſint 100. Diuidaturq; ruſsùs quoties fieri poteſt, & ex propoſ. 28. quoti erunt 100. quia numerus in ſe ipſum ductus, ſi rurſus diuidatur faciet numerum quotorum æqualem numero genitorum & vnum quotum ſupra adiunget, vel æqualem genitis addito primo generante. Numerus itaque vltimo genitus, cuius quoti æquāt logarithmū 100. ii 10. eſt ille, qui ſi per 10. diuidatur, quotics fieri poteſt, ex præc. quoti eius dabūt logarithmum n. 2.

Sed, quia ille numerus ob maximam ſuam multitudinem haberi laborioſè poteſt. Siquidem creſcit vltra omnem exiſtimationem, poterimus abſque eius cognitione habere numerum quotorum, quem quærimus, abque eo, quod eum noſcamus, & ſucceſſiuè diuidamus. Nam cùm numerus quotorum, quando diuiſor eſt 10. fit idem, ac figurarum multitudo vnâ ſolum demptâ ad dextram ex propoſ. 31. hinc eſt, quòd ſatis erit noſcere figurarum numerum, quæ terminum vltimum ex 100. multiplicationibus numeri 2. genitū componunt. quod ad hoc, vt conſequamur breuiùs, & faciliùs, quam fieri poſſit ſit.

PROBL. III. PROPOS. XXXIV.

Numerum notarum, & figurarum in vnaquaque multiplicatione obtinere, abſq; ipſa omnium figurarum multiplicatione.

FIet id multiplicando ſolùm tres, aut quatuor, aut quinque figuras ad ſiniſtram, quæ nec enim toto numero multiplicentur; ſed ſolum cum duabus, vel tribus V. g. ſit numerus 2345. multiplicandus in ſe ad cognoſcēdum numerum ipſum, vt docuimus tract. 8. propoſ. 17. ita ſtabit multiplicatio.

2345
2345
———
11725
9380
7035
4690
———
5499025

Figuræque ſingulæ cum ſingulis numeri diuidendi erunt multiplicatæ.

Sed ad agnoſcendum tantùm loca ſufficiet multiplicare in hoc numero duas extremas figuras, quia ex propoſ. 17. huius, quot ſunt notæ in vno quoque factore, tot erunt notæ, & figuræ in genito aliquando vna dempta. Vnde, vt ſciamus, quando ea demenda eſt, vel addenda vltimæ figuræ vel duarū tantùm multiplicatio erit neceſſitatis, aut ad ſummū quinq; Siquidē aliæ differentiæ, quæ ex aliarū figurarū verſùs dextrā multiplicatione exoriūtur vltimū numerum non augent, cùm ex propoſ. 14. tract. 8. non niſi decimæ poſſint transferi, vel vna, vel duæ vſque ad nouem. Quare oportebit ad ſummum habere cognitionem quinq; vltimorum numerorum ad hoc vt cognoſcamus, an translatio ad ſummam 9. decimarum in magnia ad ſiniſtram numeris vltimam notam poſſit augere; ideoque in prædicto numero ſufficiet multiplicatio numeri ſiniſtri 2. & 3. & quia ex prop. 15. tract. 8. ſcimus numeros harum notarum ad tertium locum, & quartum pertinere, id eſt ſic, vt videa in exemplo ſtabit multiplicatio.

2345
2345
———
5900
4690
———
5380000

Vbi 3. neque per totum numerum, ciuſque omnes notas multiplicauimus, ſed ſolum duas extremas, & licet non præbeant eundem numerum, ſed minorem; præbent tamen eundem numerum notarum, vt priùs, quæ ſunt 7. Et licet in numerorū teſſera, vbi notæ ſignificāt maiores numeros, neque multiplicatio vlla eſſet adhibende, oportet tamen multiplicare ſaltem duas, vel tres vltimas, vt deinde ſucceſſiuè numerus earum figurarum poſſit haberi, quæ continue duplicationu inueniendæ ſunt.

PROBL. III. PROPOS. XXXV.

Notarum numerum multis intermiſſis proportionalibus inuenire.

SIt numerus 2. cuius notæ inueniendæ ſint, quæ in vltimo per centum multiplicationes propagato termino inueniuntur, ſi id fiat continua multiplicatione laborioſe res eſt, quare ita inſtituemus multiplicationem.

Ducatur binarius in ſe; & fiant 4 deinde 4. in ſe, & fiant 16. deinde 16. in ſe, & fiant 256. erunt autem horū logarithmi, ipſius binarij 1. & quia 4. eſt ipſius quadratum ex propoſ 6. huius, eius logarithmus erit 2. Sic, quia 16. eſt quadratum ipſius 4 eius logarithmus erit duplum ipſius 2. nempe 4. & quia 256. eſt quadratum numeri 16. ideo eius logarithmus erit 8. ſed, ſi volumus peruenire ad 10. multiplicetur primus numerus 4. cum hoc vltimo 256. & producetur numerus 1024. cuius logarithmus naturalis erit aggregatum logarithmi 2. applicati proportionali 4. & logarithmi 8 applicati proportionali 256. Vnde logarithmus erit 10 oſtendens iam virtualiter per has 4 multicationes eſſe completas multiplicationes decem virtualiter, & licet inter 2. & 1024. nō ſint interpoſitæ actu, intermedient, tamen virtualiter, & potuiſſent deſcribi. Sic autem inſtituendus alius ordo; nam numerus 1024. in ſe multiplicatus dabit numerum primum, cuius logarithmus naturalis erit 20. & hic primus in ſe multiplicatus numerum

merum ſecundum, cuius logarithmus erit 40. & hic ſecundus in ſe multiplicatus dabit alium numerum tertium, cuius logarithmus erit 80. & eundem hic cum primo multiplicatus exhibebit numerum, cuius index erit conflatus ex ſumma logarithmi primo, & tertio applicati, nempe 20. & 80. Vnde erit 100. ſignificabitque vltimum numerum productum continere multiplicationes 100. numerſa. Verumtamen iuxta præced. prop. non quærimus hic ipſum numerum; ſed ſolum notarum, vnde non erit neceſſe ſingulas figuras multiplicare, cum ſingulis omnibus; ſed ſolùm aliquas ad ſiniſtram.

			Proport.	Logar.	Fig.num.
			1	0	
			2	1	
			4	2	1
			16	4	2
			225	8	3
			1024	10	4
			1048576	20	7
		10	9511627776	40	13
	12089	2581961463	00000.00000	80	25
1	2676506002	2823000000	00000.00000	100	31

THEOR. VI. PROPOS. XXXVI.

Licet numeri naturali ordine progredientes proportionales continuè non ſint, adhuc tamen in aliqua magna ſerie; vbi differentiæ ſint paruæ poterunt proximè; vt continuè proportionales vſurpari.

CErtum eſt, quod minimi numeri in ſerie continua proportionalium non ſunt, & ideo, quod logarithmi illis applicari nequeũt, ex præaſſ. 3. Expenſ. 2. huius: at ſi ſtatuantur, & conſiderentur in aliqua magna progreſſione exiſtentes, vt in ſerie ſucceſſiua proportionatorum Tabulæ primæ primi ordinis exp. 2. huius, tunc poterunt reperiri proportionales, qui propinquiſſimi ſint numerorum naturalium proportionibus: quia ſilicet, cùm illæ numeroſiſſimæ progreſſiones interualla inſenſibilia reſpectu totius termini habeant, incidet aliquis proximè V. g. vt numerus naturalis 9. ad 10. ſic in præcitata tabula 1. præit. proportionalis 9043820. ad 10000000. ſe habent proximè, vt 9. ad 10. ſpretis diferentijs 43820. ſic 8016305. ſe habet ad 10000000. vt 8. ad 10. & ſi minores differentiæ eſſent electæ in maiori numero adhuc proportio V. g. 8016305. ad 10000000. magis accederet ad proportionem 8. ad 10. quia partes adhærentes 16305. minores eſſent: Quare patet, quòd numeri naturales in aliqua magna ſerie continua reperiri poterunt, vel iidem aliqui, vel ſaltem proximè.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Numerorum ab 1. vſque ad 10. logarithmos reperire.

STatuatur logarithmus numeri 1. zifra, & numeri 10. maximus aliquis numerus ſit logarithmus 1.00000 00000 ſi iſti extremi 1. & 10. in aliqua magna ſerie numerorum proportionalium intelligantur, & imaginentur deſcripti, vtpote oportet concipere ob logarithmum maximum denarij, quem elegimus 100000. 00000. Oportebit fateri in illa ſerie adeò magna reperiri tales proportionales, & inſenſibili differentia diſſideant ab ea proportione; quam habent numeri naturales ad denarium ſ. erit numerus aliquis proportionalis ex præc. qui ſe habebit proximè ſaltem, vt 8. ad 10. item alius, qui ſe habebit, vt 9. ad 10. item, qui ſe habebit, vt 5. ad 10. parua differentia, & inſenſibili interueniente. Horum itaque proportionalium perquirendi ſunt logarithmi, licet ipſi proportionales, nobis noti non ſint.

Quoniam iam nouimus datis duobus numeris, & alterius logarithmo, alterum inuenire, abſque alia cognitione proportionalium; cui reſpondent ipſi logarithmi ex propoſ. 33. ideo ex eius documentis primo multiplicabimus ipſum numerum in ſe, & in productum donec geniti habeant illum logarithmum iam cognitum. Verùm, quia illa multiplicatio, quæ eſſet 100000. 00000. cum ipſo primo termino, nempe tot, quot vnitates in logarithmo dato inueniuntur eſt moraliter impoſſibilis. Ideo ſcias, quòd cum continuata diuiſio, quoad fieri poſſit, deinde ſit inſtituenda per denarium, ad reperiendum numerum proportionalium, & denarius ex 29. prop. h. toties diuidat, quot ſunt ipſę notę in ipſo numero vnâ demptâ; ideo ſolus numerus notarum nobis eſt neceſſarius, numerus inquam notarum, ſeu figurarum, quę vltimum numerum proportionalem correſpondentem logarithmo denarij integrant, & deſcribunt. Id verò conſequemur ex propoſ. 35. huius, & quia

quâ-

quatuor proportionalibus peruenimus ad denarium logarithmicum, & alijs quatuor ad centenatenarium; quatuor quoque ad millenarium, & ſic conſequenter, ideo 41. proportionalibus peruenimus ad logarithmum 100000. 00000. ipſo primo numero 2. comprehenſo.

Igitur, cum illius vltimi per 23. propoſ. huius neſciamus quidem numerū, ſed ſolùm notatū, quę ipſum conficiunt, quas (ſi confici ſa progreſſionem modo ibi tradito) inuenires eſſe 30102. 99956. 63. Ideo, ſi ille vltimus ignotus diuideretur per 10. quoties fieri poſſet, eſſent quoti, & proportionales eiuſdem numeri, minùs vna cuius notæ, & figuræ ſunt, nempe 30102. 99956. 62.

Sed ex propoſ. 30. iſta diuiſio per proportionalem datum 10. quæ ſit vltimi termini ex 2. toties geniti, donec obtineat eundem logarithmum denario aſſignatum, iſta inquam diuiſio per 10 dat logarithmum ipſius numeri dati 2. cuius quęrimus logarithmum; Ergo logarithmus eius erit inuentus 30102. 99956 61. & ſic faciendum ad inueniendum logarithmum numeti 3. & cęterorum ſimplicium vſque ad 10. relictis tamen, qui duplam, vel triplam proportionem dicuntad 2. & 3. vt 4. 8. 6. 9. de quibus infra.

Exemplum ſeptenarij.

1	0	
7	1	21
49	2	4
2401	4	4.
4764901	8	7
28 2475249	10	9
79792266 29761 200	20	17
636980576 09000. &c.	40	34
40536 21 559 100. &c. vſq; ad 68. n.	80	68
323447650. & cęt. vſque ad 85. notas	100	85

Et ſic proſequere vſque ad logarithmum denarij.

Aduerte verò plurimas notas maximè in primis numeris eſſe multiplicandas, imo omnes in primis vſque ſaltem ad logarithmum 20. nam error, qui in principio eſt vnius notæ ſit notarum plurimarum; Sic in iſtis proportionalibus à numero 2. exorta vnitas prætermiſſa in numero 1023. cauſabit in notis logarithmicis 1000. defectum vnius vnitatis, qui defectus excreſcet in immenſum, vnde in principio multa adhibita diligentia agendū eſt, vt præciſus notarum numerus poſſit obtineri.

Tabula falſa:		A
1023	10	4
1046529	20	7
1095223	40	13
1199513	80	25
1255332	100	31
1575870	200	61
2483363	400	121
6167075	800	241
9718508	1000	301

Hac itaque ratione inuenientur numeri 2. 3. 5. 7. logarithmi, quod ſatis erit ad alios inueniendos, eruntque, vt in ſequenti tabella.

Logarithmi numerorum ordine naturali progredientium intermiſſo 4. 6. 8. & 9. numero.

1	000000. 00000
2	030102. 99957
3	047712. 12547
5	069897. 00043
7	084509. 80400
10	100000. 00000

PROB. VI. PROPOS. XXXVIII.

Numerorum, qui ex datorum ſimplicium multiplicatione prodeunt, logarithmos inuenire.

INuentis primorum numerorum poſitorum ab 1. vſque ad 10. logarithmis facile eſt compoſitorum logarithmos inuenire ex propoſ. 25 Nam quia numeri, qui ex multiplicatione duorum numerorum reſultat, logarithmus eſt ille, qui ex eorum logarithmorum additione prouenit; ſi ergo deſideras logarithmum numeri 4. qui reſultat ex multiplicatione 2. & 2. adde logarithmum numeri 2. ipſi logarithmo, ideſt duplica illum, & erit 6010599913. logarithmus numeri 4. Sic ſi addas logarithmum numeri 2. logarithmo numeri 3. erit numeri 6. logarithmus 7781512504. Ita ſi cupias logarithmum numeri 8. addes logarithmum numeri 4. numero 2. & erit 9030899870. & tandem duplicando logarithmum numeri 3. habebis logarithmū numeri 9 qui eſt 9542425094. & ne dum iſtos, ſed omnium etiā, qui ex multiplicatione horum proueniunt addendo ſimul multiplicatorum logarithmos, vt numeri 12. 14. 15. 16. 18. 20. & cęt.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIX.

Alios numeros quoſcumque primos ſuper denarium inuenire.

NOn alio modo inuenientur, quàm eo, quo duenari, vel ternarij, vel ſimplicium in compoſitorum logarithmos inuenimus.

Sit ergo inueniendus logarithmus, vndenarij dato logarithmo denarij. Multiplicetur in ſe, & in productum ter; & deinde primum productum multiplicetur cum vltimo producto, & fiet ordo, cuius logarithmus eſt 10. & numeri notarum 11. erunt. Sicque fiat conſequenter donec denarij conſequaris logarithmum 100000. 00000. & numerum figurarum illius vltimi termini, quem num. fig. diuides continuè per datum numerum denarij, quod fit auferendo vnam tantum vnitatem, & ille erit logarithmus vndenarij, nimirum 1.0413926852.

Et hic habes exemplum, in quo ſolummodo quatuor notas multiplicauimus ſiniſtras; quamuis quinque, vel ſex ad obtinendum numerum notarum, certum, & exactum eſſent multiplicanda ad minus in principio.

Numeri multipl.	Logarith.	Num. fig.
1	0	
11	1	2
121	2	3
14641	4	5
214358881	8	6
25637424601	10	11
672727969. & cęt.	20	21
4525521984	40	42
2048015025	80	84
1377730560	100	105
189805729	200	209
360240400	400	415
1297008196	800	834
246170600	1000	1042

Et ſic proſequere vſque ad 41. multiplicationes ſingulis multiplicationibus figurarum numerum apponendo, & ſuos logarithmos; donec logarith. 100000. 00000. qui eſt denarij conſequaris.

TRACTATVS XXII.

De Interſectionibus Planorum.

LIneas vſque adhuc in plano exiſtentes conſiderauimus: modo eas in corporibus ipſis, tanquam eorum ſectiones animaduertimus vt in ſphæricis Theodoſij, Conicisque Apollonij concipiendæ ſunt. Vnde in primis ſectiones planorum, quæ lineæ rectæ ſunt in hoc Tractatu oportet ſpeculari; de quibus agit Euclides ad initium 11. Sed eorum animaduerſio nobis hoc loco eſt neceſſaria.

EXPENSIO I.

Principia exhibentur.

QVoſdam ante omnia declarare terminos oportet, vt ritè concipiantur. Vnde ſit.

DEFINITIO I.

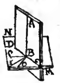
LInea recta plano orthogonalis eſt: cum omnibus lineis eam tangentibus, & in eodem dato plano exiſtentibus perpendicularis eſt.



Sic ſi linea IB cum omnibus AI, & ID, IG, & IC, & cæt. eam tangentibus in I perpendicularis eſt, etiam plano CABG, in quo illæ ductæ ſunt, perpendicularis erit.

DEFINITIO II.

PLanum ad planum rectum eſt; cum qualibet linea recta in vno plano exiſtens, & orthogonalis ſectioni, omnibus lineis eam contingentibus, quæ in altero duci poſſunt, perpendicularis eſt.



Sic, ſi linea AB perpendicularis ſectioni CD in plano CDA exiſtens ſit perpendicularis lineis CB, IB, & BQ. Planum CDA erit perpendiculare plano MN, in quo illæ ductæ ſunt.

DEFINITIO III.

REcta linea ad planum inclinatio eſt angulus acutus, quem illa facit cum rectà in plano illo exiſtente in perpendicularem illâ terminante, quæ ab aliquo ſuplimi puncto inclinantis lineæ cadat.

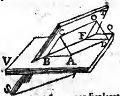
Sic angulo s ABG eſt angulus inclinationis lineę



BA ad planum VT, quòd BG angulum claudens necſatur in G, cum perpendiculari GA, quæ ab aliquo ſublimi puncto; nempe ab A lineę inclinantis BA cadit.

DEFINITIO IV.

PLani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis contentus, quæ in vtroque plano ad idem ſectionis punctum ductæ, rectas cum ſectione angulos efficiunt.



Si itaque AB, & AC ſint perpendiculares ſectioni BF, & conueniant in punctum B angulus earum ABC dicetur Inclinationis angulus planorum VQ, & ST.

DEFINITIO V.

PLanum ad planum, & linea ad lineam ſimiliter inclinata dicitur, cum prædicti inclinationum anguli ſunt æquales.

EXPENSIO II.

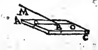
De linearum cum planis habitudine.

CVm ſectiones planorum ſint rectæ quædam lineæ, operæ pretium videre priùs eſt, quomodo rectæ cum planis ſe gerant, ad hoc, vt deinde meliùs planorum ſectiones cognoſcamus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Rectæ eiuſdem lineæ pars non eſt in ſublimi; altera ſuper planum extenſa.

SI plano AC aliquis cogitet ducere lineam, quæ partem extenſam habeat in eo, quæ BO; & altera BM eleuetur ab ipſo, is fallitur. Nam



producta in ipſo plano parte BO, verſùs Q, duæ rectæ MB, & QB idem haberent ſegmentum BO, quod abſurdum eſt, & contra pronunciatum 10. lib. 1. elem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si duæ lineæ ſe mutuò ſecent, in vno plano ſunt, & omne triangulum rectis conſtitutum in vno plano eſt.

SIt triangulum ABC quoddam lineis rectis conflatum, & concipiatur, tanquam ſi nullo plano inhæreret, Dico; *quod ſi plano ſuperponatur ipſi ſuperextendetur ita*, vt ſecundùm ſe totum illi inſit, & tangat. Nam ſi nòn ſecundùm ſe totum tangeret, pars quædam V. g. BDE eleuaretur à plano; Ergo, & lineæ AB rectæ pars AD eſſet in ſubiecto plano, pars altera DB ab eo eleuaretur, contra præcedentem propoſ. & ſic dicas de linea BC, quæ parte CE tangeret planum, parte BE in ſublime fereretur.



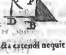
Probatur altera pars, quæ priùs propoſita eſt. Nam in quo plano eſt triangulum ſunt eius latera AB, & AC; in quo verò ſunt latera ſunt ea quoq; latera ipſa etiam ſi producantur in F, & G; alioquin lineæ rectæ pars CA eſſet in plano, pars AF eſſet in ſublimi, quod impoſſibile eſt: Quare totæ in plano extendentur, quod vult propoſitio.

THEOR. III. PROPOS. III.

Omnis planorum mutua interſectio linea recta eſt.

SEcent ſe mutuò duo plana AB, & CD in PQ Dico *hanc ſectionem* PQ *eſſe lineam rectam*.

Quòd ſi recta non credatur erit curua: quia verò ſectio à ſuperficie amborum planorum ſecantium ſuboritur, hæc curuitas orietur à plano AB, vel à plano CD, & ſic alterũ eorum curuum erit, vel ab vtroque, & ſic ambo curua erunt. Nam curua erit es ſuperficies, in quo vndiq; recta extendi nequit. In ſitu verò ſectionis duo

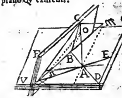


puncta necti poſſunt recta PQ, quæ non tangeret ſuperficies illas, cum in loco ſectionis curuentur cum ipſa ſectione in eis exiſtente, vt aduerſarij volunt.

THEOR. IV. PROP. IV.

* *Si recta perpendicularis alteri lateri angulo inclinationis alicuius plani ſuſternatur ea erit perpendicularis illi lineæ, & alteri, cuicumque in eodem plano exiſtenti.*

SIt angulus inclinationis CBA, & illi ſubſternatur AC perpendicularis lateri AB; Dico, & hanc eſſe perpendicularem lineę cuicumque in eodem plano QV exiſtenti.



Aſſumatur in ſectione BX æqualis CA, & ducatur AX ad ſectionem, & CX.

Probatur itaq; primò AC etiam eſſe perpendicularem lineæ AX. Nam angulus CBX, vtpote ſectionis rectus eſt definit. 4. ſicut, & BAC angulus ex hypotheſi; latus verò AC eſt æquale ex conſtructione cruri BX, at crus AB eſt commune: ergo duo triangula ABC, & ABX erunt æqualia. Vnde, & baſes AX, & BC erunt æquales ex 4. primi Elem. Et ideo duo alia triangula ACX, & BCX erunt quoque æqualia; Habent enim ex præced. argumento crura AX, & CB æqualia; crura verò AC, & BX ex Hypotheſi ſunt æqualia; baſis vero CX communis; vnde ex 8. primi Element. anguli CAX, & XBC erunt æquales; ſed angulus XBC rectus eſt, vtpote ſectionis BX cum linea inclinationis BC ex definit. Ergo angulus quoque XAC rectus erit.

Probatur autem etiam de lineis quibuſcumque. Nam certum eſt primo eſſe quoque perpendicularem lineis AD, & AB productis; cum enim XAC angulus ſit rectus, ex 10. primi, etiam EAC rectus erit; & eadem ratione cum BAC ſit rectus etiã CAD rectus erit. Idẽ quoq; argumẽtũ poterit fięri de triãgulo AMC; ſi fiat, vt ſupeiùs BM ęqualẽ crus perpendiculari AC, & deinde eodem modo probando MAC triangulum eſſe æquale triangulo BMC, & ideo, quòd angulus MAC ſit rectus, vt eſt MBC.

At ſi manentibus iiſdem omnibus angulus inclinationis plani intelligatur deprimi, vel ipſum planum, & ſecare eandem perpendicularem in O; ſi lineæ AO fiat æqualis BN, & ducatur AN, idem argumentum valebit. Nam adhuc rectangula triangula ABN, & ABO erunt æqualia ob idem latus AB, & duo æqualia crura AO, & BN; Propterea triangula quoque OBN, & AON erunt æqualia. Namq; ob baſim communem ON, crus AN cruri BO oſtenſum æquale, & crus AO, & BN ex hypotheſi æquale, æqualia quoque erunt triangula OBN, & AON. Vnde cum NBO ſit rectus angulus, etiam NAO erit angulus rectus, & ſic poterit oſtendi de qualibet aliâ lineâ.

CO.

COROLLARIVM.

Hinc elici poteſt: Quòd, ſi linea aliqua recta ſit perpendicularis duabus rectis angulum facientibus in aliquo plano, vt AC lineis BA, & AX hęc eidē plano ſit perpendicularis; ſiquidē oſtenſum eſt, talē eſſe omnibus alijs lineis in eo plano exiſtentibus, & eam in A contingentibus. Vnde ex defin. 1. plano quoque VQ erit perpendicularis.

COROLLARIVM II.

Deducitur quoq; eadem ratione lineā CA lateri BA anguli inclinationis perpendicularem, etiam eſſe perpendicularem plano, in quo latus, trianguluṁque ABC, perpendiculariter inexiſtit, & extenditur. Planumque trianguli CAB inclinationis eſſe quoque plano FB, & QV vtrique perpendiculare.

COROLLARIVM III.

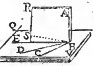
Lineam in plano inclinato, plano, cui inclinat parallelam, eſſe quoque parallelam ſectioni eorundē planorū colligo ſi, V. g. linea CF ſit plano QV parallela; eſſe quoque parallelam ipſi ſectioni MB. Ratio eſt, quia illa CF erit rectangula perpendiculari CA, & plano trianguli CAB: Ergo etiam lineæ CB, & ideo æquidiſtans lineæ BX; quę eidem CB eſt perpendicularis.

THEOR. X. PROPOS. V.

Si linea recta tribus rectis ſe mutuò tangentibus perpendicularis ſit, illæ tres rectæ in eodem plano erunt.

Sit linea AB perpendicularis tribus BC, & BD, & BE. Dico eas eſſe in eodem plano VQ.

Probatur. Nam, ſi aliqua ex ipſis non eſſet V. g. BE; ſed eleuaretur à plano, vt eſt punctata BS: ducatur per AB, & punctatā BS planum BR (quod poteſt eſſe ex prop. 3. cum productæ ſe ſecent in B) quod ſecabit planum VQ infra punctatam, quæ ab aduerſarijs aſſeritur ab illo plano VQ eleuata; & ſectio erit BE; cui BA erit perpendicularis; cum duabus BC, & BD perpendicularis ponatur, & ideo ex Coroll. 1. anteced. propoſ. etiam plano per eas ducto VQ, & conſequenter ex defin. 1. etiam lineæ BE. Quare eſſet angulus quoque ABE rectus, vt eſt angulus ABS ex hypotheſi, & ideo pars anguli ABS eſſet æqualis toti ABE; quod eſt abſurdum.



THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ſectionis incipiant, in perpendicularemque plano terminent; ſi vna erit orthogonalis ſectioni, & altera talis erit.

Sit AB in eadem figura propoſ. 4. perpendicularis ſectioni BX in plano QV, & à puncto B ſectionis BX in ipſam terminent duæ rectæ; nimirum AB in A, & BC in C. Dico, *quòd, ſi vna V. g.* AB *erit perpendicularis ſectioni* BX, etiam altera CB *eidem ſectioni* BX *orthogonalis ſit.*

Aſſumatur itaque in ſectione portio BX æqualis perpendiculari AC, & ducatur à puncto C recta CX, & à puncto A recta AX, quo facto, ſic.

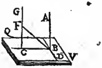
Probatur. Et progreſſu 1. Triangulum ABC eſt æquale triangulo ABX: Nam angulus ad A rectus eſt ob perpendicularem, & angulus ad B ex Hypotheſi, crus AB commune; crus verò AC ex conſtructione æquale cruri BX. Vnde ex 32. primi Element erunt æqualia hæc triangula ABC, & ABX, & baſis quoque AX erit æqualis baſi CB.

Progreſſ. 2. Hinc autem rurſus arguitur triangula CBX, & CAX eſſe æqualia: Nam baſis AX eſt communis, BC crus in primo progreſſu cruri AX oſtenſum eſt æquale, crus verò AC ex conſtructione cruri BX. Vnde cum omnia latera quodlibet ſuo correſpondenti, ſint æqualia; triangula ipſa CAX, & CBX erunt æqualia: quare habebunt quoque angulos æquales; ſed angulus CAX ob perpendicularem rectus eſt: ergo, & angulus CBX; quare recta quoque CB incidit in ſectionem XB orthogonaliter.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano perpendiculares ſint, Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

Sint duæ rectæ lineæ AB, & CG eidem plano QV perpendiculares. Dico *eas eſſe quoque parallelas.* Puncta B, & C connectantur, cui fiat perpendicularis alicuius plani ſectio DB; hæc etiam erit perpendicularis lineæ ductæ BF à puncto B ad perpendicularem DC ex præc. hinc autem



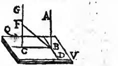
Probatur propoſ. Linea DB eſt perpendicularis tribus AB, & BF, & BC; ergo tres iſtæ ex propoſ. 5. ſunt in eodē plano; ſed etiam ex pr. 2. in eodem eſt GC, in quo reperitur BC, & BF: Ergo omnes quatuor ſunt in eodem plano: Sed anguli ABC, & BCG ex def. perpendicularium ſunt recti. Ergo ex 28. primi duæ AB, & CG ſunt parallelæ, cum faciant ipſi BC angulos rectos, & in eodemq; plano exiſtere ſit oſtenſum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si duæ parallelæ rectæ lineæ inſiſtunt eidem plano, quarum vna ſit perpendicularis, altera quoque talis erit.

SInt rectæ BA, & GC parallelæ ex def. parallelorum erunt in eodem plano extenſæ ſi ſit vna normalis V.g. GC. Dico itaque, quòd etiam BA talis erit. Connectatur B, C linea BC, cui fiat perpendicularis D B; ducaturque BF, & BF ex præc. BB erit etiam rectangula lineæ DB.

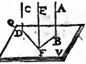


Vnde Probatur lineæ DB eſt ad angulos rectos lineis BC, & FB, quæ ex 2. huius ſunt in eodem plano; ac lineæ CG; at hæc eſt in eodem plano ob parallelismum præſuppoſitum, ac linea AB: Ergo linea AB eſt in eodem plano, ac duæ BF, & BC; ſed linea DB eſt perpendicularis duabus FB, & BC angulum in B facientibus. Ergo, & plano, in quo ſunt ex Coroll. 1. prop. 4. huius: Ergo ex defin. etiam lineæ BA, cui etiam ad angulos rectos eſt BC, ſiquidem GCB eſt angulus rectus, quòd GC ſit perpendicularis, quare ex 32. primi etiam ABC erit angulus rectus: Cum ergo linea BA inſiſtat duabus DB, & BC ad angulos rectos erit quoque ad angulos rectos toti plano QV ex propoſ. 4. huius, Coroll. 1.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, licet non in eodem cum illâ plano, etiam inter ſe ſunt parallelæ.

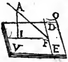
SInt duæ AB, & CD eidem lineæ FE parallelæ, dico illas quoque inuicem eſſe parallelas. Nam ducantur à puncto F duæ perpendiculares FD, & FB ipſi EF ad lineas CD, & BA hæ perpendiculares erunt in eodem plano VQ ex Coroll. 1. propoſ. 4. h. Quare ex propoſ. præced, eidem erunt perpendiculares BA, & CD, quod ſint parallelæ perpendiculari FE: quare ex propoſ. 7. inuicem quoque erunt parallelæ.



PROBL. I. PROP. X.

A dato puncto in ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

DVcatur AF à puncto dato A in ſubiectum planum, vtcumque, & per F ducatur ED ipſi AF perpendicularis, & huic à puncto F ducatur perpendicularis FI ex 8. primi, cui ducatur perpendicularis AI ex 9. propoſ. 1. à puncto A. Dico *hanc eſſe perpendicularem plano* QV.



Probatur. Nam AFI eſt angulus inclinationis planorum, in quibus ſint, hinc erus AF, inde FI, & DE erit lineæ ſectionis. Quòd AF, & FI perpendiculares ipſi ſint: quare ex Coroll. 2. propoſ 4. erit quoque perpendicularis ipſi plano; cùm ducta ſit perpendicularis lineæ FI.

PROBL. II. PROPOS. XI.

A dato puncto in plano ad idem planum rectam excitare perpendicularem.

FIat angulus inclinationis in præced fig. plani AFI ducto priùs à puncto I crure FI: deinde ei ducta ſectione perpendiculari ED, cui excitetur à puncto F perpendicularis FA, ex 8. primi, eruntq; FA, & FI in eodem plano: In hoc igitur plano ducatur ab I perpendicularis IA, & hanc dico eſſe quoque perpedicularem plano QV,

Probatur. Quia eſt perpedicularis FI cruri anguli inclinationis AFI: vnde ex Coroll. 2 prop. 4. erit etiam perpendicularis plano QV.

EXPENSIO II.

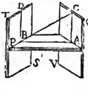
De Planorum interſectionibus.

VIſis correſpondentijs linearum non in eodem plano exiſtentium reſtat, vt modo ipſas planorum interſectiones intueamur.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Quæ plana eandem rectam perpendicularem habent, illa parallela erunt.

SIt linea AB perpendicularis vtrique plano QV. & TS. Dico *plana eſſe parallela*, id eſt in infinitum producta nuſquam ſe ſecare.



Nam ſi dicatur inclinare inuicem, ad eam partem, in qua inclinant, ducatur in plano vtrolibet V.g. BT recta BO à puncto verò B ipſi BO ducatur normalis BP, & huic

BP

BF normalis BC, & tandem conneĉtatur AC. Iſtæ AC, & BO lineæ etiam reĉtæ AB eruur normales ex 7. huius. Sed ſunt in eodem plsno. Ergo etiã erunt parallelæ.

Quod verò ſint in eodem plano oſtenditur, nam linea AC ex propoſ. 2. eſt in eodem plauo, ac triangulum ACB: Tres verò AB, & BC, & BO ſuur in eodem plano ex propoſ. 5. quòd ſint lineæ BF perpendiculares: Vnde, & AC, & BO in eodem plano erunt, quare

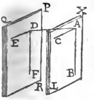
Probatur propoſ. AC, & BD ſunt parallelæ in eodem plano, ergo nunquam conuenient, quare nec plana QV, & TS; in quibus ſunt.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Si duæ rectæ ſe mutuò tangentes ad duas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, & non in eodem plano; plana etiam in quibus ſunt, erunt parallela.

SInt duæ AB, & PL parallelæ, quæ tangant duas AC, & PQ psrallelas item inuicem: dico *plana, in quibus ſunt* QR, *&* XL *eſſe parallela*. Quod, vt uſtendatur; ducatur AD, plano XL perpeudicularis, quæ lupingat in planum RQ; vel enim cadet in P, vel extra, vt in O. A punĉto D ducatur parallela OF ipſi RP. & ab eodem punĉto O alia parallela DE lineæ PQ, quo facto ſic.

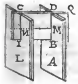
Stat demonſtratio, quoniam DF lineæ PL ex conſtruĉtione, & eidem ex hypotheſi eſt parallela BA, eruur duę AB, & OF inuicem parallelę; ſic quia OE ex conſtruĉtione eſt parallela lineæ PQ, cui ex hyp. AC psrallela eſt ex 9. h. inuicem quoq; AC, & DE parallelæ erunt: Quoniam itaq; BAD, & CAO reĉtus eſt, erit etiam reĉtus ex prop. 19. primi angulus ADF, & ADE: Quare AO plano PQ ex Coroll. propoſ. 4. huius erit perpendicularia: Vude ex anteced. plana erunt inuicem parallela.



THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur, communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SInt duo plans parallela A, & L, quæ plano QI ſecentur. Dico *ſectiones* BD, *&* CI *eſſe parallelas*.

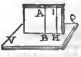


Ducatur enim ſeĉtiuni BD perpendicularis MN in plano QI, incidet in ſeĉtionem plani QI; quæ eſt CI, ſi opus ſit, produĉta, vel ergo MNC erit angulus reĉtus, & ſic OB, & CI erunt parallelę, vel minor reĉto, & ſic plsnum LC ad partes C alteri plano BA viciulus erit; ergo non psrallelum contra hypotheſim, vel maior reĉto, & ſic MNI erit acutus angulus. Vnde contra rurſùs hypotheſim ad partes L planum LO alteri AB magis appropinquabit: Quare neceſſariò MNC reĉtus angulus erit. Vnde cum alterni anguli BMN, & MNC ſint æquales ex 28. primi erunt parallelæ BD, & CI.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, & omniaque per ipſam plana ad rectos angulos erunt eidem plano.

SIt reĉta AB plano culpiam QV orthogonalis. Dico, *quod omnia plana, quæ per ipſam ducuntur eidem plano ad rectos angulos ſint*. Ducatur itaq; per ipſam plauum HIBA, & in ipſo parallela HI, vel slis quælibet parallela.



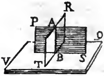
Probatur. Quia HI eſt in eodem plano, & parallela AB erit quoque plano QV perpendicularis ex 8. huius, & ſic de quacunque alia: quare plauum AIBH plauu QV erit orthogonale. Quod ſi ducas per AB, aliud quudcunique plauum eadem demonſtratio erit.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos angulos erit eidem plano.

SInt in plsno QV duo plsna SP, & RT ad angulos reĉtos; quę ſe ſeceut iu AB. Dico *ſectionem* AB *plano* QV *perpendicularem eſſe*.

Probatur. Nam SB, & BT ſeĉtionibus perpendicularis eſt BA. Ergu ex Coroll. propuſ. 4. perpendicularia eſt ad planum QV. Quòd ſit perpẽdicularis duabus SB, & BT: ſic oſtenditur. Nam planum RT reĉtum eſt ad planum QV. Ergo omnis eius vbique ſuperficies talis erit. Ergo talis erit in ſeĉtione BA, quare eius ſeĉtio BA, nec inclinabit verſus S; neque ad alteram partem, ſed reĉtangula ſuper SB conſiſtet.



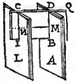
Quod autem talis ſit reſpeĉtu BT etiam oſtenditur eodem modo, quia plsnum SP reĉtum eſt: ergo eius ſeĉtio non inclinabit verſus T, ſed reĉta ſuper BT conſiſtet.

THEOR.

THEOR. VI. PROP. XVII.

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas parallela ſunt.

SInt plana in ſchemate propoſ. 14. AD, & LC recta ad planum QI, & ſectiones DS, & CI parallelæ. Dico *plana quoque eſſe parallela*.



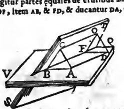
In plano enim QI ducatur MN perpendicularis ad DS, quæ quoque erit recta ad planum AS, ex def. 2. huius, & eadem erit perpendicularis ad ICI & ideo ex eadem defin. ad planum alterum LD recta erit: Cum ergo NM ad vtrumque planum recta ſit ex propoſ. 12. plana ipſa parallela erunt.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Planum ad planum inclinans eundem angulum ſecundum omnem ſuam ſuperficiem cum alterius ſuperficie facit.

SIt planum TA, quòd inclinet ad aliud planum QV. Dico, *quòd eius ſuperficies cum alterius ſuperficie vbique eundem angulum facit.*

Sit itaque angulus aliquis inclinationis ſicubi ABC, & alter ad quamcumque elegeris partem DFO, oſtendendum eſt hos angulos eſſe æquales: Sumãtur igitur partes æquales de cruribus angulorũ BC, & OF, item AB, & FD, & ducantur DA, OC.

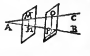


Probatur. Rectæ DF, & CA ſunt perpendiculares ſectioni ex def. 3. Ergo inuicem parallelæ erunt; ſed ſunt etiam æquales: Ergo ex 33. primi rectæ quoque OC. & FA parallelæ ſunt, & æquales. Idem argumentum conficias de lineis DF, & AA; quia enim ſunt perpendiculares ſectioni ex defin. 4. ideo ſunt parallelę, & æquales ſunt ex conſtructione; vnde fit, quòd DA, & FA parallelæ ſint, & ęquales. Et ideo ex propoſ. 9. huius; quòd OC, & AD ſint quoque inuicem parallelæ, & hinc ex prop. 33. primi; quòd DO, & AC parallelæ quoque ſint, & æquales; cum ergo triangula DOF, & ACB ſint æquicrura erunt, & ęquiangula: Vnde angulus ABC erit æqualis angulo DFO: & ita probabitur de quocumque alio angulo: vnde vbiq; ſuperficies TS faciet eundem angulum cum ſuperficie QV.

THEOR. VIII. PROPOS. XIX.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; in eaſdem rationes ſecabuntur.

SIt linea AB, & AC; quę vel conuenient in A, vel producantur donec conueniant, ſiquidem ſi non conueniant erunt parallelę, vnde in partes equales ſecarentur.

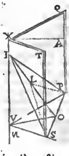


Iſtę ex prop. 2. erunt in eodem plano; quare ſi planis parallelis ſecentur ſectiones MN, & NP erunt parallelę, ex prop. 14. quare ex 2. ſexti erunt, vt AM ad MO ita AN ad NP.

THEOR. IX. PROPOS. XX.

Omnis angulus ſuper eandem baſim eſt minor in plano obliquiùs ſecante, quàm in minus obliquo; anguli verò reliqui maiores.

SInt duo plana QV. TV, quę faciant angulum quemcumque SVP in plano PVS ſectionis VX. Dico, quòd, ſi aliud planũ PTA obliquiùs ſecet, plana inclinantia QV, & TV illud ſecando facient ſuis ſectionibus PI, & SI angulum PIS acutiorem, & minorem; quàm PVS; quòd vt probetur, ducãtur OV, & OI perpendiculares baſi PS; eritque maior OI baſis ſubtenſa angulo obtuſo, vel recto, qualis eſt ex hypotheſi OVI cum OVN ſit acutus, vel rectus, quam erus OV; ideoque ſumatur NL ęqualis OV, in perpendiculari OI coniungaturque PL, & LS; eritque triangulum PLS ęquale triangulo PSV, vt 47. lib. 1. Elem. Vnde probatur propoſ. ex 21. propoſ. lib. 1. elem. Quia ab extremis P, & S duę PL, & LS lineę interiùs conſtitutę ſunt, nempe intra triangulum PIS; Ergo maiorem angulum PLA continebunt, licet ipſę longitudine minores ſint: quare erit maior angulus PVS ęqualis angulo PLA, quàm angulus PIS.



Probatur quoque 2. pars; quia cuiuſque trianguli anguli ſunt ęquales duobus rectis; quare ſi angulus I ſit acutus angulus P obtuſus, erit, vel maior in triangulo PIN, quam LPO, vel VPN.

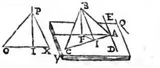
PROBL. III. PROPOS. XXI.

Crus non perpendiculare plano trianguli eidem plano non perpendicularis, & in data ſectione poſiti, ita conſtituere, vt in eodem plano alicui ſectioni, vel lineæ exiſtenti; perpendiculare ſit.

SIt crus AS trianguli ABC collocandum in plano QV tali modo; vt non exiſtens, nec ipſum crus,

crus, nec planom, in qun eſt perpendiculare triangulo; cum ſectione tamen, ſeu recta DE ſit ad angulos rectos.

Trahatur AF in plano QV perpendicularis ſectioni DE. Deinde baſi XO deducatur perpendicularis à vertice P, & cadat in I; ſumptâ ergo diſtantiâ XI, transferator ſuper planum in AIC linea, ſuper quam triangulum debet collocari, & ex puncto I educatur linea eidem ſectioni AC perpendicularis, quæ ſit IF, & ab F vbi ſecat AF educatur



perpendicularis ad planum, quæ ſit BF; ſumpto tandem interuallo IP poſito circini pede in I ſignetur portione circuli perpendicularis FB; & à puncto B ad I recta ducatur BI, & altera AB: deinde ad interuallum XO ſignetur AC, & ducatur BC. Dico *triangulum eſſe collocatam tali modo, vt crus* AB *ſit perpendiculare ſectioni* DE.

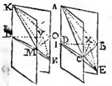
Probatur. Nam crus IB eſt æquale cruri PI; ſic AI cruri XI; angulus verò AIB, vt ex propoſ. 6. huius, eſt rectus, vt eſt angulus XIP. Ergo ex 22. primi, baſis quoque AB æqualis baſi XP; ſed hæc eſt ex 9. huius propoſ. recta ſectioni DE. Ergo fecimus propoſitum.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si duo triangula æqualia inter duo plana intercipiantur rectangulè, quò magis ad ſectionem planorum alter accedit, eò angulum planorum facit altero maiorem.

Et quo minùs obliquè incidit, eò eundem angulum facit maiorem.

Sint duo triangula BCA, & OMK æqualia tum angulis tū lateribus, & duobus planis ſingula includantur ad angulos æquales A, & K, quę tangant ſectiones AD, & KL planorum intercipientium. Sintque latera BC, & OM, ad ipſa latera NO, & BB recta. Et triangulum OMK ad ſectionem LK magis accedat ſua baſi OM, quam triangulum BCA dico angulum planorum OLM eſſe maiorem angulo planorum BDC.



Probatur. Quoniam triangulum OMK magis accedit ad ſectionem, quàm triangulum BCA, ductis perpendicularibus ad ſectionem LK, quæ ſint OL, & ML; nec non, & ad ſectionem AD ductis perpendicularibus BD, & DC, erunt triangula BCD, & OLM inclinationis planorum, latuſque OL ex hypotheſi maioris inclinationis erit minus, quàm BD, & ML minus, quàm CD ſuper æqualem OM, & BC, baſim, ſeu eâdem, ſi mente ſuperponantur ſuper eandem baſim; quare ex prop. 21. l. 1. El. maior erit angulus OLM, quàm BDC.

Sit triangulum æquicrurum EAC magis obliquum, quam triangulum NMK, ducantur XC, & MV perpendiculares plano OK, & DA, quę omnibus lineis ex def. 1. h. in eo plano exiſtentibus erunt perpendiculares, & conſequenter CX, erit normalis lineis XD, & BX, & MV lineæ VL, & VN; Vnde anguli apud V, & X erũt recti, cùmq; baſes EC, & NM ſint æquales ex Theſi circuli illis baſibus EC, & NM pro diametro inſeruientibus erunt æquales, & quia ſunt rectāgula tranſibunt per NVM, & per BXC puncta ex 28. l. 3. Et quia maior ponitur inclinatio plani ECA, quã NKM erit āgulus XEC minor, quam VNM; quare arcus quoque, qui pertingeret ab X vſque ad C minor, quam arcus pertingens ab V vſque ad M ex 36. lib. 6. ideoque ſubtenſa minor XC arcui minori erit minor, quàm VM. Crus verò CD oſtenſum eſt maius, quam ML, & conſequenter eius quadratum erit maius; ſi ergo auferatur quadratum CX minus, quam MV quadratum: Ablatum hoc CX quadratum à maiori quadrato CD relinquet reſiduum maius, quam MV quadratum ſublatum à quadrato ML minori: Quare XD quadratum; quod ex 11. lib. 2. Elem, eſt æquale illi reſiduo erit maius, quàm quadratum reſiduum VL: Vnde erit maius XD latus, quam VL. Cum itaque XD, & CD latera ſint maiora, quam VL, & ML, dicent maiorem proportionem ad VM, quam VL, & ML: quare multò maiorem, quam ML & LV dicent ad XC baſim minorem: Ideoque ex propoſ. 6. Tract. 19. minor erit angulus XDC angulo VML.

COROLLARIVM.

Hinc facilè argumentaberis, quod ſi angulus VLM ſit maior angulo XDC, & planũ NML æqualē inclinationē, vel obliquitatē conſequatur, ac planum EDC, quod erit maior angulus quoque NLM, quam ECD. Ratio eſt, quia cum ponatur VMN æqualis angulo ECX, & anguli apud X, & V ſint recti, erunt æquiangula triangula, & quia ponitur VM maius, quàm XC, vtpote ſinus perpendicularis anguli maioris exiſtentibus ęqualibus ML, & CD tanquàm radijs circulorum, qui ducerentur centro L, & D. Ideo erit quoque NM baſis maior, quam EC, cum ergo crura NL, & ED ponantur æqualia ſicut, & ML, & CD patet ex 26. lib. 1. angulum MLN eſſe maiorem angulo EDC.

Aduerte autem, quod etiam ſi imagineris crus ML commune triangulis OLM, & NLM diſiunctum, & ſeparatim nihil intereſt; valet .n. eadem prop, eo quòd ſemper poſſet fieri angulus OLM immediatus; ſi placeret, ita vt in latere ML communicaret.

TRACTATVS XXIII.

SPHÆRICORVM PARS PRIMA.

De Sphæra contactibus, & ſectionibus in genere.

SPhæricorum Tractatus ferè abſolutè eſt neceſſarius ad triangula ſphærica ſine errore ſoluenda: Vnde antequam ad eorum notitiam transferamus animum, quæ magis neceſſaria ſunt breui ſphæricorum compendio complecti opus fuit.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVædam principis huic tractatui deſeruientis primò proponenda ſunt, & præcipuè definitiones eorum, quæ in ſuperficie ſpęræ puncta imprimi, & circuli deſcribi poſſunt.

DEFINITIO I.

SPhæra eſt figura ſolida vna ſuperficie comprehenſa circulis æqualibus vbique circumſcriptibilis, ad cuius extimam ſuperficiem à puncta medio lineæ terminantes, æquales ſunt.

DEFINITIO II.

CEntrum verò ſphæra eſt prædictum punctum.

DEFIITNIO III.

AXis ſphæra eſt recta quædam, quæ per centrum tranſit, & in ſuperficiem ſphæra terminat.

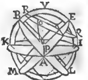
DEFINITIO IV.

POli ſunt extrema puncta ipſius axis.

DEFINITIO V

POlus circuli eſt punctum in ſphæra ſuperficie, à quo omnes lineæ ab eo deſcendentes, & in ipſum circulum terminantes, æquales ſunt.

Itaque centrum ſphęræ erit P Poli I, K terminantes axem ſilicet lineam KI, ſeu veram, ſeu mente conceptam per P centrum ſphęræ tranſeuntem. Poli verò circuli IAK ſunt T, & V, quia omnes lineę, vt IT, & IK terminantes in marginem circuli IAK erunt ęquales; ſphęra verò ſuper axem KI volui imaginatur, ſi quando in orbem volui concipitur.



DEFINITIO VI.

CIrculus maximus ad maximum incliaat tum arcus minor quadrante circuli vtrique perpendicularis eorum inclinationem menſurat.

Minorum verò inclinatio eſt angulus acutus inclinationis ipſorum planorum.

DEFINITIO VII.

SImiliter verò, & æquè incliaant circuli, cum m arcus angulum inclinationis menſurantes fuerint æquales.

Itaque circulus maximus BAM inclinat ad circulum maximum IAK, quia acutus angulus inclinationis iuxta defin.4. Tract.22. IPE menſuratur circuli maximi EVKT perpendicularis vtriſque arcu IQE: huic verò inclinationi circulorum BAM, & IAK eſt ſimilis inclinatio circulorum BAL, & IAK; quia arcus KS eſt ęqualis arcui IQE.

At in circulo minori QR angulus inclinationis menſuratur arcu OP in plano perpendiculari vtrique deſcriptus VITK, centro communi trium eorum interſectione.

DEFINITIO VIII.

CIrculus circulum tangere dicitur, qui tantùm vnica puncta alterum contingit.

Quoniam ſi ſecat iam duobus punctis alterum attingit ex propoſ. 8. lib.3.Elem. Sic QR circulus ſecat circulum VITK; quoniam duobus punctis Q & R illum attingit.

DEFINITIO IX.

CIrculi intelliguntur tanquàm planæ ſuperficies quædam ſphæram interſecantes, & in eius ſuperficiem terminantes.

DEFINITIO X.

ÆQualiter verò diſtant à centro; cùm perpendiculares in illos à centro cadentes æquales fuerint.

rint, & ille magis, vel minus diſtare dicitur, cuius perpendicularis fuerit maior, vel minor.

EXPENSIO II.

De ſitu Sphæræ.

ANtequam ad contemplationem ipſius ſphęræ accedamus quædam de eius ſitu, ſeu collocatione ſunt conſideranda, quæ ad ipſam ſphęræ conſiderationem viam ſternunt.

THEOR. I. PROPOS. I.

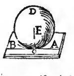
Sphæra planum, vel lineam, in eo, à quâ non ſecatur, non tangit in pluribus punctis, quam vno.

*PRobatur. Nam ſphęra componitur ex circulo circùm acto, aut certè circulus po eſt duci, quàquà verſum per punctum contactus in ipſius ſphęræ ſuperficie ex def. t. Sed circulus non tangit lineam in pluribus punctis, quàm vno, ergo neque circuli in ſphęra deſcripti tangent vllam lineam in plano deſcriptam, & per contactum tranſeuntem in pluribus punctis; Ergo neque ſphęra ipſum planum, non niſi in vnico puncto continget; alioquin linea in plano duci poſſet, quæ duos contactus coniungeret, & circulus in ſphęra, & ſic circulus contingeret lineam in duobus punctis.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si Sphæra planum, vel in eo lineam tangat, recta linea à centro ſphæræ ducta ad contactum, ipſi plano, vel lineæ in eo perpendicularis erit.

*PRobatur. Quoniam, ſi intelligantur per contactum, circuli tales ducti, qui per centrum ſphęræ tranſeant, vt OD, iſti cum centro E ſphęræ commune centrum conſequentur; cùm tùm ſphęræ, tùm circuli centrum ab ambitu ipſorum æquidiſtet ex def. 15. lib. 1. Elem. & def. 2. huius: Sed omnia linea à centro circuli ducta ad cõtactũ alicuius lineæ, ipſi pr. 20. l 3. lineæ perpendicularis eſt; Ergo omnis circuli per contactum ducibilia, lineę rectę, vt BA



in plano exiſtenti, & per eius contactum tranſeunti EO perpendicularia erit: Quapropter etiã ipſa linea EO ipſi plano BA perpendicularis erit ex def. 1. Tract. pręced. cùm omnibus lineis rectis in ipſo ducibilibus rectà incidat.

COROLLARIVM.

HInc ſi ſphęra tangit planum, & à contactu erigatur perpendicularis, hęc in centrum ſphęrę producta incidet: Quòd id eueniat ex 21. lib. 3. Elem. lineę EO perpendiculariter à puncto contactus circuli ſuper lineam tangentem AB erectę.

COROLLARIVM.

HInc excipies veram eſſe quoque propoſitionem conuerſam, nempe lineam rectam EO à centro circuli E in contactum O ductam eſſe plano normalem.

EXPENSIO III.

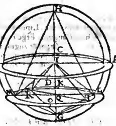
De Polis, Axe, Diametris, Centroque Sphæræ.

ACcedimus ad ea, quæ maiorem cum ipſa ſphęra cognationem habent, & ei intrinſeca ſunt; cum ſphęra ſine eorum conceptu aſſertiuè nequeat cognoſci.

THEOR. I. PROPOS. III.

Omnis ſectio ſphæræ circulus eſt.

*PRobatur. Nam aut ſecans planum per centrum tranſit, vel non: Si per centrum trãſit ducantur AI, & IB, nec non, & IH, & IG ad extimas partes in ſuperficie ſphęrę, quas planum ſecat, quę omnes erunt ęquales; ſiquidem pertingunt à centro ſphęrę ad eius ſuperficiem, verum, & pertingunt ad extimum ambitum plani ſecantis (ſiquidem extra ſphęram planũ eã non ſecat) ergo ex defin. circuli planum ſphęram per centrum ſecans circulus eſt.

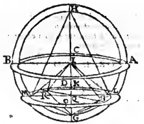


At ſi non tranſeat per centrum, vt LXMO ducatur ſaltem intellectu ad planum ſecans perpendicularis IQ, & ad extremos margines IR, & IM, & IP, & IL, & omnes erunt ęquales, vtpote pertingentes à centro ad ſphęrę ſuperficiem, & triangulorum QIR, QIM, QIP, & QIL, & cęt. erit commune crus IQ angulusque Q vbique rectus. Quare poterunt colloeari in ęqualibus ſemicircul s, quorum diametri ęquales IR, & LM ex prop. 28. lib. 3. quibus eadem ſubtenſa erit IQ: quare ęquales arcus in ſemicirculis ęqualibus auferet ex prop. 23. lib. 3. elem. quare, & reſidui arcus eſſent ęquales, qui ſubtenderentur à QR, & QM, QP, & QL, Proptereaque etiam ex prop. 33. lib 3. iſtę ſubtenſę RQ & QM, ſic QP, & QL erunt ęquales; & cùm de omnibus idem argumentum valeat, itaque omnes ad ambitum plani ſecantia ductę erunt ęquales, quamobrem XMOL circulus erit ex def. 21. el.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Si in ſphæra ſit circulus, & centrum circuli cum centro ſphæræ recta connectatur, hæc erit plano circulari perpendicularis.

SIt circulus LAMN, cuius centrum Q nectat linea QI cum centro ſphæræ I. Dico *hanc eſſe ei perpendicularem.*



Probatur. Nam ex def. 1. tract. præced. tunc erit perpendicularis aliqua alicui plano, cùm omnibus lineis, quæ in ipſa trahi poſſunt, erit perpendicularis. Sit igitur linea PQR, connectanturque eius extrema PR. centro ſphæræ I. Demonſtrabitur itaque IQ lineæ RQP eſſe perpendicularem. Certum eſt IP, & IR eſſe æquales. Nam à centro ſphæræ in circumferentiam deſinunt; ſic quoque QP, & QR. Nam à centro circuli in peripheriam ipſius terminantur. Linea verò IQ eſt latus idem ambobus triangulis. Ergo triangula IQP, & IQR erunt æqualia. Ergo, & anguli æqualibus baſibus ſubtenſi, erunt æquales; quarè angulus PQI angulo RQI æqualis erit; & ideo vterque rectus ex 13. primi Elem. Idem argumentum valet de linea LM, & de omni alia. Ergo omnibus lineis ducibilibus in plano LXOM erit perpendicularis, quare, & ipſi plano.

COROLLARIVM.

HInc educes veram eſſe quoque propoſitionem conuerſam; nempe lineam rectam perpendicularem à centro circuli eductam in ſphæræ centrum cadere: Nam, cùm anguli ad Q ſint recti, & QI communis, & QR, & QM, & cæt. vt pote radij æquales, erunt ex propoſ. 22. lib. 1. Elem. æquales baſes IM, & IR, & cæt. Vnde I erit ſphæræ centrũ, cùm omnes, quæ ab eo puncto in ſphæræ ſuperficiem cadunt, ſint æquales.

PROBL. I. PROPOS. V.

Datæ Sphæræ centrum inuenire.

SEcetur ſphæra plano quodam, quod circuli erit ſuperficies ex 3. propoſ. huius, vt LXMO, & ab eius centro perpendicularis erigatur QI, quæ ex præced. Coroll. cadet in centrum: prolongetur vſque ad peripheriam ſphæræ, & ſit GH; diuidaturque biſariam in I, & punctum I centrum erit ſphæræ.

* Probatur: Nam iam oſtenſum eſt Coroll. præced. propoſ. QI in centrum ſphæræ impingere; cùm ergo pertingat ad peripheriam ſphæræ in G, & H, patet, quòd biſariam diuiſa dabit centrum ſphæræ, cùm centrum ſphæræ ab eius ſuperficie æqualiter diſtare debeat.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Si in Sphæra ſit circulus, & à centro ſphæræ in circulum ducatur perpendicularis; hæc producta in polos circuli cadet.

SIt perpendicularis IQ producatur vſque ad circumferentiam ſphæræ G. Dico G *eſſe polum circuli.* Connectatur GP, & GR.

Prob. In triãgulis GPQ & GQR ãgulus ad Q tũ huius, tũ alius trianguli rectus eſt, licet id figura nõ exprimat, & ideo ambo æquales; latus verò QG commune. At latera QP, & QR æqualia, vtpote radij: Ergo ex 4. primi, baſes erunt æquales; nempe GR. & GP. Ergo ex def. 5. huius G eſt polus circuli; idem dicas de puncto H, in quo deſinit perpendicularis GIH, ſi intelligas connecti cum M, L extremis lineæ ML, vel cum quibuſlibet alijs.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Si à polo circuli ducatur perpendicularis ad planum circuli; hæc cadet in centrum eius, & producta cadet in alterum polum.

SIt linea GQ, quæ à puncto G cadat in Q perpendiculariter. Aſſero *punctum* Q *eſſe circuli centrum.*

Tranſeant per Q quælibet lineæ, vt RP, & aliæ plurimæ; ſed hæc pro reliquis ſufficiat; connectanturque GR, & GP, cum G ſit polus circuli ex definitione GR, & GP erunt æquales, & conſequenter perpendicularis ex G ſuper linea QP cadens ex 9. Elementorum diuidet RGP angulum biſariam. Quare, & baſim, vnde æqualis erit lineã RQP lineæ QR. Proptereaque Q erit circuli centrum; cùm, & eodem modo poſſit probari de omnibus alijs lineis.

Probatur 2. pars, quòd tranſeat quoque per alium polum. Quoniam per centrum circuli trãſit, eſtque perpendicularis plano circuli tranſibit quoque per centrum ſphæræ; quare ex propoſ. 6. huius & per alium polum tranſibit.

THEOR. V. PROPOS. VIII.

Si in Sphæra ducatur recta per polos alicuius circuli; hæc per circuli, & ſphæræ centrum tranſibit.

PRobatur rectæ HL, & HM ſunt æquales, ſicut, & GL, & GM; quia ducuntur à polis ad circũferentiam circuli ex def. 5. huius; latus verò

HG

HG eſt communes ergo triangula HMG, & HLG ęqualis; quamobrem erunt quoque ęquiangula, vnde baſes QM, QL ex prop. 23.l.1. in triangulis HQM, & HQL erunt ęquales, & ideo Radij circuli erunt.

Anguli etiam ad Q ęquales, & ideo recti. Quare HG erit perpendicularis quapropter ex Coroll. prop. 4. huius, ſphęrę per centrum, linea HG coniungens polos tranſibit.

COROLLARIVM.

EX omnibus iſtis propoſ. euidens fit: polos duos circuli, centrum eius, & ſphęrę eſſe in eâdem rectâque lineâ ad planum circuli perpendiculari; quæ eſt ſphęrę diameter, cum tranſeat per eius centrum. Vnde ſi perpendicularis tranſeat per vnum ex dictis punctis transibit etiam per reliqua omnia; ſicut, & quę tranſit per duo quęque erit perpendicularis, & per alia tranſibit.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Dati circuli in ſphæra diametrum inuenire.

IN circulo ſuper ſuperficiem ſphęrę deſcripto tria puncta ſignentur, & acceptâ circino eorum diſtantiâ vnius cuiuſque à duobus alijs, notetur AB puncti A à B, & AC puncti A à C, & BC puncti B à C; ductiſque lineis AB, AC, BC; lineis BC, & AB, vtpote minoribus, duę perpendiculares CD, AO, à punctis A, & C, in quibus AC baſis, & maior diſtantia terminat, cadant, & à puncto O, in quod concurrunt ad B ducatur linea, quam affirmo eſſe circuli diametrum in ſphęra deſcripti.

Probatur. Quia angulus apud C, & A rectus eſt, erunt reliqui tum huius BCD, tum alterius BAD duobus rectis ęquales. Vnde, & compoſiti ſimul omnes duobus rectis ſunt ęquales: Ergo ex prop. 23 tertij quatuor pũcta ABCD erunt in circumferentia circuli. Ducatur itaque circulus, quia angulus eſt



rectus ad C, & alter ad A. Ergo ex 28. tertij erit in ſemicirculo; quare BCD erit ſemicirculus. Ergo BD diameter. Erit autem diameter circuli, illi, qui in ſphęrâ eſt, ęqualis, quòd triangulum AB cilli triangulo, qui in circulo ſphęrico fieret ſit ęqualis ob ęquales AB, & BC, & AC diſtantias, ęqualia verò triangula in ęqualibus peripherijs ęqualium circulorum neceſſe eſt eſſe, cum ob ęquales angulos, ſimiles, nempe ęqualium numero graduum, ſecus ſint ęquales ex prop. 26. tertij.

COROLLARIVM.

HInc centrum circuli nullo negotio inuenimus; diuiſua enim diameter biſariam ipſum dabit ex prop. 1. tertij.

PROBL. II. PROP. X.

Diametro ſphæræ æqualem lineam inuenire.

CIrculus quicumq; in ſphęra deſcribatur polo G ad placitum electo in fig. pr. 4. & ex prop. 9. eius radius reperiatur QM, qui ſit AB, & erigatur perpendicularis AD, aſſumpta verò diſtantia poli G à circuli peripheria GM



centro B interuallo GM deſcribatur portio circuli, quę ſecet AD in D, & ducatur BD; deinde ipſi BD erigatur à puncto B perpendicularis BC; producaturque OA in C, & erit DC diametro ſphęrę ęqualis.

Probatur triangulum CBD eſt ęquale triangulo GMH; Ergo baſis DC erit ęqualis diametro HG: Quod verò CBD ſit ęquale triãgulo GHM patet. Nam AB eſt ęqualis ipſi QM, & BD ipſi GM angulus verò apud A rectus, vt ãgulus ad Q: Ergo vt pr. ſeq. p. 2. arguam triangulum ex 11. pr. l. 1. el. ABD triangulo GQM eſt ęquale; Angulus verò totus CBD rectus eſt; Ergo ęqualis recto M toti: Vnde, & pars ABC reſidua reſiduo QMH erit ęqualis cum QMG, & alis pars anguli B oſtenſę ſint ęquales ex ęqualitate totius trianguli BAD, triangulo QGM. Anguli verò apud A, & Q recti ſunt, & baſis QM baſi AB ęqualis ex effectione: Vnde triangulum quoq; ABC ex prop 27. primi triangulo QHM erit ęquale; ideoque totum triangulum DCB toti GHM erit ęquale, cũ partes vnius partibus alterius oſtenſę ſint ęquales. Vnde, & baſis CD baſi, & diametru ſphęrę GH ęqualis erit.

EXPENSIO III.

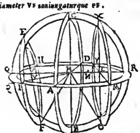
De circulis maximis, & minoribus.

CVm præcipuus ſcopus huius tractatus ſit de circulorum interſectionibus agere; vtpote, quia earũ cognitio ad Trigonometriam ſit omninò neceſſaria; priùs de ipſis circulis agendum eſt, & eorum natura ſcrutanda, vt inde ipſorum ſectiones inuicem agnoſcamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Circulorum, qui in ſphæra ſiunt illi maximi ſunt, qui per ſphæræ centrum ducuntur; Æquales, qui æqualiter diſtant à centro, Minores, qui longiùs remouentur.

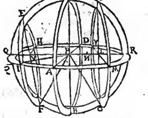
PRobatur prima pars: Nam ſit circulus ABCD per centrum ductus, & EFIH non per centrum ductus. Dico *ductum per centrum eſſe maiorem, coniunctis enim eorum centris* VY, *ducatur ſemidiameter* VF *coniungaturque* YF.



Probatur

Probatur. Quoniam triangulum PFV eſt rectangulum, maior erit baſis PF, quolibet latere, vt VF, qui ſemidiameter eſt, vtpote oppoſita lateri maiori ex propoſ.18. primi: Sed baſis eſt æqualis lineæ PB, vtpote ſemidiametri: Ergo ſemidiameter BF eſt maior ſemidiametro VF. Ergo, & circolus maior; & ſic poteſt fieri demonſtratio de quolibet alio.

Si verò diſtent à centro ſphęræ æqualiter dico circulos fore æquales, quæ eſt ſeconda pars. Nam cum PVF, & LOF ſint rectagola ex 11. ſecondi habebuot quadrata baſis æqualia duobus quadratis laterum: Sed baſes ſont æquales, vtpote radij. Ergo, & ipſarum quadrata. Quare, & quadrata laterum nimirum laterũ OL, & LP ſimul quadratis laterum FV, & VF ſimul: ſed perpendiculares LP, & PV præſupponuntur æquales: Ergo, & eorum quadrata: vnde, & reſidua quadrata OL, & VF remanebunt æqualia: Verum quadrata æqualia habent latera æqualia. Ergo latera, & ſimol radij OL, & VF eruot æquales. Ergo, & circuli quorum ſunt radij erunt æquales.



Prob. tertia pars, quòd ille circulus ſit minor, qui magis remouetor à centro ſphęrę. Nam cùm ſemper, vt ſemidiametri ſphęræ, baſes ſint æquales quadrata baſium ipſarum, & ideo laterum ſimol ſumptorum, vt prius eruot æqualia: ſed modo ponitur maios V. g. PV, quam PL. Ergo, & quadratum PV erit maios, quam lateris PL. & conſequenter quadratum VF minoa, quam OL lateris: Quare, & latus ipſum, radiuſque VF, erit minos, quam latus OL, ſimulque radiua: Ergo, vt circulus eius radij VF minoris, minor erit.

COROLLARIVM

Hinc potes deducere propoſitionem eſſe intelligendam inuerſo modo, nempe maximos circulos etiam per ſphęræ centrum tranſire; ęquales ęqualiter diſtare à centro, & minores magis ab eo remoueri: Nam ſi iſtę propoſitiones inuerſæ non eſſent veræ, nec illę directæ veræ forent; vt patet conſideranti.

THEOR. II. PROPOS. XII.

In circulo maximi circuli mutuò ſe ſecant biſariam.

Sint duo circuli maximi in ſphęra CBAD, & RAQD. Dico *eos ſe ſecare in duas partes æquales.*

Probatur. Nam tranſeunt ambo, cùm ſint maximi ex ante ced. per ſphęrę centrum, quare ſphęræ centrum erit centrum vtriuſque circuli: non autem eſſet centrum vtriuſque, niſi ſit in communi eorum concurſu, ſeu ſectione DA: quare DA tranſibit per centrum vtriuſque circuli. Ergo erit diameter: ergo ea ſectio circulos maximos ambos, vt diametri proprium eſt ex deſ.17.l.1.el. tract. 4. biſariam ſecabit.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Circuli ſe mutuò ex æquo partientes ſunt maximi.

Probatur. Nam ex præced. eorum ſectio AD tranſibit, cum ſit diameter, per vtrioſque centra. Ergo centra erunt in vtroque eadem: quare, & eadem, quod centrum ſphęræ in P: alioquin, ſi eſſent extra P in N; linea, quæ per ambo tranſiret puncta N, & P, & pertingeret vſque ad circumferentiam, tum ſphęræ, tum circuli, quæ eſt eadem, ane eſſet æqualiter diuiſa in N. Ergo non eſſet in P, & ſic ſuperficies ſphęræ non æquidiſtaret à ſuo centro, aut eſſet æqualiter diuiſa in P: Ergo non in N centro circuli, vt fingitur, & ſic RN, & NQ, qui finguntur ſemidiametri non eſſent verè tales, cum non eſſent æquales: Ideoque maximi ex 11. h. cum eorom centrum ſit idem, ac ſphęrę.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si in ſphæra maximus circulus circulum quemlibet ſecet ad angulos rectos; etiam biſariam illum ſecat, & per polos.

Sit circulus maximus in ſphęra RDAQ, qui ſecet quemcumque OX orthogonaliter, dico, *quod per polos eum ſecat, & biſariam.*

Ducator in eo plano orthogonali RADQ à cētro P ſphęræ perpendicularis LP plano OXMY; hęc tranſibit ex Coroll. propoſ 4. per centrum L circuli OX, ſiue maximi, ſiue non maximi, & per polos RQ. Ergo etiam planum, in quo perpendicularis eſt; nempe ſuperficies circoli maximi RDQA per polos, & per centrum tranſibit, quare planorum maximi, & alterios circolo concurſus, & ſectio YM fiet in centro L, linea itaque ſectionis YM per alterius cuiuſcumque centrum tranſibit. Ergo erit diameter eius; ergo diuidet ipſum quemcumque biſariam ex deſ.17.lib.1.el.

COROLLARIVM.

Hinc eſt, quod etiam inuersè propoſitio intelligenda ſit. Nempe circulum maximum per polos cuiuſlibet alterius tranſeuntem biſariam, & orthogonaliter illum ſecare; quòd tunc linea RQ in maximo per polos R, & Q ducta ſit perpendicularis, & per centrum alterius tranſeat ex Coroll. propoſ.8. quare, & ſuperficies RAQD perpendicularis erit ex 15. propoſ. tract. 22. & ſectionem efficiet radium.

Item per polos, & orthogonaliter, & biſariam non maximum OX ſecantem, maximum circulum eſſe; Quia diameter, vel orthogonaliter, vel biſariam ſecantis RDQA ducta per polos alterios non maximi OX, vel per centrum L; etiam per centrum ſphęræ tranſibit ex Coroll. propoſ.8. huius, & conſequenter erit diameter circuli maximi ex prop.11. huius.

CO-

COROLLARIVM II.

Hoc etiam eſt, quòd poli alicuius circuli maximi ab eo quadrante diſtent. Nam ſit circulus DCBA, qui ſecetur bifariam à circulo RCQB,& per polos QR; Igitur CQB erit ſemicirculus. At polus æqualiter diſtat à circulo, cuius eſt polus defin. poli. Ergo dimidio ſemicirculo *id eſt* quadrãte QA, vel QC diſtabit,& ſic de quocũq; alio circulo dicetur, qui per polum Q tranſeat. Quamobrem vndequaque peripheria CAXD à polo Q quadrante diſtabit. Vnde vera etiam erit conuerſa propoſ. quòd ſi peripheria alicuius circuli à polis ſuis quadrante diſtet, illa ſit peripheria maximi circuli. Nam ſi CASD circulus ſecat RCQB circulum ſecantem per polum ſuum in diſtantiam quadrantis CQ, & QB erunt duo quadrantes CQ, & QB, ſemicirculus. Vnde bifariam quoque circulum maximum RCQB ſecabit; quare, cum & ipſe ASDC ſecetur bifariam, quòd ſecetur orthogonaliter ex 8. huius. Ergo erit circulus maximus ex 13. huius circulus ASDC.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Maximus circulus; ſi per polos alterius maximi tranſeat, & iſte per polos illius tranſibit.

Sit circulus maximus CSDA, qui tranſeat circuli maximi RAQD per polos B, C. Dico, & hunc RADQ per polos illius R, Q tranſire.

Probatur. Nam, ſi DBAC per polos circuli RAQD tranſit. Ergo rectus eſt ex Coroll. propoſ. præced. Ergo, & ille RADQ rectus erit: Vnde per polos eius tranſibit ex propoſ. 14.

COROLLARIVM.

Collige. Quod ſi duo maximi circuli habeant in eodem circulo maximo polos, quòd inuicem ſe ſecabunt, & ſectio mutua à circulo, in quo polos habent diſtabit quadrante. Nam etiam circulus V. g. RCQA habebit polum in circulis CABD, & RAQD, qui in ipſo in RQ & CB polos habent, ideoque habebit in loco communi vtriſq; quæ eſt ſectio A, & D, cumque poli diſtent per quadrantẽ à ſectione, ideo C, & R, B, Q circuli RCQB puncta à ſectione A quadrante diſtabunt; ſicut, & A D.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Puncto dato in ſphærica ſuperficie ex dato diametro ſphæræ. circulum deſcribere maximum.

Circa diametrum datum deſcribatur circulus ſeorſim, qui erit æqualis circulo maximo in ſphæra deſcribendo, quem diuidemus in quatuor quadrantes, & vnius quadrantis aſſumpto interuallo R C dato puncto R deſcribemus circulum ABCD, quem *aio eſſe maximum*.

Ille eſt circulus maximus, qui à polis ſuis per quadrantem vndique diſtat ex Coroll. 2. prop. 43. ſed hunc duximus quadrante circuli diſtantem. Ergo eſt circulus maximus.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Per duo puncta data circulum maximum deſcribere dato circulo aliquo maximo.

Facto polo in ipſis punctis V. g. R, & C interuallo circuli maximi alicuius dati à ſuo polo, ducantur duo circuli, vt RAQD, & CSAD illi enim erunt maximi, eo quia omnes maximi ſint æquales, quòd habeant pro diametro ipſum ſphęræ diametrum: deinde facto polo in communi eorum interſectione V. g. in A eodem interuallo ducatur circulus. Nam hic tranſibit per R & C puncta data, & erit maximus.

Probatur. Nam quod ſit maximus patet; Interuallo enim circuli maximi ductus eſt, quòd verò tranſeat per duo puncta data.

Probatur. Quia circulorum primo ductorum RAQD, CXAD cõmune punctum eſt A in quo ſe ſecant. Ergo ibi facto polo ex prop. 15. circulus ductus tranſibit per polos amborum, ſed puncta data R, & C ſunt amborum poli. Ergo per ea circulus tranſibit.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Cuiuslibet circuli in ſphæra dati polum inuenire.

Electis in circulo EIHF duobus punctis H, I diuidatur bifariam ex 34. tertij vterque arcus HEI, & HFI in E, & F, perq; ex præc. agatur circulus maximus RCQB. Diuidatur autem intercepta circumferentia inter E, & F bifariam in Z; *& erit in diuiſione circuli polus Z.*

Probatur. Quia circulus ductus RCQB ſecat datum HEIF ex conſtructione bifariam. Ergo ex propoſ. 13. tranſit per eius polos, & poli ſunt in ipſo; ſed polus æquidiſtat à circumferentia ſui circuli. Ergo erit in meditullio Z, ſic enim ęquè diſtabit ab E, & F.

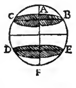
EXPENSIO III.

De circulis minoribus parallelis.

Specialem merentur expenſionem circuli paralleli, vtpote illi, qui diurni motus in Cœlo quædam quoad ſenſum veſtigia ſunt, & eorum cognitio, tum ſphęricę cęleſti doctrinæ, tum ſciantherice præcipuè inſeruiat.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

In ſphærâ paralleli circuli circa eoſdem polos ſunt.



Sint in ſphęra ABCDEF paralleli BC, & DE. Dico eos *eſſe circa eoſdem polos*.

Sint enim poli circuli BC punctum A, & F, connectantur linea AF, quæ tranſi-

tranſibit per centrum ſphæræ ex huius propoſ. 8. cum ergo circuli præſuppoнantur paralleli erit perpendicularis ad circulum DE. Vnde per eius polos tranſibit ex Coroll. expenſ. 2.

THEOR. II. PROPOS. XX.

In ſphæra circuli, qui ſunt circa eosdem polos, ſunt paralleli.

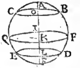
SIt eadem ſphæra ABEFCD, circaque eoſdem polos A, & F ſint duo circuli BC, & DE. Dico *eſſe parallelos*.

Probatur. Nam ex Coroll. propoſ. 8. per centrum amborum tranſibit linea AF eoſdem polos communes connectens; quare erit ad vtroſque perpendicularis. Vnde erunt illi circuli paralleli.

THEOR. III. PROPOS. XXI.

In ſphæra non ſunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

SInt in ſphæra, ſi fieri poteſt, plures circuli æquales, & paralleli, quam duo CB, QF, ED, connectanturque eorum poli recta AF; quæ tranſibit per I centrum ſphæræ, & per O, K, L, centra circulorũ ex 19 h. & quia æquales ponũtur, æqualiter diſtabunt à centro ex propoſ. 11. Vnde ex def. 7. perpendiculares erunt æquales. Æqualis igitur erit perpendicularis KI perpendiculari LI, quod eſſe nequit, pars enim toti æquaretur.



TRACTATVS XXIII.

PARS SECVNDA.

De interſectionibus maximorum circulorum inuicem.

TRigonometriæ ad euitandas fallacias penitùs neceſſarium eſt agnoſcere genericas triangulorum ſphæricorum proprietates, tùm quoad latera, tùm quoad angulos, de quibus primò egit Menelaus, & poſt ipſum Gebrus Maurolycus, Copernicus Regiomontanus, & alij, quàm plurimi: ſed nos, quæ doctrinæ trigonometricæ ſphæricæ deſeruiunt, tantummodò adferemus.

EXPENSIO I.

De principijs.

INterſectiones maximorum circulorum in ſuperficie ſphæræ omnimoda efformant triangula, & prorſùs eorundem generum, quæ lineæ rectæ, ſe inuicem ſecando efficiunt; vnde hic, & Scalena triangula, & Iſoſcelia, & Amblygonia, & Oxigonia, & Rectangula admittuntur, quorum definitiones iam exhibitæ ſunt, vnde reliquas adferemus.

DEFINITIO I.

TRiangulum ſphæricum eſt quòd tribus arcubus maximorum circulorum ſe interſecantibus continetur.

DEFINITIO II.

ANguli ſphærici menſura eſt arcus maximi circuli, cuius polus eſt in ipſo angulo duorum arcuum, quos ſecat.

DEFINITIO III.

ANgulus ſphæricus eſt, quem in ſphæra ſuperficie duo arcus maximorum circulorum ſe mutuò ſecantes continent.

DEFINITIO IV.

ANgulus verò rectus, quem duo arcus circulorum maximorum orthogonaliter ſe ſecantium continent.

DEFINITIO V.

ACutus verò, qui minor, obtuſus, qui maior recto eſt.

LEMMA I. PROP. I.

Datis duobus arcubus maximorum circulorum, quorum neuter ſemicirculo maior ſit, de maiori æqualem minori portionem abſcindere.

HOc fit aſſumendo ſubtenſam AB æqualem ſubtenſæ arcui minoris, & applicando il-

am

lam arcui maiori ACD, vt ſit AC; arcus enim, quem ſubtendit, erit æqualis minori arcus AB.

Probatur. Omnes enim circuli maximi ſunt æquales; Vnde ex 2. lib. 3. auferent ſubtenſæ inuicem æquales arcus æquales AB, & AC.

EXPENSIO II.

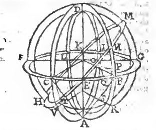
De angulis triangulorum ſphæricorum.

ANtequam de totis triangulis pertractemus angulos ipſos ſeorſim breuiter opus eſt conſiderare.

THEOR. I. PROPOS. II.

Duo circuli maximi mutuò ſe ſecantes continent duos angulos inter ſe æquales.

SInt circuli maximi ACDI, & ABDL, qui ſe interſecent in D, & A, ducaturque polo D, vel A, circulus maximus BCAGIL. Dico *angulum* BAC *eſſe æqualem angulo* BDC.



Probatur. Quia eodem arcu BC ex defin. 2. menſurantur, qui eſt arcus circuli maximi in angulis A, & D polos habentis.

PROBL. II. PROPOS. III.

Si duo arcus maximorum circulorum ſe mutuò ſecuerint; angulos ad verticem æquales inter ſe efficient.

DIco *angulos ad verticem* E *nimirum* GEM, *&* HEF *æquales eſſe inuicem*, ſicut, & AEM, & GEH pariter ad verticem E eſſe æquales.

Probatur. De primis GEM, & HEF, arcus enim qui polo E menſurant illos HA, & GM ſunt æquales, ergo, & prædicti anguli erunt æquales.

Probatur autem arcus eſſe æquales; nam MAH eſt ſemicirculus, ſicut, & GMF, Ergo ſunt æquales iſtæ portiones, vtpote ſemicirculi: Aufer MF portionem communem; Remanebuntque æquales GM, & FH. Sic de alijs duobus argumentum texitur; ſunt enim ſemicirculi AMG, & HGM: Aufer GM arcum communem, & remanebunt arcus GH, & FM, quibus menſurantur anguli GEH, & MEF, æquuales: Quare, & anguli erunt æquales, cum eorum menſura, qui ſunt arcus maximi ex eorum interſectione ducti ex def. 2. ſint æquales.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Arcus ſuper arcum inſiſtens angulos, aut rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

SVper GAA arcum inſiſtat arcus E^N^M. Dico *facere aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æquales.*

Probatur. Nam ſi perpendicularis; certum duos rectos angulos efficere. Si verò non ſit, vt datus arcus; tunc GMA erit ſemicirculus nimirum æquiualens duobus rectis, eſtque menſura angulorum, quos inſiſtens in E facit ex def. 8., vtpote ductus à polo E. Ergo, & anguli GEM, & FEM æquiualebunt duobus rectis.

THEOR. IV. PROP. V.

Cuiuſcumque trianguli ſphærici tres anguli ſunt duobus rectis maiores.

PRobatur. Tres anguli cuiuſcumque trianguli rectilinei ſunt duobus rectis æquales: Quare ſi tribus arcubus ſe interſecantibus AB, & BC, & CA ſubtendamus tres lineas illæ efficient tres angulos duobus rectis æquales; ſed arcus ſupertenſi magis deiſcunt ad inuicem, & maiorem angulum efficiunt. Ergo tres arcus efficient tres angulos duobus rectis maiores.

Quod autem arcus faciat maiorem angulum in ſphæra. Quam linea ſubtenſa patet: Quia quodlibet planũ circuli maximi tranſit per axem ſphæræ. Ergo quodlibet in eius ſuperficie ſignatum punctum quantò magis remouetur ab axe, tantò magis remouetur ab alio in peripheria ſimiliter ſignato alterius circuli. Ergo punctum S alicuius ſubtenſæ AB minus remouebitur à T puncto alterius ſubtenſæ CA, quam R, & V in peripherijs puncta ſignata, quæ magis remouentur ab axe DA, quam S, & T.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Angulus quicumque ſphæricus eſt angulus inclinationis planorum.

SIt angulus ſphæricus AKB. Dico *illum eſſe eundem, ac angulus inclinationis planorum.*



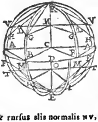
Probatur. Quia angulus AKB ſphæricus menſuratur arcu AB circuli ASD, ad vtroſque perpendicularis: ſed angulus SCB inclinationis planorũ ex Cor. 2. prop 4. Tract. 22. menſuratur eodem arcu. Ergo eſt idem angulus.

THEOR. VI. PROP. VII.

Si anguli ſphærici ſint æquales, etiam anguli ſubtenſarum erunt æquales: ſi maiores, & anguli ſubtenſarum erunt maiores: Si minores tales, & anguli ſubtenſarum erunt.

SInt anguli FEI, & HKG ſphærici æquales, dico ſubtenſas HK, & KG facere angulos apud K ſubtenſis arcubus prædictis æqualibus FE, & EI apud E æquales in fig. parte ſiniſtra.

Prob. Nam, ſi anguli ſphærici ſunt æquales, ex 6 h. & anguli inclinationis planorum erũt æquales. Ducantur ergo perpendiculares ab I ad interſectionem planorum in O, & ab hoc pũcto O, alis normalis MO. Sic ducatur normalis GN ab arcu GK; qui æquatur arcui IE



& rurſus alia normalis NV, & ducantur GL, & MI facientes triangula LNG, & MOI.

Progreſſ. 1. Anguli itaque inclinationis planorum erunt LNG, & MOI, ſic TK, & VK erunt arcus æquales, cum ſinus verſi KO, & NK, vtpote arcubus æqualibus GK, & KI ſubtenſi æquẽtur; Cùm ergo etiam KH arcus ſit æqualis arcui FE, vt ſupponitur, remanebunt TF, & HV arcus æquales, & propterea VKH, & TEF anguli ad peripheriam æqualibus arcubus VH, & FT inſiſtentes erunt æquales.

Progreſſ. 2. Cùm autem, & angulus VKN æquetur angulo TEO, quòd ſinus recti VN, & TO æqualiũ arcuum TE, & VK ſint æquales, & KN, & OE ſint quoque æquales; anguli verò ad N, & O ex effectione recti, totum triangulum VKN toti TEO æquabitur & ideo anguli VKN, & TEO æquabuntur: Aufer itaque ab æqualibus VKN, & TEO angulos iam oſtenſos æquales VKH, & FET, & reliqui æquales reſtabunt LKN, & MEO.

Progreſſ. 3. Quamobrem cùm EOT, & KNV ſint anguli recti, & anguli prædicti apud K, & E æquales, & KN, & OE baſes æquales; etiam ex prop. 27. lib. 1. Elem triangula erunt æqualia MOE, & LKN erunt æqualia, & ideo crus NL cruri MO. Sed etiã NG æquatur cruri OI, & anguli MOI, & LNG oſtenſi ſunt æquales, vtpote inclinationis planorum, igitur baſis quoq; GL æquatur baſi MI ex 4. l. 1. el.

Progr. 4. Sed iam EM æquatur cruri LK ex progr. 3. & GK ipſi EI, vt ſubtenſe æqualibus arcubus, ex hypotheſi. Ergo triangula MEI, & LKG erunt æqualia, cùm habeant latera æqualia quodlibet ſuo correſpondenti; quare etiam anguli ſubtenſarum HKG, & FEI æquales erunt.

Probatur ſecunda pars. Nam, ſi angulus ſphæricus LKG, & ideo inclinationis planorum LNG eſt maior angulo ſphærico MEI, vel MOI planorum, & tamen ſit æqualis arcus IE arcui GK, & HK arcui EF, erit ſinus verſus KN æqualis ſinui OE, & NG rectę OI, ſic VN rectę TO æqualis, & arcus VK arcui TE, vnde angulus HKV angulo TEF æqualis.

Eodemq; modo VKN erit æquale triangulo TEO ob angulos rectos ad N, & O, & æqualia crura EO, & NK, & angulos ad K, & E æquales. Quare rurſùs LN æquabitur cruri MO; ſed crus IO æquatur cruri GN angulus verò TOI eſt maior angulo VNG ex hypotheſi, ergo, & baſis MI baſi LG ex propoſ. 25. lib. 1. Elem. ideoq; angulus FEI angulo HKG.

Et idem dices ſi ſit minor inclinationis planorum angulus.

COROLLARIVM.

PRopoſ. etiã intelligitur conuerſa, nempe angulos ſubtenſarum æquales ęqualiũ facere angulos inclinationis planorum, & ſphęricos æquales.

Sic ſuppoſitis HKG, & FEI æqualibus facta eadem conſtructione triangula VKN, & TOE erunt æqualia ratione prædicta, ſicut, & triangula GKN, & EOI. Et ideo crura KG, & EI, nec non, & crura KH, & EF ſicut, & anguli NKV, & OET, à quibus ablati æquales anguli VKH, & FET reſtarent æquales anguli NKL, & OEM, & æquales quoque recti apud O, & N, & crura NK; OE æqualia: Vnde ex prop. 27. l. 1. Elem. ęqualia quoque triangula NKL, & OEM propterea que, & crura ipſorum KL, & EM; & hinc triangula LGK, & EIM ob crura KG, & EI ſicut KL, & EM æqualia, & angulos LKG, & MEI ex theſi æquales. Quare etiam baſes GL, & IM æquales. Et ideo quoque triangula NLG, & MIO ob tria crura tribus ęqualia, ſiquidem NL, & OM ob triangulorum NLK, & EOM æqualitatẽ ęqualia ſunt ſicut, & ob eandem OEI, & NKG triangulorũ æqualitatem æquantur OI, & NG, & baſes GL, & IM oſtenſæ ſunt æquales. Ideo triangulorum OIM, & GNL æqualitatem ęquales erunt anguli LNG, & MOI inclinationis planorum, & ideo ſphęrici. Et idem dicas ſi ſint, vel maiores, vel minores inuicem anguli ſubtenſarum, nam tales erunt, & ſphęrici.

EXPENSIO III.

De lateribus triangulorum ſphæricorum, & eorum ſubtenſis.

LAtera triangulorum ſphericorum ſingulares quaſdam proprietates obtinent, quas latera rectilineorum non habent; aut ſaltem non eodem modo; quare oportet agnoſcere, in quibus conueniant, aut ab eis diſconueniant.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

In omni triangulo ſphærico latus quodcumq; minus eſt ſemicirculo.

PRob. In fig. pr. 2. duo latera DC, & DB cuiuſcumque trianguli V. g. BOC, producta tandem conuenient in ſemicirculo apud A, cùm ſint arcus maximorum circulorum; qui in ſphęra ex prop. 11. præced. partis ſe bifariam ſecant: Ergo latera trianguli ſeorſim ſumpta minora erunt ſemicirculo.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. IX.

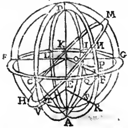
In omni triangulo ſphærico duo latera tertio ſunt maiora quomodocumque ſumpta.

*NAio ſi maiota nō ſuot, mēſurata ſuper latua EN, quòd V·g. ponitur maius in triangulo NBE, ipſum æquabunt; ita vt para ipſiua lateris EN, quę V.g. ſit ON ęquet latua NB, altera EO ęquet latus EB, ducantur circuli arcus minoris OF centro ipſo aogulo N, interuallo verò latere ON, & deinde alter cQ centro B interuallo crure EO, iſti circuli ſe deberent tangere in O; & rutſua io B cum ſint menſurę laterum BN, & BE: quòd eſt impoſſibile ex propoſ. 5. tertij Euclid.

THEOR. III. PROPOS. X.

In omni triangulo ſphærico tria latera ſimul, minora ſunt integrò circulo maximo.

*PRobatur. Sint latera KMN, & KGB conuenientia io K, & latere EN termioata, & faciant triangulom KNB, ſi producaotur coibunt in E, & facient ſemicitculos KME, & KGE; & triangulum reliquum EBN. Sed huius trianguli latera duo EN, & EB ſunt maiora crure BN ex pręc. Ergo ſi addamus reliquis crutibus alterius trianguli, oempe



crori KMN, & ctuti KGS erunt ſimul hęc quatuor tribus KMN, & KGB, & NB trinoguli ptopoſiti KNB cruribua maiota: Sed hęc crora quatuor faciunt dooa ſemicirculos: Ergo tria crura cuiuſlibet triāguli ſunt minora duobus ſemicirculia, ideſt integro circulo.

EXPENSIO IV.

De angulorum, laterumque mutua dependentia, & relatione generica.

VIſis proprietatibus aliqoot, tum laterum, tum angulorum ſecundum ſe, incipimus anguloa latetibus conſerre genericē, vt deinde In ſequentibua eotum ſpecificam dependentiam agnoſcamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Si duo triangula ſphærica angulum angulo æqualem obtineant, cruſq; vnum vni, alterum alteri æquale, etiam baſem æquali ſubtenſam angulo æqualem obtinebunt, eruntq; æqualia inuicem.

*SInt duo triangula ſphęrica BNB, & ZYX, quę aogulum E aogulo X ęqualem habeant, cruſq; EN cturi YX, & BB cruri ZX æquale. Dico etiam *baſim BN baſi ZY fore æqualem, & ideo triangula inuicem eſſe æqualia.*



Probator. Nam ſubteoſę eondem angulom rectilineum habebunt ex propoſ. 7. hūiua, & ſubtenſa BE, ex propoſ. 33. tertij erit ęqoalia ſubtenſę ZX, NB ſubtenſę YX. Ergo ex propoſ 12. lib. 1. element. etiam baſia recta ſubteoſa BN, erit ęqualia rectę ſubtenſę ZY: Quare ex 32. lib. 3. & arcus BN ęqoabitor arcui ZY.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si duo triangula ſphærica crus cruri, & aliud crus alteri cruri æquale obtineant, & angulus comprehenſus ſit maior altero; etiam baſis oppoſita erit maior altera.

*PRobatur. Quia pooitur aogulua ſphęrleus BEN malor; quàm ZXY, erit ex prop. 7. h & angulus ſubtenſarum BEN maior ſubtenſarom ZXY; quia verò arcua BE ponitur ęqualis arcui ZX etiam ſubtenſa BE ęquabitur ſubteoſę ZX, ſic quia arcus NE ponitur ęqualis arcui YX talis erit, & ſubtenſa NE ęqualia ſubteoſę YX. Quia itaque triangulum ſubteoſarum rectilineum habet crus cturi, & aliud crus alteri cruri ęquale, angulum autem comprehenſum apud E maiorem, quàm angulua apod X erit, & baſis recta ſubtenſa BN maior, quam ſubtenſa ZY; ex 24. lib. 1 el. quare ex prop. 22. lib. 3. & arcus BN maior crit arcu ZY.

THEOR. III. PROP. XIII.

Si duo triangula ſphærica habeant baſim baſi maiorẽ; crus verò vnum vni alterum alteri æquale, & angulum maiorem comprehenſum obtinebunt.

ADſit maior baſis BN baſi ZY, & latera ſingula ſingulis æqualia, dico, & angulum E fore maiorem angulo X.

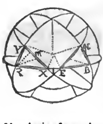
Probatur. Si enim talis non eſt, erit aut æqualis, aut minor. Nam poteſt autem eſſe æqualis. Nam ſi angulus E eſſet æqualis angulo X, baſis quoque NB æquaretur baſi YZ ex II.h. contra hyp. Non poteſt eſſe minor, quia ex præced. maior angulus tunc eſſet angulus X; quare haberet quoque maiorem baſem ZY, quàm BN, & tamen è contrà BN ponitur maior, quam ZY ex hypotheſi.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si tria trianguli ſphærici latera alterius trianguli tribus lateribus, ſingula ſingulis correſpondentibus ſint æqualia, habebunt etiam angulos correſpondentes, & æqualibus arcubus oppoſitos æquales.

SInt arcus BN arcui ZY, & BE alteri ZX, & tandem NE tertio YX æqualis. Dico, *& angulos omnes quilibet ſuo correſpondeats, qui nimirum angulis æqualibus ſubtenduntur, eſſe æquales.*

Probatur. Nam cum arcus ponantur æquales etiam ſubtenſæ ſingulæ ſingulis erũt æquales. Quare ex propoſ. 23. lib. 1. erunt anguli rectilinei ſubtenſarum æquales: Ergo etiã anguli ſphærici ex Coroll. propoſ. 7. huius, cum ſi angulus rectilineus ſubtenſarum ſit æqualis, etiã anguli ſphærici arcuum ſubtendentium ſint æquales



THEOR. V. PROP. XV.

Si duorum triangulorum anguli duo quilibet ſuo correſpondenti, ſint æquales, & baſis adiacens æqualis alteri, arcus quoque, & latera ſunt æqualia.

DEntur B angulus æqualis angulo X, & B angulo Z, & baſis NB baſi ZY in triangulis BNE, & YZX. Dico, *eſſe æqualia crura* NB *ipſi* ZY, *&* BN *ipſi* YX.

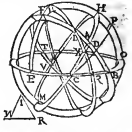
Quòd ſi non ſunt detruncetur XM æquale crus cruri BN, & ducatur ZM.

Probatur. Quia ergo XM æquat crus EN ex aduerſarijs, & ZX latus EB, angulus autem comprehenſus X æquatur angulo B ex hypotheſi erit etiam angulus apud XZM ex huius prop. II. æqualis angulo B, cum, & ipſa tota triangula æqualia ſint. Ergo, & angulo XZY ipſi NBE æqualis, quòd eſt abſurdum, eſſet enim pars MZX æqualis toti angulo apud Z in triangulo XZY, & ſic dicas de illo latere, vnde ſi anguli ad baſim ſinguli ſingulis in duobus triangulis ſphæricis ſint æquales, & crura in ijs correſpondentia angulis æqualibus erunt æqualia.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Si trianguli ſphærici duo anguli æquales inter ſe fuerint, habebunt quoque latera ſubtenſa æqualia.

EXhibeatur triangulum BAC, angulique inuicem æquales ſint C, & B. Dico *latera quoque ſubtenſa* BA, *&* AC *eſſe æqualia.*



Nam ſi AB maius eſt, detruncetur id, in quo maius eſt arcu maximi circuli CDP, ergo æquale latus CA eſt lateri BD. At ex hypoth. angulus B angulo BCA eſt æqualis, & arcus BC communis. Ergo triangulum BDC æquabitur triangulo BAC ex 10. huius, pars toti, quod eſt impoſſibile.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si trianguli ſphærici duo crura inter ſe æqualia ſint, etiam anguli oppoſiti inter ſe æquales erunt.

TRianguli ſphærici BAC ſubtenſa latera ſint BA, & CA inter ſe æqualia. Dico, *& angulos fore æquales.*

Producantur enim latera æqualia BC, & CA vſque ad quadrantem in O, S, & H ſicut, & latus BA in F. Circulique maximi polis B, & C vtroſque quadrantes SX, & BF nectant BP ſicut CU, & CH arcu HO Aut ergo arcus OH, & SF conceduntur æquales. Ergo etiam angulis B, & C erunt æquales ob ipſorum menſuras æquales, quæ ſunt arcus FS, & HO, vel alter eſt maior altero, & tunc detrũcetur id, in quo maior eſt, & ſit HP; ducaturque arcus maximi circuli CDP, vel ergo tranſibit per A; ſed etiam tranſibit per C, ergo ſecat circulum maximum CH circulus maximus PC in duobus punctis, quæ ſemicirculo non diſtant contra prop. 18. p. t. h. vel non tranſibit per A, ſed alibi V. g. in D Ergo triangulum BDC aliud, quam CAB de quo eſt quæſtio, enaſceretur, vnde à propoſito exiremus.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XVIII.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur, & maius latus maiorem angulum ſubtendit.

ADſit triangulum ABC, in quo angulus BCA ſit maior angulo B. Dico *latus* AB *maius eſſe latere* AC. Fiat angulus BCD æqualis angulo B tunc

Probatur propoſ. Quia BCD, & DBC anguli ęquales ſunt, ex prop. 16. arcus quoque BD, & AC erunt æquales. Quapropter addito arcu DA arcui BD duo arcus DA, & BD ſunt maiores arcu DB. Ergo, & arcus BA totus oppoſitus maiori angulo ACB maior erit arcu CA.

Probatur ſecunda pars. Nam ſi ſit arcus BA maior arcu AC, angulum quoque oppoſitum BCA maiorem conſequetur angulo CBA.

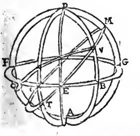
Nam ſi maior angulus ACB angulo B non eſt, erit aut æqualis, aut minor; Verùm æqualis eſſe nequit ACB angulo B. Nam ex 16. h. Latus quoque oppoſitum BA eſſet æquale lateri AC contra hypotheſim. Sed nec ACB angulo B minor eſſe poteſt; Quòd iuxta primam partem huius cum angulus B eſſet maior ſubtenderet quoque AC maius latus, quam BA, quod eſt contra præſuppoſitum, cùm dixerimus BA eſſe maiorem arcum, quam arcus AC.

THEOR. X. PROPOS. XIX.

Cuiuſcumque trianguli ſphærici duo anguli ſunt æquales, ſi vnicus arcus productus vſque ad ſemicirculum, & alterius crus oppoſitum ſimul ſumpta ſemicirculo ſunt æqualia.

At ſi ſemicirculo ſint maiora, angulus oppoſitus lateri non producto erit maius, ſi minora minus alio angulo.

SIt triangulū VDT, & VA cruris VD producti vſq; ad ſemicirculum in A, & crus oppoſitum TV angulo D ſint æqualia ſemicirculo DVA. Dico *etiam angulos* VDT *producto lateri* DV, *&* DTV *non producto* TV *oppoſitos eſſe æquales.*



Probatur. Nam quia VA, & VT ſunt ęqualia ſemicirculo DVA, dempto communi VA remanebunt latera VD, & VT æqualia. Quare etiam oppoſiti anguli apud D, & apud T erunt ęquales ex propoſ. 16 huius.

Si verò crus productum VA, & non productum VT. Sint maiora ſemicirculo DVA, dematur communis arcus VA, & remanebit crus productum DV minus, quam crus non productum VT. Quare, & angulus oppoſitus T minor erit angulo D ex propoſ. 19. huius. E contra dicendum eſt, ſi crura ſint minora productum AV, & non productum VT ſemicirculo DVA: Nam dempto communi VA remanebit maius crus DV, quàm VT: vnde maior quoque erit angulus T angulo D ex 19. huius.

THEOR. X. PROPOS. XX.

* *Si duo anguli alicuius trianguli ſint æquales, crus adiacens extra ſumptum vſque ad ſemicirculum æquabitur cum crure oppoſito alteri angulo, toti ſemicirculo; Si verò angulus adiacens cruri producto ſit maior altero, latus productum, & non productum erunt maiora ſemicirculo: Si verò angulus adiacens cruri producto ſit minor, latus productum, & non productum erunt minora ſemicirculo.*

SIt præcedens figura, & producatur crus VD trianguli VDT, & ob ęqualitatem angulorum apud D, & apud T in triangulo DTV arcui VT, arcus VD eſt æqualis: addatur arcus VA cruri VD erit ſemicirculus. Ergo, & additus arcus VA cruri ęquali VT efficiet ſemicirculum.

Probatur 2. pars. Si VD ſit minus crus, & VT ſit maius, eo, quod angulus oppoſitus T cruri VD ſit minor, quàm angulus D cruri VT oppoſitus, addita pars AV, quę iuncta parti VD faciebat ſemicirculum iuncta cruri VT maiori faciet magis ſemicirculo.

Probatur 3. pars. Nam ſi VD ſit maius crure VT ob angulum VTD ei oppoſitum maiorem angulo D: addita pars VA ipſi VT minori ipſâ VD faciet ſemicirculo minus, quę iuncta cruri VD maiori faciebat ſemicirculum:

THEOR. XI. PROPOS. XXI.

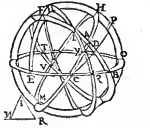
Duo triangula ſphærica æquiangula ſingulis angulis æqualitate reſpondentibus habebunt etiam latera illis ſubtenſa æqualia.

SIt triangulum RNT in fig. pr. 16. æquiangulum triangulo ZCX, ita vt Z angulo R, & X angulo T, & C angulo N ſit æqualis, dico, & eſſe ęquilaterum ſingulaque latera ſingulis lateribus ęqualibus angulis ſubtenſa ęquari.

Et quidem ſi concedatur ſaltem vnicū latus ZC ęquale lateri RN, cùm anguli ad baſim ſint quoque ęquales, iam clarum eſt ex prop. 15. huius, cętera quoque latera ęquari, & totum triangulum toti eſſe ęquale.

Quęſtio itaque remanet, ſi omnia latera dicantur eſſe inęqualia, & tunc ſi ZC nō ęquat RN ęquet illud maius CB, ita ſi CX non ęquat RT, ęquet illud maius CA, & ducatur BA, & ita triangulum BAC, ex 11. h. erit ęquiangulum triangulo ZXC, propterea; apud B angulus ęquabitur angulo apud Z, & X ipſi A interni, vnde, & externi LXC, & LAX. Sed ex propoſ.

propoſ.2. huius angulus B equat etiam angulum T duorum ſemicirculorũ BAT, & BBT: quare trian-



gulum ZLT habet duos angulos equales Z, & T ad baſim ZBT. Vnde ex preced. arcus productus BL, & oppoſitus ZXL equabũtur ſemicirculo. Rurſus, quia externus X equatur angulo A, externus verò A equatur angulo V, erunt anguli LXC, & V comprehenſus ab arcu XMV, & LFTV equales. Quare etiam ex prec. arcus AL productus, & LX oppoſitus non productus erunt equales ſemicirculo; hoc autem eſt abſurdum; quis ſunt partes crurum BL, & ZL, que vt ſupra oſtenſum eſt, equant ſemicirculum.

EXPENSIO IV.

De laterum, & angulorum ſpecifica dependentia.

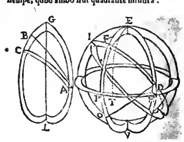
SPecies angulorum erit; ſi ſciamus; an ſint acuti, vel obtuſi, vel recti, & laterum an ſint illa equalia quadranti, vel inequalia, aut an polus ſit in angulo oppoſito, vel non ſit, quem ſubtendunt.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si detur aliquod triangulum, cuius duo anguli noti quantitate, & crus ſubtenſum vni ex ipſis ſit notum in quantitate; reliqua verò latera ſint nota, nempe quòd ſint, vel maiora, vel minora quadrante ſeorſim ſumpta, non dabitur aliud triangulum, quod habeat angulum, aut crura reliqua in quantitate, aut maiora, aut minora dato.

SIt datum triangulum DFE, cuius duo anguli quantitate noti ſint E, & F, & crus DF angulũ aliquem notum ſubtendens; ſit verò cognitum V.g. DE latus reliquum, eſſe quadrante minus. Dico *non poſſe dari aliud triangulum in eadem quantitate noti lateris*, & duorum angulorum, quòd deinde habeat reliquum angulum, ſeu crus aliquod dato, vel maius, vel minus.

Quod ſi detur; ſit illud CAG; cuius crus CG aſſeratur ab aduerſarijs maius crure FE, & ponatur nihilominus angulum C eſſe æqualem angulo E, & C ãgulo F, & AC notũ quãtitate eſſe equale cruri DF; reliquaq; latera DE, & AG ſint cognita in ſpecie; nempe, quod ambo ſint quadrante minora.



Aſſero non poſſe hoc eſſe ſine abſurdo, ſiquidem crus CG ponitur ab aduerſarijs maius, quàm EF detruncetur crus equale CB. Quia igitur angulus C ex hypotheſi equatur angulo F, & latus AC lateri DF, & crus CB factum eſt equale cruri FE; triangulum totum DFE equabitur triangulo ABC, & ſic etiam angulus in eo B equabitur angulo E, cui equabatur ex hypoth. angulus G, erunt ergo equales angulus G, & B trianguli ABC; ideoque etiam angulus L ad ſemicirculos equalis ipſi G equabitur ipſi B; quare AB & AL latera oppoſita cũ ſint anguli equales ad baſim BL erũt equalia; Cũ ergo AL, & AB ſint equalia, ſi ipſi cruri AG addatur crus AB, equabitur ſemicirculo, vt equabatur prius AG iunctum ipſi AL: Ergo crura AG, & AB ſunt ſemicirculo equalia ex 20. propoſ. huius; ſed BA equat ED quadrante minus, ergo AG quadrante eſt maius contra theſim. Quare aliud triangulum exhiberi nõ poterit equalium oppoſitorum angulorum, & lateris, alijs lateribus ſpecie notis, & deinde habeat crus aliquod minus altero dato.

Quòd ſi detur triangulum, cuius DE crus notũ ſpecie ſit quadrante maius, & contendant aduerſari dari aliud non ei equalium laterum ſit datum DEF, & ab aduerſarijs exhibitum ABC, cuius BA ſit quadrante maius, & habeat crus CB minus, quam FE, dicaturque C equalis angulo F, & B, angulo E, & FD lateri AC: tunc prolungetur latus CB, vſque ad equationem lateris FE in G, eritq; triangulũ AGC equale triãgulo DEF ex prop. 11. b. ob C equalem angulo F, & crura ambientia correſpondenter AC ad DF, & CG ad EF equalia: quare angulus G æquabitur angulo E, & ideo angulo B. Sed angulus G æquatur angulo L, ergo LBA, & L equabuntur, ideoque & latera AB, & AL angulis oppoſita æqualibus; Si ergo addas AG ipſi AB faciet duo crura æqualia ſemicirculo: ex propoſ. 20. huius, ſed AG equat DE maius quadrante. Ergo AB erit contra theſim minus quadrante.

Quare patet cur crura ſpecie nota debeant eſſe; quia; ſi non ſit nota, tunc poteſt dari triangulum, quod habeat C angulum æqualem angulo F, & G angulo E, & crus CA cruri FD; quod tamen habeat aliud crus angulo C noto oppoſitum, nempe BA minus quadrante, quia tunc etiam angulus B equatur in CBA triangulo angulo D, & ideo angulo E, cum ſcilicet BA eſt minus quadrante; GA verò maius, vt ſimul æquent quadrantem: Vnde pro latere GA, de quo neſcimus, an ſit, vel maius, vel minus quadrante, poſſet inueniri crus BA, cum tamen velemus reperire crus AG.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XXIII.

Si triangulum ſphæricum, cuius noti ſint quantitate duo anguli, & nota quoque crura angulum incognitum claudentia, in quorum reliquo nō ſit lateris polus nullum aliud triangulum tale dabitur, quod reliquum angulum ignotum, aut crus habeat quantitate diuerſum.

COgnaſcantur trianguli DFE duo anguli F, & E quoad quantitatem, & item quoad quantitatem, ſint pariter nota duo latera claudentia angulum ignotum DE, & DF, in quo angulo ignoto polus lateris SE non ſit, Dico, *quod omne aliud triangulum in cognitis æquale; erit huic æquale,* etiam in illis, quæ cognita non ſunt angulo, & latere. Quod ſi non eſt verum; detur aliquod aliud, & ſit CAG, cuius angulus G ſit æqualis angulo E, & C angulo F trianguli noti, latera quoque ſingula ſuo correſpondenti CA lateri DF, & AG lateri DE, & in A non ſit polus lateris GC; & tamen nec angulus A ſit æqualis angulo D, nec crus CG cruri EF. Fiat itaque crus GC æquale FE detruncando, vel addendo, & ſit CB, trahaturque arcus maximus qui ſit AB. Crura itaque AB, & AG erunt æqualia; quòd ſint æqualia ambo cruri DE crus AG quidem ex hypotheſi; AB verò ex propoſ. 8. propter æqualitatem triangulorum eſt enim angulus C, ęqualis F angulo, cuius latus CA ambiens, ex dicto aduerſariorum æquatur lateri FE, & latus aliud ambiens CA lateri FD ex hypotheſi, & ideo AB baſi DE erit æqualis: Ergo latera prędicta AB, & AG remanebunt ęqualia, & conſequenter anguli ABG, & AGB erunt æquales inuicem, vtpote æqualibus lateribus ſubiecti in eodem triangulo ex prop. 16. huius.

Ex hypotheſi autem angulus etiam G eſt æqualis angulo E, & angulus quoque ABC ab aduerſarijs angulo eidem G debet æqualis fateri, cùm ſit æqualis angulo ipſi E ea ea ratione, quòd latus CB lateri EB fecerimus æquale, & latus AB probatū ſit ęquale cruri ED, & CA, & FD æqualia. Sunt antē duo anguli hinc, & inde ABC ABG æquales duobus rectis ex prop. 3. rurſus ſunt æquales inuicem, cum ABG ſit æqualis angulo G ex primo progreſſ. & eidem ea ſecundo ſit æqualis angulus alter ABC. Quare erunt æquales inuicem, & duobus rectis; Ergo recti. Vnde, & angulus G æqualis ipſis rectus erit; Quare ex prop. 14. primæ partis h. latus AB, & AB tranſibit per polos cruris, & lateris CG in A contra hypoth. quòd eſt abſurdum. Si verò polus ſit in angulo à duobus lateribus cognitis comprehenſo E, & anguli ſint ambo recti ad baſim patet, quod alij anguli ad verticem E, & baſis HP poſſit eſſe diuerſa. Vnde ex illa cognitione nihil certi colligitur, cum multa alia triangula poſſint dari ita cognita; quæ tamen in baſi, & angulo cognito ſint diuerſa ab eo, de quo quæritur, cum crura EH, & EP poſſint claudi, vt ET, & angulū minorem E baſimq; HT comprendere manendo in eadem quantitate, nempe quadrantium, & faciendo eundem angulum nimirum rectum cum baſi HP, ſeu HT.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si cognitionem habeamus quantitatis vnius, anguli, & duorum laterum ambientium alium angulum tertium, quem cognoſcamus, vel acutum, vel obtuſum, nullum autem rectum. Nullum aliud dabitur triangulum eandem quantitatem, tum laterum, tum angulorum habens, quòd non ſit huic æquale.

SIt triangulum FDE habens duo latera DF, & DE notæ quantitatis ambientia angulum D: ſit etiam angulus F quantitate notus, alius autem angulus conſtet ſolum ſpecie nimirum angulus E, quod ſit, vel obtuſus, vel acutus, dico, quod nullum aliud triangulum habens latus lateri, & aliud latus alteri lateri æquale, & angulum angulo æqualem dabitur, quod cognito non ſit omninò æquale in omnibus alijs, dummodo angulum reliquum eiuſdem ſpeciei habeat, qui à lateribus cognitis nō ambiatur. Quod ſi datur ſit illud CAG, & ſit AG æquale crus DE, & AC æquale DF ambientia angulum A quantitate ignotum, anguluſque C angulo F, & reliquus G eiuſdem ſpeciei, nimirum acutus prout eſt angulus E, & tamen crus CG ſit maius, quam FE; detruncetur, itaque crus æquale CB, & ducatur arcus circuli maximi AB.

Nunc Probatur ſequi contra hypotheſim, angulos ſpecie cognitos ambo acutos eſſe æquales duobus rectis. Latus AC, cùm ſit æquale lateri DF, & latus CB lateri EF, comprehendantque angulum C æqualem angulo F ex propoſ. 11 huius efficient angulos ad baſim B, & A in triangulo CBA æquales angulis D, & E vnuſquiſque ſuo correſpondenti in triangulo FED, & baſim AB ęqualem baſi DE. Sed etiam baſis AG ex hypotheſi ponitur ęqualis baſi DE; Ergo ſunt ęquales AB baſis, & AG baſis, quare anguli oppoſiti erunt ęquales nempe G, & ABG. Hic verò angulus ABG cum ſuo collaterali ABC eſt ęqualis duobus rectis; quare, ſi loco eius ponatur angulus G, iſte, & ABC erunt ęquales duobus rectis, ſed angulus ABC iam probatus eſt ęqualis angulo E. Ergo angulus G, & angulus E, quorum ex hipotheſi quilibet recto minor dictus eſt, eſſent ęquales duobus rectis.

Si verò angulus non ſit ſpecie notus, non valet propoſitio; quia poterit dari aliud triangulum omnę eiuſdem quantitatis, tum anguli vni ex lateribus oppoſiti, tum crurum, & tamen in cęteris diſſentiens; quia ſcilicet crus ambiens angulum acutum poteſt ambire etiam angulum obtuſum cęteris manentibus, & angulum rectum. Sic crus DF ambiens obtuſum angulum DFE poteſt transferri in O tranſacto angulo recto P, & ambire acutum DOE, & ſic erunt duo triangula DFE, & DOE, quę habebunt angulum E communem, & latus DE idem, & crus DF cruri DO ęquale, & tamen in cęteris differentia erunt. Item ſi angulus non ſit notus ſpecie poterit eſſe rectus, & ſic baſis poterit eſſe maior, & minor manentibus cęteris angulis; ſit B angulus cognitus quantitate rectus, cęteri verò non cognoſcantur tunc P poterit eſſe rectus, & H rectus, & tamen baſis HP, à P in T, & angulus B variari.

THEOR.

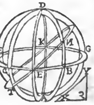
THEOR. IV. PROPOS. XXV.

Si rectanguli ſpharici trianguli notam habeam baſim ſpecie, & crus, & angulum non rectum quantitate non dabitur aliud triangulum, de quo eademcognoſcam; niſi prædicto cognito æquale.

TRiangulum rectangulum ZYX expoſitum ſit; cuius latus YB oppoſitum angulo recto ſit notum ſpecie, & quantitate crus XZ, & angulus X. Dico, *quòd, ſi detur aliud rectangulu eadem ſpecie* notum, habens latus adiacens angulo recto æquale dato, & angulum æqualem, in alijs omnibus erit triangulo ZYB æquale.

Sit ergo tale triangulum; cuius crus BB ſit cruri XZ, & angulus B angulo X æqualis.

Probo in cæteris quoq; æquari. Abſcindatur BC æqualis arcui ZX, vel EB; productoque arcu NE æquali YZ in T ducatur à T normalis TCO, & fiet triangulum BTC; quod ex conſtructione erit æquale triangulo ZYB. Siquidem angulus TBC eſt æqualis angulo BSN, qui ex hypotheſi æquatur angulo B. Latera verò, facta ſunt æqualia. Vnde ex propoſ. 11. huius. & crus TC erit æquale cruri YZ: ſed hoc triangulum eſt æquale triangulo NEB, ergo triangulum NEB erit æquale triangulo TBZ.



Intelligamus DBA maximum eſſe circulum tractum per duo puncta A, D, quò ſe ſecant ADB, & ACD arcus maximi, & per B, tunc ſic arguo.

Arcus CE ex hypotheſi eſt æqualis arcui BB, vel XZ, & ideo angulus CAE æqualis angulo BDS, cum arcus CB ſit normalis; arcus EA æqualis arcui ED, cum ſit quarta circuli angulus NBS æqualis angulo TBC: quare, & reſiduum angulorum NED reſiduo TSA quadrãtium GEN, & FEA erit æquale, qui angulus reſiduus à prædictis cruribus clauditur; quamobrem ex propoſ. 15. totum triangulum reſiduum NED erit æquale toti TEA, & baſis ND baſi TA. Ablatis, ergo baſibus æqualibus illis, à quartis circuli AC, & SD remanebunt crura æqualia NB & TC.

Probatur etiam de cruribus TE, & NE: Nam cum triangula NOE, & TAE ſint æqualia, vt oſtendi Ergo, & baſes erunt æquales ST, & BN in triangulis æqualibus TAE, & NOE.

Oportet autem ſcire crus oppoſitum angulo recto. Nam illo cognito omnia alia neceſſariò cõſpirãt in triangulum idem, at illo non cognito, ſed alio crure non erit idem triangulum neceſſariò, cum cognito angulo, & crure poſſit eſſe baſis diuerſæ quantitatis.

Nam ponamus triangulum NAB eſſe talis oſtoræ, quam deſcripſimus propoſ. 20. quòd eius complementum ND eſſet cum crure NB æquale ſemicirculo; tunc angulus N eſſet æqualis angulo A, & conſequenter huic æquali angulo O ex prop. 2.

Ita angulus D, & angulus N erunt iidem, & crus BB idem, & tamen triangula BEN, & BNS erunt diuerſa; Sic BN in triangulo KNS, & SNE eſt eadem tamen baſis EN, & crus EGS non eſt idem cum NB, & SN. Oportet ergo ſcire baſis ſaltem ſpeciem cum alio angulo, nempe ſi ſint, ſeu arcus maiores ſemicirculo, vel minores, ne generent fallacias in argumentando, quòd teſte Clauo, lib. primo reuolutionum, Copernicus, & Regiomontanus agentes de triangulis ſphęricis in aſſignatis caſibus non aduertentes mirè hallucinati ſunt.

EXPENSIO V.

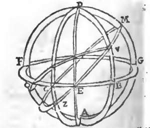
De ſpecie laterum, & angulorum cognoſcenda.

LIcet multoties ipſum triangulum propoſitum, de quo tria in quantitate innoteſcant, ſeu latera, ſeu anguli, vt cęterę partes, deinde reperiantur, vt plurimùm afferat ſpeciem quoque partium incognitarum quantitate; aliquandò tamen, euenit, quòd propoſitum triangulum, ſeu ſuo ſitu, ſeu alia ratione nullam partium incognitarum ſpecificam notionem exhibeat: vnde operę pretium tunc erit aliquas hic aſſignare rationes, vnde ſpecifica cognitio deſumatur.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Cuiuſcumque trianguli ſpharici duo anguli ſuper eandem baſim erunt æquales duobus rectis ſimul ſumpti: ſi reliqua latera ſimul ſumpta erunt æqualia ſemicirculo, at ſi ſint maiores, maiora, ſi verò ſint minores duobus rectis, crura quoque erunt minora ſemicirculo.

TRiangulum AZV exhibeatur, cuius duo anguli dati VAZ & AZV ſuper eandem baſim AZ duplici recto æquiualeant. Dico, *& latera ſubtenſa* AV, *&* VZ *fore ſemicirculo æqualia.*



Probatur: Cum enim collaterales anguli AZV, & DZV ſint æquales duplici recto ex prop. 3. ſicut ex theſi VAZ, & AZV; ſi auferatur communis AZV erunt æquales VZD, & VAZ ad inuicem; quòd cum ablato communi AZV ex hypotheſi, eſſent ęquales duplici recto, & ideo ex 2. propoſ. huius VZD, & D erunt inuicem æquales. Quare ex propoſ. 39. erũt æqualia ſemicirculo trianguli DVZ cruris DV complementum AV, & baſis VZ, nempe reliqua crura trianguli propoſiti AVZ.

Quòd

& quod ſi A angulus AZV ſit maior qnilibet recto, cũ AZV, & collateralis DZV angulus ſit ſẽper æqualia angulo duplici recto, ſequitur, quòd ablato AZV, qui cum OZV eſt ęqualis duobua rectis, remaneant angulus A, & ideo D angulus, angulo OZV maior quoque. Et hinc ex propoſ. 20. quòd exiſtente minori VZD angulo D, quod complementum VA, & baſis VZ ſint maiora crura ſemicirculo.

At ſi angulus A eſſet minor, cum angulo AZV quilibet recto; eſſet collaterali OZV, angulus D æqualia angulo A pariter minor, vnde ex prop. 20. eadem comulementum VA, & baſia VZ remanerent minora ſemicirculo crura dati trianguli AVZ.

COROLLARIVM I.

HInc eſt. Quod ſi habes ſpecificam cognitionem trium angulorum V. g. angulorum A, & AZV, & AVZ potes deuenire in cognitionem ſpecificam laterum. Nam ſi duo ex iſtis aogulia erunt ſuper latua aliquod aſſumptum V. g. AZ; videbis an tertius, cum altero ipſorum faciat duos rectos. Nam latera ambientia tertium tunc erunt æqualia ſemicirrulo, ſi faciant magia, quàm duoa rectos, latera tertium angulum ambientia erunt maiora ſemicirculo, quòd ſi minores ſimul ſumpti ſint duobus rectis erunt minora tertium angulum claudentia latera ſemicirculo.

COROLLARIVM II.

QVod ſi duorum angulorum ad baſim AZ, & vniua lateria habeas notitiam ſpecificam, reliquorum quoque laterum ſpecificam notitiam habebia. Nam ſi latua AZ oppoſitum minori angulo AZV erit quadrans certum eſt ex Coroll. pro. poſ. 18. quòd aliud crus AV angulo maiori oppoſitum AZV erit maius, Ideo; quòd ſimul erunt maiora ſemicirculo. Sic ſi latus AV oppoſitum maiori angulo non excedet quadrantem latus oppoſitum minori AZ minus erit quadrante. Vnde duo latera tertium angulum ambientia erunt minora ſemicirculo.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si ſint in vnoquoque triangulo duo latera quadrantibus æqualibus ſingula æqualia in angulo verticali erit polus.

PAtet, quia polua circulorum maximorum diſtat quadrante à circulis, quorum eſt polua. Si ergo ſingula duo latera AD, & DC in triangulo BDC, ſint quadrantes erit in angulo D polus.

COROLLARIVM

HInc facilè fallaciam propoſ. 22. vitabis, ſi latera cognita erunt, vel maiora, vel minora quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXVII.

Cuiuſcumque trianguli ſphærici duo anguli ſuper eandem baſim erunt æquales duobus rectis ſimul ſumpti, ſi latera reliqua ſimul ſumpta ſint æqualia ſemicirculo, & ſi ſint maiora maiores; ſi minora, minores erunt duobus rectis.

PRobatur. Quia VAA, & ZV latera in triangulo VAZ ſunt ex prẹſuppoſito ęqualia ſemicirculo, producto latere VA vſque ad ſemicirculum in D, erunt in triangulo VZO angulus VZD, & D ęquales ex propoſ. 19. huiua. Sed collaterales ad Z nimirum VZD, & VZA ſunt æquales duobus rectia. Ergo ablato VZO ęquali angulis æqualibua A, & D (talea enim ſunt ex propoſ 1.) remanebunt VZA, & VAZ ſuper eandem baſim AZ æquales duobus rectis.

Si verò ſint duo crura AV, & VZ maiora ſemicirculo, maiores erũt ãguli A, & Z ſimul, duobus rectis Nam ex propoſ. 19. maior erit angulus O, & conſequenter ęqualia A, quam VZD, qui cum collaterali eſt ęqualia duobus rectis: illo VZD, itaque ablato minori angulo, remanent A, & collateralis VZA maiores duobus recti a ſuper eandem baſim ZA: ſi enim quando ęquales erant D, & VZD ęquabantur duobus rectia VZA, & A, modo quia D eſt maior ob augmentum laterum VA, & AZ vltra ſemicirculum, erunt quoque illi minores, & è contra angulua A, & angulus AZV maiores duobus rectis.

Si verò crura ZV, AV ſint minora ſemicirculo, erit D minor angulus, quàm alter in eodem triangulo VZD, qui erit maior, ex propoſ. 19 & conſequenter angulo A. Ablato itaque VZO maiori, & cum collaterali VZA ęquali duobua rectia remanent VZA, & A: anguli minorẹa duobus rectia.

COROLLARIVM.

HInc eſt. Quòd ſi duorum laterum habeamua cognitionem ſpecificam, & anguli inueniemus, & cognoſcemua ſpecificè reliquos anguloa, an ſint ambo, vel maiorea, vel minorea duobus rectis ad effugiendam fallaciam propoſ. 14.

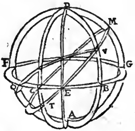
Nam quia ſcio crura VZ, & AV eſſe maiora ſemicirculo, cognoſco quoque duos anguloa A, & Z in triangulo VZA eſſe maiorea duobua rectis, quod ſi deinde per cognitionem quantitatiuam agnoſcam VZA angulum eſſe minorem recto, angulus A erit obtuſua.

At ſi latera VZ, & AV eſſent minora ſemicirculo, eſſent quoque anguli Z, & A in triangulo VAZ minores duobus rectia; ſed ſi habeo cognitionem, quod Z, aut rectus, aut maior recto ſit, ideo A minor erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXVIII.

In omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius duo perpendiculares arcus ſint quadrante minores, anguli reliqui erunt acuti, & ſi reliqui anguli ſunt acuti, erunt omnes arcus quadrante minores.

SIt trlangulum rectsngulum EVA, & ſint arcus VB, & EB qusdrsute minores. Dico *angulos apud* B, *&* V *eſſe acutos.*



Pr oducatur crus EB, & AV vſque sd quadrantem in O, & N. Atque per A ducatur circulus AED à puncto N.

Probatur DEA eſt circulus maximus. Ergo puncta N, & E abſunt quadrãte ab eius polo G, ergo GD eſt quadrans ſicut, & GE: quare angulus GAN eſt rectus, & hinc GEM mlnor recto.

Sic quia arcus OA cadit perpendiculsrjter ob angulum rectum E ſuper circulum DBA, poli eius in ipſo erũt circulo BO, & OV; ſed poli abſunt quadrante à circulo maximo: ergo erit in O polus circuli AEN: quare OV erit quadrans, & AVO angulus rectus, ergo AVE erit acutua.

Probatur ſecunda pars, & ſint anguli AVE, & BEV acuti: fiant recti. Quia poli circuli maximi abſunt quadrante ab eo, ideo poli circuli maximi DBA, erunt ln O, ergo BE minor erit quadrsnte. Sic, quis poli circuli maxlmi FEG erunt in N, ideo crus EV minus erit quadrante: At quia poli circuli maximi OMD erunt in A, ideo crus EV erit minus quadrante alioquin, & EA eſſet quadrsns.

COROLLARIVM I.

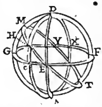
HInc eſt, quod ſi rectangulum trisngulum omnes reliquos acutos habeat angulos, quòd certò affirmari poſſit latera eſſe quadrante minora ad eſſugiendam fallàciam propoſ. 14.

COROLLARIVM II.

HInc etiam ſequitur, quod ſi alicuius trianguli ſphærici rectanguli duo arcus perpendiculares ſint qusdrante maiores, vt IDX, & CEFX. vel etiam anguli ab baſim I, & E obtuſi, quod ipſa bsſis ſit quadrante minor. Quoniam ſi crura IDX & CEFX ſunt quadrante maiors CI, & CA reſidua erunt mlnora. Vnde anguli ad baſim I, & E ln triangulo ICE erunt acuti ex præc. Ergo reliqui externi obtuſi, qui pertinent ad triangulum, cuius crus IDA, & alterum CXFX. Vnde bsſis erit IE eadem quadrante minor. Et idem dicas de angulis conuertendo propoſ.

COROLLARIVM III.

SIt verò in triangulo rectangulo perpendiculare crus ſit maius, quam qusdrans, at alterum ſit minus, vt in triãgulo YIC, crus CI, & crus YGC, baſis YMI erit maior quadrante & anguli reliqui vnus quidem maior recto, alter verò minor. Nam angulus GYM erit æqualis angulo CXI ex prop. 2. angulus MIC externus obtuſus, eòquòd internus CIE pertinens ad triangulum CIE ſit oſtenſus acutus ex propoſ. 18. baſis verò erit maior quadrante. Nam bàſis IE reſidua oſtenſa eſt quadrante minor.



COROLLARIVM IV.

QVòd ſi anguli reliqui alter acutus ſit, alter obtuſus, crura, vnum erit maius, alterum minus quadrante, ſed baſis quadraote maior.

Nam angulua apud Y acutus in triangulo YCI æquatur angulo apud E in trlangulo CIA; ideo angulus E erit acutus; angulus quoq; I reliquus obtuſi externi erit acutus in eodem triangulo CIE: Vnde duo crura, & baſis erit minor qusdrante. Ergo reſiduum baſis IMY, & cruris CGY erunt maiora quadrsnte, crus verò CI remanet idem minus quadrante.

COROLLARIVM V.

SI angulus in ſphærico rectaogulo eſt acutus, vt Y, & arcus adiacens eſt maior quadrante, vt YGC; etiam angulus oppoſitus MIC erit obtuſus; alioquin ſi eſſet rectus, ſequeretur, quod arcus quoque YGC eſſet quadrans, contra bypotheſim, quia tunc polus eſſet in circulo DCAX, & GCFX, ideſt in X communi puncto ex propoſ. 4. 1. part. Si verò eſſet acutus iam eſſent duo acuti; Vnde arcus YGC eſſet quadrante minor ex propoſ. 18.

Quod ſi angulus eſt acutus, & adiacẽs crus perpendiculare eſt minus qusdrante, erit quoque angulus alter acutus ei cruri oopoſitus. *Patet*, quia ſi eſſet maior, crus oppoſitum eſſet maius quadrsnte ex præc. Cor.

COROLLARIVM VI.

SI angulus eſt acutus oppoſitum crus perpendiculare eſt quadrante minua, quod ſi eſt obtuſus vnus angulus, perpendiculare crus erit maius quadrante. Nam ſi eſſet minus etiam angulus eſſet acutus contra theſim.

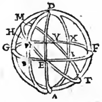
Nam vel erunt duo anguli obtuſi, & ſic ex Coroll. 2. duo crura perpendicularia erunt quadrante maiora, quod ſi obtuſus, & alter acutus, adhuc ex Coroll. 3. erit crus oppoſitum angulo maiori maius quadrante.

Et idem dicas de acuto. Nam duo anguli acuti faciũt crura minora quadrante, & vnicus acutus V dat crus ei oppoſitum minus quadrante velut CI, vt patet conſideranti.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo ſphærico Iſoſcele, ſi duo crura æqualia ſint quadrante minora erit angulus vterque ad baſim acutus; ſi maiora obtuſus; ſi æqualia quadranti rectus. At è contrà de angulis, ſi anguli æquales ad baſim ſint acuti, arcus erunt minores quadrante, ſi obtuſi maiores; ſi recti quadranti æquales.



SInt enim primo GD, & DB æqualia crura quadranti, anguluſque ſit ad verticem D quicumque, ſemper anguli ad baſim B, & C erunt recti. Siquidem facto polo in D, quia GD, & DB ſunt quadrantes GB ductus circulus erit idem ac baſis, nempe circulus maximus, & ideo ex Coroll. I. prop. 14. part. I. huius, anguli apud C, & B recti erunt.

Quod ſi ſint in triangulo Iſoſcele B V E minora crura quadrante BE, & BV. Dico *angulos ad E, & V eſſe acutos.*

Probatur. Quoniam enim crura ponuntur minora quadrante producto latere BE vſque ad ſemicirculum in Y erit EGY maius quadrante, & BV minus, vt prius. Vnde angulus apud V, ſcilicet MVB maior angulo MYG, vtpote oppoſitus maiori lateri ex propoſ. 18. huius. Sed angulus Y æquatur angulo B ex I. huius. & V internus ex Theſi æquatur angulo E trianguli VEB: Quare ãgulus externus MVB ſuperabit internũ VEB Vnde internus erit acutus; cùm ſimul ambo ſint æquales angulis duobus rectis ex propoſ. 3. h. & ideo E acutus erit.

Et hinc patet quoque latera maiora quadrante habere oppoſitos angulos obtuſos; ſiquidem BFX, & VDX crura reſidua maiora quadrante habebunt angulos oppoſitos obtuſos DVB, & VEF, vtpote reſiduos ab angulis VEB, & EVB.

Patet quoque ſecundam partem oppoſitam eſſe veram. Nam in triangulo Iſoſcele GBD ſi anguli G, & B ſint recti, GD, & BD crura erunt quadrantes eo quod in arcu GBEF ſit polus.

Si verò anguli ſint acuti in Iſoſcele triangulo EVB arcus BV, & BE erunt minores quadrante. Nam ex propoſ. 20. ſi duo anguli ſint æquales crus BGY, & crus EV æquabuntur ſemicirculo. Sed crus BGE, vtpote angulo oppoſitum obtuſo, quod ſit reſiduum anguli EVB, eſt maius crure BV oppoſitum angulo Y minori, vel B ex propoſ. 18. huius. Ergo eſt maius YGB quadrante, cum ſi æquaret quadrantem etiam æquaret FV, quia duos quadrantes, ideſt ſemicirculum æquarent. Quare cum YGE ſit crus maius quadrante crus BV erit minus, & BE quoq; vt eius reſiduum.

Quare patet angulos quoque obtuſos obtinere latera oppoſita quadrante maiora, nam triangulo cuius crura ſunt BFY, & XDV, & baſis VE, quia E, & V anguli in triangulo EVB oſtenſi ſunt rectis minores, erunt reliqui externi obtuſi, & quia BE, & BV crura trianguli EVB ſunt oſtenſa minora quadrante reliqua BFX, & VDX erunt maiora, Quare ſi aliquis Iſoſceles habeat angulos ad baſim obtuſos, vt DVB, FVE, crura, vt BFX, & VDX erunt quadrante maiora.

COROLLARIVM I.

HInc euenit, quòd, in omni triangulo ſphærico, cuius omnes arcus ſint quadrante maiores, vel vnus quadrans, omnes anguli ſint obtuſi. Nam in triangulo B I D, cuius duo crura DXI, & DE ſint maiora quadrante, baſis autem BTI. Detruncetur DI in X, ita vt DX æquet crus minus, & ducatur EFX arcus. Angulus itaque FED æquabitur angulo FXD, ſed cùm ſint maiora crura quadrante, vel quadrantes, anguli erunt obtuſi, vel recti, ergo tanto magis addito angulo FET angulus DET obtuſus erit, & ſic de quocumque alio eſſeras.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur omnes arcus eſſe quadrante minores, ſi omnes anguli ſint acuti. Nam ſi V M D trianguli omnes anguli ſunt acuti maiori angulo DMV fiat ãgulus æqualis MVD. Erũt itaq; duo oppoſiti æquales; acutus verò eſt angulus M ergò, & angulus æqualis DVM: quare, & crura ſubtenſa erunt minora quadrante ex præced. DM, & MV, ergo tantò magis MD.

Aduerte tamen, quod hæ duo Corollaria non conuertuntur: ex eo enim quod omnes anguli ſint obtuſi non infertur omnia latera eſſe quadrante maiora. Nec ex eo, quod omnia crura ſint quadrãte minora infertur omnes angulos eſſe acutos: In triangulo enim cuius crura VDX, & BFE baſis BV eſt minor quadrante, tamen anguli omnes obtuſi ſunt, vel vnus rectus tantum. Et ſic in triangulo BEV omnia crura ſunt minora quadrante, tamen angulus B erit, vel rectus, vel obtuſus, vt patet conſideranti.

EXPENSIO VI.

De caſu perpendicularis in triangulis ſphæricis.

QVoniam ad ſollutionem triãgulorũ obliquãgulorũ inter alias regulas illa eſt expedita, & facillima, per quam triangula obliquangula ad duo rectangula reuocantur ducendo perpendicularem. Ideo hìc de caſu perpendicularis breuiter agendum, vt omnis poſtea in ſphæricorum ſolutione triangulorum relegetur difficultas.

THEOR I. PROP. XXX.

In omni triangulo ſphærico, ſi anguli ad baſim ſint, aut obtuſi ambo, aut acuti, normalis arcus intra triangulum cadit.

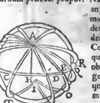
SIt triangulum DAC, & duo anguli D, & C ad baſim CD ſint acuti. Dico *perpendicularem intra triangulum* DAC *cadere*.

Probatur ex Coroll. 5. propoſ. 28. Nam cadat extra, & ſit AB, & ſequetur abſurde ſimul eſſe AB maiorem, & minorem quadrante. Quoniam enim C ponitur angulus acutus, erit crus ei oppoſitum AB perpendiculare minus quadrante. Rurſus, quia D trianguli ADC eſt acutus, externus ADB erit obtuſus Quare crus normale AB ei oppoſitum erit quadrante maius ex eodem Coroll. minus inquam. & maius quadrante, quod eſſe nequit. Idem demõſtrabis in triãgulo DCLTI, in quo obtuſi anguli ſunt DCT, & CDL ad baſim. Nam ſi IOB ſit crus normale extra cadens, DCT obtuſus requiret illud maius quadrante, & BDL acutus collateralis anguli CDL requiret illud DOI minus quadrante.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

In omni triangulo obliquangulo, cuius duo anguli ad baſim ſint vnus acutus, alter obtuſus; perpendicularis minor quadrante extra triangulum cadit ad partes anguli acuti.

SIt triangulum QAD, anguluſque Q in illo ſit acutus alter D obtuſus, & AA perpendicularis dicatur intra triangulum cadere, & ſequetur idem abſurdum præced. propoſ. Nam quia Q ponitur angulus acutus normale crus AB intra cadens erit minus quadrante ex propoſ. 28. Coroll. 6. h. Rurſus quia QDA ponitur obtuſus, crus orthogonale AB erit maius quadrante, maius, & minus, quod eſſe nequit.



Quod verò normalis minor quadrante cadat ad partes anguli acuti patet ex prop. 28. h. Coroll. 4. quia acutus angulus in rectangulo ſubtendit crus minus quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXXII.

* *In trianguli ſphærici baſim, cuius duo crura ſint minora quadrante, aut maiora duo crura perpendicularia cadere nequeunt.*

PRob. Nam cadant in CAQ triãgulo, & ſint AB, & AD. Itaq; ex Coroll. 2. prop. 13. h. tract. part. 1. in CDQ circulo baſis, polos habebunt.

Sed ex Coroll. propoſ. 18. huius par. 1. interſectiones maximorum circulorum mutuæ quadrante diſtant à circulo, in quo polos habent, ergo interſectio A à circulo maximo CDQ quadrante diſtabit. Quapropter AB, & AD puta tę normales quadrantes ſunt. Quia ergo punctum A diſtat quadrante à circulo QDC, etiam AC, & AQ quadrantes erunt contra theſim, & idem dicas, ſi anguli ſint obtuſi ob eandem rationem. Vnde ſi duæ perpendiculares in baſim cadunt etiam crura perpendicularia erunt, & anguli duo ad baſim recti.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

* *In nullo triangulo ſphærico, cuius angulus ad baſim ſit obtuſus, vel rectus: alter verò acutus, duo arcus æquales etiam ſi non normales cadere poſſunt.*

SIt triangulum RAD, & angulus in eo D ponatur obtuſus, angulus vero QRA apud R acutus, deinde ſi cõtendat aliquis, poſſe cadere intra triangulum arcus ęqualis arcui AB, ſit ille QA.

Quoniam itaque AQ, & AB arcus ſunt æquales, erunt quoque æquales anguli apud Q. & B in ipſo ideo normalis arcus ab A ductus intra triangulum QAB cadet, & ideo intra triangulum RAD; ſed intra triangulum RAD cadere nequit ex prop. 3 huius, ſed extra; cum ponãtur anguli ad baſim R acutus, & D obtuſus in triangulo RAD, ergo caderet, & non caderet intra, quod eſſe nequit.

THEOR. V. PROPOS. XXXIV.

Duo arcus æquales extra triangulum, cuius anguli ad baſim vnus ſit acutus, alter obtuſus in baſim productam cadere nequeunt è regione anguli acuti intra perpendicularem.

SIt triangulum RAQ à cuius vertice A cadat arcus normalis in H, contendatque aliquis, quod è regione anguli R acuti ab A duo arcus æquales cadere poſſint inter puncta H, & R, quæ ſint AB, & AD.

Probatur. Quia ergo AB, & AD ponuntur æquales, erunt anguli ad baſim B, & D æquales, & ideo perpendicularis intra triangulum BAD caderet: crus, ergo AD eſſet vltra perpendicularem non citra, vt ponitur in Theſi, quod caderet intra D, & Q, & ideo non in H.

TRAC-

TRACTATVS XXIII.

PARS TERTIA.

De maximorum circulorum in ſphæra, mincrumque interſectionibus, contactibuſque mutuis.

VIſâ mutuá maximorum circulorum interſectione, vltimus labor ſubit, in conſideranda natura tactuum, & interſectionum, quas faciunt maximi circuli, cum minoribus.

EXPENSIO I.

De Contactibus minorum circulorum.

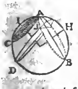
MAximi circuli tangere ſe nequeunt; cûm vt probatum eſt, ſe ſolùm ſecare poſſint bifariam; contactus itaque eſt circolorum minorum, vel cum maximis, vel inuicem.

THEOR. I. PROP. I.

Si in ſphæra duo circuli ſecent in eodem puncto circumferentiam eius maximi circuli, in quo polos habent, ſe mutuò tangent illi circuli.

SIt circulus AB, & AC, qui in eodem puncto A ſecent maximum circulum SHAIC, in quo polos H, & I obtinent. Dico *ſe contingere in eodem puncto* A.

* Probatur. Nam in eodem puncto, & non alibi ſecant ABC. Ergo ibi ſe contingunt; neque enim poſſunt in eodem puncto ſecare; niſi in eodem puncto conueniant, & vniantur circuli AB, & AC. Quod autem non alibi poſſint conuenire, patet. Nam in eodem puncto deberent circulum maximum alium cōtingere, vel ergo illū circulum maximum ſecarent bifariam, polis ſuis I, & H, & ſic eſſent circuli maximi ex prop. 12. contra Theſim, vel non bifariam. Ergo arcus IAH, & alterius maximi eſſēt minores ſemicirculo quare BDA, & alius non eſſet circulus maximus contra hypotheſim, cùm arcu HI diſtarent minori ſemicirculo eorum ſectiones.



Quod autem eſſet circulus maximus, qui per alium contactum tranſiret, patet. Nam ductis ad illum contactum diametris planum eius per illos tranſibit ex propoſ. 2. Tract. 22. vnde ex Coroll. 2. propoſ. 14. h. eſſet maximus, cum bifariam circulos CA, & AB diuideret, & per polos I, & H tranſiret.

THEOR. II. PROPOS. II.

In ſphæra, ſi duo circuli ſe mutuò tangant, maximus circulus per eorum polos deſcriptus per eorum contactum tranſibit.

*PRobatur: Nam ſi circulus maximus BAC tranſiens in eadem fig. per polos H, & I minorum circulorum non tranſibit per contactum A tranſibit alibi in L, vel ergo erit ad idem interuallum à polo H, & ſic non erit ad idem interuallum à polo I; alioquin eſſet idem circulus: quòd ſi non eſſet ad idem interuallum à polo I; ſed V. g. ad maius IL; Ergo circulus DL interuallo IL deſcriptus erit maior ſe cotingentibus in A circulis, & conſequenter ſecabit alterum in L: Sed ex præced. propoſ. debet tangere, quòd circulus maximus tranſeat quoque per eorum polos, & per L, in quo ipſum ſecant AB, & DL. Ergo ſecabit, & tanget, quòd eſt abſurdum.

Aliter. Ductis diametris CA, & AB ad contactū A, cùm ſe tangant in A, erunt in eodem plano ex prop. 2. Tract. 22. Ergo planum circuli per AC, & AB diametros tranſibit. Eritque circulus maximus, cùm eos diuidat bifariam, & tranſibit per polos I, & H ex propoſ. 14. Coroll. 2. part. h. 1.

THEOR. III. PROP. III.

Si in ſphæra duo circuli ſe mutuò tangant, circulus maximus per vnius polos, & per contactum amborum deductus, per alterius quoque polum tranſibit.

TRanſeat circulus maximus ABC in eadem fig. per polum I, & per contactum A. Dico *tranſire quoque per polum* H.

* Probatur. Nam, ſi CAHD tranſiens per I, & A non tranſit per polum H, ducatur aliquis alius, qui tranſeat per vtroſque polos: Vel ergo erit idem circulus, & ſic habemus intentum, vel non idem, & ſic duo maximi circuli ſe ſecant in contactu A, & in polo I. Quare diſtantia IA eſſet ſemicirculus ex propoſ. 12. par. 1. Sed nec poteſt eſſe quadrans, cùm ſit diſtantia AI circuli mi-

noris

ñoris à ſuo polo , quæ non eſt quadrana , cum ſphæram mediam nou diuidant, vt maximi ex propoſ.10. Ergò neque poteſt eſſe geminus circulus maximus , quare erit idem , qui per contactum, & per amborum poloa tranſibit .

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in ſphæra maximus circulus aliquem circulum minorem tangat , tanget ei æqualem, & parallelum .

TAngat circulus AB maximus , minorem AC; Dico, *quòd, & alterum tanget parallelum, & æqualem circulo minori* AC. Deſcripto circulo maximo ACB per contactum , & per polum circuli AC , qui tranſibit, & per polum circuli AA ex 3.h.

Inueniantur poli circuli AC, qui ſint F , & D ; circaque alterum polum F à plano circuli AC remotiorem deſcribatur circulus ad interuallum XF. Dico *hunc tangere circulum maximum* AB, *eſſeque alteri* AC *parallelum, necnon, & æqualem* .

* Probatur primò . Quod ſit æqualis ; ductis enim diametris AC, & AB, EB, & FD. Angulus AID erit æqualis angulo FIA, vtpote ad verticem : anguli verò apud V, & T recti ſunt , crus IA verò eſt æquale cruri IA . Ergo ex propoſ 27. elem.1. totum triãgulum AIV toti BIT erit æquale . Quare , & crura AV, & BT erunt æqualia , quæ ſunt ſemidiametri circulorum AC, EB



Probatur quoque ſecunda pars . Quod ſint paralleli, quia recta DF per eorum polos trãſit ; Ergo perpendicularis ipſis eſt ; igitur circuli quoque AC, & EB ſunt paralleli .

· Probatur tertia pars. Quòd tangat circulus EB circulum AB : quia ex conſtructione in eodem puncto ſecat circumferentiam ACBE in B .

COROLLARIVM .

HInc manifeſtum eſt puncta contactuum eſſe per diametrum oppoſita . Nam tanguut, vbi duo circuli maximi in B, & A , ſe interſecant, quorum interſectionea ſemper ſemicirculo diſtant, ex propoſ.12. par.I.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si ſint in ſphæra duo circuli æquales, & paralleli ; maximus circulus , qui eorum alterum tetigerit, reliquum quoque tanget .

SInt in eadem figura, quæ ſupra duo circuli paralleli & æquales AC, & EB, tangatque BA circulus maximus, alterum eorum in A . Dico, & *reliquum tangere in* B .

* Probatur . Nam ſect oues maximorum ACBE, & AA diſtant ſemicirculo ADA , ſicut etiam contactus minorum AB, & AC diſtant ſemicirculo ex Coroll. præced. & diametraliter ſunt oppoſiti .

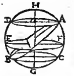
Ergo ſemicirculus idem inter A contactum, & alterum B, & interſectiones maximorum ACBE, & AIA mediabit , ergo punctum terminans contactum B , & ſectionem B , erit idem, vtpote extremum ſemicirculi ACB, tum contactus, tum ſectiones menſurantia .

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si in ſphæra aliquis circulus ad aliquem ſphæræ circulum maximum obliquus ſit, tanget is maximus duos circulos æquales quidem inter ſe, parallelos autem illi circulo, ad quem obliquus eſt .

SIt in ſphæra circulus quicumque AB obliquus ad aliquem maximum EF. Dico , *quòd hic maximus tanget duos circulos* deſcriptibiles parallelos datu AF , & æquales inuicem AD, & BC .

Sint H, & G poli circuli dati EF , per quos, & per polos quoque circuli AB circulus maximus deſcribatur ADCB : Deinde centro H interuallo HA circulus minor ducatur AD tangens AB maximum in A ; quare ex præcedenti tanget , & alterum ei æqualem, & parallelum CB . Ergo iam habemus AD , & CB eſſe inuicem æquales, & parallelos .



Probo etiam eſſe parallelos circulo FE . Nam cum AD ſit deſcriptus ſuper eiuſdem FE polos erit ei parallelus ex 1). propoſ. primæ partis. Vnde omnes erunt paralleli AD : EF, & BC .

EXPENSIO II.

De circulorum minorum , & maiorum interſectionibus proportionalibus , & æqualibus .

POſt circulorum minorum tactus communes, oportet eos comparare , & componere cum maximis , & ſectiones eorum mutuas conſiderare .

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si maximus circulus maximum ſecet ſectio diameter ſphæræ, circulique eſt.

PRobatur, vt in fig.prop.4.h. Nam ex 10.primæ partis tranſeunt per centrum ſphæræ , & ambo . V. g ACBE, & AIB habent illud pro communi centro ; ſed non poſſunt habere pro communi centro centrum ſphæræ , niſi in communi eorum ſectione cum in alija partibus inuicem nõ concurrant ; Ergo communia, eorum ſectio tranſibit per centrum . Sed quæ linea tranſit per centrum ſphęrę, circulorumque, eorum diameter eſt . Omnis ergo ſectio maximorum circulorum ſphęrę, & ipſorum diameter erit ,

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

* *Si circulus maximus per polos minorem ſecet, ſectio chorda eſt reſpectu maximi, & diameter eſt reſpectu minoris; quòd ſi non ſecet per polos ſectio vtrique chorda eſt.*

SEcet maximus BOAQ per polos B, & A minorem HIFS. Dico *ſectionem in minori eſſe diametrum, in maximo eſſe chordam* in fig. ſeq.prop.

Probatur. Quia chorda eſt linea in circulo dirimens illum in duo ſegmenta, & vtrumque pariter ſubtendens: ſed ſectio FH diuidit maximum BOAQ in duo ſegmenta FOAH, & FBH, & ſubtendit ea, ergo chorda eſt.

Patet verò ex dictis prop.16.par.1.huius FH eſſe diametrum reſpectu minoris.

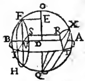
Si verò non ſecet per polos maximus BRAI minorem XRQT in vtroque circulo ſectio chorda eſt, per ſe patet cum diuidat vtrumque circulum in duo ſegmenta circulum quidem maximum in RAT, & RBT; minorem verò in RXT, & RQT ſegmenta, & omnia ſubtendat.

THEOR. III. PROPOS. IX.

* *Circulus minor ſecans duos maximos polos in eorum normali ſectione habens. Sectionem illam maximorum diuidit in ſinum verſum, & ſinum complementi. Ipſa verò ſectio in duos ſinus rectos ſecatur, etiam ſi ſolum in altero maximo tantùm ſuum polum obtineat.*

SIt circulus AFBQ maximus, qui ſecet normalẽ maximum SBIAR ſectione AB, & polo B, ſeu alibi dummodo in AFBQ circulo, ducatur minor circulus FHIS, ſectioque eius cum maximo AFBQ ſit HF. Dico *ſectionem* AB *dirimere* FH *in duos ſinus rectos* VF, & VH, ſicut, & chordam IS, ſeu in alio circulo chordam RT.

Probatur. Nam ſinus rectus eſt dimidiata chorda; ſed AB ſectio diuidit ſectionem FH, vel SI, vel TR bifariam, quæ ex præc. eſt chorda; ergo diuidit in duos ſinus; Diuidit autẽ bifariã, quia AOBQ, ex pr.14.p.1.h. circulus maximus diuidit circulum totum HF, ſeu XQ bifariam: Vnde tranſibit per centrum. Ergo maximi, & minoris communis ſectio QX, vel FH per centrum tranſibit, cùm eorum vtraque ſuperficies per centrum ſecatur, & inſiſtet perpẽdiculariter chordę FN, TR, vel SI. Vnde eam bifariam diuidet ex propoſ.27.lib.3. Coroll.6.



Probatur quoque, quòd ſectio FH dirimat ſemidiametrum, & ſectionem BD in duas partes, quarum vna DV ſit ſinus complementi.

Nam ſinus complementi eſt ſinus arcus reſidui vſque ad quadrantem, vt SF, ſed DV eſt ęqualis ipſi SF. Ergo DV erit quoque ſinus complementi; Quòd autem ſint æquales DV, & EF patet: quòd, vt ſinus debeat eſſe perpendicularis ſectioni, duorum maximorum orthogonaliter ſe ſecantium, eo quia OFS debeat eſſe quadrans, vt FE ſinus ſit arcus FO, complentis arcum SF, vſque ad quadrantem terminantem in O. Sectio quoque FV ad ſectionẽ DV perpendicularis eſt ex eit.pr 14.cor.1. Vnde DVFS, erit rectangulum, & conſequenter latus SF, erit æquale lateri VD.

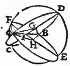
Probatur tertia pars. Nam ſinus verſus, & pars diametri orthogonalis inter ſinum rectum, & circumferentiam intercepta; ſed talis eſt pars ſectionis VS. Ergo eſt ſinus verſus.

THEOR. IV. PROP. X.

Si in ſphæra duo circuli ſe mutuò ſecent, maximus circulus per eorum polos ductus ſecabit bifariam, ſegmenta eorum circulorum.

DEntur duo circuli in ſphæra CD, & EF, qui ſe mutuò ſecent in OS. Dico, *quòd maximus circulus* DFE, *per eorum polos ductus bifariam ſecabit eorum ſegmenta* SFO, & SCO, *ſicut* SDO, & SEO.

* Probatur. Nam ex prop.14. par.1.h. cor.1. bifariam circuli DC, & EF ſecti ſunt à maximo circulo BDF. Quare vtraque ſuperficies circulorũ EF, & DC circulo maximo SDF, perpendicularis erit ex 14. propoſ. primæ partis.



Propterea que eorum communis ſectio ex 9.h. quę linea recta erit, cum planæ ſuperficies ſint, bifariã ſecta erit à diametro EF DC per cẽtra G, & H trãſeunte. Cũ ergo IO ſit æquale ernri IB, & IH crus commune, anguli que ad I hinc inde recti; triangulum totum HIO, toti HSI erit ęquale: Quamobrem, & angulus SHI angulo THO erit ęqualis, propterea que BF quoque arcus arcui OF, qui angulum menſurant, erit æqualis; & hinc OS arcus reſiduus de ſemicirculo EOF erit æqualis reliquo reſiduo SE ſemicirculi FSE. Idem oſtendi poterit de triangulis SOI, & IGO, quòd ſint æqualia, & hinc, quod anguli SGI, & IGO ſint ęquales, vnde, & arcus eos mẽſurantes SC, & OC, & hinc ſegmenta, vt OIC, & ICS, & CSI. erunt æqualia.

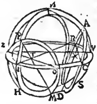
THEOR. V. PROP. XI.

Si in ſphæra duo circuli æquales, ſiue maximi, ſiue non maximi ſecent eundem circulum aliquem, & intercipiant circuli maximi per eorum polos tranſeuntis arcus æquales; eorum ſegmenta erunt æqualia.

DVplici ſchemate vtemur, quorum alterum circulos maximos exprimat alterum minores.

Sit ergo circulus ABCD, & alter POZM, qui ſecent eundem circulum VBCZ, & à circuli maximi per polos ſecti VBCZ, & ſecantis PZOM tranſeuntis intercei-

tercipiat arcum PI æqualem arcui VA alterius circuli maximi, ſeu etiam eiuſdem, dummodo tranſeat per polos ipſius ſecti VCBZ, & alterius ſecantis ACBD; ideoque vtrique plano recti ſint iſti circuli per polos tranſeuntes.

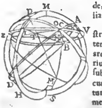


Dico arcus, quos abſcindunt ſe ſecando eſſe æquales; nẽpe arcum CVZ eſſe æqualem arcui OIZ; nec non, & arcum CAB eſſe æqualem arcui OPZ.

Probatur. Quia arcus VA deſcendit perpendiculariter ſuper vtrumq; planum, quod ſecat, VX, & XA ſectiones erunt perpendiculares ſectioni BC, tales quoque erunt ſectioni DZ, ob eandem rationem arcus perpendicularis PI, ſectiones TP, & TI; & ideo ex propoſ. 9. ſinus arcuum, quibus ſubtenduntur V. g. AC ſinus erit XA, & XC arcus VC, & cęt. & arcus ipſi erunt ex 14. pr. p. 1. h. diuiſi bifariam in V, & A, & in P, & I, quibus poſitis.

Si itaque oſtendemus VX ſinum eſſe æqualem ſinui TI erit quoq; arcus VC ęqualis arcui IZ, vel VS arcui IO. Sic ſi oſtendemus XA eſſe æqualem ſinui TP oſtendemus ſimiliter arcus ſubtenſos eſſe æquales AC ipſi OP, vel AB ipſi PZ, & ideo arcus integros CVZ eſſe ęquales arcubus OIZ, & CAB ipſi OPZ.

Hoc autem ita eſt, quia triangula rectilinea VAX, & TPI ſunt æqualia, vnde, & latera erunt ęqualia.



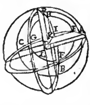
Id verò ſic demonſtratur VA recta ſubtenſa ob æqualitatem arcuum perpendicularium ex theſi æquatur ſubtẽſę arcui PI, ſic arcus MHIP, & AVSD ęquãtur ob æqualitatem diametrorũ AD, & PM cum circuli ex theſi ponantur æquales, ablato ergo VA ab AVSD, & PI à PIHM reſtabũt DSV, & IHM æquales arcus quibus ex 26. lib 3. inſiſtent anguli æquales rectilinei VAD, & MPI apud A, & P. Sic, quia VZ ſectio, & BI eſt eiuſdem circuli VCZ diameter ſubtendet æqualem arcum circuli perpendicularis BNI, & VNZ, à quibus ablatis æqualibus arcubus ex theſi VA, & PI reſtabunt æquales arcus BNP, & ANZ, quibus inſiſtunt anguli rectilinei BIP, & AVZ, triangula itaque rectilinea AVX, & TPI duos angulos æquales habent apud A, & V ijs, qui ſunt apud P, & I ſuper baſim æqualem VA, & PI, vnde erunt triangula æqualia; & ideo TP æquabitur ipſi XA, ſicuti, & TI ipſi XV: ex 27. l. 1. el. quare arcus OPZ, & CAB æquabuntur inuicem, ſicut etiam arcus ZVC, & ZIO.

THEOR. V. PROPOS. XII.

Si in ſphæra maximi circuli à polis parallelorum deſcribantur, truncant eos in partes proportionales, ipſi verò truncantur ab eis in partes æquales.

SInt in ſphęra circuli paralleli ABCD, & EFHG, à quorum polis deſcribantur circuli maximi EFHD, & AEGC. Dico circumferentias parallelorum interceptas inter circulos maximos, vt AD vel EH eſſe ſimiles, arcus verò maximorum intercepti inter ſuperficies parallelorum, vt AE, & DH eſſe æquales.

Sint enim eorum communes ſectiones AC, & EG, ſic HF, & DB iſtę erunt parallelæ cum circulorum ſuperficies ipſæ ſint parallelæ, rurſus ſe interſecabunt in communi puncto EG, & HF quidem in K, at AG, & BD in P facient autem æqualem angulũ apud K, & apud P, eò quòd ſint ea 14. p. 1 planorũ AIL, & IDL ſectioni LI perpendiculares.



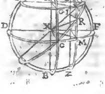
Vnde, & arcus EH, & AD erunt ſimiles, nempe eundem angulum ſubtendentes, vel eundem numerum graduum comprehendentes; quorum circulus 360. enumeret.

Probatur quoque ſecunda pars. Quia enim arcus ex definitione poli ſunt æquales à polo I demiſſi in circulum, vt IE, & IH, ſic eadem ratione IA, & ID, ſi illi minores IE, & IH ab iſtis maioribus IA, & ID auferantur reliqui AE, & HD erunt æquales arcus.

THEOR. VI. PROPOS. XIII.

* *Si in ſphæra duo circuli maximi ſe mutuò orthogonaliter ſecent; circulus verò obliquus tangat vnius parallelum. Parallelus alteri ſecabit, tum parallelum, tum circulum obliquum in partes ſimiles.*

* PRoponantur circuli maximi DCE, cui parallelus ſit FGT. Deinde orthogonalis illi ſit BCA, cui obliquus ſit CRT; quem, & parallelum BOT,



quem

quem, & parallelum FOT ſecet, parallelus LRMZ maximo æquidiſtaus BCA. Dico ita eſſe arcum TV ad TR arcum, vt eſt circulus ad circulum, ideſt TV, & TR eundem numerum gr. contraere.

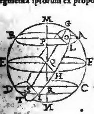
Probatur. Nam triangulum XHT eſt æquiangulum triangulo OIT, vnde ex 4. propoſ.6. elem. ita eſt XT diameter ad HT diametrum, vt TI ad TO. Ergo ex 19. lib.5. elem, & reliquum XI ad reliquum OH, vt totum XT ad totum HT, ſe habebit. Sed HT eſt æqualis HV, vtpote ſemidiametri, & XR ad XT, vt pariter ſemidiametri. Ergo ita ſe habet XI ad HO, vt XR ad HV, & permutando ita ſe habet XI ad XR, vt HO ad HV. Quare in triangulis HOV, & XIR, habemus duo latera proportionalia, in quibus notus eſt angulus, tũ apud O, tũ apud I, quòd ſit rectus. Angulus verò reliquus apud X in triãgulo XIR, & reliquus apud H in triãgulo HOV ſunt minores recto, eo quod quadrãtũ CRT & GVE partes ſint, ergo ex propoſ.7. lib 6. elem. erunt triangula equiangula, & angulus apud H erit equalis angulo apud X. Quare, & arcus eos ſubtendentes erunt ſimiles, nimirum RT, & VT, vnde, & reſidui RC, & VG.

THEOR. VII. PROPOS. XIV.

Si in ſphæra duo paralleli circuli, & maximus ipſorum ſecent aliquem maximum, in arcus æquales inuicem ſecabunt, & omnes alios in arcus æquales inuicem.

SI in ſphęra ſit circulus ABCD, in quâ etiam paralleli AB, & CD, & maximus ipſorũ FE reperiãtur, ſecetq; circulum illum in arcus æquales EA, & FC. Dico, *& quemlibet alium V. g.* GHIT *in arcus æquales* LH, *&* HI *ſecare*:

Probatur. Nam tranſeat iſte circulus ACBD per polos parallelorum MN ſecabit biſariam, & etiam ſegmenta ipſorum ex propoſ.14. p.1 h. eruntque diametri AB ſectiones, & CD, ſic GT, & MN. Vnde ſe inuicem interſecabunt, facientq; triangulum OPQ & QRS. Quia ergo FA, & CF ponuntur ęquales erũt portiones diametri, ſinuſq; æquales PQ, & QR, vtpote æqualibus arcubus ſubtenſę, vt eſt videre ex prop.9.h. Anguli verò ad P, & R recti; anguli autem ad verticem Q æquales: vnde duo triangula rectangula OPQ & QRS erunt æqualia. Ea propter baſes quoque erunt æquales QS, & QO: quamobrem arcus quoque HL, & HI, quibus ſinus ſunt, erunt æquales.



Quòd ſi datus circulus non tranſiret per polos, & eſſet V.g. GLHIT. Fiat aliquis, qui tranſeat, & tunc ob angulos rectos, & angulos ad verticem æquales, baſimque æqualem QO, & QS, vtpote arcubus æqualibus ex hypotheſi HL & HI ſubtenſę, erunt triangula rectangula OPQ, & QRS æqualia. Vnde, & arcus QP ceteri QR, & ex eis arcus AB arcui FC, hinc verò ad quemlibet alium circulum obliquum priori argumento inferes.

THEOR. VIII. PROPOS. XV.

In ſphæra paralleli circuli, inter quos, & maximum parallelorum æquales arcus circuli alicuius maximi intercipiuntur, ſunt æquales; illi verò inter quos, & maximum parallelorum maiores arcus intercidunt circuli alicuius maximi, ſunt minores.

DVplicem caſum habet hæc propoſitio; quia poteſt aliquis circulus maximus tranſire per polos parallelorum, vel non tranſire: Sed quocumque modo, tranſeat, ſiue non tranſeat, ſint itaque paralleli in fig. anteced. AB, & CD minores, EF maximus. Aliquis verò circulus maximus, vt GLHIT non tranſeat per polos parallelorum NM. At ita ſecet eos, vt tamen arcus HI, & HL à maximo, & minoribus intercepti ſint æquales. Dico, & minores ALB, & DIC fore inuicem circulos æquales.

Probatur. Nam ducto per polos parallelorum M, N circulo maximo AFNEB, faciet ſectiones in quolibet AB, & CD, necnon EF, & TG circulos biſariam ſecantes ex 14. prop 3. par. 1. diametrique erunt, & quia arcus HI, & HL ponuntur æquales, erunt arcus FA, & FC æquales ex præcedenti, ſicut eſt EB, & DE. Ablatis igitur arcubus æqualibus FC, & DE à ſemicirculo ACNDB, & item arcubus æqualibus FA, & EB à ſemicirculo FAMEB, remanebunt arcus AMB, & CND æquales. Quare, & ſubtẽſæ, diametriq; CD, & BA erũt equales, vnde, & ipſi circuli paralleli CID, & ALB. Et hinc patet ſecũda pars eodem argumento, nempe, quod paralleli ſint inæquales illi, qui arcus inæquales inter ipſos, & maximum parallelorum intercipiunt.

THEOR. IX. PROPOS. XVI.

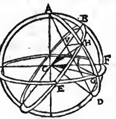
Si in ſphæra circulus tranſeat per vnum polum vnius, & per aduerſum polum alterius circulorum inclinatorum inuicem, ille circulus ab illis abſcindet æquales arcus.

SIt circulus AHGD, qui circulorum inclinatorum inuicem FGE, & BHE per polos tranſeat per vnum vnius nimirum D circuli BHE, & per alterum A alterius FGE, & ſecet eoſdem inclinatos circulos in G, & H. Dico, *quod arcus intercepti* FG, *&* HB *erunt æquales.*

Probatur. Arcus GHA æquatur arcui DGH, quòd quilibet circulus ſubtenſas à ſuo polo ex defin.6. habeat æquales. Quare anguli, GDA, & HAD, qui fierent ductis rectis AH, GD, vtpote peripherijs æqualibus inſiſtentes HGD, & GHA eſſent æquales.

Progreſſ. 2. in triangulo quoque DCA anguli ad D, & A ſunt æquales ob æquales ſemidiametros, quibus ſubtenduntur ex propoſ.14. elem 1. Trianguli verò DCV angulus rectus eſt cum DFB ſit quadrans ex Coroll.2. prop.14.p.1. ſic in triangulo CTA angulus C rectus eſt eadẽ ratione. Quare reliquus apud V reliquo apud S, triangulaque SAC, & DVC erunt æqualia. Vnde etiam baſes IA, & VD erũnt æquales; Ablatã itaque parte interme-

ia IV communi reſiduum VA reſiduo ID erit æquale.



Progreſſ. 3. Chorda autem HA æquatur chordæ DG, quas imaginatione ſuple, vtpote æquali peripheriæ DG, & AH ſubtenſæ. Quia enim GA, & HD ſunt æquales, ablata communi portione HG, reliqui arcus HA, & GD reſtabunt æquales.

Progreſſ. 4. Cum itaque triangulis HAV, & GDI angulus D ex 1. progr. angulo A, & ex 2. latus VA lateri DI, & ex 3. latus AH lateri GD ſit æquale. Ergo ex prop. 22. el. 1. erunt æqualia, & baſis HV baſi GI æquabitur. In triangulis tandem HVC, & GIC habemus IC, & CV eruta æqualia ex 2. progr. & HV, & GI ex 4. & HC, & GC ſunt radij. Ergo angulus niger angulo nigro æqualis. Et ideo arcus BH arcui FG æquabitur, ſicut EH, & BH reſidui.

THEOR. X. PROPOS. XVII.

Si in ſphæra ſint paralleli circuli, & deſcribantur maximi circuli, qui vnum quidem parallelorum tangant; reliquos verò ſecent, circumferentiæ parallelorum interceptæ inter eos maximorum circulorum ſemicirculos, qui non concurrunt, ſimiles erunt; maximorum verò circulorum circumferentiæ inter duos quoſcumque parallelos interceptæ erunt æquales.

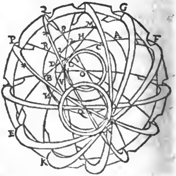
IN ſphære paralleli circuli deſcripti ſint ALB, & CHD, & IL, qui eundem polum habeant u; deſcribanturque maximi circuli APXE, & MGXK, qui tangant parallelum tL in punctis L, & t; & reliquus parallelus ſecent in punctis A, C, D, B, & M, H, V, N; ſe verò inuicem apud 1, & X, in duos ſemicirculus more maximorum circulorum.

Dico arcus tC, & ID, ſicut LH, & LV eſſe æquales; necnon, & arcus CA, & BD; ſic, & HM, & VN arcus maximorum circulorum inter parallelos interceptus eſſe æquales. Arcus verò parallelurum inter circulos maximos interceptos, vt CH, & AM, ſic, & DV NB eſſe ſimiles.

Ducantur ad iucundam probationem circuli maximi ULP, & UIZ tranſeuntes per puncta contactuum t, & L, & tranſeuntes per polum u, & Q parallelorum, & per polos maximorum tangentium ⁎ ⁎ ex propoſ. 3. huius. Quare ex prop. 10. bifariam ſecabunt ſegmente ipſorum maximorum, & minorum: Vnde ſegmentum MLN V. g. maximi, & minoris MRN erunt bifariam ſecti in R, & L, ſic, & AIB maximi, & A 8 2 erunt bifariam ſecti in I, & 8, & eadem dicas de ſegmentis circuli anguſtioris CHDV: Quarè erunt æquales prædicti arcus, vtpote bifariam ſecti. Erit ergo æqualis arcus IC, maximi arcui ID eiuſdem, & IA arcui IB. Vnde ablato communi arcu CID; remanebit quoque arcus AC arcui DB maximi circuli PIB inter pararallelos intercepti æqualis; idem probabitur de arcubus MH, & VN, quòd ſint æquales LM, & LN à quibus ablatus arcus communis HV, æquales reſtituet HM, & VN.

COROLLARIVM.

IMò arcus quoque AC, & HM; ſicut VN, & DB erunt æquales, quòd oſtenditur. Nam arcus ACDB, & MHVN ſunt æquales ex propoſ. 11. Quia ſecant eũdem circulum minorem AMBN duo maximi PCB, & GHK, & maximi OIZX, & ORPX per eorum polos ⁎ ⁎ tranſeuntium intercipiunt arcus æquales LR, & I 8, & ob eandem rationem arcus quoque CID, & HLV æquabuntur. Cùm ergo AC DB, & MH, VN ſint arcus æquales ablatis æqualibus CID, & HLV reſtabunt AC, & MH, ſicut, VN, & DB æquales.



Probatur quoque ſecunda pars. Quod circumferentiæ minorum, vt CH, & H 2 ſint ſimiles circumferentijs AM, & M 8. Quoniam circuli maximi IZQ, & LPQ per polum u parallelorum tranſeunt, erunt arcus 2 3. & 8 R parallelorum polo O deſcriptorum ex propoſ. 12. ſimiles; ideo, & HC, & AM erunt ſimiles. Quia HC æquatur ipſi 23. & AM ipſi 8 R. Probandum eſt, itaque CH, & 23. eſſe arcus æquales, & item AM, & 8 R. Demonſtratur autem eò, quia ex propoſ. 11. CHD, & HLV ſint æquales; vtpote duo maximi eundem parallelum ſecātes, & æqualem arcum L 3, & t 2 circuli maximi OIZQ, & CLPQ tranſeuntiũ per eorum polum O intercipientes. Quare, & ſemiarcus illorum (tales enim ſunt ex propoſ. 10. huius C 2, & H 3) erunt æquales. Ablato ergo communi arcu H 2 erunt æquales CH, & 23. Sed 23. eſt ſimilis arcui R 8 ex propoſ. 12. huius; Ergo etiam CH erit ſimilis arcui AM.

Idem poterit probari de arcubus DV, & NB. Quòd ſint inuicem ſimiles; ſiquidem VD, & 32. ſunt æquales, eò quia ſemiarcus 2 D, & 3 V ſint æquales. Vnde ablato communi arcu 3 D remanebunt 23. & DV æquales: ſed 2 3 eſt ſimile arcui R 8, Ergo, & VD ſimilis erit arcui BN.

Maximè

Maximè, quis eodem argumento AM, & BN probantur æquales arcui 8 R. Siquidem A 8. & MR ſemiarcus ſunt æquales: Ablato ergo communi arcu M 8 remanent AM, & 8 R æquales, & ita dicas de arcu NB; quòd ſit æqualis eadem ratione arcui 8 R.

THEOR. XI. PROPOS. XVIII.

Circuli, qui tangunt eundem parallellum æqualiter ſunt inclinati ad maximum parallelorum, & poli eorum æqualem à polo maximi paralleli habent diſtantiam.

SIt figura præcedens, & omnia in ea diſpoſita, vt priùs. Quis ex def. 6. par. primæ circulus ad circulum inclinat æquè, cum maximi circuli perpendicularis ad ipſos ambos arcus angulum, quem faciunt eorum plana in ſe ſecando, menſurat: Ideo videndum eſt; an inter circumferentias tangentium eundem parallelum, vt FADE GHVX, & maximum parallelorum FZEK, æquales circumferentię perpẽdiculariũ vtriſque maximorũ circulorũ intercipiãtur: circuli autẽ OZQ, & OPQ ſunt perpendiculares, vtpote tranſeuntes, vt in præced. probatiunc fecimus, per eorum contactus IL, & per eorum polos *, *, & per polos etiam Q, & O paralleli maximi FZPEB. Quia itaq; OP, & OZ ſunt quadrantes maximorum, quòd tranſeat maximus FZPEK. per eorum polos ex Coroll. propoſ. 14. primę partis huius, ideo erunt inuicem æquales. Arcus verò OI, & OL ex prop 18. par. 8. h. ſunt æquales, quibus ablatis à quadrantibus OZ, & OP reſidua ſupererunt IZ, & LP ęqualia, quæ intercipiuntur inter circulos FADE, & GHVX tangentes eundem parallelum, & ad maximum parallelorum FZEX inclinati. Cum itaque ſint æqualia reſidua maximorum, tum tangentibus, tum maximo parallelo perpendicularium. Ergo tangentes eundem parallelum æqualiter ſunt inclinati.

Probatur ſecunda pars, quòd habeant polum æquè diſtantem à polo maximi parallelorum. Polus diſtat à circumferentia maximorum quadrante. Ergo inter FADE, & BNVG tangentes eundem parallelum, & polum * * ipſorum quadrans intereſt IZ *, & LP *; ſed etiam inter polum maximi parallelorum, & circumferentiam parallelorum, quem tangunt, intermediant arcus æquales OI, & OL, additis ergo illis arcubus æqualibus illis quadrantibus IZ *, & LP * remanabunt arcus æquales OIZ *, & OLP *. Vnde, & æqualiter diſtabunt à polo Q, vel O, vt patet.

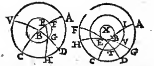
COROLLARIVM.

HInc eſt quòd cum diſtent æqualiter à polo parallelorum, poli eundem parallelum tangentium; quod poſſint vniri circulo aliquo parallelo, qui per eorum puncta * * tranſibit, cum ęqualiter diſtent à polo O, & conſequenter à polo Q.

THEOR. XII. PROPOS. XIX.

Maximi circuli, qui ſimiles circumferentias parallelorum circulorum in ſphæra auferunt iſti, aut per parallelorum polos tranſeunt, aut eundem vnum parallelum tangunt.

IN Sphæra maximi circuli ABC, DBV auferant circumferentias ſimiles AD, & DC ex parallelis ADV, & FG. Dico, quòd ſi alter ex maximis circulis tranſeat per polos parallelorum, quod etiam alius tranſibit; quòd ſi alter tangat, & alter quoq; tanget; quòd ſi vnus non tangat, nec per polum tranſeat, nec alter continget, vel per polum tranſibit parallelorum. Sed ambo parallelum minorem contingent; Tranſeat ergo primo ABC per polum B parallelorum. Dico, & maximum DBV per eundem polum B tranſire, & erit polus in communi ſectione, quod ſi id negetur, & dicatur punctum B quo ſe interſecant non eſſe polum, ſed aliud punctum E. Ducatur ex polo E per punctum G arcus circuli maximi HE: Ille ex prop. 12. auferet circumferentias parallelorum ſimiles HA, & GF. Ergo inuicem erunt ſimiles AD, & AH, vtpote eidem arcui FG ſimiles. Ergo cum ſint eiuſdem circuli erunt quoque æquales, totus inquam AH arcus cum ſua parte AD. Non poteſt itaque euenire, quòd AD, & FG ſint arcus ſimiles, & tranſeunte per polum ABC maximo non tranſeat quoq; per polum B, et in eo non ſe interſecet DBV,



Tangat ſecundo maximus ABC parallelum BE. Dico, & alium maximum DEF eundem tangere, ſi enim non tangit, ſed ſecet, ducatur maximus aliquis, qui tangat in puncto E, & ſecet maximum ABC, & ſit GH. Quia ergo GH tangit ex propoſ. 17. EXE, ideo AG, & IV, & BE erunt arcus ſimiles, ſed ex hypotheſi ſimiles quoque ſunt AD, & IT, & BE. Ergo, & inuicem erunt ſimiles IV, & IT, ſicut, & AG, & GD; & ideo cum ſint in iiſdem circulis, erunt æquales AG, & AD ſicut inuicem IV, & IT erunt æquales pars toti, quod eſſe nequit.

Non tangat tertio ABC parallelum IVT, ſed ſecet: Nec tranſeat per polum parallelorum X. Dico alterũ quoq; DEF ſecare, nec tranſire per polum X. Sed ambos maximos contingere circulum parallelum minorem, ſi tamen auferant circumferentias de parallelis ſimiles.

Probatur. Nam ex prop. 6. cum obliquus ſit, ſiquidem ſi rectus eſſet tranſiret per polos ex Cor. propoſ. 13. quod non ponitur. Is continget parallelos inuicem, & etiam circulis aſſignatis minoribus ADC, & IVT, & æquales inuicem, quorum alter eſt BB, qui minor erit prędictis parallelis cũ eos ſecet ABC; hũc autem tangat: Probo etiam DEF ipſos minores parallelos tangere, quorum alter eſt

BE. Si enim non tangit; alter GEH circulus maximus tangat. Secetq; maximũ ABC. Quia ergo GAH tangit eundem parallelum AA ex propoſ.17 erunt arcus AG, IV, & BA ſimiles, ſed tales ex theſi ſunt arcus AD, & IT, & AE. Quare cum ſint ſimiles vni tertio EE arcus IV,& IT erant inuicē ſimiles, cumque ſint eiuſdem circuli, erunt quoque ęquales pars toti, quod eſſe nequit, ſic, & AD, & AG erunt ſimiles, & eadem ratione æquales, quod eſt abſurdum, pars enim eſſet ęqualis toti.

EXPENSIO III.

De ſectionibus maximorum cum minoribus inæqualibus, & non ſimilibus.

QVia circulum obliquum alteri, vt Zodiacus Æquatori in ſphæra cęleſti, circulus perpendicularis eorum alteri, qualis eſt Horizon Æquatori, non ſecat æqualiter, vt experimentũ docet;ſed dum æquales partes Æquatoris perorĩũtur;non tamen æquales partes Zodiaci emergunt; ideo ad tractatum de ſphæra funditùs intelligendum, hæc vltima Expenſio percurrenda eſt, in qua de iſtis ſectionibus peragitur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si in ſphæra maximus aliquis circulus aliquos minores in eadem deſcriptos ſecet, & non per polos in partes inæquales eos ſecabit, & ſegmenta erunt æqualium parallelorum ad eaſdem partes huius hemiſpherij ſegmentis parallelorum alterius hemiſphærij inæqualia, & hinc ſemicirculo maiora, inde minora.

SIt ABCD circulus maximus, qui ſecet parallelos VIAY,& MXNOZ,& non per polos. Dico eos minores ſecare in partes inæquales: nempe eſſe partem maiorem IAT parte IVT, & ſic NMR parte RON. Deſcribatur ex circumferentis maximi parallelorum PBQD maximus FBED, qui per Q eius polum tranſeat, & per ſectiones ID, & ſit ei perpendicularis: diuidet is parallelos bifariam in XZ, & SY ex pr 14.Cor.h.par.1. Quare patet, quod



NMR erit maior, quam NOR, & IXT, quam IVT.

Dico ſecundò. Quòd ad eaſdem partes ſegmenta erunt inuicem inæqualia. Nam minor eſt RON, quàm XT ex probatione præcedenti.

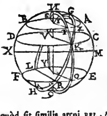
Dico tertio. Quòd ducto maximo parallelorum ad eaſdem partes ABCD hinc ab illo ſegmenta ſunt ſemicirculo minora, vt RON, inde maiora IAY; Vt probatum eſt, cùm SXY, & XOZ ſint ſemicirculi; quibus addatur IT &c. vt ſit maior, auferetur XZNR,& ſit minor arcus ſemicirculo.

THEOR. II. PROP. XXI.

Si in ſphæra circulus maximus parallelos aliquos circulos ſecet, & non per polos parallelorum arcus ad eaſdem partes in dimidio hemiſphærio ſunt maiores, quàm, vt ſint ſimiles arcubus in altero hemiſphærio exiſtentibus, vel è contrà.

SEcet in ſphęra parallelos AB, & CD, & EF, & non per polos maximus circulus GH. Dico arcus IBZ in hemiſferio MNX eſſe maiores; quam vt ſint ſimiles arcubus RFL alterius hemiſphærij MQX.

Per puncta KV, & per polos N, & Q duo circuli, ſeu ſemicirculi maximi NYQ deſcribãtur,& NAQ. Iſti ex prop.12.h. arcus ſimiles intercipient KDV,& SBT,ergo ZBI erit maior;quam quod ſit ſimilis arcui KDV;ſic OFY erit arcus ſimilis arcui KDV. Ergo KDV erit maior, quàm, quòd ſit ſimilis arcui RFL, & ideo quoque ZBI erit maior, quam, quod ſit ſimilis arcui RFL.



THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si in ſphæra ſuperficie intra circuli cuiuſque peripheriam punctum aliud à polo ſignetur, & per illud arcus plurimorum maximorum circulorum agantur, qui per polum prædicti circuli tranſit arcus, erit maior omnibus alijs, & reſiduus minor.

Reliquorum verò propinquior maximo remotiore ſemper maior erit.

Et æqualiter diſtantes æquales erunt.

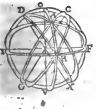
SIt punctum A ſignatum in ſuperficie ſphæræ intra circuli, ſiue maximi, ſiue non, peripheriam CDGX, perque punctum A plurimi maximorum circulorum arcus agantur, vt CA, & AG, & FA,& AD,& vnus tranſeat per polũ H prędicti circuli CDGX, & ſit AV, cuius reſiduus arcus ſit AO. Dico maximum eſſe arcum AV, qui per polum H tranſit, & reſiduum eius AO minimum; cæteros verò propinquiores, vt AG remotioribus, vt AD eſſe maiores, & æqualiter diſtantes, vt AF, AT æquales.

Trahantur per polum H, & per puncta circumferentię circuli CFGD arcus maximorum circulorum HG,& HD, puncta inquam per quæ tranſeunt arcus primo ducti. Sic TH, HE,& cęt. Tunc ſic.

* Probo primam partem propoſitionis,ex propoſ.9.partis huius ſecundæ. Cuiuſcumque trianguli

guli ſphærici duo cruta reliquo ſunt maiors. Ergo in triangulo AHG erunt maiora crura AH, & HG crure AG. Sed duo crura VH, & HG ex prop. 18. huius part. 1. ſunt æqualia. Nam arcus HG, & HV ducti ſunt à polo H arcus AH idē. Ergo arcus AV maior eſt, quam AG, & eadem ratio eſt de crure AT, & TH, vt patet, & de omnibus alijs.

Probatur ſecunda pars de reſiduo arcu, quòd ſit minimus. Nam duo crura HA, & AC reliquo HC ſunt maiora ex eit. propoſ. 9 ſecundę partis huius r Sed arcus HO eſt æqualis cruri HC ex prop. 18. huius part. 1. Si ergo auferatur cōmunis arcus HA, remanet AC reſiduo AO maius.



Probatur quoq; tertia pars. Quod AG ſit maior arcu AD. Nam crus HA eſt commune, & duo crura HG, & HD æqualia: angulus verò AHG maior angulo AHD. Vnde ex propoſ. 18. ſecundæ partis huius, baſis AG ſubtenſa angulo maiori maior erit baſi AD.

Probatur tandem vltima pars, quod AF, & AT ſint æquales ex prop. 11. p. 1. Nam AH latus eſt cōmune; crura HF, & HT æqualia; angulus ab illis comprehenſus FHA ob hypothesim æqualis diſtantiæ ab arcu OAV, neceſſariò eſt ęqualis angulo AHT: Ergo, & baſis AF baſi AT æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. XXIII.

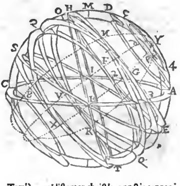
Si in ſphæra maximus circulus vnum quidem circulum tangat, alium autem ei parallelum ſecet poſitum inter ſphæræ centrum, & circulum, quem tangit; polus autem eius dicti maximi fuerit inter parallelum, quem tangit, & quem ſecat; circuli maximi tangentes parallelum, quem ſecat, erunt ad illum inclinati.

Rectiſſimus autem tangentium erit in eo puncto, in quo maius ſegmentum bifariam diuiditur; humillimus, in quo minus ſegmentum bifariam diuiditur.

Illi verò arcus, qui tangunt in punctis à prædictis contactuum æquè diſtantibus ſimiliter inclinati ſunt, qui verò magis accedunt ad contactum humillimi, magis inclinati ſunt, quàm, qui ab eo longiùs abſunt.

Poli verò tangentium ſunt in parallelo ipſi, qui tangitur, & ipſo minore.

SIt in ſphæra maximus circulus ABCI, qui tangat parallelum AD, ſecet verò parallelum ZGHF poſitum inter ſphęrę centrum, & circulū AN, quem tangit. Polus autem circuli maximi prædicti ABCI ſit in M inter parallelos AD, & EF HGI circuli verò maximi contingant parallelum, quem ſecat in G, in N, in H, in F, in E nimirum HBTI, & SAEI, & FZXQ, & GZVP, & NZBQ. Dico omnes eſſe ad circulum ABCI inclinantes. Secundo Rectiſſimum eſſe HATI tangentem in puncto H, in quo maius ſegmentum 3 H 2 paralleli, qui tangitur, bifariam diuiditur à maximo per polum tranſeunte, qui eſt AMCT. Humillimum verò eſſe BSIE, qui tangit in oppoſito puncto E, vbi idem AMCT ſecat paralleli minorem arcum 2 E 3.



Tertiò æquidiſtanter ab iſtis punctis tangentes eſſe eodem modo inclinatus: ſed qui diſtat magis, in quo tangit humillimus illum eleuatiorem eſſe.

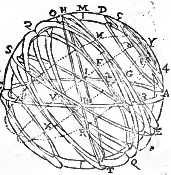
Quarto polus eſſe in parallelo 45. minore illo AD, qui tangitur, ſed tamen ei parallelo.

Probatur primo hæc vltima pars, vtpote fundamentum cęterarum. In circulo maximo AMCT ſecante, vtpote ei perpendiculari erit polus circuli tangentis ATCS, & diſtabit ab eius ambitu quadrante. Quia ergo diſtantia MA eſt quadrans, & YH eſt quadrante minor, vtpote à parallelo AH ad eius polum Y: Si menſuretur ab H quadrans verſus A non perueniet ad A, vtpote, quod ſit maior quadrante, cum polus M debeat eſſe inter H, & Y ex theſi. Verùm excedet Y, quòd ſit HY minor quadrante; Vnde cadet in puncto 4. Inter A, & Y, & polo Y interuallo Y 4. deſcriptus circulus 45. hic polos omnium tangentiū in ſe continebit. Deſcribantur enim per polum Y, & puncta contactuū H, F, G, E, & cæt. arcus maximorum circulorum punctati YN, & YF, & YG, & YE erunt omnes arcus à polo Y ad parallelum EM æquales. Nempe YE, & YG, & YN, & YH, & YS. Sunt quoque arcus reſidui vſque ad parallelum minorem 4 5 ęquales Y 9. Y 4 Y 6. Y 7. & Y 5. ob eorum paralleliſmum. Quare, ſi addātur prædictis erunt omnes æquales, ſic EY 5. & HY 4 ſic NY 7. & GY 6. & FY 9. erunt æquales: ſed HY 4. vnus eſt prædictis arcubus probatus eſt quadrans. Ergo omnes quoque alij erunt quadrantes, cùm ergo circumferentia circuli 4, 5. remoueatur quadrante à circumferentijs tangentium, vt remouetur H 4. & in 4. ſit polus, erit etiam in omnibus alijs punctis illius circuli 4 5. polus aliorum circulorum tangentium.

Probatur prima pars, & ſecunda, quia intra ambitum circuli ABCI punctum Y electum eſt prętet eius polum M; à quo ducti ſunt arcus YMC, tranſiens per eius polum, & YA eius reſiduum. & YAE, & YN 8, & YFT, & YGS, qui etiam tranſeunt

per

per cõtactus H,N,F,G,E,& polum 5 & 4 7.9..6.circulorũ maximorũ tangentiũ EBIS,& HBTI,& cęt.& ideo iſtis omnibus ſunt perpendiculares. Vnde, & tangentium prędictorum ad ſecantem circulum ABCI inclinationem menſurant ex def.6. p.1. h. Quamobrem ex propoſ.22. huius arcus YHL erit maior, quàm Y N 8, & hic quam IFY, cui erit æqualis Y G B, & hi maiores, quàm Y 4 A. Quia autem diximus in prima probatione YDH, & YN,& YF, & YG, & YE eſſe arcus æquales; Si hos arcus æquales à ſucceſſiuè inæqualibus auferamus, remanebit maius reſiduum HC reſiduo N 8,& hęc reſiduis FI. & GB. & hæc reſiduo nullo arcus I B nihil enim remanet ablato arcu YE; Hi verò om-



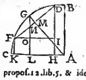
nes arcus inclinationem menſurant arcuum tangentium: Quare cum remaneant inæquales, & ſemper minor, qui magis remouetur ab arcu YMC tranſeunte per polum M, manifeſtè patet, diuerſam continuè tangentium eſſe inclinationem, & ſemper maiorem eorum circulorum recedentium magis à polo M; minores enim arcus inter eos, & circulum ad quem inclinant ABCI intercipiuntur. Patet quoque tertia pars, quòd ſi arcus ſint æquales, vt AY, & IY, qui ſunt quadrantes inclinationem fore ęqualem, cum ablatis æqualibus arcubus GY, & FY reliqua debeant ſupereſſe æqualia BG, & FI.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. XXIV.

Portiones diametri ſubtenſæ arcubus æqualibus, quò propinquiores ſunt alteri diametro in quadrante, eò ſunt maiores.

SIt ABC quadrans, in quo ſumantur arcus ęquales DG,& GF ducanturque perpendiculares OH, & GL, & FK Dico portiones diametri HL, & LX eſſe inęquales, & illam eſſe maiorem, quæ magis alteri diametro AB propinqua eſt, nempe HL maiorem eſſe, quam LX Ducatur diameter GA,& chorda DF, & IF parallela ſubtenſo diametro AC:

Quia ergo OF ſecta eſt bifariam in M, vt ſatis conſtare poteſt ex 27 El.l 3 Cor.6. erit maior ND, quam FN. Quia verò in æquiangulis triangulis ita eſt DF ad IF, vt NF, ad OF ex 4 lib.6.elem. reſiduum quoque ex 2 a.l.5.el. ON ita erit ad IO, vt NF ad CF, ſed DN eſt maius, quam NF, ergo etiam IO,



quam OF, ex propoſ.12.lib.5. & ideo etiam LH æquales, quàm LX.

COROLLARIVM.

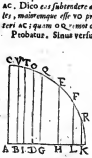
HInc manifeſtè patet, quod ſi transferatur LH propinquiùs ad AB, minorem arcum ſubtenſuram, ſicut, & LX. Quia, ſi ſubtenderent æqualem arcum, iam ipſi arcus, quo viciniores alteri diametro eo ſegmenta diametri maiora non ſubtenderent; cum ſubtenderent ipſa eadem, quæ ſubtendebant ſibi remotiores arcus.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XXV.

Portiones diametri duobus arcubus inæqualibus ſubtenſæ remotioribus ab altero diametro in quadrante; ſi illi diametro alteri viciniores arcus ſubtendant, illi arcus erunt inuicem inæquales, & remotior erit minor.

SInt arcuũ ęqualiũ, & diametri portiones LH, & LK, quæ trãſferũtur viciniores diametro alteri AC. Dico *eas ſubtendere duos arcus inuicem inæquales, maioremque eſſe* VO *propinquiorem diametro alteri* AC *; quam* OQ *remotiorem*.

Probatur. Sinus verſus LX eſt minor, quàm LH ſinus ſubtendẽtes arcus æquales ex præc. quia ſubtendit arcum remotiorem Transferatur in DG, & DB manente eodem interuallo, eritque minor DO, quam OB: Menſuretur itaque à puncto D ſinus DG, & ſit DI: cadetque punctum I inter O, & B puncta. Quare arcus TO inter parallelas IT, & OD comprehenſus eſt minor; quã OV inter OB, & OO parallelas diſtantiores clauſus; ſed arcus TO eſt maior, quàm OQ, vtpote vicinior alteri diametro AC ex præced. Coroll. Ergo tantò maior erit VO ipſos TO arcus maior.



COROLLARIVM.

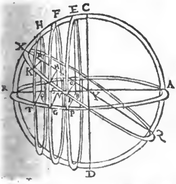
HInc etiam patet, quod etiam ſi portiones diametri prædictæ diminuantur, & fiant minores in eadem proportione, quòd adhuc translatę arcus inæquales ſubtendant, & quod maior arcus ſit propior alteri diametro. Quoniam enim ponitur KL ad OG, vt HL ad BO, & LX eſt minor, quam HL; erit etiam DG minor, quam BO: Vnde, ſi DT fiat ęqualis ipſi DG, cadet inter B, & D: Quare arcus VD erit maior arcu TO, quod parallela inter D, & O tendat: Sed TO eſt maior, quàm OQ ex præced. Coroll. vtpote ſemidiametro AC vicinior: Ergo tantò magis VO erit maior, quàm OQ.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Si in circumferentia maximi circuli ſit polus parallelorum, qui per partes æquales quadrantis alicuius circuli maximi obliqui ad eoſdem ducti ſint; hi ex eo circulo, in quo polos habent inæquales circumferentias auferunt, quæ quarum propior maximo parallelorum remotiore maior erit.

*Sis circolus ACRD, & maximum parallelorum exprimat diameter CD, cui ſint paralleli EIP, & FSG, & HAT abſcindentes ab obliquo circulo ZX partes æquales IS, & AK, & habentes polos in R, & A maximorum circulorum communi puncto. Dico eos *à circulo, in quo polos habent*, vel APR, vel ACRD *arcus inæquales ſecare*, eſſeque EF maiorem, quam FH, & FG, quam GT.



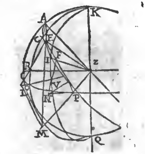
* Probatur ex prælibata propoſitione. Ductis enim parallelis ſectionibus IO, & SN, & KM, parallelę enim ſunt ob plana parallelorum inter ſe æquidiſtantia, & diametro YX perpendiculares, quòd ſit ſectio circuli ACRD tranſeuntis per polos parallelorum, & conſequenter eorum plania perpendicularis ex Coroll. prop. 8. p. 1. h. Quare ON, & MN erunt portiones diametri interceptæ per quarum extrema puncta tranſibunt ſectiones OB, NV, & MQ eiuſdem circuli ACRD perpendiculariter cadentes ſuper AR axem per polos parallelorum R, & A ductum ex propoſ. 8. Cor. 1. par. 1. h. Quare facient triangulum rectangulum YMQ, cuius baſis YM, in quo ſunt triangula æquiangula YBO, & YVN. Quia ergo YO eſt baſis portio diametri YO erit maior, quàm YB: quare aliæ portiones BV, & VQ viciniorem arcum diametro DC ſubtendent, vt pote quod ſint illi viciniores. Rurſus ob parallelas BO, & VN, & MQ: ita erit ON ad BV ſe minorem, vt MN ad VQ minorem ſe, quare ex præced. propoſ. & Coroll. arcus, quos ſubtendunt portiones BV, & VQ ſi ne dem erunt minores arcubus LB, & SK obliqui circuli; ſed, & erunt inæquales, & maior erit FE, quam FH, vtpote diametro CD vicinior, & idem dicendum de arcubus FG, & GT; vicinior enim FG erit maior, quàm GT, quòd nimirum ſubtendantur à proportionibus diametri translatis VB, & VQ, & in eadem proportione minoribus, quàm ON, & MN.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

* *Sectorum æqualium plana in circulo inclinante, quo circulo inclinationem menſuranti ſunt propinquiores, & eo circulis intercipientibus minus obliqui, ſeu inclinati ſunt.*

*Sint ſectores AZC, & CZI in circulo maximo inclinante ACP, angulo AZR ad circulum ROP. Dico *ſectorem* AZC *eſſe minus obliquum circulo intercipienti* KCQ, *quam ſector* CZI *plano* KIQ *normalibus circulo* ROP.

Ducantur perpendiculares ſectioni ZC, ſectoris AZC, & ſectioni ZI ſectoris CZI, quæ ſectiones ſint AEM, & IFP, quæ producantur vſque ad ſectionem circulorum productam ZM, & incidant in eam in M, & P, aganturque plana per has ſectiones AM, & IP perpendicularia circulo ACP, eritq; ſectio EL perpendicularis plano ex prop. 4. Coroll. 1. & 2. tract. 22. & ſectioni ZC rectangula, & angulus LEM erit angulus inclinationis planorũ idemq; dicendum de ſectione FV, & LZ, & de angulo NFP, quod ſit angulus inclinationis planorum. Quia itaque AEZ eſt angulus rectus, ZEM triangulum erit rectangulum, ſicut, & ZFP, in quibus, quia angulus ad centrum EZM eſt maior, quàm angulus FZP; conſequenter erit reſiduum ZME minus reliquo ZPF, cum duo quilibet in vno quoque triangulo recto ſint æquales ex Coroll. 9. prop. 17. lib. 1. el. Cum ergo ZME ſit minor angulus, linea EM obliquius incidet in ſectionem ZM, quàm li-



nea FP in eandem. Quia autem fecimus angulum LEM eſſe inclinationis ob latera ſectioni EZ perpẽdicularia, planum ELM, ex Cor. 2. cit. at LZM vt in plano ei normali POR, ſunt normalia KCOQ plano; etiam ex 16. tract. 22. communis illorum ſectio ML erit rectangula plano, & ſectioni EL, & idem afferas de ſectione FN. Quia ergo in rectangulo ZLM eſt maior angulus apud Z, quàm in rectangulo PZN reſiduus angulus apud M erit maior reſiduo apud P in rectangulo ZNP; Cum ergo duæ ſectiones EM, & LM cũ ſectione ZM faciãt angulum acutiorẽ, & magis obliquũ, quã duæ ſectiones

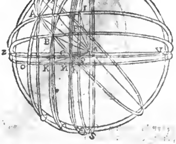
FP,

VP,& NP minor erit angulus apud M ex pr.20.tr.22 in rectãgulo MEL, quàm FPN in rectangulo FPN: quare reſiduus angulus apud E in MEL rectangulo, erit maior, quàm NFP in rectangulo NFP; ſed anguls apud X,& P eſt angulus inclinationis ſectorum, ergo minus inclinabit AZC ſector, vtpote cuius eſt maior angulus inclinationis ad KCQ, quàm ſector CZI ad XIQ circulum. Sector autem AZC vicinior eſt circulo KARQ inclinationẽ mẽſuranti.

THEOR. VII. PROPOS. XXVIII.

Si in circumferentia circuli maximi ſit polus parallelorum; huncque ad angulos rectos ſecent duo alij circuli maximi, quorum alter ſit vnus parallelorum; alter verò obliquus ad parallelos, & per obliqui circuli æquales arcus, & polum deſcribantur maximi circuli, hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum; quarum propior maximo circulo primo poſito remotiore maior erit.

*Sit polus parallelorum Z in circumferentia maximi circuli XZSV; paralleli verò ſint circuli ducti per circumferentias æquales circuli obliqui RCBA. Quorum maximus ſit XRS; A polo verò Z per ea puncta terminantia æquales circumferentias CB. & AB circuli maximi educantur ZCQV, ZAIV, & ZBPV. Dico hos maximos circulos de maximo parallelorũ XRS æquales circumferẽtias non auferre: ſed eſſe maiores; quæ proximiores ſunt circulo primo poſito XZSV, nempe eſſe maiorem IP, quam PQ.



* Probatur ex præced. propoſ. 27. Nam, quia arcus AB æquatur arcui CB ex Hypoſi, & MC, & MB, & tandem MA radij ſunt; erunt triangula AMB, & BMC æquicrura. Et plana circulorum maximorum ZAIV, & ZBV claudunt angulum apud M trianguli AMB: ſic plana circulorum maximorum ZBPV, & ZCQV claudunt trianguli BMC angulum apud M. Inciduntque illi circuli in planum maximi parallelorum XQRS rectangulè, & quia proximior eſt maximo circulo XZS maximam planorum inclinationem menſuranti ex theſi, arcus AB, arcu CB eius plani AMB inclinatio erit minor, ſeu minus obliquum, quam planũ CAMB; quaderè angulus IMP in maximo parallelorum XQR interceptus à planis maximorum circulorum rectangulè ei exiſtentiũ ex propoſ. 28. Tract. 22. erit maior angulo PMQ. Quaderè ex propoſ 39, lib. 6. etiam arcus IP erit maior arcu PQ. Anguli autem LMP, & PMQ ſunt anguli inclinationis planorum ex 6. definit. primæ partis huius.

THEOR. VIII. PROPOS. XXVIIII.

Iiſdem poſitis, ſi in circulo polos continenti parallelorum punctum medium inter eos eligatur, & ad circulũ maximũ per ſectionem obliqui, cum maximo parallelorum, & per eorum polos tranſeuntem ab illo puncto circuli maximi per arcus æquales in obliquo ſumptos ducantur, iſti de illo maximo per polos, & ſectionem tranſeunti arcus inæquales intercipient, & maior erit ille arcus, qui polos continenti maximo circulo proximior erit.

*Punctum medium X ſumatur inter polos ZV, à quo in circulum VRZ circuli maximi ducantur XCNS, & XBXS, & KAOS per partes æquales à parallelis abſciſſas CB, & BA in obliquo circulo RBA. Dico *hos circulos maximos à puncto* X *deſcendentes intercipere arcus inæquales, eſſeq́; maiorem* XO, *quam* XN, *vtpote viciniorem circulo maximo* XZS.

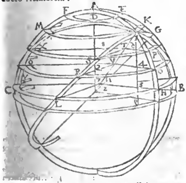
Probatur prorſus eodem modo, ac præcedens propoſ. Plana enim maximorum circulorum deſcendentium à puncto X ſtringunt triangula æquicrura AMB, & BMC, quæ plano VRZ habent diuerſam inclinationem ex 27. huius; ſiquidem ABM triangulum, vtpote vicinius circulo XZS maximam inclinationem menſuranti, & ſectioni VZ planorum intercipientium ZIV, ZPV, & ZQV minorem obliquitatem, ſeu minorem inclinationem habet, quam BMC triangulum, & ſubtenſa arcus BA, quam ſubtenſa arcus BC, quare plana maximorum circulorum cadentium ex vertice X perpendiculariter ex 22. tr. 22 intercipient triangula inæqualia in angulis, eritque triangulum OMK in angulo apud M maius, quam triangulum KMN, vtpote, quia illud OMK ſubiaceat triangulo AMB, quòd habet minorem obliquitatem, & minorem inclinationem, quam BMC triangulum, cui ſubiacet triangulum conſequenter minus KMN, qui ſunt anguli inclinationis planorum CXS, & XKS, & XOS ex 5. propoſ. 1. par. h. Vnde ex prop. 39. lib. 6. etiam arcus OK erit maior arcu KN.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XXX.

Si in ſphæra maximus circulus tangat aliquem ſphæræ circulum; alius autem maximus circulus parallelis ipſorum contactorum circulorum obliquus tangat circulum maiorem eo, qui tangitur à primo maximo circulo eo in puncto, quo ſecatur primus ipſe: per partes æquales obliqui circuli maximi ducti paralleli auferent à circulo maximo per contactum hunc poſtremum, & per polum parallelorum ducto, & à primo poſito circumferentias inæquales, maiorque erit illa, quæ ad maximũ parallelorum propiùs accedit.

*SIt in ſphæra maximus circulus BDC, qui tangat parallelum EDF in D; ſitque alius obliquus maximus LIG: qui tangat parallelũ maiorem illo KIM in puncto I. Paralleli verò circuli XSP, QRO, & TLH ducantur per arcus æquales SR, & RL obliqui circuli LIG, & ſecent circulum maximum AIH per polos parallelorum A, & ſecundum contactum I ductum. Dico has ſectiones abſcindere ab hoc maximo per polos parallelorum ducto circumferentias inæquales HO, & OP; maioremque eſſe HO, vtpote maximo parallelorum BLC ducto viciniorem.



Ducantur ſinus, & ſectiones parallelorum ST, VR, & LN cum obliquo circulo maximo GIL vſque ad ſectionem, diametrumque IZ circuli maximi AIH perpendicularis planis parallelorum cum per eorum polum A tranſeat, & ipſi circulo obliquo GIL, cùm per eius contactum tranſeat ex propoſ. 3. huius partis. Nam tria plana, nempe cuiuslibet paralleli, & duorum circulorum maximorum in punctis ſectionũ V, N, T ſe inuicem ſolùm communicant; ideoque ea puncta erunt communia ſectioni paralleli cum obliquo LIG, & cum perpendiculari AIH. Hæ verò ſectiones ST, VR, & NL erunt quoque parallelę ex propoſ. 14. tract. 2. co, quia à planis parallelorum fiant, & occurrent ipſorum parallelorum ſectionibus cum maximo circulo BDC tranſeunte per pũctum contactus D, quę ſectiones ſunt TX, VQ, & NY, quæ, & erunt parallelę eadem ratione.

Quibus animaduerſis. Probatur propoſ. Nam ducto diametro DZ circuli primo tangentis BDC in triangulo rectangulo T8Z baſis eſt ZT, crus verò Z8. Ergo portio diametri ZT erit maior illâ Z8. Sic dicas de crure Z2. minus, quâm baſis ZV. ita de crure Z7 minùs, quàm baſis ZN. Cum ergo portiones diametri TV ad 82. & VN ad 27 ſint, vt NZ ad 7Z, & NZ ſit maior, quàm 7Z, etiam TV portio erit maior, quàm 82, & VN, quàm 27, vnde iuxta propoſ. 25. huius partis arcus QX, & QY, circuli CDB, quos ſubtendunt dictæ portiones 82. & 27, erunt inæquales, maiorque YQ, quàm QX.

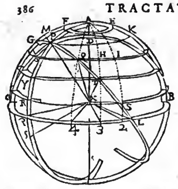
Dico ſecundò auferre quoque à maximo circulos AIH parallelos eoſ, lē, arcus inæquales, maiorémque eſſe HO, quàm OP, vtpote parallelo maximo viciniorem. Ducatur parallela diametro AZ circuli AIH, & 16. & 64. & 43 exprimant ſectiones, quas faciunt ſinus TP, & OV, & HN. Sunt autem TP, & OV, & HN parallelæ, quia ſectiones ſunt parallelorum, & circuli ad eos recti, vtpote per eorum polos tranſeuntis AIH. Sunt quoque perpendiculares ſectioni AZ, quia ipſi ſectioni AZ plana parallelorum perpendiculariter inſiſtunt, vtpote ducti polo A, qui eſt maximi parallelorum. Ergo erunt ſinus circuli AIH, quare, & erunt perpendiculares lineæ 13 parallelæ ipſi AZ pro radio AZ ad vitandam confuſionem ſubſtitutæ. Vnde angulus apud 3. erit rectus, & IN erit baſis. Quadere eodem argumento concludemus 34 portionem eſſe minorem, quàm NV, & 46, quàm VT. Propterea q; ſinus 34, & 46 eſſe magis propinquos maximo parallelorum BC, quam TV, & VN, & ideo minores, & eſſe inæquales inuicem arcus, maioremque eſſe OH; quam OP.

THEOR X. PROP. XXXI.

Iiſdem poſitis omnibus, ſi per partes æquales circuli obliqui, per quas paralleli ducuntur; à polo circuli maximi parallelorum ducantur circuli maximi; Iſti ipſius paralleli maximi circumferentias inæquales intercipient, maiorque erit illa, quæ circulo per polum, & contactum tranſeunti propinquior erit.

*SIt circulus maximus in ſphæra BDC tangens parallelum ADF in D; Aliuſque circulus maximus LPG tangat alium parallelum illo prædicto maiorem MPE in puncto P; paralleli quoque alij, vt OQ, & YT, AS diuidant circulum maximũ ſecundò tangentem LPG in partes æquales ST, & QT, perque polum omnium parallelorum A, & contactum P tranſeat aliquis circulus, vt APZ; àque polo A deſcendant circuli maximi per partes æquales circuli ſecundò tangentis, & per puncta S, T, Q, in quibus obliquum paralleli ſecant, qui maximi ſint AI2, AH3, & AQ4. Dico, quod iſti circuli maximi abſcindent partes inæquales à circulo parallelorum maximo BLZC nempe 23, & 34; maior quæ erit pars 34, quæ circulo APZ per contactum tranſeunti propinquior eſt.

Probatur, vt præced. propoſ. 27. Quoniam plana circulorum maximorum punctis diſtinctorum à polo A perpendiculariter deſcendentia ſuper parallelum maximum BLZC lambunt latera triangulorum æquicrurum inuicem TXQ, & TXS ob radios QX, & TX, & SX æquales, & baſes ſubtenſas æquales ob arcus æquales QT, & TS deſcen-



duntque ſuper planum maximi paralleli perpendiculariter. Inſuper ipſa triangula habent diuerſam inclinationẽ ad plana A 4, A 3, A 2 à polo A cadẽtia. Et quia APZ circulus, vtpote per contactum P à polo A deſcendens ex propoſ. 3. h. p. tranſit, & per polum 5 circuli obliqui ſecundò tangentis GPL; ideo ex prop. 14. Cor. h. par. 1. erit rectus ad ambos circulos maximi paralleli 2LZ, & maximi obliqui LPG. Quare maximam inclinationem ipſorum menſurabit. Cum ergo triangulũ QXT magis approximet circulo maximam inclinationem ex oſtenſis menſuranti minus inclinabit, vel minus erit obliquum ex propoſ. 27. h part. 3. ad plana à polo A cadentia; quam triangulum TXS, & magis accedet ad ſectionem X A, quare triangula inclinationis planorũ ex prop 22 Tract. 22. à planis perpendiculariter deſcendentibus, & lateris eorum QX, & XT, & XS lambentibus effecta, nempe 2 X 3, & 3 X 4 erunt inæqualia in angulis apud X baſes 2 3, & 3 4 ſubtẽdẽtibus, & maior erit angulus 3 X 4 ſubiacens triangulo XT Q minoris inclinationis, quam angulus 2 X 3 ſubiacens triangulo S X T maioris inclinationis, & ideo maior erit angulus 3 X 4, & conſequenter arcus 3 4 ex prop. 39. lib. 6. elem. qui APZ circulo menſuranti maximam inclinationem magis appropinquat, quàm angulus 2 X 3, & conſequenter arcu 2 3, qui ab eo circulo APZ maximam inclinationem menſuranti per polum A, & contactum P tranſeunti magis remotus.

COROLLARIVM.

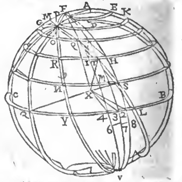
Hinc elicies arcus quoque cuiuſcumque paralleli eſſe inæquales, maioreſque eſſe eos, qui circulo APZ propinquiores ſunt, quia arcus parallelorum omnium à circulis maximis per eorum polos tranſeuntibus abſciſi ſunt ſimiles, ex propoſ. 12. huius, & ideo tot gradus comprehendet 3. & 4. quot HQ, & tot 2 3 quot IH, ſed plures gradus comprehendit 3 4, quam 2 3, ergo, & plures QH, quam H I gradus comprehendet, & ſic dicas de alijs.

THEOR. X. PROPOS. XXXII.

Eodem poſito maximorum circulorum primo paralleli minoris, & ſecundo maioris contactu, quo maiorem hunc parallelum ſecat maximus tangens minorem parallelum. Si circuli maximi per æquales partes circuli ſecundò tangentis ducantur, qui tangant minorem parallelum: hi circumferentias inæquales auferent de maximo parallelorum; quarum, quæ propior erit circulo ad eaſdem partes parallelum tangente à quibus partibus ipſi maximi ducuntur, & per contactum deſcripto, remotiore erit maior.

Sit eadem prorſus conſtructio, quæ prius, nempe circulus maximus 2DC tangens parallelum minorem ADF, & alius circulus GPL obliquus ad parallelos tangat circulum parallelum maiorem MPX parteſque à parallelis inſectæ eius maximi obliqui æquales ſint ST, & TQ. Dico, quod ſi ab E deſcendãt circuli maximi 2SF, & 3TF, & 4QF per puncta has partes terminantia S, & T, & Q, qui tangant parallelum EDF; abſcindent à maximo parallelorum partes inæquales 2 3, & 3 4, maiorque erit pars 3 4, quæ circulo FRX vicinior eſt, qui ad eaſdem partes, nempe ad F tangit non ſicut circulus 2DC, qui tangit in D, & occurit ipſis maximis FSL, & per contactum P tranſit inter FQ4, & APZ; Aduerte 8 X 7, & 7 X 6, vt triangula debere cõcipi i. crura ad X ducta nõ ſint.

Probatur; Nam triangula SXT, & XTQ ſunt



æqualium inuicem crurum, baſiumque æqualium ST, & TQ: Vicinius eſt autem triangulum TQX circulo maximo APZ per contactum P tranſeunti, ideo perpendiculari circulo obliquo LPG, & parallelorum maximo 2LC: & ideo inclinationem maximam menſuranti. Quare circuli tangentes FQ4, & FT3, qui hoc triangulum efficiunt ſuis ſectionibus TX, & QX imprimunt in plano normali, & inclinationis triangulum 6X7; quod erit maioris anguli apud X, quam trianguli remotioris 8 X 7 angulus apud X, quod triangulum ſubſterneretur triangulo SXT remotiori. Siquidẽ triangula, quæ inter duo plana intercipiuntur quanto magis appropinquant ſuis baſibus planorum intercipientium ſectioni ex propoſ. 23. Tract. 22. eò maiorem angulum inclinat cauſant., & ex eadem quanto minus obliqua ſunt; Quare cum ex propoſ. 27. huius ſubtenſa arcus T Q ſit minus obliqua quam ſubtenſa ST, quia vt dixi magis arcus ille TQ accedit ad circulum perpendicularem maximum APZ; & rurſus magis quoque ſectionibus maximorum circulorum intercipientium accedit, nempe circulorum tangentium paralle-

lium

lum EDF; quæ apud illum circa F exiſtunt. Quare ex 3. parte prædict. propoſ. 23. Tract. 28. angulus, qui fieret 6 X 7 eſſet maior, quam 7 X 8, vtpote ſubiectus angulo QXT minus obliquo, & ex dictis minorem inclinationem habenti. Intersectiones autem a X, 3 X, & 4 X incidunt inter circuli maximi planum, cui ſunt perpendiculares, & inter plana obliqua triangulorum SXT, & TXQ, ſiquidem polus circuli maximi, normalis vtrique eorum debet eſſe in communi eorum interſectione, quæ contingit prope, ſimulque extra parallelum EDF, & quia circuli perpendicularis interſectio diſtat quadrante ab eius polo, & BYC parallelorum maximus diſtat à D, & F minus quadrante, ideo circulus maximus perpendicularis ad tangentes duos, V. g. a 1 F T 3, & F Q 4 infra ipſum BLY cadet, & arcus eius erunt V. g. 8 7, & 7 6. Facient autẽ circuli tangentes F Q 4, & F T 3, & alij cum maximo parallelorum LYZ æquales angulos 4, 3, 2 ob æqualem inclinationem ex 18. h. quia tãgunt ex hypotheſi eundem parallelũ EDF. Cumq; anguli 4, 3, 2 tangentiũ FQ 6, &c. ſint æquales, quod ſint æqualiter inclinati, anguli vero circuli duobus arcubus illis perpendiculariter incidenti ſint recti, patet verificari Coroll. cit. propoſ. 23. maioremque eſſe angulum 4 X 3, quam 3 X 2, vtpote angulo maiori 6 X 7 ſubiectum, quam, quod ſit angulus 7 X 8, non ſunt autem ducta centra 6 X, & 7 X, vel 8 X ad vitandam confuſionem, ſed mente ſupplenda. Quamobrem arcus 4 3 quoque ex 39. lib. 6. Elem. erit maior, quam 3 2, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

Hinc patet idem dicendum de arcu TH, & arcu TI paralleli HB, quòd nempe TH ſit minor, quam TI, qui remotior eſt à circulo FFZ, quia arcus 2 3 eſt ſimilis arcui TH, & arcus 3 4 arcui TI, & idem dicendum de omnibus alijs parallelis; qui inter maximum BLYC, & parallelum MPX deſcribi poſſunt.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIII.

Si in ſphæra maximus circulus aliquem circulum tangat; alius autem maximus circulus obliquus ad parallelos tangat parallelum maiorem illo, quem tangebat maximus circulus primo poſitus: Inæquales intercipient circumferentias parallelorum circulorum; quorum propiores vtrouis polorum ad eandem partem maiores erunt, quam vt ſimiles ſint remotioribus.

Sit ſchema præcedens; in quo ſit maximus circulus FFT tangens parallelum minorem FDF; & alius circulus maximus GPL tangat parallelum maiorem MPK; ſecetque duos parallelos quoſcumque SN, & TR. Dico arcus TR, & SN inæquales eſſe; maioremque eſſe NS polo V propiorem, quã, quod ſit ſimilis arcui RT. Ad quòd oſtendendum deſcribantur maximi circuli apud F tangentes, vt F T 3 per ſectionem T, quo facto.

Prob. propoſ. Nam prop. 16. huius oſtendimus partes parallelorum interceptas inter maximos circulos eundem parallelum tangentes, vt ſunt MN, & TR eſſe ſimiles. Ergo NS inter maximos circulos tangentes comprehenſus erit maior, quã quòd ſimilis eſſe poſſit; quia erit maior, quam NM, qui eſt ille arcus, qui ſimilis eſt arcui RT. Quod autem tangens FT3 abſcindat arcum minorem NM, quam NS patet, quia iſti arcus ſe decuſſant in T. Vnde GPS arcus remanet vltra M apud S.

EXPENSIO IV.

De partibus, quæ ab interſectionibus maximorum circulorum fiunt, nullam proportionem dicentibus, nec inuicem, nec cum diametris ipſorum circulorum.

Vidimus vſque adhuc aliquos circulos ab alijs poſſe ita ſecari, quòd eorum partes, aut ſimiles ſint, aut æquales, & de iſtis nullum dubium eſt, quod proportionem dicant cum ſimilem rationem habeant.

Deinde adeſſe alias interſectiones quibus in tales partes circuli diuidantur, vt inter eas nulla reperiatur, aut æqualitas, aut ſimilitudo, modo videndum an inter ipſas aliqua proportio, nempe rationum ſimilitudo inueniri poſſit, ſed priùs quædam pro fundamento ſubſternenda ſunt.

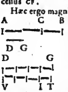
PROBL. LEMMATICVM I. PROP. XXXIV.

Propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus reperire aliam mediam, quæ datæ vtrique magnitudini commenſurabilis ſit.

Sint propoſitæ duæ magnitudines inæquales AB maior, & AC minor, & alia quæcumque DG, cui oporteat reperire commenſurabilẽ magnitudinem talem, quæ ſit media inter AB, & AC, nempe maior, quam AC, & minor quam AB.

Exceſſus, quã maior AB excedit minorem AC eſt BC, cui comparata data quæcumque DG, vel erit minor, vel maior; Si eſt maior bifariam diuidatur, & ſi neque ſic ſit minor, vna ex ipſis partibus bifariam diuidatur adhuc, & toties in dimidijs remanentibus id fiat; donec efficiatur minor, quàm exceſſus CB.

Hæc ergo magnitudo, vel data minor, quam exceſſus CB, vel diuidendo minor effecta toties replicetur; donec efficiatur proximè maior, quã AC, & ſit VT, ita vt ſi auferatur tantùm vna ex partibus replicatis iam ſit minor. Dico *hanc eſſe quantitatem quæſitam*.



Probatur. Nam, quòd ſit commenſurabilis datæ DG patet, quia eius multiplex eſt, aut aliqua ex dimidijs ſucceſſiuè factis, & ideo pars aliqua lineæ datæ DG.

Quod verò ſit media inter AB, & AC patet, quia eſt quidem maior, quam AC, ex hypotheſi neceſſariò verò minor, quam AB: Nam ſi eſſet æqualis,

ſi detraheretur vnies pars V. g. TI; quia detraheretur pars minor, quam exceſſus CS, remaneret VI maior, quam AC, & ideo non fuiſſet proximè maior, vt præſupponebatur.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Si polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos ſecent, nempe maximus parallelorum, & obliquus alius ad parallelos, quos duos ad eaſdem partes ſecent alij duo maximi per polum parallelorum ducti; non erit pars maximi paralleli ad partem obliqui interceptam inter circulum primo poſitum, & poſtremum per polos ductum, vt pars eiuſdem maximi paralleli altera ad partem aliam obliqui, quæ vtroque maximo circulo per polos ducto intercipiantur.

Sit circulus ACB, in quo ſit polus A maximi paralleli BHD, & alius obliquus circuli CFD ei orthogonaliter inſiſtat, quos duo maximi circuli à polo A deſcendentes ſecent, nempe AFH, qui ſecet maximum parallelorum in H obliquum in F, ſicut, & AEG ſecet maximum parallelorum in G obliquum in E. Dico, quod ſicut eſt FH ad CF non erit HG ad FE; ſed ad aliquam circumferentiam minorem, quam FE, vt in fig. 1.

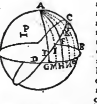
Probatur. Nam vel arcus obliqui circuli CF eſt commenſurabilis arcui FE, vel incommenſurabilis. Si commenſurabilis inueniatur eorum cõmunis menſura P, & ſecundùm eam diſtribuatur arcus CF, & FE, perque puncta diuiſionum à polo A maximi circuli ducantur LO, & HK, & MI. Eruntque æquales partes inuicem CL, & LK, KF, FI, & IE. Quare partes in maximo parallelorum ex propoſ. 28. huius erunt inæquales, maiorque erit BO, quam ON, & ON, quàm HH, & cæt. Quare ex propoſ. 8. lib. 5. Elem. maior erit proportio partis BO ad CL, quam ON ad LK, & ſic ſucceſſiuè: quia cum BO ſit maior, quam ON comprehendit plùs de arcu CL, vel æquali LK, quàm ON, & ſucceſſiuè de cæteris vſque ad G quapropter, cùm ſint tot partes in CF, quot in BH, & tot in FE, quot in HG, & quælibet pars in BH antecedens dicat maiorem proportionem, quam ſequens ad ſuam correſpondentem in CF, & idem dicas de HG ad FE, dicẽt quoque omnes ſimul antecedentes partes BH ad correſpondentes partes ſequentes CF numero eaſdem maiorem proportionem; quam arcus HG partes ad ſuas in eodem numero correſpõdentes FE: Quare vt dicant eandem proportionem arcus HG ad FE, quam BH, ad CF, deberet eſſe minor, ſic quia dicit maiorem proportionem 8. ad 4 quam 3. ad 2. quia 8. comprehendit 4. gemina vice, non autem 3 comprehendit 2. numerus 2. debebit eſſe minor, & fieri 1 $\frac{1}{2}$, & ſic ita eſt 8. ad 4. vt 3. ad 1 $\frac{1}{2}$.

Progreſſu 2. Quod ſi arcus CF, & FE ſint incommenſurabiles, tunc ſi non eſt, vt BH arcus ad arcum CF, ita HG ad arcum aliquem minorem, quam FE; Saltem erit, vel ad arcum maiorem, quàm FE, vel ad eundem FE, vt in fig. 2.

Sit primum HG ad aliquem arcum maiorem, quam FE V. g. HG ad FT, vt BH ad CF. Ex præc. propoſ. inueniatur arcus medius maior, quam FE minor, quam FT, & commenſurabilis ipſi CF, & ſit arcus FV. Ducaturque per polum A. & punctum V circulus maximus AVR, & quia FV ponitur maior, quam FE erit quoque HR maior, quàm HG, vt per ſe patet.

Ex præcedenti itaque argumento, ita erit BH

I

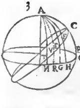


ad CF, vt HR ad arcum aliquem arcu FV minorem: quia commenſurabiles ponuntur FV, & CF. Ex aduerſarijs verò ita quoque ponitur BH ad CF, vt HG ad TF. Ergo quoniam habẽt eandem proportionem, quam BH ad CF; habebũt etiam eandem proportionem inter ſe; & ita erit arcus HG ad arcum FT, vt HR ad arcum aliquem minorẽ, quam FV, quia ſunt, vt BH, & CF ex aduerſarijs, ſic HG ad FT, ex probatis autem HR ad minorem, quam FV, vnde *permutando* erit HG ad HR antecedentes, vt FT ad arcum minorem, quam FV: Sed HG eſt minor, quã HR. Vnde, & arcus FT eſſet minor arcu minori, quàm FV, qui arcus FV ipſo FT minor eſt, ex 14. lib. 5. elem. quę res eſt omnino abſurda.

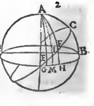
Progreſſ. 3. Quòd ſi in fig. 3. ita ſit BH ad CF, vt HG ad FE, & ponantur incommenſurabiles CF arcus, & FE; tunc FE diuidetur per medium in I, & ducetur circulus maximus à polo A, qui ſit AIH; Eritque maior HM arcus, quàm MG ex 26. huius, ideoque ex primi progr. probatione maior erit proportio HH ad FI, quàm dimidij totius HG ad FI dimidium arcus FE, ſed vt dimidium ad dimidium, ita totum ad totum, quare erit maior proportio HH ad FI, quam totius HG ad totum FE: ſed proportio HG ad FE, ex aduerſarijs eadem eſt, quæ BH ad CF. Ergo eſt maior proportio HH ad FI, quam BH ad CF.

Itaque quia HM habet maiorem proportionem ad FI, quam HB ad CF debebit eſſe maior arcus ad quem dicit eandem proportionem, quam ſit arcus

3



2



FI, quod tamen in ſecundo progreſſu oſtenſum eſt impoſſibile, nempe quod BH ad CF ita ſit, vt arcus HM ad arcum arcu FI maiorem. Itaque cum nec BH ſit ad CF, vt HG ad arcum arcu FE, maiorem, nec ad æqualem erit, vt ad minorem, & ſic propoſitio remanet vndequaque probata.

CO-

COROLLARIVM.

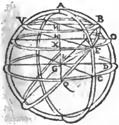
HInc fit malorem eſſe rationem arcus BH ad arcum CF, quam arcus HG ad arcum FE. Cùm enim ſit, vt BH ad CF, ita HG ad arcum arcu FE minorem: ſit autem maior proportio ex 8 propoſ. quinti elem. arcus HG ad arcum arcu FE minorem; quàm ad FE arcum maiorem: erit quoque maior proportio BH ad CF, quam HG ad FE; ita quia eſt eadem proportio 8. ad 4. quam 6. ad 3. eſt autem maior proportio 6. ad 3. quam ad 5. erit quoque maior proportio 8. ad 4. quam 6. ad 5. cùm 8. comprehendat gemina vice 4. non autem 6. comprehendat numerum 5.

THEOR. III. PROPOS. XXXVI.

Si polus parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli; quem duo alij circuli ad angulos rectos ſecent, nempe maximus parallelorum, & obliquus aliquis ad eoſdem, qui obliquus ſecetur à maximo circulo per polum ducto.

Semidiameter ſphæræ ad ſemidiametrum eius paralleli, quē obliquus circulus tāgit habet maiorē rationē, quàm circumferentia maximi parallelorū ad circumferētiā obliqui circuli, quæ inter circulos primò, & poſtremò aſſumptos per polum parallelorum tranſeuntes intercipiuntur.

SIt polus A in maximo circulo ABD, cui ſint perpendiculares maximus parallelorum DCQ, & obliquus ad parallelos BEQ, & hūc BEQ maximum circulum circulus alter à polo A deſcendens AEC ſecet alicubi V. g. in E inter B, & Q. Dico, quòd diameter ſphęrę BG habet maiorem proportionem ad diametrum BN paralleli, quem contingit obliquus in B, quàm circumferentia DC ad circumferentiam BE, quę intercipiuntur inter circulos ABD & AEC per polum A tranſeuntes, quod vt probetur.



Intelligendum eſt lineas EH, & EI eſſe ſectionem paralleli OEB per interſectionē E maximorū BEQ, & AEC tranſeuntis eum ijſdem; At EG, & CG eſſe ſectiones maximi AEC, cum obliquo BEQ, & maximo parallelorum DCQ. Et tandem DG, & OH, & BN, eſſe ſectiones circuli ABD, cum parallelis: Et hinc ex pr. 16. tr. 22. ſectionem ES eſſe perpendicularem ad OH, & ad BO, & angulos BNG, & IHG, & ESH eſſe rectos, & quia IHG angulus eſt rectus longior erit baſis IG, quam crus IH: vnde tranſlatū illud crus ſuper baſim IG terminabit in B, ducaturque EK: ex 22 primi triāgulum EIB erit æquale triangulo BIH ob angulum rectum ad I in vtriſq; & BI latus commune, & IK, & IH æqualia crura.

Igitur ex Tr. 19. de āngulis propoſ. 4. habebit maiorem rationem GI ad BI, vel ad æqualem SH crura, quam angulus BXI, vel ipſi ęqualis BHI ad angulū EGI, ſed angulus IHB eſt ęqualis angulo DGC. Ergo habebit maiorē proportionē BI ad IH, quā angulus DGC ad angulū IGE, quare, & idē verificabitur de circūferentijs mēſurātibus ex 39. ſexti el. nempe DC, & BE. Et obtinebit maiorem proportionem GI ad IH, quàm arcus DC relatus ad BE: Conſiderandum verò eſt, quod eadem proportio eſt OI baſis ad crus IH, quam GB ſemidiametri ſphæræ ad BN ſemidiametrum paralleli, quem tangit obliquus ex 4. ſexti. Quare ſemidiameter quoque ſphęrę ad ſemidiametrum paralleli DV maiorem rationem habebit, quam arcus DC ad arcum BE.

COROLLARIVM.

VNde cum iam cognoſcamus quinam circuli ita ſe interſecent, vt ſimiles ſint, vel ęquales, & ideo inuicem comparabiles, in proportione; quinam verò circuli non ſe interſecent in partes æquales, vel ſimiles, nec inuicem, nec cum diametro comparabiles, ſphęræ cognitionem talem nacti ſumus; vt in comparandis portionibus circulorum inuicem error, non facilè ſuboriri poſſit. Cognoſcimus quoque neceſſitatem recurrendi ad ſinuum, ſecantium, & tangentium Tabulas, vt arcuum habeamus cognitionem, cum arcus non dicant inuicem proportionem illam, quam ſinus arcubus ſubtenſi.

TRA-

TRACTATVS XXIV.

De Sectionibus Conicis.

POſt Sectiones ſphæricas ingredimur cognatas ſectiones conicas, nec minus illis ſcientiæ cæleſti neceſſarias, nec minus ingenioſas, aut mirabiles; ſuntq; quinque diuerſæ omninò eſſentiæ (Triangulum, Circulus, Ellipſis, Hyperbola, & Parabola) ſed triangulo poſthabito, de quatuor ſequentibus agemus, & de tribus quidem poſtremis ex inſtituto; de circulo verò obiter, quatenùs in iiſdem proprietatibus multoties cum prædictis tribus ſectionum generibus communicat. Huius verò mirabilis cognitionis promotor, & ampliator fuit Appollonius Pergęus, qu ob id Principis Geometræ nomen conſecutus eſt.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam ſectionea ipſaa cognitione attingamua, cuiua corporis ſint ſectiones oportet noſcere, ſicut, & lineas, quę in ipſis trahi poſſunt, eaſque vel terminare, vel diuidere, nomine tenùs agnoſcere, vt deinde earum quoque natura manifeſtior euadat, quæ ab harum appellationum intelligentia dependet.

DEFINITIO I.

COnus eſt corpus habens originem à circumducta linea à puncto in ſublimi poſito determinata longitudinis circa perimetrum circularem.

Conua propriè dicitur, vt Hyeronimus Vitalis de Mathematica optimè meritua in ſuo Lexico aſſerit. Nux pinea, quæ ex lato in acutum deſinit; ſed hæc appellatio à Mathematicis translata eſt ad ſignificandam pyramidem rotundam, cuiua baſis circulus; Deſcribitur verò, quòd manente puncto D linea, quædam DC recta circa circulū CGHF feratur, donec à C per GFH in C iterū redeat, vt fig. I.

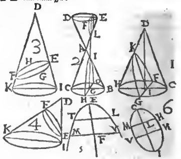
Vnde clarum eſt omnes lineas, quæ à peripheria circuli ducuntur ad verticem, vt CD, vel CH eſſe lineaa rectas, quæ verò aliter curuas eſſe, aut certè ſi rectæ ſint, ſolùm tangere, vel ſi ſecant intùs penetrare. Conua quoque poſſet deſcribi ex ductu lineæ circa ellipſim. Verùm; quia ellipſis ex circulo ortum habet, & in quolibet cono etiam in baſi elliptica inixo poteſt circulus duci, qui, & conum ipſum relinquat, & baſim ei ſternat, inde eſt; quod circulum cono pro baſi ſubſternant, vt qui certior, & magis determinatus; quàm ellipſis, quæ ab eo originem, & natalia ducit.

DEFINITIO II.

VErtex coni dicitur manens punctum, à quo educta linea ſuperficiem conicam deſcripſit.

DEFIITNIO III.

AXis coni dicitur recta à vertice in centrum circuli immiſſa.



Vertex itaque coni eſt punctum D, & axis DI, & definitur; quòd cadat in centrum circuli non Ellypſeoa licet, & ipſa cono pro baſi deſeruire poſſit; Tum quia eiua accidentia nondum manifeſta ſunt, vnde nec propter id pro baſi vſurpatur; tum quia infinitæ diuerſitatis ſunt prorſùs ellipſes, quę eidem cono ſubſterni poſſunt, & quæ non idem centrum commune poſſident; vnde nullus axis determinatus aſſignari poſſet cum deberent multiplicari

plicari

plicari, prò vt infinitæ ellipſes in cono aſſignari poſſunt, ſicut, & earum centra.

DEFINITIO IV.

Onus rectus eſt, cuius linea circumducta efformatrix vbique æqualis eſt; Scalenus verò cuius ea linea inæqualis eſt.

Duplicem itaque conum diſtinguimus rectum, qui, & iſoſcelius, æquicruriſque appellatur, & Scalenum, qui obliquus quoque apellatur; hic imperfectior eſt, vtpote duplici axi obnoxius, ille perfectior, & vnius axis: Cæterum in vtroque omnes coni ſectiones exhiberi poſſunt, non vt antiquitas ante Apollonium Pergæum putauit, quæ diſtinxit tria conorum genera iuxta tres angulorum ſpecies, quas à vertice D rectæ ad baſim deductæ continere poterant, nempe Rectos ob angulum ad verticem rectum; Obtuſiangulos ob angulum obtuſum, Acutiangulos ob angulum acutum, in quibus ſingulis vnicam ſectionem ponebant. In recto parallelam, quam apellabant coni recti ſectionem in acutiangulo ellipſim, quam acutianguli, & in obtuſo hiperbolem, quam obtuſianguli ſectionem nominabant.

DEFINITIO V

Oni oppoſiti ſunt ad verticem circa eundem axem exiſtentes.

Tales ſunt ABC, ADE in fig. 2. circa axem eundem poſitos.

DEFINITIO VI.

Oni ſectio eſt figura à plano diuidente conum in ſuperficie coni effecta.

DEFINITIO VII.

Ectio coni per axem eſt cum planum ſecans per verticem, & per centrum circuli tranſit.

Sectio itaque per axem eſt DHC in fig. 1. quæ per centrum I, axem ID. & per D verticem tranſit, eſtque triangulum, vt ſuo loco oſtendemus.

DEFINITIO VIII.

Oni ſectio Parabola eſt cum planum ſecans parallelum vni lateri ſectionis per axem adigitur.

Vt in 1. fig. FGK planum eſt parallelum lineæ CD, quæ eſt crus trianguli, vel ſectionis per axem CDH.

DEFINITIO IX.

Oni ſectio Ellipſis eſt, cùm planum ſecans vtrunque crus, ſectionis per axem, ſecat, & angulos inæquales efficit illis, quos cum prædicta ſectione baſis circularis facit.

Sic ſectio EGHF, quia angulus DFE, eſt inæqualis angulo DKI, vel alterno DIK; Sic, & angulus DEF eſt inæqualis angulo DIK, vel angulo DKI alterno, vt in fig. 3 vocatur ellipſis. Si autè angulus DEF angulo DKI, vel DFE angulo DIK alterno, vel ſub contrario, vt in 4. fig. æquaretur, ſectio eſſet circulus, ut ſuo loco oſtendemus Tract. ſeq.

DEFINITIO X.

Yperbola eſt, cum ſectionis planum alteri ſectionis per axem cruri ad verticem producto occurrit.

Sic in fig. 2. ſi GT productum occurrat CA cruri producto vltra verticem in L, dicetur ea ſectio Hyperbola qualis eſt OIN, & ſi planum ſecet vtrunque conum ad verticem erunt oppoſitę figuræ, ſeu Hyperbolæ.

DEFINITIO XI.

Iameter ſectionum eſt recta diuidens lineas paparallelas quaslibet, quæ ducuntur intra ſectionem bifariam, & primarius quidem, ſeu axis, qui rectangulè diuidit, alij autem vocantur coniugati axes.

Sic CI in fig. 6. vocatur principalis, & ex generatione diameter primarius, ſeu axis, quia diuidit bifariam, & orthogonaliter rectas in ſectione ductas, quæ dicuntur ordinatæ ad diametrum, ſeu applicatæ HM, & NV, ſi verò non ad angulos rectos erit diameter ſecundarius, ſeu coniungatus vt in fig. 5. EF, qui LT, & VM licet bifariam diuidat, non tamen ad rectos angulos.

DEFINITIO XII.

Ranſuerſa diameter eſt illa, quæ inter duo crura trianguli per axem intercipitur.

Talis eſt in Hyperbola IHL, quæ inter crura ſectionis per axem SA, & AE intercipitur, & in hac ſectione eſt diameter prolungata; At in ellipſi eſt ipſe diameter abſque vlla prolungatione, vt SF in fig. 3. qui ſi ſit primarius, ſeu axis dicetur tranſuerſus axis. At in parabola nullus eſt traſuerſus diameter, cum enim eius ſectio ſit parallela vni cruri ſectionis per axem, nunquam poteſt in aliud terminare, quare nec vlla linea in ea poterit in vtrumque crus ſectionis per axem incidere.

DEFINITIO XIII.

Ertex ſectionum eſt extremum diametri, cuiuſcumque: at vertex ſupremus extremum axis.

DEFINITO XIIII.

Entrum eſt, quod tranſuerſam diametrum bifariam diuidit.

Punctum, quod tranſuerſum diametrum bifariam diſcepſit; vocatur centrum, quia in Hyperbola, vel Ellipſi omnes diametri ad illud punctum concurrunt, at Parabola nullum habet centrum, quod diametri omnes ſint paralleli, vt oſtendetur.

Pręter hęc eſſent Parametri, & Vmbelici definiendi: ſed melius ſuo loco cum de ijs agemus, natura ipſorum innoteſcet.

DEFINITIO XVI.

Va ſimiles figuræ ſunt, quæ cum ſint eiuſdem ſpeciei ſegmenta diametrorum ab applicatis facta vnius ad ſegmenta alterius ſunt, vt applicatæ ad applicatas ſub æqualibus angulis.

DE-

DEFINITIO XV

Æqvales ſectiones ſunt, quæ ſuperpoſitæ inuicem conſentiunt.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis ſectio Coni per axem facta triangulum eſt.

PRobatur. Nam triangulum eſt illud, quod rectis clauditur, & tribus angulis conſtat. In cono autem omnes lineæ terminantes ad verticem rectæ ſunt ex def. Cum verò baſis ſit plana ſuperficies circularis erunt rectæ lineæ per illam extenſæ, vnde AE, & BE, & BA tres rectæ erunt. Propterea que tres tantum angulos ſe tangendo poterunt efficere, ideoque AEB erit triangulum; in fig. propoſ. ſequentis.

COROLLARIVM

HInc que eſt, quod ſi fiat alia ſectio per axem efficietur aliud triangulum æqualis baſis, vt primum. Nam altera ſectio per axem EF incidet in centrum F, & rectæ GF, & FD radij erunt in circulo ACBD, vt ſunt AF, & FB.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis ſectio coni circularis parallela baſi circulus eſt.

PRobatur. Nam cum plana ſint æquidiſtantia erit, vt FB ad OE, ſic CD ad LI, & AB ad MK; quare CD ad LI, & AB ad MK erunt in eadem proportione. Ideoque permutando AB ad CD erunt, vt MK ad LI, & ideo dimidiæ AF ad FC vt MO ad OL dimidia: ſed AF, & FC ſunt æquales ex præced. Coroll. ergo etiam MO, & OL, & ita dicas de reliquis: quare cùm omnes MO, & OL, & cæt. à puncto O ducibiles ſint æquales; MIKL erit circulus.



EXPENSIO II.

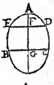
De Diametro, & Applicatis.

PRoprietates mirabiles ſectionum ab ipſo diametro, & applicatis incipiunt, vtpote illę, quę magis obuiam ſunt, & faciliores intellectui ſe produnt, maximè quia ferè omnia, quæ de ſectionibus dici poſſunt, in diametro, & applicatis fundantur.

PROBL. I. PROP. III.

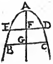
Data quacumque coni ſectione eiuſdem diametrum inuenire.

SIt data quæcumque coni ſectio BAC. Oporteatque eiuſdem diametrum exquirere.



Ducantur, vtcumque in ſectione binæ rectæ parallelæ BC, & DE; quæ bifariam ſecentur in F, & G, ductaq; per puncta diuiſionum linea FG occurrat ſectioni in A. Dico *rectam* AFG *propoſitæ* BAC *ſectionis eſſe diametrum.*

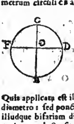
Ratio eſt. Quia æquidiſtant DE, & BC; eaſque bifariam diuidit in G, & F recta AGF. Vnde ex definitione II. erit diameter.



PROBL. II. PROPOS. IV.

Dato triangulo per verticem, & ſectionis diametro Applicatæ longitudinem inuenire.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum in fig. prop. ſeq. in quo detur diameter EG. Interuallo dimidiatæ ML diametri baſeos, fiat circulus GF, BD. Accipieſq; LK, quam transferes in diametrum circuli CB à puncto G ducea perpendicularē, quę ſit DGF, & FD erit applicatę magnitudo; quam deinde applicabis diametro ſectionis EG interuallo eodem KE in quacumque ſectione, vel Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipſi, & erit applicata.



Probatur autem facilè. Quia applicata eſt illa, quæ diuiditur bifariam à diametro: ſed punctum G eſt punctum diametri, illudque bifariam diuidit linea DF in G ex 13. lib. 3. el. cum ducta ſit perpendicularis diametro CB circuli DCBF ex conſtructione. Quare erit applicata, cùm puncta F, D ſint communia circulo AD, & ſectionis DEF, & ſint I, & V in circulo MILV.

THEOR. I. PROPOS. V.

Si parabolæ cuiuſcumque ad diametrum binæ rectæ lineæ ſint ordinatim applicatę, erunt quadrata ipſarum ad inuicem, vt interceptæ diametri portiones inter ipſas, & verticem.

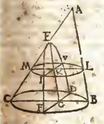
SIt Conus ABC, in quo parabola DEF, cuius diameter parabolica EG; applicatæ verò GF, & IK ad diametrum EG, trahaturque LM. Dico, *ita eſt quadratum factum ex* GF *ad quadratum factum*

ex

ex KI, vt GE ad EB portiones diametri inter verticem E, & ordinatim applicatas interceptæ.

Reminiſcenda eſt 35. propoſ. Eucl. 3. hæc enim in illis ſupponitur.

Nam in circulis ex 2. h. LVIML, & CDBF parallelis ſe ſecent mutuò diametri LM, & CB cum chordis VI, & FD, & ad angulos rectos in K (angulus enim K rectus eſt, licet id fig. non exprimat) vt ex dictis propoſ. 4. huius. Quare, ex ſegmentis LK, & KM conſtituatur rectangulum, & ſegmentis æqualibus VK, & KI conſtituatur quadratum, erunt æqualia: Sic ſi ex ſegmentis BG, GC rectangulum, & æqualibus DG, & GF quadratum conſtituatur, & hæc erunt inter ſe æqualia. Vnde ita erit rectangulum conſtitutum ex CG, & GB ſegmentis diametri maioris circuli ad rectangulũ ex ſegmentis LK, & KM minoris, vt quadratum ex ſegmẽtis chordæ GD, & GF ad quadratum ex ſegmentis chordæ IK, & KV. Sed illorum duorum



rectangulorum altitudines ſunt eædem: ſiquidem ſegmenta LK & BG; quia ſunt parallela, & inter parallelas BA, GE ſunt æqualia ex prop. 33. primi. Ergo ſe habebunt inuicem, vt baſes GC, & KM ex propoſ 1. lib. 6. Eucl. Quo ſuppoſito ſic probo propoſitionem ex propoſ. 4. Coroll. lib. 6 ſicut eſt GC ad KM, quæ ſunt parallelæ in triangulo EGC, ita eſt EG ad EK. Sed, vt eſt latus CG ad MK, ita eſt rectangulum ex ſegmentis BG, & GC ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM; & æqualem proportionem dicit hoc rectangulum ex ſegmentis diametri BG, & CG ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM, quam quadratum ex ſegmentis chordæ DG, & GF ad quadratum ex chordæ KV, & KI, vt diximus. Ergo ex 16. lib. 5. Elem. quam proportionem dicit quadratum hoc GF ex ſegmentis chordæ maioris circuli GF, & GD ad quadratum ex ſegmentis IK, KV chordæ minoris circuli, eandem dicit GE ad EK portiones diametri parabolici à vertice inter applicatas interceptæ; quòd erat probandum.

THEOR. II. PROPOS. VI.

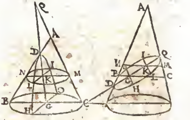
In omni Ellipſi, & Hyperbola quadrata duarum ordinatim applicatarum eam proportionem dicent ad inuicem, quam rectangula portionum diametri interceptarum inter ipſas, & vertices.

SIt conus ABC, ſiue obliquus, ſiue rectus. Hyperbola ODH, vel Ellipſis ODHLIQ, in quibus ſint ordinatim applicatæ HGO, & LKI: diametri autem intercepti portiones ſint in ellipſi GD, & GQ, vel QK, & KD intra ipſam. In Hyperbola autem extra eam, donec diameter occurrat lateri trianguli CA producto in Q, vt eſt GQ, ita quod GQ, & DG ſint portiones interceptæ, vel QK, & KD.

Dicit itaque propoſitio, *quòd ſi fiat rectangulum ex* QK, *&* DK *hoc erit ad rectangulum factum ex* QG, *&* GD *interceptis portionibus tamquam ex duobus lateribus, vt quadratum* KL *ad quadratum erectum ſuper* GH.

Aduertendum verò eſt primo progreſſ. id quòd percontauimus in præced. expoſ. rectangulum factum ex portionibus MK, & KN eſſe æquale quadrato ex KL conſtituto. Sicut, & rectangulum ex lateribus CG, & GB quadrato ex GH confecto, vt probat Eucl. propoſ. 35. lib. 3. & ideo eſſe rectangulum ex MK, & KN lateribus ad rectangulum ex GC, & BG, vt quadratum KL ad quadratum ex GH.

Aduerte, quòd in cono Ellipſis non ſunt deſcripti circoli circa diametros NM, & BC ad vitandam confuſionem; ſed ſunt ſubintelligendi baſi coni paralleli per L, H, D, I tranſeuntes.



Progr. 2. Nota quoq; proportionem laterum MK ad CG in triangulo CQ eſſe eandem ex Cor. prop. 4. lib. 6. Eucl. quæ portionis diametri, cruriſque QK ad crus Q. Sicut ex eadem proportionem lateris KN ad GB latus eſſe eandem, quæ DK ad DO. Quare ſi componatur rectangulum ex QK, & KD lateribus, quæ dicunt eam proportionem, quam latera rectanguli MK, & KN; ſicut, & rectangulum ex QG, & OD lateribus, quæ habent candẽ proportionem, quam latera CG, & GB erit compoſitâ proportione ex cr. 17. prim. rectangulũ ex QK, & KO ad rectangulum QG, GD; ſicut rectangulum ex MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB.

Quo poſito, ecce patet propoſitio. Quadratum ex applicata KL refertur proportione ad quadratum applicatæ GH, vt rectangulum ex lateribus MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB ex primo progreſſ. Sed hæc proportio rectanguli MK, & KN minoris ad rectangulum maius, ex CG, & GB lateribus eſt eadem, quã refertur rectangulum ex diametri Hyperbolici, vel Elliptici portionibus QK, & KD ad rectangulum QG, & GD ſegmentis ex 2. progreſſ. Ergo proportio quadrati applicatæ KL, qua refertur ad quadratum applicatæ GH eſt eadem quâ rectangulum ex ſegmentis diametri Hyperbolici, vel Elliptici QK, & KD ad rectangulum ex eiuſdem QG, & GD. Quæ de Ellipſi dicuntur etiam de circulo debent intelligi.

COROLLARIVM.

PRopoſitio vniuerſaliter intelligenda eſt de quocunq; cono, ſiue obliquo, ſiue recto, ſeu applicatæ ſint ad angulos rectos diametro, vt in recto, ſeu ad angulos obliquos, vt in obliquo contingit: Vnde colliges duplex genus diametrorum dari vnum, in quo applicatæ ſunt ad angulos rectos, alterum ad angulos obliquos, ſeu in Parabola, ſeu Hyperbola, ſeu Ellipſi.

EXPENSIO III.

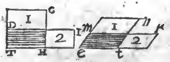
De Parametro.

PArameter eſt linea quędam aſſumpta extra ſectionem: quæ eſt extrema proportionalis diametri interceptæ, & applicatę in parabola. At in Hyperbola, & Ellipſi eſt quoque tertia proportionalis inter diametrum interceptam, & applicatam: ſed additâ ei, vel demptâ quędam portione lineæ, quam etiam oſtendemus, cuius ratio nia ſit.

L E M M A.

Si ſit rectangulum quodlibet, & parallelogrammum rectangulo æquilaterum. Sintque duo alia rectangulum nimirum, & parallelogrammum ei æquilaterum, ſed primo parallelogrammo æquiangulum; ita ſe habebit proportione rectangulum ad rectangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum.

SIt primum rectangulum TC, & aliud ſecundum TI, quæ poſita vnum ſuper aliud occupabunt ſpatium commune DH. Item ſit parallelogrammum primum, quodcumque, vt e n, ſed primo rectangulo TC æquilaterum, & ſecundum e r aliud ſecundo TI rectangulo item ęquilaterum; ſed quæ ſint inuicem æquiangula, ita quod vnum ſuper aliud poſitum, qua parte conueniunt in angulis æqualibus occupent commune ſpatium t m dicit propoſitio, quod primum rectangulum TC primo parallelogrammo e n dicet eam proportionem; quam ſecundum rectangulum TI dicit ſecundo parallelogrammo e r.



Probatur. Nam TC rectangulum primum ſe habet proportione ad e n parallelogrammum primum, vt ſua pars DH ad ſuam partam m t, quòd ſint ſuper æquales baſes TH, & et ex prop. 1. lib. 6. Eucl. Coroll.

Sed pars hæc DH rectanguli primi, quæ etiam eſt communis ſecundo eadem proportione refertur ad partem m t parallelogrammi item primi, quæ etiam eſt communis ſecundo parallelogrammo, vt rectangulum ſecundum TI ad rectangulum ſecundum er propter eandem rationem ęqualium baſium DT, & e m.

Ergo arguendo ex 16 lib. 5. ita ſe habet proportione primum rectangulum TC ad primum parallelogrammum e n, vt ſecundum rectangulum TI ad ſecundum parallelogrammum e r, quod eſt propoſitum.

Hoc autem Lemma aſſumitur, vt quando loquimur de rectangulis, idem intelligatur de parallelogrammis illis æquilateribus, dummodo ſicut illa omnia conueniant in rectitudine angulorum, ſic hæc parallelogramma inuicem referantur ſimilibus angulis; & æquiangula ſint, quod in poſterum ſemper erit obſeruandum.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si in omni ſectione parabolica, quadratum alicuius ordinatim applicatæ, ſe habeat ad quadratum diametri parabolici intercepti ab eâ, & à vertice, vt idem diameter interceptus ad contiguam aliquam verticis; erunt quadrata, vel rhombi omnium applicatarum ordinatim æqualia rectangulis, vel parallelogrammis factis à dicta contigua verticis, & intercepto parabolico diametro inter eas applicatas, & verticem.

DEtur Parabola, in quâ diameter AC, applicata ordinatim CB, cuius quadratum ſit CI dicit propoſitio. Quòd ſi ſe habeat hoc quadratũ CI in proportione ad quadratum CL, quod eſt factum ſuper diametrum parabolicum interceptum inter CB ordinatim applicatam, & verticem parabolæ A. Si inquam CI quadratum, ſeu rhombus ſit ad CL quadratum, ſeu rhombum in proportione, vt ipſa contigua verticis AP ad diametrum interceptum AC. Tunc cuiuslibet alius applicatæ, vt DH quadratum, ſeu rhombus, quale eſt DR æquale erit rectangulo, ſeu parallelogrammo, quod comprehenditur ab ipſa contigua PA, & intercepta diametri portione inter verticem, & alteram applicatam AD, quale eſt rectangulum, ſeu parallelogrammum PD.

Progreſſ. 1. Aduertendum eſt ex propoſ. 21. lib. 6. Eucl. & ex eius Coroll. figuras ſimiles eſſe in duplicata ratione laterum homologorum, ita quòd quadratum V. g CI, ſit ad quadratum CL, non vt latus BC ad latus CA; ſed proportio debet eſſe duplicata; nempe gemina vice repetita, quare debet reperiri tertia proportionalis ex 14 prop. 6. Eucl. qualem hic ex ea propoſitione reperiuimus PA; ſic enim proportio eſt repetita; nam ita ſe habet PA ad CB, vt CB ad CA; quare PA ad CA habebit eandem proportionem, quam quadratum CI ad quadratum CL, nempe geminatam laterum.

Progreſſ. 2. Reminiſcendum eſt propoſ. 1. lib. 6. Eucl. nempe ita eſſe propter eandem baſim CA rectãgulum CP ad quadratũ CL, vt altitudines PA, ad AL; & ideo, quòd quadratum CI ſit æquale rectangulo PC; ſiquidem eidem quadrato LC eandem dicunt proportionem; nempe eam ipſam, quam dicit PA ad AC, quadratum quidem CI; quia talem inuenimus PA, rectãgulum verò PC propter baſim eandem AC: Quare ex Eucl. prop. 7. lib. 5. erunt rectangulum PC, & quadratum CI æqualia, quod, & de Rhombo CI, & parallelogrammo CP intelligendum eſt ob lemma antepoſitum, quo ſuppoſito.

Progreſſ. 3. Rectangulum PC habet eandem proportionem ad rectangulum DP; quam altitudo eius AC ad altitudinem AD propter baſim

AP eandem 1. propoſ. Euclid.& è contrà.

Quare Probatur propoſ. Nam propoſ. 5. demonſtratum eſt quadratum CI eſſe ad quadratum DR; vt altitudo CA ad altitudinem DA; ſed etiam ex 3. progreſſ. quam dicit proportionem AC ad AD altitudines eandem dicunt, & rectangula PC ad PD adiacẽtia eis, ergo ita erit in proportione CI ad DR quadrata, quam PC ad PO rectangula. Ergo, vti



poterimus permutatione, & comparare quadratum maius, rectangulo maiori, ſicut minus quadratum, minori rectangulo, & Ideo ita ſe habebit quadratum IC maius ad rectangulum PC maius, vt quadratum minus DR ad rectangulum DP minus.

Sed in 2. progreſſu vidimus maius rectangulum PC, & maius quadratum CI eſſe æqualia, ergo erit etiam æquale quadratum DR minus rectangulo PD minori, quod cõprehenditur à contigua verticis PA, & diametri parabolici portione intercepta AO, & ita dicas de alijs.

COROLLARIVM.

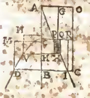
Hinc colliges. Quod cum contigua PA habeat hanc ſpecialem proprietatem, vt rectangula ab ea comprehenſa, & diametri portionẽ interceptã ſint æqualia quadratis effectis ſuper ordinatim applicatas ſpeciali nomine inſignitur, & vocatur Parameter, quòd ſit menſura omnium rectangulorum, quæ æquantur quadratis cuiuſcumque applicatæ ordinatim, quæ in parabola trahatur.

THEOR. II. PROP. VIII.

In omni ſectione Hyperbolica, vel Elliptica, ſi quadratum alicuius ordinatim applicatæ ſe habeat ad rectangulum, quod ſub diametro tranſuerſo, & intercepto comprehenditur, vt diameter tranſuerſa ad contiguam lineam verticis; Alia quadrata aliarum applicatarum erunt rectangulo, quod ſub hac contigua, & intercepta diametri portione inter applicatas, & verticem comprehenditur, æqualia, ſi tamen figuram ſimilem ſimiliterque poſitam in Hyperbola addas, in Ellipſi ſubducas.

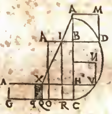
Sit Hyperbola, vel Ellipſis DVC, ſitque ordinatim applicata DB, cuius quadratum BM, ſit ad rectangulum BO, quod ſub portionibus, nempe tranſuerſa AB, & intercepta CB, vel portionibus interceptis. Si ergo quadratum BM ſit ad rectangulum BO, vt diameter tranſuerſa AC ad aliquam, quæ ſit verticis C contiguam, nempe CP; id eſt ſit duabus BC, & DB tertia proportionalis.

Dicit propoſitio, quod ſi ſit aliud, cuiuslibet applicatæ VH quadratum HN hoc erit æquale rectangulo, quod ſit ab intercepta CH inter applicatam, & verticem pro vno latere, & contigua verticis pro alio CP; ſed cum hac cautella; quòd in Hyperbola ſuper abundat figura XP ſimilis, ſim. interq; poſita, vt totum rect. AH, GX: in Ellipſi verò deficit.



Progr. 1. Rectangolum BO ad rectangulum BR dicit eadem proportionem, quam AC ad CP. Ratio eſt; quia ſunt ſuper eandem baſim IC; ex conſtructione, vnde ſunt inuicem, vt altitudines BA ad BI. Iſtę verò altitudines correſpõdent proportione, & ita eſt BA ad BI, vt CA ad CP. Ratio eſt, ex Euclid. propoſ. 4. lib. 6. in Coroll. quia ſunt in eodem triangulo parallelæ CP, & BI, Ideoq; rectangulũ BO ex BA erit ad BR ex BI, vt CA ad PC; quòd iſtæ lineæ ſint, vt BA ad BI altitudines.

Progr. 2. Prorſus idem dicendum de parallelogrammis HO; & HQ. Sunt enim ſuper eandem baſim CH ex conſtructione: ſiquidem debet comprehendi rectangulum HG à lateribus AH, & HC, & rectangulum HQ à lateribus HC, & HX. Vnde erunt inuicem, vt altitudines XH, & HA. Altitudo verò HA ad altitudinem HX dicit eam proportionẽ, quam AC ad CP cùm CP ſit ei ex parallela in eodem triangulo ACP, & ideo AC erit ad CP, vt HG rectangulum ad HQ.



Progreſſ. 3. Quadratum BM eſt æquale rectangulo BR. Ratio eſt; quia eidem proportionem eandem dicunt; quæ verò eidem proportionem eandem dicunt ex 7. lib. 5. Eucl. ſunt æqualia. Dicunt autem eandẽ rationem eidem. Nam ita ſe habet quadratum BM applicatæ ad rectangulum comprehenſum ſub BC, & BA, quam AC diameter ad CP contingentem ex preſuppoſitione. At in progreſſ. 1. probatum eſt, quod huic eidem CA ad CP dicit eandem proportionem rectangulum BO ad rectangulum BR. Quare, cùm quadratum applicatæ DB, & BR rectangulum eidem rectangulo BO eandem proportionem dicant, quam AC ad CP; neceſſe eſt DB, quadratum, & BR rectangulum eſſe æqualia.

Progreſſ. 4. Probatur Itaque ex præmiſſis principijs propoſ. Ita eſt AC diameter ad CP conti-

guam verticis, vt HA ad HX ob ſimilitudinem triangulorum ACF, & AHX, & ex eadem ratione HA ad HX eſt in proportione, vt BA ad BI. Ergo etiam parallelogramma ſuper eis conſtituta, & quæ cum eis eandem proportionem habent ex 1. & 2. progr. inter ſe proportionalia erunt, & ita erit BO ad BR, ſicut HG ad HQ; quia lineę BI, & BA ſicut, & HA, & HX ſunt eorum altitudines: Cum ergo ſit rectangulum BO ad BR, vt HG ad HQ, poterimus vti permutatione, & inferre, quòd etiam BO rectangulum ad HG rectangulum ſit, vt BR rectangulum ad HQ rectangulum.

Sed ex propoſ. 2. Hæc rectangula BO, ad HG dicunt eandem proportionem, ac quadrata applicatarum nimirum BM ad HN. Ergo etiam eadem proportionem ſequetur BR rectangulum relatum ad rectangulum HQ.

Progreſſ. 5. Sed rectangulum BR ex 3. progr. eſt æquale quadrato BM; Ergo etiam rectangulum HQ erit æquale quadrato HN. Quod oportebat oſtendere. Videa autem, quòd in Ellipſi rectangulum CX continetur ſub CP contigua, & CH diametro intercepta, deſſiciente tamen figura PX, & in Hyperbole abundante.

COROLLARIVM.

Recta itaque CP contigua vertici vocabitur Parameter, ſeu latus rectum, ſeu coeficiēs, eo quod iuxta eam menſurentur cæteræ applicatæ diametro, quòd eorum quadrata, vt HN, & BM ſint æqualia parallelogrammo ſub ipſa, & diametri portione intercepta inter applicatam, vt HQ, & BR, & verticem C; figura tamen PX, vel PI, in Ellipſi deficiente illi parallelogrammo, & abundante in Hyperbola. Et inde iſtæ figuræ nomen ſortitæ ſunt: quia .n. in parabola quadrata applicatarū æquātur rectangulo ſub Parametro, & intercepta diametri portione, vocatur Parabola, ideſt æqualis. Quia verò aliquid deficit in Ellipſi ad æqualitatem, eo nomine, quod ſignificat defectum, inſignitur: at quia abundat in Hyperbola dicitur talis, quod nomen eſt idem ac exceſſus.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam colliges illam Hyperbolam, ſeu Ellipſim eſſe ſpecie notam, cuius diametri tranſuerſi proportio ad contiguam Parametrum ſit, vt rectangulum ſub AB, & BC comprehēſum ad quadratum BM vel è contra, Siquidem AC eſt ad CP, vt AB ad BI, ideſt vt rectangulum einſdem baſis CA ad CI, ideſt vt CA ad quadratum BM applicatę, æquale ipſi CI. Vnde ex præc. & omnia alia rectangula à diametro tranſuerſa, & intercepta ſimul pro vno latere, & intercepta tantùm pro alio dicent eam proportionem, ad quadratum applicatæ, quam diameter tranſuerſa ad Parametrum; Quoniam enim quadratum BM oſtenſum eſt æquale in 3. progr. rectangulo BR, & hoc ſit ad rectangulum BO ex AB, & BC diametro intercepta; vt PC ad CA ex 4. progreſſ. *conuertendo* etiam quadratum ex DB erit ad BO ex BC, & BA; vt CP Parameter ad CA diametrum interceptam.

Sic dicas de quadrato HN, quòd eſt oſtenſum progreſſ. 5. ęquale rectangulo HQ, quod eſt ad HG rectangulum, vt HA ad HX altitudines, at CQ, ideſt MX eſt ad HA, vt CP ad CA, & ſic de alijs.

COROLLARIVM III.

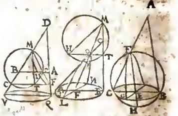
Hæc verò, quæ dicta ſunt de Ellipſi etiam de circuli circumferentia prorſus militant, vt ſi pro Ellipſi ſubſtituas circulum, eadem oſtenſione intelligere poteris.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Cuiuſque ſectionis in cono Parametrum exhibere.

Sit conus ABC, & exhibita in eo ſectio parabola; cuius diameter EF, & BE perpendicularis ad eius applicatam EG. Per tria puncta B, C, F tranſeat circulus BCF, & prolongetur diameter FE ad circumferentiam in H. Dico EH *eſſe ſectionis Parametrum*.

Progreſſ. 1. Obſeruandum eſt BOC eſſe circulum, vtpote baſis coni; ideoque ex 35 lib. 3. quadratum EG eſſe æquale rectangulo ex BE, & EC: & quòd ex 3. huius quadratum lineę EG quoque æquale ſit rectangulo ex diametro ſectionis EF, & parametro.



Progreſſ. 2, Vnde oſtenditur propoſ. Rectangulo BEC, & ideo æquali quadrato eſt EG eſt æquale rectangulum ex FE diametro, & FH. Ergo EH erit Parameter, vtpote efficiens cum FE diametro æquale rectangulum quadrato ex EG ex 8. h. Cor.

Sit pro ſecundo caſu exhibita Hyperbola in cono ACB; cuius diameter tranſuerſa MF; ducanturque AB perpendicularis ſectioni LN; & ideo, vt diameter baſis circuli dirimet NL in duo ſegmenta æqualia ex prop. 27. l. 3. Cor. Vnde FL erit applicata. Deinde lateri trianguli conici CA per A tranſeuntia ducatur à vertice M diametri tranſuerſæ parallela MH, & per O verticem ſectionis TH parallela baſi AB, perque tria puncta T, M, H tranſeat circulus, hic abſcindet VO, quam dico *eſſe Parametrum*.

Progreſſ. 3. Pprænotandum eſt FL eſſe applicatam, cuius quadratum ex 35. lib. 3. æquatur rectangulo ex AF, & FB. Rurſuſque ex propoſ. 8. h. Coroll. 2. eſſe quadratum applicatæ FL ad rectangulum diametri tranſuerſæ ex MA, & OF; vt Parameter ad tranſuerſam diametrum MO, & ideo etiam rectangulum ex AA, & AB ad rectangulum ex FM, & AO, erit, vt Parameter ad OM diametrum. Ideoque oſtendendum eſt rectangulum ex AF, & FB, & ideo FL quadratum eſſe ad rectangulum MF, & AO; vt VO, ad OM, vt ſic oſtendetur VO eſſe Parametrum.

Progr. 4. Sic verò oſtenditur. Vt BF eſt ad MF; ita TO eſt ad MO ob parallelas TO, & BA ex propoſ.

propoſ. 4. lib. 6. & AF ad FO, vt HO ad OM ob ſimilia triangula, & æquiangula MOH, & FOA: cùm ſint parallelæ OH, & FA; nec non, MH, & OA ex conſtructione; Quare rectangulum ex AF, & FB; & ideo quadratum FL ei æquale erit ad rectangulum ex MF, & FO; vt rectangulum ex TO, & OH ad rectangulum OM, & OM cum ex iiſdem proportionibus componatur earum ratio BF ad FM eadem, quæ TO ad OM, & FA ad FO eadem, quæ OH ad OM, vt hic eſt videre.

BF, vt TO & FA, vt OH
eſt ad ad ad ad
FM OM OF OM
Ergo Compoſitum, vt Compoſitum
ex BF, & FA ſ. LF TO, & OH
ad erit ad
FM, & OF OM, & OM

At rectangulum TO, & OH eſt æquale rectangulo MO, & OV. Ergo rectangulum MO, OV erit ad quadratum æqualis altitudinis OM. & ideo, vt baſis OV ad baſim OM, vt Rectang AF, & FB, ideſt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & OF. Quadere; Cùm parameter ponatur ad OM ex Cor. propoſ. 6. h. vt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & FO, & OV talis ſit rationis ad OM; erit OV Parameter.

Sit tandem data ellipſis, cuius diameter FM. & ſectio plani acti per axé FCD in ipſo cono, cuius baſis QV circulus, cuius diameter QV ſit ſectio quoq; plani DQV, cui agatur ab F extremo diametri parallela FC, & ab altero extremo diametro M parallela lateri DF, ſit MT, perq; tria puncta MCT tranſeat circulus. Dico rectam FO eſſe parametro æqualem.

Præaſſumptum. Agatur itaque oſtenſionis gratia per O parallela baſis AB; & à puncto O applicata OI, Igitur ex AO, & OB rectangulum erit æquale quadrato applicatæ OI, ex 35. lib. 3. elem.

Sic etiam ex 6. Coroll. huius quadratum OI, & ideo rectangulum ex AO, & OB erit ad rectangulum ex diametri ſegmentis OM, & FO, vt parameter ad diametrum FM,

Probatur propoſ. ob parallelas FA, & TM, nec non, & AO, & FT triangulum FAO eſt æquiangulum triangulo FMT; ideoque vt AO ad FO; ſic FT ad FM: Rurſúſque eadem rationem ob parallelas OB, & FC in triangulo FMC erit OB ad OM, vt FC ad FM, vt hic videa,

AO vt FT & OB vt FC
ad ad ad ad
FO FM OM FM
Ergo Compoſitum, vt Compoſitum.
AO & OB FT & FC
ad erit ad
FO & OM MF & MF

Quadere rectanguli AO, & OB ratio ad rectangulum FO, & OM erit compoſita ex iiſdem rationibus rectanguli ex FT, & FC ad quadratum MF; & ideo componendo rationes erit rectangulum ex AO, & OB ad rectangulum FO, & OM, vt FT, & FC rectangulum ad quadratum MF.

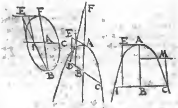
Vnde Quadratum ex OI; quod æquatur rectangulo ex AO, & OB, erit quoque ad rectangulum FO, & OM, vt rectangulum ex FT, & FC ad quadratũ FM. Sed rectangulum ex FT, & FC eſt æquale rectangulo FM, & FO, ex Coroll 1. propoſ 36 lib 3 elem. quod incidant in circulum CMO. Ergo ex OI quadratum erit ad rectangulum FO, & MO, vt ex FM, & OF rectangulum ad quadratum FM. Rectangulum verò FM, & FO eſt æqualis altitudinis quadrati FM. Ergo erit baſis FO ad diametrum tranſuerſam FM, vt quadratum OI ad FO, & OM rectangulum, & ideo FO erit æqualis Parametro.

PROBL. II. PROP. X.

Datæ cuiuſcumque ſectionis contiguam Parametrum inuenire dato diametro, & applicata.

Sit primum Coni ſectio Parabola CAI, eiuſque diameter AB, cui applicata ſit CB; factoque quadrato BM ſit rectangulum ex BA ei æquale, reperiendo applicatæ BA, & BC ex Euc. prop. 14 l. 6. tertiam proportionalem BA. Nam ex propoſ. 19. Euc l. 6. parallelogrammum ex BA, & AE conſtitutum erit æquale quadrato BM. Porrò ex propoſ. 7. dicimus quadratum CB eſſe æquale rectangulo ſub diametro intercepta, & parametro contigua. Vnde AE Parameter erit.

Si verò daretur applicata, quæ BM Rhombum faceret, quod angulus B non eſſet rectus eſſet reperiendum parallelogrammum Rhombo æquiangulum, at æquilaterum ipſi BE.



Caſus 2. At detur ſectio Hyperbola CAD, cuius diameter FAB tranſuerſa, & intercepta; applicata verò CB data. Portioni BA diametri intercepti, & CB applicatæ reperiatur tertia proportionalis BO, eritque ducta AE æquali BD, & parallela, repertum rectangulum, vel parallelogrammum OA BE: deinde ab extremo datæ diametri F ducatur FD ad D, quæ ſecabit AE in I. Dico AI *eſſe Parametrũ.*

Probatur, Quòd ex propoſ 8. rectangulum contentũ ab ipſa AI, ſit æquale quadrato applicatæ abundans tamen figura ID ſimili, ſimiliterque poſita ac eſſet rectangulum ex BF, & FD.

Caſus 3. Si poſtremò ſit Ellipſis FCB, cuius diameter FAB, & applicata AC diametro interceptæ AF, & applicatæ AC inueniatur tertia proportionalis, prout ſupradictum eſt, quæ ſit AI, & ex vertice B per I ducatur recta, & ab F vbi terminat diameter, agatur parallela applicatæ CA, quæ ſit EF. Dico *rectam* FE *eſſe parametrum* Nam continet FI rectangulum æquale quadrato ex CA, ſi tamen deficiat figura IE ſimili, ſimiliterque poſita ex propoſ. 8. ac EF, & EF rectangulum,

EX.

EXPENSIO III.

De tangentibus.

SIcuti circulus ſuas tangentes habet, ex quibus mirabiles circoli paſſiones prodeũt ita, & conicæ tangentes; nec minoris vtilitatis ſunt, maximè ad deſcriptionem ſectionum.

THEOR. I. PROP. XI.

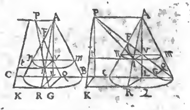
Si conus per axem plano aliquo, ſectus ſit, & alia ſectione ex tribus coni ad angulos rectos ei ſectioni, denuò ſecetur, & electo in ſectionis poſterioris circumferentia puncto à vertice coni per illud ad circulũ baſim eiuſdem coni, planum aliquod agatur.

Hoc planum conum ſecundum lineam rectam tanget.

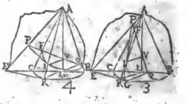
Et diametrum figurarum ſecabit, & à puncto, quo ſecat illum recta ducta ad punctum electum, hæc linea ſectionem conicam non ſecabit, ſed tantum tanget.

TRec partes habet hæc propoſitio, ſed facilis eſt probatio; pænèque à ſola explicatione propoſitionis habetur.

SIt ergo medietas coni ABC, qui ſit per axem à plano aliquo BAC ſectus; cui ſectioni, alia ſectio, ſeu Elliptica, ſeu Hyperbolica, ſeu Parabolica fiat FIG, deinde electo in circumferentia ſectionum poſteriorum puncto I, per quod, & verticem coni A planum ARP adaptetur. Dico *primo hoc planum tangere totum conum à vertice A vſq; ad baſim circularem BRC ſecundùm lineam rectam AIR.*



Probatur. Quia tangit ſecundùm altitudinem AR, quæ eſt linea recta, ſiquidem conus à rectâ efficitur. Ergo poteſt cum ſit planum totam lineam AR continuo tactu tangere, ſed conus ex definitione ſecundùm craſſitudinem eſt circulare; planum verò in puncto circulum tangit, ergo ille tactus ſecundum latitudinem non erit amplior puncto, quæ eſt linea ſecundùm latitudinem accepta. Dico ſecundò. Quod ſi diameter ſectionũ, QFP producatur in plano ABC, in quo eſt, quòd ab hoc poſteriori plano PAR ſecabitur. Nam, vel planum, vt in primâ, vt ſecundâ figurâ æquidiſtat; ita vt LR faciat cum RK & LC lineis angulos rectos, & totum planum PARK cum plano LAK. Quare ex 16 Tract. 21. ſectio AP erit ad AL ad rectos ãgulos. Fiet autẽ hęc ſectio, quià cum propter angulũ acutum R planum AP ſecatur verſùs verticem coni A, & inclinet ad planum BAC, ſecabit in vertice A ſecundùm ſectionem AP planum per verticem ductum BAC.



Quod, ſi non æquidiſtet, vt in 3. & 4. fig. ſed faciat angulum acutum ERL, tunc clarum eſt, quod verſùs E tandem occurret plano per verticem coni ducto EAA, & faciet in eo ſectionem AE. Vnde clarum euadit, quod ſi verſùs eam partem, verſùs, quam inclinant inuicem plana, vt F producatur diameter FQ neceſſario impinget in hanc ſectionem AE in P.

Dico tertio, quod ſi ab hoc puncto P ducatur in plano tangente RPA ad punctum electum I recta PI; quòd continget ſectionem, & non ſecabit. Quod patet. Nam eſt in plano, quod ſectionem in I tangit. Ergo, & linea per punctum I ducta; etiam ſi prolungaretur, non ſecaret, ſed cum ipſo plano contingeret.

COROLLARIVM.

ELicies hinc in figura 1, & 2, cum plana ſecans ABC, & tangens AK parallelè ſe habeant applicatam VI eſſe ſemidiametrum, cum enim m n ſit diameter, patet ex 2. probatiõne, quòd ſi contingens IT facit angulum rectum, cum VI, & VI facit angulum rectum cum m n, quod neceſſario V eſt centrum circuli m I n ex 21. propoſ. 3. lib. Elem.

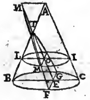
THEOR. II. PROPOS. XI.

Si parabolam recta contingat linea productæ diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta ſit ordinatim applicata, erunt interceptæ diametri portiones, vtrinque partes æquales; nempe inter occurrentem, & verticem, & inter applicatam, & verticem,

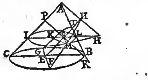
SIt parabola GTF in cono ACB, cuius diameter ETS cuius vertex T; recta verò contingat ſectionem in M, vbi, & applicata OM terminat, & occurrat diametro productę in N, & pro primo Caſu AN ſit parallela diametro IL. Dico *primo, quod portio diametri inter verticem parabolicum OT, & portio TN diametri à vertice vſque ad punctum N tangentis ſint æquales.*

Probatur faciliter in iſto caſu. Nam OI, & AN ſunt

ſun parallelæ, & æquales, quod ſint inter parallelas CA crus, & EN diametrum; ſed cum ex Coroll. propoſ.11.h. O ſit centrũ circuli, to erit æqualis lineæ OL; Ergo etiam AN erit æqualis OL. Quare, & OT erit æqualis TN: Cùm enim anguli inter parallelas in triangulis OTL, & ATN ſint æquales, & baſes æquales omnia latera ſingula ſingulis erunt æqualia, ex 27. propoſ. lib 1. elem.



At ſi linea AN non ſit æquidiſtans; quòd planũ, ſuper quod contingens deducta eſt non ſit æquidiſtans, vt ex prop.11.huius, & in altera fig. patet, tunc in circulo IML ea propoſ 21 lib.3. elem. contingens MH erit perpendicularis ad diametrum KM, & ad IL applicata OM, & MK ducta à contactu M ad centrum a. Quare ex propoſ.23. progr.3. Tract 15. erit HT ad OI, vt HL ad LO: ducta igitur parallela ad AH lineam ſectionis planorum tangentis, & ſecantis per punctum O, quæ ſit PR. oſtendendum eſt, quod PO, & OR ſunt æquales, & ideo etiam OT, & TN. Sic verò oſtenditur. Crus HI eſt ad OT, vt AH ad OP in triangulo AHI, ex Coroll. prop.4.l.6. Eucl ob parallelas AH, & RP. Sed, quę eſt proportio HT ad IO, eadem eſt ex propoſ. 23. Tract.15. HL ad LO.



Ergo in duobus triangulis ad verticem ęquiangulis ALH, & OLR ob parallelas baſium, erit etiam eadem proportio AH baſis ad OR baſim ex 4. lib.6. Elem. vt eſt HL ad LO, & ideo, vt HI ad IO, & HA ad OP. Quare cum eiſdem PO, & OR crus AH eandem dicant proportionem, quam HL ad LO, erunt æquales ex propoſ.7. lib.5.

Et quia ON eſt parallela lateri PA in triangulo PRA, erunt quoque æquales AT, & TR, ſicut ſunt RO, & OP; Quod ſi tales ſunt, in triangulis æquiangulis ATN, & OTR ob baſes parallelas ea prop. 30. & 17. lib.1.elem. OR, & AN, erunt quoque ęqualia crura OT, & TN ſicut ſunt RT, & TA: quod eſt propoſitum. Nam ſic TO eſt pars diametri interior, ęqualis exteriori TN.

COROLLARIVM.

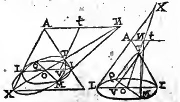
Colligę itaque, quod cùm ſit ęqualis TN ad NO quadratum ex OM, quod propoſ.7. expenſ. 2. Probatũ eſt æquale rectangulo ab OT portione diametri intercepta inter verticẽ, & applicatã, & parametro comprehenſo erit, etiam æquale rectangulo comprehenſo ab eodem parametro, & æquali TN inter verticem, & contingentem.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si in Hyperbola, vel Ellipſi contingens ducta ſit, & à contactu ordinatim applicata. Diametri portio inter terminum tranſuerſi diametri, & applicatam erit ad portionem eiuſdem à vertice ſectionis ad applicatam, vt portio à termino tranſuerſi diametri vſque ad contingentem ad portionem, quæ eſt inter contingentem, & verticem ſectionis.

DVos caſus hæc propoſitio poſſidet, primus eſt, ſi planum contingens ſit parallelum plano ſecanti per verticem, vt in prop.12. eſt dictum, alter ſi non ſit.

Sit ergo pro primo caſu Hyperbola, vel Ellipſis QTM diameter tranſuerſa TX, quæ tranſeat per centrum O, vt euenit cum plana tangens, & ſecans per axem ſunt parallela, vt dictum eſt Coroll.1. propoſ.11. & AN æquidiſtans diametro coni LOI, à cuius puncto N originem ducit contingens MN, quæ tangat in M, à quo contactu applicata enaſcatur MO ad angulos rectos ipſi OI. Dico, *quod portio diametri tranſuerſi* XO *inter terminum eius* X, & applicatam OM eſt in proportione ad portionem OT inter applicatum OM, & verticem ſectionis T, quemadmodum XN inter terminum X, & punctum N, à quo oritur contingens, ad portionem NM. Ducatur cruri XL parallela TV à vertice T, & prolungetur in t.



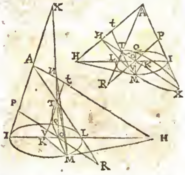
Prob. In triangulo Hyperbolæ LXO, & OTV, ſicut eſt XO ad TO ita eſt ob parallelam VT Radius LO, vel OI ad ſuam portionem VO ex Coroll. prop.4. l 6. Eucl. Sed vt eſt OI ad VO ita eſt AN ad Nt ob baſes parallelas in triangulis ad verticem AtP, & VTI, & æquiangulis ex propoſ.4. lib.6. Eucl.

Eademque ratione prorſus XN ad NT, vt AN ad Nt in triangulis ad verticem ANX, & TNt, quorum parallelæ ſunt baſes t T, & AX. Ergo ex prop.16. lib.5. Elem. vt eſt NX ad NT, ita eſt XO, ad TO.

In Ellipſi verò ferè idem argumentum. Nam in Ellipſi, quòd ſint XL, & VT parallelæ in triangulis ad verticem OXL, & TOV ita proportionabitur XO ad OT, vt LO ad OV, vel æqualis OI. Sed ob triangula ad verticẽ OTI, ATN inter baſes parallelas AN, & OI; ita eſt OI ad OV, vt AN ad tN; ſed in triangulo XAN ob parallelas XA, & Tt, vt eſt AN ad tN, ita eſt XN ad TN: Ergo ita etiam erit XO ad OT ex prop.16. lib.5. argumentando, vt eſt XN ad TN, quòd ſit eadem, ac proportio AN ad tN, & hæc eadem, ac OI ad VO, & hæc eadem, vt XO ad OT.

gulia

Sed iam ſit ſecundus caſus, in quo planum contingens non ſit parallelum plano ſecanti, & ideo, quòd AX non ſit parallela TL diametro coni. Tũc animaduertendum eſt ex progr 2 prop. 23. tract. 15. Quòd HI ſe habet ad OI, vt HL ad LO; ducaturque per O ęquidiſtans PR ad AH, & ęquidiſtans TV per T lateri IX trianguli per verticem IAL, In triangulo itaque POX Hyperbole, ita eſt ob parallelas VT, & PX portio XO ad TO. vt OP ad OV. Supponatur itaque æqualis PO ad OR, quod infra oſtendetur, ita itaque erit OP, vel RO ad OV, vt AN ad NT ob triangula inter parallelas oppoſita ad verticem ATT, & VTR.: Sed ob rationem triangulorum ad verticem inter parallelas ANX, & TNT erit quoq; vt AN proportione ad NT, ſic correſpondebit XN ad NT, ergo XN ad NT, ita erit, vt XO ad OT ob identitatem rationis, cum duabus AN, ad NT, & harum cum OR, vel OP ad OV, & harum cum XO ad OT.



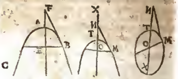
In Ellipſi verò XO eſt ad TO, vt OP ad OV ob triangula ad verticem TVO, & POX inter parallelas TV, & PX, & ob eandem rationem æqualis vt oſtendam RO eidem OP erit ad VO, vt AN ad NT, in triangulo autem NAX ob parallelas TT, & AX, ita eſt XN ad NT, vt AN ad NT: Vnde ex 16. lib. 5. Elem. Ita quoque X O ad O T, vt X N ad T N. Remanet ſolum probandum, quòd O R, & O P ſint æquales. Probatur autem prorſus eadem ratione in Theor. anteced. in 2. Caſo. Nam ex prop. 4. lib. 6. proportio PO ad AH eſt ea, quæ IO ad IH: ſed hęc eſt eadem ex propoſ. 23. tract. 15. *conuertendo*, ac LO ad HL, & hęc, quę OR ad AH ob triangula ęquiangula ORL, & ALH, ex 21. lib. 6. Propterea que AH eſt illa, cui PO, & RO eandem dicunt proportionem. Ergo ſunt ęquales ex 7. l. 5. elem.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Lineas tangentes in ſectionibus conicis ducere.

SIt data parabola BAC, & in ea punctum B, & oporteat ducere contingentem illius puncti Ducatur diameter AE ex 1. huius, & ei à puncto B ducatur applicata EB: ęqualis autem fiat AE ipſi AF productæ diametro, & à puncto B ad F ducatur recta FB, hęc enim erit contingens.

Probatur; quia ex pr. 2 a.b. tangens linea Parabolę interſecat diametrum EF productam in parte F à vertice diſtante interuallo AF ęquali interuallo AE applicatę, & vertici interpoſito.



Sit deinde data Hyperbola, ſeu Ellipſis AIT, & eius applicata OM, & diameter trãſuerſa XT prolũgata in Ellipſi quantùm oportet, ſi fiat ex prop 9. tract. 15. de lineis ſecandis, vt XT tota ad ſegmentum OT, ita XN tota cum addita TN ad additam TN in Ellipſi erit punctum N, à quo ducta NM tanget Ellipſim.

At in Hyperbola fiat ex propoſ. 23. tract. 15. de lineis ſecand, vt ſegmentum OX ad ſegmentum OT ita ſegmentum aliquod NX in TX parte ad compartem TN, & erit punctum N, à quo ad M ducta MN tanget Hyperbolam.

Probatur ex pręced. Quia iam oſtenſum eſt, quod in Ellipſi TN à vertice, & tangentem intercepta, ſit quarta proportionalis trium XO, & OT ſegmentorum, & totius XN.

At in Hyperbola. Quod TN ſit quarta proportionalis trium totius diametri tranſuerſę ſimul, & interceptę OX interceptę OT, & tranſuerſę ſegmenti NX.

EXPENSIO IV.

De interceptis diametri portionibus inter contingentem, & alia puncta in ipſo impreſſa.

QVę fiunt puncta in diametro ea efficiuntur ab eius mediate nimirum centro, à vertice ſectionis, ab applicata, ab eius extremo, & à contingente, quę omnia puncta diuerſas partes conſtituunt in diametro, quę potentia, ſeu longitudine inuicem comparantur, & cum contingentibus analogiam habent.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, ſi ad ipſam recta ducatur æquidiſtans ordinatim applicatæ, quadratum eius erit æquale rectanguli quartæ parti contento à diametri portione producta ad tangentem, & parametro contigua.

SIt ſectio parabolica BAD, quam contingat BF occurrens diametro in F, ad quam à vertice A ducatur linea EA ęquidiſtans applicatę BC. Dico *quod quadratum ex* E A *erit æquale quartæ parti rectanguli ex* AH *parametro, &* AF *diametro producta*

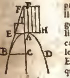
vſque

vſque ad contingentem comprehenſi.

Progr. I. Obſeruandum eſt quadratum ex ordinatim applicatis, vt BC ex dictis propoſ. 7. eſſe æquale rectangulo, quod fieret ex AH Parametro, & diametro intercepta AC, & quod diximus ſupra prop. 12. Rectam AF propter contingentem BV eſſe æqualem rectæ AC; quare, & rectangulum ex AV, & AH parametro, rectangulo, quod fieret ex AC æquali, & parametro AH eudem eſſet æquale, vnde, & æquale quadrato ex BC, quo ſuppoſito.

Progreſſ. 2. Probatur. Aſſumptum quadratum SAI eſt quarta pars quadrati ex BC. Ergo, & rectangulo FH ei æqualis ex progr. I. nimirum rectangulo AF æquabitur.

Prob Antecedens In triangulo BFC crus FC eſt duplum ſuæ portionis FA ex progr. I. Propterea, & BC linea eſt dupla lineæ EA. Ergo cum figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ ſint in duplicata ratione laterum homologorum ex prop. 20. lib 6. Elem: quadratum BC erit quadruplum quadrati EA; nam proportio ſic gemina vice repetitur, ſic eſt 1. ad 2. ſicut 2. ad 4. & ideo ſi eſt latus 1. ad 2. quadrata debebunt eſſe, vt 1. ad 4. Quare quadratum EI quarta pars quadrati ex BC erit etiam quarta pars rectanguli HF nimirum æquale rectangulo AP.



THEOR. II. PROPOS. XVII.

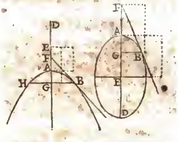
Si Hyperbolem, vel Ellepſim recta contingat linea, cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinatim ſit applicata, erit quadrato dimidiæ tranſuerſæ diametri æquale rectangulum ſub intercepta ab ordinatim ducta, & centro diametri portione, & ſub alia portione inter centrum, & contingentem comprehenſum.

Sit primum Hyperbola EAH, cuius vertex A tranſuerſa diameter AD, & centrum E, quod habetur diuiſo AD bifariam. Sectionem verò contingat in S recta BF, cum diametro producta in V conueniens, & ad diametrum ordinatim applicata EG. Dico *quadrato* E *æquale eſſe rectangulum factum ex* EG, *&* ex EF.

Iam ex propoſ. 11. huius habemus eſſe eam proportionem GD ad GA; quæ eſt FD ad FA. Ergo componendo ſimul DG, & GA erit ad GA, vt DF, & FA ſimul ad FA, diuiſis autem lineis DG, & GA, vt vna linea per medium in E erit medietas GE nempe ipſa medietas lineæ DA, quæ eſt EA, cum GA, ſiquidem ED cum ipſa AG denuo aſſumpta complent alteram medietatem.

Diuiſis quoque lineis, DF, & FA medietas eſt ipſa EA: Quare cum ponatur totum GD cum AG ad GA, vt totum DA ad FA erit etiam ex 18. lib. 5. elem. medietas EG ad GA, vt medietas EA ad FA, & *diuidendo* erit quoque medietas EG ad reſiduum EA, ſublata conſequenti GA, vt EA ad FE ſubducta conſequente FA. Qua de rè AE eſt media proportionalis. Vnde ſi iuxta prop. 17. Elem. fiat ex hac AE quadratum: ex duabus verò extremis GE, & FE rectangulum, hæc duo erunt æqualia.

Probatur quoque de Ellipſi ferè eodem modo. Namcùm dictum ſit prop. 11. quod proportio GD ad GA ſit qualis eſt proportio FD ad FA: Erit quoque



componendo ſimul antecedens, & conſequens DG, & GA ad ſolam conſequentem GA, vt antecedens, & conſequens FD, & FA ad ſolam conſequentem FA, & ſi dimidiemus has compoſitas antecedentes, erit pariter proportio AE dimidiatæ ad AG eandem conſequentem, vt EF dimidiata lineæ FD cum AF, ad FA eandem conſequentem. Quarè per conuerſionem rationis ſumendo exceſſus GE, & AE, quibus antecedentes EA, & FE ſuperant conſequentes ſuas GA, FA, reſpondebit proportione exceſſus GE antecedentis EA ad ipſam antecedentem EA, vt exceſſus AE antecedentis EF ad antecedentem EF. Quare ex Elem. prop. 17. lib. 6. ex AE poterit componi quadratum, tamquam ex media proportionali, quòd erit æquale rectangulo ex duabus extremis conſtituto GE, & EF.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Poſito diametro tranſuerſa, vt ſuperiori propoſ. contingenti, centro, & applicata: Rectangulum ex portione à termino tranſuerſæ diametri vſque ad applicatam, & portione ab applicata vſque ad verticem ſectionis comprehenſum eſt æquale rectangulo comprehenſo ex eiuſdem diametri partibus interceptis inter centrum, & applicatam, & inter applicatam, & contingentem.

Sit eadem figura; quæ ſuperiùs. Dico *rectangulum ex* DG, *&* GA *eſſe æquale rectangulo ex* EG, *&* FG *lineis comprehenſum.*

Probatur. Nam in Hyperbola ex anteced. prop. contextu medietas EG eſt ad AG, vt AE ad FA. Quare *Permutando* erit fundamentum EG ad fundamentum AE, vt terminus AG ad terminum FA. Quapropter cõponendo EG erit ad AE cũ EG, vt AG ad FA cum AG: Linea verò AE cum GE eſt diameter GD, & FA cum AG eſt FG. Vnde ſi fiat rectangulum ex extremis EG, & FG hoc erit æquale rectangulo facto ex medijs DG, & GA. Ex prop. 18. lib. 6. Elem.

Idem dicas de Ellipſi. Nam AE dimidia eſt ad AG, vt EF ad FA, ergo diuidendo GE compars erit ad GA compartem, vt AE pars ad AV compartem, & *permutando* antecedens GE ad antecedentem AE, vt ſequens GA ad ſequentem AF. Quare componendo GE erit ad AE, & EG, ideſt GD, vt GA eſt ad GA, & AF, ideſt GF. Quara rectangulum ex extremis GF, & GE æquale erit rectangulo ex medijs GD, & GA.

COROLLARIVM.

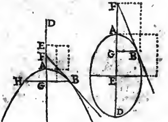
CVm rectangulum ex GD, & GA ſit illud idem propoſ.8. contextu, & Coroll.2. quod demonſtratum fuit eſſe ad quadratum applicatæ, vt tranſuerſa diameter ad Parametrum. Hinc eſt, quod etiam rectangulum GE, & GF in vtraque ſectione ęquale rectangulo ex interceptis diametri portionibus GD, & GA erit ad quadratū applicatæ, vt tranſuerſa diameter ad parametrum.

THEOR. IV. PROPOS. XVIIII.

Iiſdem poſitis, erit rectangulum comprehenſum à portione inter applicatam, & contingentem, & inter contingentem, & centrum menſurata æquale rectangulo facto ex portione diametri inter contingentem, & terminum, & inter verticem ſectionis, & contingentem intercepta.

POſitis illis ipſis, quæ priùs. Dico *rectangulum* GF, *&* FE *eſſe æquale rectangulo ex portionibus* DF, *&* FA *confecto.*

Probatur ex propoſ.17. (cum argumentati fuimus diuidendo) habemus; ita eſſe in proportione GE ad EA, vt AE ad EF. Quare ſi componamus eas erit GE ſimul cum AE, vel æquali ED, vt fiat tota GD ad EA, vel æquali ED tantùm, vt AE, vel æqualis ED ſimul cum EF, vt fiat tota DF ad EF tantum.



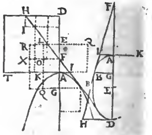
Quare vtendo *permutatione* erit antecedens DG compoſita, vt priùs ad antecedentem DF compoſitam. Veluti priùs conſequens ſimplex AE ad conſequentem ſimplicem EF.

Accipiamus itaque exceſſū FG ſuper DF ſequētē antecedētia DG, & exceſſum FA ſuper ſequentē EF antecedentia AE, vel è cōtrà. Et *diuidēdo* erit compars FG ad compartem DF, vt compars FA ad compartem EF. Vnde ſi fiat rectangulum ex medijs DF, & FA hoc erit æquale rectangulo ex extremis FE, & FG in Hyperbola, ſed in Ellipſi idem ſequetur: ſed *conuertendo*.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Si Ellipſim, vel Hyperbolam recta contingat, rectangulum factum à linea, quæ à vertice ſectionis diſcedit, & alia, quæ à vertice diametri diſcedit, & ambæ in contingentem terminant eſt æquale quartæ parti rectanguli diametro tranſuerſa, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipſis AB, cuius vertex A diameter tranſuerſa DA parameter AK tangens EF, diſcedatque à vertice ſectionis A linea, & terminet in contingentem, quæ ſit AI, aliaque DH ambæ rectangulę diametro diſcedāt à termino diametri D, & in contingentē productam terminēt in H, & I. Dico, quod rectangulum iſtis DH, & AI duabus conſtitutum eſt quarta pars rectanguli ſub tranſuerſa diametro DA, & parametro conſtituti.



Probatio ob multas comparationes eſt parùm laborioſa; ideo eam clariùs, quàm fieri poterit trademus.

Progr. 1. Primo itaque ex præced. propoſ. rectangulū ex DF, & FA eſt rectangulo GO ex GF, & FE æquale. Quare ſi ex GF fiat quadratum OX, cum ſit ſuper eandem baſim FG, ac rectangulum ex GF, & FE erit ipſum rectangulum DF, & FA ad hoc quadratum OX, vt ad ipſum hoc quadratum GX rectangulum OG ex GF, & FE, quæ eſt eadem, ac altitudinum FE ad FO. Ratio eſt, quia cum DF, & FA rectangulum, & GF, & FE rectangulum ſint ęqualis habebunt ex 7. lib.5. Eucl. eidem quadrato GX eandem rationem, quæ eſt altitudinum FE ad GF ob eandem baſim GF.

Progr. 2. Quo poſito obſeruandum eſt, quòd hæc proportio ad quadratum GX rectanguli DF, & FA; componitur ex proportione lateris FD rectanguli ad GF lateris quadrati, quę eſt eadem DH ad GB ob triangula BFG, & DFH ad verticem inter parallelas baſes BG, & DH ex propoſ.15. lib.6 Eucl.

Componitur quoque ex proportione AF lateris rectanguli ad GF lateris quadrati, quę eſt eadem, ac AI ad GA ob parallelas AG, & IA in triangulo BGF ex Coroll. prop.4. l.6. Eucl.

Ergo

Ergo ſi componantur, vt hic vides:

FD	vt	DH	&	AF	vt	AI
ad		ad		ad		ad
GF		GB		GF		GB

Ergo compoſitum, vt compoſitum.

DF	&	AF	DH	&	AI	ideſt HI
	ad			ad		
GF	&	GF	GB	&	GB	

Vnde DF, & FA rectangulum erit ad quadratum GX, vt ex DH, & AI, ideſt DI rectangulum ad quadratum GB.

Progr. 3. At ex primo progr. rectangulum ex DF, & FA erat ad quadratum GX, vt EF ad FG ob æqualitatem, quam dicebat cum rectangulo OG illis lineis conſtituto. Quare ſi ſuper EG fiant duo rectangula, vnum ex EG, & EF, vt eſt rectangulum EQ erit ad alterum ex GE, & GF rectangulum GR cum ſint ſuper eandem baſim GE, vt altitudines EF ad GF ſupradictę lineę; Rectangulum verò GE, & EF eſt ęquale quadrato AEZ ex AB ex 17. huius. Quare quadratum ABZ æquale ipſi EQ erit ad rectangulum GR, vt EF ad FG, quę eſt eadem, ac ex progr. 1 rectanguli GO ex GF, & FB ad quadratum GX, & ex prog. 2. rectãguli ID ex HD, AI ad quadratum applicatę GB; quare ex 16. lib. 5. quadratum AEZ erit ad rectangulum GR, vt rectangulum ID ad quadratum applicatę GB.

Progr. 5. Itaque *permutando* erit antecedens quadratum AEZ ad antecedens rectangulum ID, vt ſequens GR rectangulum ad ſequens applicatæ GB quadratum.

Progr. 6. Reminiſcendam verò eſt ex propoſ. 18. Coroll. quod rectangulum GR ex GE, & GF eſt ad quadratum BO, vt tranſuerſa diameter AD ad contiguam parametrum AK: Quare talis etiam proportio ASZ quadrati ad DI rectangulum cum 5. progr. ſit eadem, ac GR rectanguli ad quadratum BO.

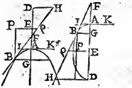
Progr. 7. Si ergo ſuper DA conſtituamus quadratum DT, & ex DA, & AX conſtituamus rectangulum; Quadratum conſtitutum DAT, cùm ſit ſuper eandem baſim erit, vt altitudo DA, vel AT ad AK: Vnde dicet eandem proportionem ad ſuum rectangulum, quam DA ad AK, quæ ex 6. progreſſ. eſt eadem quadrati AEZ ad rectangulum DHI. Sed quadratum AEZ eſt quarta pars quadrati DAT, cùm ſit ſuper dimidiam AD, quę eſt diſtãtia centri à vertice ex 6. lib. 2. Ergo, & etiam rectangulum DHI eſt quarta pars rectanguli DAK parametro, diametroq; tranſuerſa comprehenſi.

THEOR. VI. PROPOS. XXI.

Si Hyperbolem, vel Ellipſim recta contingat linea, occurratque lineæ æquidiſtanti alicui ex applicatis, & à contactu ad hanc lineam æquidiſtantem recta parallela diametro ducatur, quæ eam terminet, hæc linea inquam æquidiſtans à diametro erit ſecata in duas partes, ex quibus compoſitum rectangulum erit æquale quartæ parti rectanguli ſub tranſuerſa diametro, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipſis, cuius vertex A tranſuerſa diameter AD, & centrum B, quam contingat linea BF productam in H, à centro verò B ducatur parallela alicui applicatæ BO in vtraſque partes, vt PQ vſque ad Q tangentem, quam parallela BF diametro AD educta à cõtactu B terminet ad aliam partem, dico PQ lineam eductam à centro in tales partes ſecari à diametro AD, vt *illa componant rectangulum quartæ parti rectanguli ſub tranſuerſa diametro* AD, *& parametro* AK *contenti.*

Probatur. Nam ex pr. 19. h. rectangulum ſub DF, & FA contentum eſt æquale rectangulo ſub EF, & FG cõtento: Quare erunt latera proportionalia reciprocè ex 14. l. 6 & ita DF ad FG, vt EF ad FA. Sed vt DF ad FG, ita aſſimilatur in proportione DH ad BG parallelæ in triangulis æquiangulis, & vt EF ad AF, ita EQ parallelę ad AI ob triangula æquiangula EFG & DFH, ideoq; ex 16. l. 5. erit DH ad BG, ſic EQ ad IA, ergo ſi cõponãtur rectãgula vnũ ex duobus DH, & AI, aliud ex BG, & BQ ſumẽdo eas lineas reciproce ſcilicet conſequentem cum antecedenti pro vno; ſicut conſequentẽ, & antecedentem pro alio iuata propoſ. 2 a. Eucl. 6. erit rectangulum DH, & AI æquale rectangulo PE, ſeu ęquali PE, & EQ. Sed ex præced. rectangulum DH, & AI eſt æquale quartę parti rectanguli DA intercepta, & parametro AK. Ergo, & rectangulum PE, & EQ.



COROLLARIVM.

PRæallegatę propoſitiones de Ellipſi, etiam de Circulo intelliguntur, & ſufficit loco Ellipſis circulum ſubſtituere, nam eædem rationes militabunt.

EXPENSIO V.

De Vmbelicis.

VMbelicus eſt quoddam punctum intra ſectionem, quod inſignes proprietates obtinet, maximè ad ipſarum ſectionum deſcriptionem. Vocatur autem Focus, & Polus, qui in Hyperbola, & in Ellipſi gemini ſunt, in Parabola verò vnicus.

PROBL. I. PROPOS. XXII.

Parabolæ Vmbelicum aſſignare.

INueniatur Parameter, & illius quarta pars aſſumatur, & menſuretur in ipſo diametro à vertice ſectionis, & illud punctum erit Focus, ſeu Vmbelicus.

Oſtenditur ipſa definitione. Nam definitur, quod ſit quarta pars parametri in ipſo axe à vertice ſectionis aſſumpta.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Hyperbolarum, & Ellipſium Vmbelicos inuenire, data Axe tranſuerſa, & Parametro.

QVoniam Vmbelicus Hyperbolæ non eſt tantùm quarta pars Parametri à vertice menſurata. Sed latus rectãguli illius quartę parti ęqualis, cuius alterum latus ſit trãſuerſa diameter addito ei latere ipſo, quo clauditur V. g. rectangulo ea diametro trãſuerſa MA addito ei MX ęquali XP; In Ellipſi verò dẽpto V. g rectãgulũ ex CO dẽpto CL.

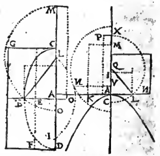
Reperto itaq; Parametro ex 10. propoſ. & 18. AX: ſicut, & diametro tranſuerſa AM; rectangulo ab illis comprehenſo MX inueniatur quadratum ęquale NA ex 16. lib. 2. Eucl. vt vides factum mediante media proportionali NV ex 16 lib. 6, cuius latus diuidatur bifariam in L, coniungaturque LQ, & centro Q medietate tranſuerſę diametri, interuallo QL deſcribatur circulus CLX: Dico puncta X, & C Vmbelicos eſſe Hyperbolę.

Id verò oſtendetur, ſi demonſtretur habere conditiones à definitione requiſitas, ſ. quod MX, vel ęqualis CA ſit latus rectanguli talis; cuius vnum latus ſit, nedum tranſuerſa diameter AM.

Sed inſuper diſtantia XM, vel CA, & aliud ipſa diſtantia MX, vel CA, quod tamen ſit æquale quartæ parti figuræ, & rectanguli contenti à diametro tranſuerſâ, & parametro.

Probatur verò. Nam quadratum NA ex VN eſt ex conſtructione æquale rectangulo MX. Sed huius quadrati quarta pars ex 6. lib. 2. Elem. Cor. cum ſit ex medietate laterum eſt quadratum LI. Ergo erit quarta pars rectanguli XM, ſed huic quadrato paruo LI eſt ęquale rectangulum AP, ex propoſ. 16. Eucl. lib. 2. Ergo rectangulum AP eſt ęquale quartę parti rectanguli XM. Rurſus comprehenditur diametro tranſuerſa MA, & XM, & aliud latus eſt ęquale MX, vt patet ex eadem 16. propoſ. lib. 2. Eucl. Ergo habet conditiones requiſitas. Vnde diſtantiæ ab extremis A, & M diametri tranſuerſę, nempe puncta X, & C erunt Vmbelici.

Si verò ſit Ellipſis, cuius Vmbelici ſint inueniendi.



Primo pręſupponendum eſt quadratum ex AB applicata ad centrum eſſe æquale quartæ parti rectanguli ſub diametro tranſuerſa CD, & parametro AE; nimirum CF. Nam ex propoſ 8. Expenſ. 2. Coroll. 2. Ita eſt diameter CD ad Parametrum AE, vt eſt ad quadratũ applicatæ AB ad rectangulũ cõprehenſum ſub portionibus diametri CA, & AD, quæ hic ſunt æquales, quãobrẽ hoc rectangulũ erit quadratũ AG. Sed ita ſe habet quadratũ magnũ ex toto diametro CD, ad rectãgulũ ex eodẽ CD & AE Parametro, vt ipſe diameter CD ad parametrum, quod ſit ſuper eandem baſim CD. Vnde erit, vt altitudo CD ad AE. Ergo ex 16. lib. 5. elem. quadratum AG ad quadratum ex applicata AB dicit eam proportionem, quam dicit quadratum magnum ex diametro CD ad rectangulum CF; cum ſit eadem ac proportio diametri ad parametrum. Sed quadratum AC eſt quarta pars, quadrati magni ex diametro DC ex 6. lib. 2. Ergo, & quadratum ex applicata AB erit quarta pars rectanguli CF.

Cum itaque ſit quadratũ ex AB quarta pars rectãguli CF ex diametro DC, & parametro AE, reperiatur huic ęquale rectangulum, comprehenſum à diametro DC, deficiente tamen longitudine alterius lateris, vel ex 37. lib. 6. vel ex 36. lib. 10. & aliud latus erit vmbelicus.

Hęc enim eſt conditio, quæ expoſcitur ad Vmbelicos Ellipſis ex definitione, vel ſic: Accipiatur diſtantia AC, & facto centro in B deſcribatur portio circuli; quæ ſecabit diametrum in L, & I. Dico L I *puncta eſſe Vmbelicos*, quod, vt probetur.

Facto centro in L interuallo CA deſcribatur circulus, qui ſecet axem, in M, & O, & latere AM, & alio AO fiat rectangulum OM; iam manifeſtum eſt ex 16. lib. 2. Eucl. hoc rectangulum eſſe æquale quadrato ex AB. Ideo quartæ parti rectanguli CF, ex prædictis, ſed hoc rectangulum continetur à diametro OM æqualis CO minus latere OA. Ergo eſt rectangulum, quod requiritur, & AO diſtantia requiſita ad vmbelicum. Sed LO eſt æqualis LB, et LB eſt æqualis AC, ergo etiam ablata communi LA diſtantia OA eſt æqualis diſtantiæ LC. Vnde L erit Vmbelicus, & I alius Vmbelicus.

EX-

EXPENSIO VI.

De inclinatis rectis à contactibus ad focos.

PVncta contactuum, & foci lineis connectuntur, quæ inuicem quibuſdam analogijs inſignibus referuntur, & ad tranſuerſum diametrum; de quibus quidem ſpeculatio ardua; ſed, & ſingulari vtilitate fecunda.

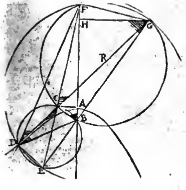
THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipſim recta contingat linea, quæ à tactu ad vtrumque ſectionis Vmbelicum rectæ ducentur lineæ æquales hinc, inde cum contingente angulos efficient.

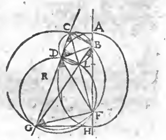
SIt Hyperbola, vel Ellipſis AD; in qua Diameter tranſuerſa AH; repertique Vmbelici B, & F, tangat verò ſectionem recta DG, à cuius tactu ad vtrumque vmbelicum ducantur rectæ BD, & DF. Dico *angulos* BDC, *&* GDF *eſſe æquales*.

Probatur verò per tres præcipuos progreſſus. Primus intendit oſtendere circulum GF BC ſuper diametrum CG tranſire per puncta B, & F; quod ſic demonſtratur.

Rectangulum factum ex AC, & GH ex prop. 19. eſt æquale quartæ parti rectanguli comprehenſi à Parametro, & Diametro tranſuerſa, cui etiam quartæ parti fecimus æquale rectangulum ex BH, & AA comprehēſum ex prop. 22. h. Quare cum ſint æqualia habebunt latera proportionalia reciprocè ex 10. lib. 6. Eucl. Vnde HG erit ad HB, vt AA ad AC: Iunctis ergo A, & C linea BC, & G, & B linea GB, erunt triangula BAC, & GHB ſimilia; ſiquidem ſecundùm propoſ. 5. lib. 6. Eucl. habent latera proportionalia circa æquales angulos rectos H, & A, & ideo angulus niger G angulo B nigro æqualis; vnde, & reliquus GBH reliquo BCA; Cum ergo angulus B niger, & angulus ACB ſint æquales vni recto ex 17. lib. 1. Eucl. fit, vt angulo B nigro additus GBH æqualis angulo ACB in Hyperbola fiat totus GBC rectus; at in Ellipſi ablatis CAA, & GAH nigris remanet CBG angulus rectus. Deinde idem probabitur de angulo GFC, quòd ſit rectus. Nam iunctis recta G, & F, ſicut F, & C triangulum GHF erit ſimilis triangolo FAC. Nam *permutando* ſicut ſe habet GH ad HF, æquali AA (cum F ſit alter vmbelicus) ita FA æqualis HB ad AC, cum ergo latera ſint proportionalia circa angulos rectos H, & A triangula erunt ſimilia, & reliquos angulos reliquis æquales obtinebunt. Vnde angulus HGF angulo AFC erit æqualis, qui additus angulo GFH conficiet totum angulum GFC rectum ob dictam rationem, quòd CFA æquetur angulo HGF, qui cum HFG æquat rectum in hyperbola, at in Ellipſi relinquet GFC rectū ablato CFH, & CFA: Quare ex 32. lib 4 Eucl facto ſuper GC centro in R, circumferentia tranſibit per puncta F, & B; quod anguli recti probati ſint, & ideo neceſſariò in ſemicirculo debeant eſſe.



Progreſſus 2. Intendit probare; quòd erecta in puncto contactus D perpendiculari LD vſque ad lineam FC prolongatam in L, ſi opus ſit, & producta GB; tres lineæ LC, & DL, & GL in idem punctum conſpirent in L. Conſiderandum eſt itaque GFC triangulum rectangulum triangulo LCD rectangulo eſſe ad verticem in Hiperbola, in Ellipſi vnum contineri in alio, & angulum C nigrum hic eſſe eundem, ibi æqualem: quare, & reliquus angulus reliquo æqualis, & latera erunt proportionalia ex Coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. Elem.



Sunt autem triangula GBH, & GFC æquiangula. Ex eo, quod rectangula habeant angulum GCF angulo GBF æqualem, quòd ſit ſuper eandem circumferentiæ portionē circuli GFCB. Quare, & triangulum GFC erit triangulo BAC ſimile, cui ſimile in primo progr. probatum eſt triangulum GAH. Quare erit quoque ſimile ei BAC triangulo LCD; quod probatum eſt ſimile triangulo GFC, vnde & latera ꝓportionalia erūt. Deinde producatur GB vſq; quò occurrat rectæ FL ſi opus ſit, erit triangulum BLC triangulo GLF ſimile; ſiquidem in primo progreſſ. anguli GFC, & CBG probati ſunt æquales, & recti, & angulus L eſt communis in Hyperbola in Ellipſi ad verticem.

Cum itaque triangula ſint ſimilia BAC, & LCD, erit AC ad CB, vt CD ad CL, & *permutando*, vt AC ad CD; ita BC ad CL. Et propter triangula ſimilis GFL, & BCL, vt BC ad CL, ita eſt GF ad GL; Quare erit commune latus CL triangulo CDL, & GLF, aut ACL; & latus GL conueniet cum CL, & DL in L.

Progreſſ. 3. Cum ergo angulus GFL in progr. 1. ꝓbatus ſit rectus. Angulus verò LDG talis factus ſit; ſi diametro GL fiat circulus erunt anguli recti vertices F, & D ex propoſ. 28. lib. 3. Eucl. in circuli circumferentiā.

Rurſus. Cùm angulus CBL, vel quod idem GBC

in

in 1. progr. probatus ſit rectua,& CDL factua talis ſi diametro CL circumferentia ducatur, hæc tranſibit per D, & a puncta & verticea angulorum rectorum ea 28. lib 3. Elem.

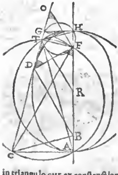
Cum itaque angulna ALC ſit in eadem circuli circumferentia, ac angulua ADC, & angulus idem BLG, vel GLF (in Ellipſi ad verticem) ſit in eadem circuli circũferentia GF, ac angulua GDF, erunt angulua BUC, & GDF ad contactum D æquales, vtpote æquales vni tertio BLC.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Si Hyperbolam vel Ellipſim recta linea contingat, & ab vtroque vmbelico ad tactum binæ inclinentur lineæ: Illa linea, quæ parallela alterutri à centro ducetur ad contingentem erit æqualis dimidio tranſuerſi axis,

SIt Hyperbola, vel Ellipſia AD, quam contingat OD in D, & ad contactum D ab vmbelicia B, & F binæ lineæ inclinentur BD, & FD, deinde à centro R ducatur TR parallela alterutri, aut FD, aut BD, vt eſt exemplum, donec contingentem ſecet in T. Dico RT *eſſe æqualem axis tranſuerſa dim dio* RA, *vel* RH.

Iungatur punctum T cum punctis F, H, & A, & vt in antecedenti figura ſit ducta GH perpendicularis ad axem, & coniunctum punctum G, vbi ſecat tangentem, cum vmbelico F, ſitque ducta OF parallela TR vel AD.

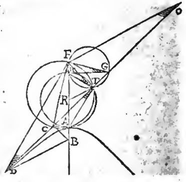


Progreſſ. 1. Probatur itaq; Angulus T (vt oſtendam) in triãgulo GTF rectus eſt, & ideo cum H angulua in triangulo GHF ex conſtructione ſit rectus, poterit ex prop. 28. Cor. l. 3 El. diametro GF deſcribi circulua, qui tranſeat per puncta, & vertices angulorum rectorum T, & H, & ſic angulua apud G in triangulo FGH, & T in triangulo FTH, vtpote anguli ad circumferentiam, & ſuper eandem peripheriam FH erunt æquales ea 27. lib. 3. elem.

Progreſſ. 2. Itaque oſtenditur angulua T in triangulo GTF rectua. Quoniam triangulum magnum OFD eſt æquicrurum, & OT medietaa baſia; Ergo FT eſt perpendicularia.

Eſt autem æquicrurum: Quia anguli O, & D nigri ſunt æquales, angulua enim alternua niger O factua ab incidente CD in parallelaa OF & AD alteri alterno BDC æqualia, qui BDC probatua eſt æqualia in antec. propoſ. angulo nigro D, vtpote ab inclinatis ad contactum effecti, ergo O, & D æquantur.

Quod autem OT ſit medietas baſis OD probatur. Nam BR incidens eſt æqualis RF ob æqualem diſtantiam vmbelicorum à verticibus H, & A, & centri R ab iiſdem. Ergo etiam OT eſt æqualis TD cum ſecetur in eaſdem partes ea 13. propoſ. lib. 6. Elem. à parallela TR ipſa OD, quæ parallelas ad extrema coniungit; Quare cum in triangulo OFD æquicruro OT ſit æqualia DT, angulua OTF erit rectua, & TF perpendicularia. Vnde verificabitur, quod per T. & H tranſeat circulua aſſumpto pro diametro GF.



Progreſſ. 3. Oſtendendum eſt deinde angulum ATC nigrum angulo FTH eſſe æqualem.

Angulua CTF eſt rectua, ea progr. 1. angulua quoque CAF eſt rectua ex conſtructione præcedentis figuræ; Ergo diametro CF circumferentia tranſibit per C, F, A, & T; Anguli ergo nigri C T A, & C F A, inniti ſuper eandem peripheriam A C, & verticea T; & F in peripheria erunt æquales; ſed angulus niger CFA probatus eſt æqualia angulo nigro HGF in præced. propoſ. in fine progr. 1. & hic angulua G niger in progr. 1. & 2 huius propoſ. angulo T in triangulo FTH; Ergo hic angulus FTH eſt æqualia angulo T nigro trianguli ATC.

Progr. 4. Duo anguli nigri ad T ſunt æquales, & angulus CTF rectua ex 2. progr. ergo, & angulua HTA erit rectus. Idem enim vtriſque additur angulus HTG in Hyperbola, & in Ellipſi FTA. Si ergo fiat circulus diametro HA centro R tranſibit per T anguli recti verticem ea 28. lib. 3. Eucl. Vnde TR erit radiua eſt ſemidiameter æqualis ſemiaxi tranſuerſæ AR, ſeu æquali RH.

THEOR. III. PROPOS. XXV.

Si in Hyperbola, aut Ellipſi ab eodem ſectionis puncto binæ inclinentur rectæ lineæ ad vmbelicos; in Hyperbola maior minorem quantitate tranſuerſi axis ſuperabit, & in Ellipſi erunt ſimul tranſuerſo axi æquales.

SIt Hyperbola, vel Ellipſis AC in quibus à puncto circumferentiæ C binæ lineæ inclinentur ad vmbelicos vnam adhunc K altera ad illum B. Dicit, quod in Hyperbola linea maior KC ſuperabit minorem BC portione æquali diametro tranſuerſæ AH, in Elliſi verò ſimul ſumptæ KC, & BC diametro HA erunt æquales, ducatne GD parallela

CF

GF per rentrum F in vtraque ſectione.

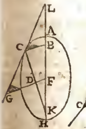
Progreſſ. 1. Primo oſtendeodum GD in Hypeebola eſſe æqualẽ DC, quod demonſtratur. Nã triãguli GDC aoguli nigri ad baſim G C ſunt æquales, ſiquidem GC in parallelas incidens GD, & BC ex 30. lib. 1. Eucl. facit angulos alternos BCG, & G nigrum æquales; ſed BCG eſt æqualis angulo nigro C ex prop 23. h. Eego G, & C niger ſuor æquales, quare GD crus eſt ęquale DC ex 17. lib. 1. Elem.

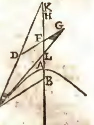
Progr. 2. Prob. quoq; CD eſſe æqualem portioni DX: In triãgulo enim BXC ob parallelam FD ad baſim BC, quia XB eſt dupla XF etiã XC erit dupla portionis XD ex 2. lib. 6.: quare XD, & DC eruut ęquales, & tota CX erit dupla GD, quæ eſt æqualis ſuæ dimidię DC, necnon in eodem triangulo, & BC erit dupla FD ob eandem rationem.

Progr. 3. Cum ergo DG ſit æqualis CD: ergo FD, FG eius medietatea duplatæ æquabuur CX, ſed BC eſt dupla FD, & AH eſt dupla GF præc. propoſ. Ergo BC, & AH æquabuur toram CX; quod erat probandum.

Idem oſtendetur in Ellipſi cum LG in parallelas BC, & FG incidat angulus C niger eſt ęqualis angulo nigro G internus, & ad eaſdem partes externo ex propoſ. 30. lib. 1. Elem. ſed angulus C oiger eſt æqualis, vtpote ad contactum ex propoſ. 23. huius angulo DCG. Ergo eſt æqualis angulo G, & triangulum GDC æquicrurum: Ergo CD, & DG crura æqualia

Progr. 2. Probatur quoque in triangulo XAC ob parallelas FD, & AC crus XC eſſe duplum cruris XD, & BC cruria FD; ſicut eſt XB duplum cruris FX.





Progr. 3. Igitur DG eſt æqualis BC. Ergo ſi DG dupletur erit æqualis CK; ſic FD, ſi dupletur, erit æqualis BC. Vnde duplicata GF ęquabit CB, & CK; ſed FG ſimplex ex pręced. propoſ. eſt æqualis dimidio diametro tranſuerſo FH. Ergo duplicata erit ęqualis toti AH. Vnde, & BC, & CK erunt æquales toti diametro AH.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

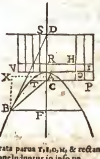
Si parabolem recta contingat linea, quæ à tactu ad ſectionis vmbilicum recta linea ducetur, æqualis erit axis portioni, quæ intercipitur inter contingentem prædictam, & Vmbelicum.

SIt Parabola AB, in qua vertex apud A, contingenſque DB Vmbilicus C ſignatus à vertice nempe quarta pars parametri, applicata ad tactum FB, iungaturque CB. Dico, quòd hæc linea CB erit æqualis axi CD, qui intercipitur inter Vmbelicum C, & punctum D, quo diametrum ſecat tangens BD in puncto D.

Progreſſ. 1. Aduertendum ex propoſ. 12. huius diametri portiones inter applicatam, & verticem FA, & inter verticem, & contingentẽ DA eſſe ęquales.

Secundò. Ex propoſ. 11. lib. 2. Elem. quadratum ex CB eſſe ęquale quadratis ex CF, & FB, quòd angulus ad F rectus ſit, Vnde eſt æquale quadrato FX facto ex FB, & quadrato HD facto ex CF: quadratum verò FX eſt ęquale rectangulo VD ſub DA axis portione, & AV Parametro comprehenſo ex Coroll. propoſ. 18. huius. Quare ſit quadratum CB ſit ęquale quadrato DH facto ex CF, & rectangulo DV, quod comprehenditur à portione diametri DA, & Parametro AV quadruplo lineę CA ex hypotheſi.

Progr. 2. Prob. propoſ. Quadratum CD quale eſt DP æquale eſt quadrato ex CF, quod fecimus DH, & quatuor rectangulis, quibus vnum latus eſt linea ipſa D R æqualis lineę CF, & aliud linea AC, vel ęqualis A R; ſiquidem ex ęqualibus DA, & AF ablatis æqualibus DR, & CF reſidua ſunt ęqualia. Inſuper eſt quoque ęquale idẽ DP quatuor paruis quadratis ex CA qualia ſunt F, I, O, H. Nam hæc omnia nempe quadratum maius DH, quatuor quadrata parua F, I, O, H, & rectangula quatuor, vt R O concluduntur in ipſo DP.



Progreſſ. 3. Sed hæc omnia quatuor rectangula, & quatuor quadrata complector, & æquantur rectangulo ſub DA intercepta diametro, & AV parametro comprehenſum: Nam parameter eſt quater CA, vnde ſub AR ęquali, & AV quadrupli rectangulum quatuor parua quadrata cõprehẽdet, & rectangulum ſub DR æquali CF, & quadruplici RV quatuor rectangula quale vnum ex illis eſt SR.

Progr. 4. Ergo quadratum magnum DCP eſt æquale quadrato ex CF, quale eſt DH, & rectangulo DV ex parametro, & axe AD.

Progr. 5. Sed hoc rectangulum DV ex parametro, & axe intercepta, vt ex 1. progr. eſt æquale quadrato ex AF; Ergo quadratum magnum DCP eſt æquale quadrato ex CF, quale eſt DH, & quadrato ex FB.

Sed quadratum ex linea CB à contactu B ad parametrum ducta ex progr. 1. eſt æquale duobus quadratis ex CF, & FB. Ergo etiam eſt æquale quale quadrato magno DCP. Cùm ergo hęc duo quadrata ſint æqualia; etiam latera erunt ęqualia, & CB erit ęqualis lineę CD, quòd erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HInc elicitur CB eſſe ęqualem FA, & AC ſimul poſitis, quia probata eſt ęqualis lineę DC, cuius vna pars AD eſt ęqualis ipſi AF altera CA ipſa eadem. Quod ſi CB ſit vna quoque ex applicatis, & cadat in punctum T ad diametrum perpendicariter, vt CT; tunc CT dupla erit CA; quia eodem

modo

modo erit æqualis CA inter ſe applicatam, & verticem intercepta, & eidem CA, vt quartæ parti Parametri.

Alia quoque ratio eſſet, quod tangens ſecabit in R, vtpote æquali CA: AEC^T à tactu ad Vmbilicum probata eſt ęqualis CR diametro inter vmbilicum, & punctum R intercepta.

EXPENSIO VII.

De Diametris ſecundis.

NOn vnus diameter lectionibus conicis ineſt; ſiquidem pręter illum, qui oritur à generatione, & in ipſa ſectione coni eſt, quę per verticem coni ducitur; aliæ etiam lineę, quę illi diametro æquidiſtantes in Parabola, vel in Ellipſi, & Hyperbola ad centrum ducuntur, diametri dignitatem obtinere poſſunt; ſiquidem, & omnes applicatas, quę intra ſectionem ducuntur bifariam diuidere poſſunt; vt ergo id demonſtretur.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

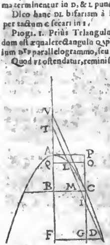
Si Parabolam recta contingat linea, quæ per tactum diametro parallela ducetur, omnes alias tangenti æquidiſtantes intra ſectionem exiſtentes bifariam ſecabit.

IN parabola ACD, ſit tangens CV, diameter VF, & ipſi parallela PG per tactum C ducta; tangenti verò parallela DL intra ſectionem, ita vt eius extrema terminentur in D, & L puncta ſectionis.

Dico hanc DL bifariam à linea PG tranſeunte per tactum C ſecari in I.

Progr. I. Priùs Triangulum TLQ oſtendendum eſt æquale rectangulo QP; ſicut, & triangulum DTP parallelogrammo, ſeu rectangulo FP.

Quod vt oſtendatur, reminiſcendum eſt id, quod diximus propoſ. 11. huius portionem diametri BA eſſe ęqualem AV ob contingentem CV; quare ex Euc. lib. 1. propoſ. 39. rectangulum PB erit æquale triãgulo BCV ob eandem altitudinem CB, & baſim duplicatam BV.



Progr. 2. Reminiſcendum quoque quadratum CB, & LQ applicatarum eſſe ad inuicem, vt BA ad AQ ex prop. 5. huius Exp. 1. ſed vt quadratum ex CB, ad quadratum ex LQ, ita eſt triangulum CVB ad triangulum LTQ, cum ob parallelas CV, & LT ſint ęquiangula, & ſimilia, ex prop. 22. lib. 6. Eucl. Ergo etiam erunt, vt BA ad AQ, quę eſt proportio quadratorum ex applicatis.

Progr. 3. Vt autem BA ad QA, ita eſt rectangulum BP ad rectangulum QP ob eandem altitudinem ex 1. lib 6. Eucl. Ergo, & triangulum CVB ad triangulum LTQ erit; vt rectangulum BP ad rectangulum PQ; & permutando, itaquoque eſt triangulum CBV ad rectangulum BP ex BA, quod ei probatum eſt æquale, vt triangulum LTQ rectangulo QP: Ergo quóque LQT triangulum erit æquale rectangulo QP ex prop. 14. lib. 5. Elem.

Progr. 4. Eadem prorſus eſt probatio de triangulo DTF; quòd ſit æquale rectangulo FP. Vnde non deſeruit eam repetere, quibus poſitis.

Progr. 5. Auferendum eſt triangulum LQT, & æquale rectangulum QP, & remanebit ablatis æqualibus quadrilatera figura LQFD rectangulo reſiduo FOGQ æquale, quæ prius erant æqualia, ex progr. pręced. 4. & 3.

Progr. 6. Quod ſi auferatur quinquelãterum commune, & occupans idem ſpatium FGILQ remanebant duo triangula æqualia, & ſimilia DIG, & IOL; Quare baſis IL erit æqualis baſi ID: quod erat probandum. Similia autem ſunt, quod anguli apud I ſint æquales, vtpote ad verticem, & apud G, & O recti: vnde, & reliquus D reliquo L, ęqualis erit, ideo ex def. 1. lib. 6. Elem. erunt ſimilia.

COROLLARIVM.

COlligitur itaque omnes parallelas diametro principali, ſiue ex generatione in Parabola diametri quoque vices, & naturam obtinere. Nam diameter eſt ille ex definitione, qui per medium diuidit omnes rectas, quæ intra ſectionem parallelę inuicem ducuntur.

THEOR. II. PROPOS. XXVIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipſim recta contingat linea, quæ ei parallela ducitur intra ſectionem, diuiditur per medium à lineâ, quæ à centro procedit, & per contactum deducitur.

SIt Hyperbola, ſeu Ellipſis ABD, quam tangat recta AC, cui parallela agatur DP, diſcedatq; à centro E recta ad contactum B. Dico, quod hęc diuidit portionem parallelæ intra ſectionem remanentis, ſcilicet LD in duas partes æquales. Ducantur ad punctum contactus B applicata BP, & ad extrema L, & D applicatæ LO & DT, & tandem à vertice ſectionis AS, quæ terminet in a puncto lineę EB, à centro ad contactum ductæ.

Progr. 1. Iam ex propoſ. 17. Expenſ. 4. huius noſti rectangulum PB, & CE eſſe ęquale quadrato BA ex AE, ideoq; proportionalia eſſe latera ex 17. lib. 6. & vt PE ad AE, ita eſſe AE ad BC, & ideo PE ad EC duplicata eſſe proportione. Ex hoc itaq; demonſtrandum eſt in primis BBC triangulum eſſe æquale triangulo AGA cum eidem triãgulo AEP eandem dicant proportionem, quam rectangulum CE, EP æquale, quadrato AE dicit.

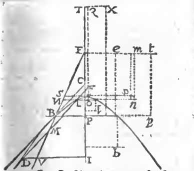
Prob. Dicit eandem proportionem triangulum SEA triangulo BEP, ſicut quadratum BA ad quadratũ ex PE, eò, quòd SEA, & BEP triangula ſint ſuper eandem, baſim, ac quadrata BA, & PE: Vndè, tum triangula, tum quadrata erunt in duplicata ratione laterum ſuorum, nempe eâ quam latus CB tertia

tia proportionalis, vt dixi habet ad EP.

Item rectangulum EP ex PB, & AC eſt ad quadratum PE, vt altitudo BC ad altitudinem PF ob eandem baſim PE; Ideſt triangulum AAC ad triangulum ABP ob eandem altitudinem PB. Cum ergo triangulum AAS ſit ad triangulum BBP, vt EC ad AP. Rurſúſque triangulum BEC ſit ad triangulum idem BEP, vt eędem lineę BC ad EP triangula EBC, & BSA ex prop. 7. lib 5. Elem. erunt æqualia, cum eidem eandem dicant proportionem.

Progr. 2. Quapropter ab eodem triangulo AAP in Hyperbola, ſi auferatur SEA, & AAC æqualia inuicem, reſidua remanebunt ęqualia quadrilaterum SBAP, & triangulum BCP.

Pariter ſi in Ellipſi auferatur à triangulo ASE, & CAA ęqualibus triangulum commune PBE remanebunt reſidua ęqualia triangulum PCB, & quadrilaterum APSB.



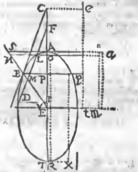
Progreſſ. 3. Conſiderandum autem eſt rectangulum OZ eſſe ęquale gnomoni O a m, nam BZ ęquatur parti a m, & BO ęquali reliquo gnomonis AN. Et idem dicas de gnomone p a t eadem ratione, quod æquatur px rectangulo. Rectangulum verò ZO eſſe ad rectangulum PX ex diametro tranſuerſa, & intercepta pro vno latere, & interceptæ ſolùm pro alio ex prop. 6. huius, vt quadratum LN ad quadratum AP.

Quoniam itaque 1. progr. diximus, ita eſſe quadratum ex EA ad quadratum ex BP, vt SEA triangulum ad BPB triangulum; erit etiam ex prop. 10. lib. 5. reliquus gnomon P a t, ideſt PX rectangulum ad quadratum ex BA, vt reliquum quadrilaterum SAAP ad triangulum SEA.

Progr. 4. Et ex eadem ratione erit ex BA quadratum ad quadratum ex EO, vt triangulum ESA ad triangulum ANO ob rationem duplicatam ſuorum laterum, quę ſunt eadem in quadratis, & triangulis, vt dictum eſt progr. 1. Quare, & reliquus gnomon O a m, ideſt OZ rectangulum erit ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SANO ad triangulum SEA, *permutanda* itaque OZ rectangulum erit ad ASNO quadrilaterũ, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA. Itemq; *permutando* progr. 3. proportiones, ita erit rectangulum PX ad quadrilaterum SAPB, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA.

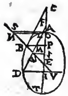
Quapropter erit eadem proportio quadrati EA ad triangulum SEA hoc eſt OZ rectanguli ad AOSN quadrilaterum, quam PX rectanguli ad SPAA quadrilaterum. Vnde *permutando* erit OZ rectangulum ad PX rectangulum, quam SANO quadrilateri ad SABP quarilaterum.

Progreſſ. 5. Proportio verò OZ rectanguli ad PX rectangulum eſt eadem, quæ quadrati LO ad quadratũ AP. & ideo eadem, quæ trianguli LFO ad triangulũ BCP 26. l. 6. ob parallelas. & eaſdẽ baſes, ob quę ſunt ſimilia triangula inuicem, & ideo in duplicata ratione ſuorum laterum communium quadratis. Ideo quadrilaterum SNAO erit ad quadrilaterum SABP, vt LFO triangulum ad BCP triangulum; Et *permutando* Quadrilaterum SNAO erit ad triangulum LFO, vt Quadrilaterum SABP ad triangulum BCP. Sed hæc ſunt æqualia triangulum BCP, & quadrilaterum BSAO ex progr. 2. Ergo etiam illa SNAO quadrilaterũ, & LFO triangulũ pr. 6. Idem probabis de quadrilatero IVSA, quod ſit æquale triangulo DFI. Nam ſuppoſitis eadem conſideratione, quæ progr. 3. Ita erit quadratum ex EA ad quadratum EI, vt triangulum ESA ad triangulum EVI ratione eadem: Quare, & reliquus gnomon, ideſt gnomoni æquale rectangulum ex IT, & IA erit ad quadratum EA, vt reliquum quadrilaterum SAVI, ſeu in altera ellipſi AAUI ad triangulum SEA; & ideo erit rectanguli TI, & IA ad ASIV quadrilaterum quam PX rectanguli ad APBA quadrilaterum; cum ſit etiam horum eadem ratio, quæ EA quadrati ad triangulum SEA ex progr. 3.



Quare *permutando* erit rectangulum ex TI, & TA ad PE rectangulum, velut ASIV quadrilateri ad SPAA quadrilaterum. Proportio autem rectanguli ex TI, & TA ad rectangulum PX ex TP, & PA eſt eadem ex 6. huius, quæ quadrati OI ad quadratum BP, & ideo eadem, quæ trianguli DFI ad triangulum BCP æquiangulorum ex 26. lib. 6. elem. ſunt enim figuræ ſimiles ſuper eaſdem quadratorum baſes. Ideo quadrilaterum ASIV erit ad quadrilaterum SPBA; vt triangulum DFI ad triangulum BCP: ideo *permutando* quadrilaterum ASIV erit ad triangulum DFI, vt quadrilaterum SBPA ad triangulum BCP; ſed quadrilaterum SBPA æquatur triangulo BCP, vt 1. progr. oſtenſum eſt. Ergo etiã Quadrilaterũ ASVI æquabitur triãgulo DFI.

Progr. 7. Vnde, ſi ab æqualibus SAVI quadrilatero auferas NSAO quadrilaterum æquale triangulo LOF, quod auferatur à triangulo OFI quod eſt ęquale ipſi ASVI, reliquum NOVI quadrilaterum reſtabit *æquale* reliquo LONI trapezio. Si verò ab vtroque auferas commune ſpatium quadrilaterum LMVIO, remanebunt duo triangula NML, & DMV æqualia, & ob parallelas, & angulos M æquales ad verticem ſimilia, vnde baſis LM erit æqualis baſi MN.



Obſernandum verò eſt in Ellipſi aliquando FO cadere infra E centrum verſus T. Sed tunc idem erit argumentum: niſi quòd à triangulo ASE auferendũ eſt triangulum EVI, itemq; in ſerie probationis, prog 6. quod ſit æquale triangulo EVI; quod tunc ſit infra centrum E verſus T. Et tandem pro vltimo progr. cum ſit æquale IDP triangulum quadrilatero ASIL, & triangulũ OFL quadrilatero ASDN ablatis iſtis reſtat ON lu quadrilaterum æquale quadrilatero OLID; adde vtriſq; EVI, & uik efficiẽtur ęqualia triangulum ONE, & figura irregularis OLUDVE, à quibus ablato cõmuni ſpatio MELO erũt æqualia MNL, & MVD triangula inſuper, & ſimilia ob æquales angulos alternos V, & N inter parallelas poſitos, & angulos ad M ad verticem.

COROLLARIVM I.

HInc deduces omnes protractas à centro in Ellipſi, vel Hyperbola poſſe habere proprietates diametri; Quod omnes in ſectione cõprehenſas æqualiter diuidant. Vnde præter diametrum ex generatione tot erunt diametri in ſectionibus Hyperbolicis, vel Ellipticis, quot erunt lineæ intra ſectionem à centro ductæ, & circumferentiam ſecantes.

COROLLARIVM II.

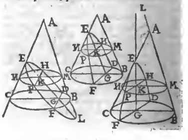
HInc cognoſces, quod quę dicta ſunt de ellipſi etiam de circuli circumferentia debeant cognoſci, vt quilibet pro ellipſi ſubſtituto circulo intelliget.

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

* *Quælibet ſectio poteſt in alio cono collocari, cui aliqua ex diametris coniungatis ſit axis.*

*SIt diameter cõiungata GE, EL in ſectione DAF, cui ſint applicatę GF, & KP parallelę, & ęquales ipſis ex pręc. DG, & HK. Dico *hanc ſectionem poſſe in cono collocari aliquo, cui diameter hæc coniungata ſit axis.*

Applicatę FG duę extremę proportionales inueniantur CG, & GB ex propoſ. 16. tract. 15. quę ad punctum G perpendiculares applicatis FG, & GO conſtituantur, & per eas circulus actus intelligatur diametro CB, & tranſibit per F mediã proportionalẽ, & O ex eadem propoſ. 16. tract. 15 A puncto itaq; C per verticem E in plano per EGL tranſeunte ducatur CA, & à B in eodem ducatur ad verticem diametri tranſuerſę BA, in L in parabola verò parallela GE diametro, in quo etiam per punctũ K parallela ipſi CB ducatur NKM, & per PH, NM ducatur planum, quod ex propoſ. 13. tract. 32. erit parallelũ plano BDCF, in quo diametro NM deſcribatur circulus NPM. Dico, quod ille circulus tranſibit per P, & H puncta: Vnde ſuperficies conica circumuoluens hos duos circulos ſectionem quoque BEHD circumuoluet, eo quia ſicut probabitur de punctis P, & H applicatarum, quòd per eas tranſeat circulus MHNP: ſic par ratio militet de omni alio circulo, qui diametrum aliam aliquam parallelam diametro CB obtineat, nam tranſibit per extremum punctum applicatę diametro ſectionum, eo puncto, quo diameter circuli tranſit.



Probatur itaque NPMH tranſire per puncta P, H applicatarum KP, & KH. Nam rectangulum NK, & KM ęquatur quadrato PK, vel KH, ergo diametro MN circumferentia tranſibit per NPMH puncta ex propoſ. 35. lib. 3.

Oſtendendũ eſt itaq; rect. NK, & KM eſſe ęquale quadrato PK, vel KH, Nam CG eſt ad NK in Hyperbola, & Ellipſi, vt GB ad KB; ſic GB eſt ad KM, vt GL diameter tranſuerſa ad KL. Ergo ſi componantur proportiones erit CG, & GB rectangulum ad rectangulum NK, & KM; vt GB, & GL rectangulum ad KB, & KL rectangulum; & ideo, vt quadratum FG applicatę ad quadratum applicatę PK, ex prop. 6. huius, & Theſi; quia GL, GE facimus diametrum. Ergo CG, & GB rectangulum erit ad rectangulum NK, & KM, vt FG quadratum ad quadratum PK: Ideoque *permutando* CG, & GB rectangulum erit ad FG quadratum, vt NK, & KM rectangulum ad PK quadratum. Sed CG, & GB rectangulum eſt ęquale ex effectione quadrato FG: Ergo etiam ex propoſ. 7. lib. 5. Elem. NK, & KM rectangulum quadrato PK, & KH. Vnde circumferentia NPKM tranſibit per P, & H, & ita dicas de alijs applicatis.

In Parabola quoque idem argumentũ militabit. Nam rectangulũ CG, & GB eſt ad rectangulũ NK, & KM ob eandem altitudinẽ GA, vel KM, vt CG ad NK, ſcilicet, vt GK ad KB. Verũ, vt GK ad KB, ita eſt quadratũ FG ad quadratum PK ex 5. huius. Vnde vt rectãgulũ CG, & GB ad rectangulum NK, & KM, ita quadratum FG ad quadratum PK, & *permutando* rectangulum CG, & GB erit ad quadratum FG, vt rectangulum NK, & KM ad quadratum PK: ſe rectangulum CG, & GB æquatur ex effectione quadrato FG, ergo etiam ex propoſ. 7. lib. 5. NK, & KM rectangulum æquabitur quadrato PK.

COROLLARIVM I.

HInc eſt diametros ſecundarias eſſe propriè axes, qui licet non deſeruiant conicis ſectionibus, quatenùs in hoc aſſignato cono exiſtunt; ſunt tamen axes poſſibiles; quia hæc coni ſectio, quæ aſſignato cono applicata eſt, aut in eo effecta poteſt, & in alio cono Scaleno reperiri, & in eo diameter coniugata axis erit, licet non præcipua, eo quod normalis non ſit ſuis applicatis: Propterea etiam proprietates axis obtinebit.

COROLLARIVM II.

HInc quoque fit euidens; quod ſi FG duæ proportionales extremæ inueniantur ex 16. prop.tr.15. CG, & GA, & collocata Hyperbola, & Ellipſi ſectione ad punctum G ad quęcumque angulum, ita tamen, vt FG ſit perpendicularis ipſi toti CB; ſi deinde per E ducatur recta CE, & ducta NK parallela CB, duabus NK, & PK extrema proportionalis MK inueniatur, & ducatur EM vſque dum occurrat diametro in L: quod detruncabit EL tali modo; vt rectangulum GE, & GL ſit ad rectangulum KE & KL, vt quadratum FG ad quadratũ PK: Nã eodem argumento EG erit ad GL; vt KM ad KL, & CG erit ad GE, vt NK ad KE: vnde compoſitis proportionibus rectangulum CG, & GB erit ad rectangulum NK, & KM, id eſt æquale quadratum FG ad æquale PK, vt rectangulum GL, & GE ad KL, & KE rectangulum, ideoque, vt quadratum FG ad quadratum PK.

In parabola verò, ſi FG duæ extremæ inueniantur, & collocentur vt ſupra ad angulos rectos cum applicata; deinde duabus KM æquali GB, & PK extrema proportionalis inueniatur NK, & parallelæ ad CA conſtituantur linea CN occurret vertici parabolæ E. Nam ob eandem altitudinem rectangulum CG, & GB erit NK, & KM, vt CG ad NK, id eſt vt EG ad KG, ideoque, vt CE ad NE. Vnde ex prop 9. lib 6. compoſita triangula GCE, NKE in vnam rectam cohibunt.

Quare linea diuidens bifariam rectas, & ideo ex pr.28. tranſiens per centrũ poterit eſſe diameter, ſi ei addatur in Hyperbola diameter tranſuerſa, id eſt talis pars extra ſectionem; donec occurrat alteri lateri BA trianguli per axem ducti; Talis verò diameter eſt duplus portionis, quę pertingit à vertice ſectionis ad centrum ex definitione centri.

COROLLARIVM III.

PRaxi præced. Caroll. poteris quoque quamlibet ſectionem cono alicui inſerere in quo poſſibile eſt reperiri, vt per ſe patet.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Diametros coniungatas, centrumque in Hyperbola inuenire.

DVcantur FD, & GE parallelæ quomodocumque, & bifariam diuidantur; perque puncta illa medietatum ducatur KA. Nam erit diameter; rurſus ductis alijs quomodocumque ſibi parallelis MI, & BC diuidantur bifariam, & per puncta diuiſionum LA ducatur, & LA erit quoque diameter, quæ conueniet in centrum figuræ ex præc. Coroll. in A; Quare A erit centrum.

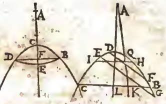
Prob. Diametri enim ſunt, quòd bifariam parallelas in ſectione diuidant, & A eſt centrum, quoniam rectæ in centrum procedentes ſunt diametri coniugatę, vt propoſ.28. huius.

Oportet tamen ex præced. 2. Coroll. eis LA, & KA addere portionem DA, & QA, ſcilicet diametrum tranſuerſam complere, vt omnimodam diametrorum rationem dignitatemque obtineant, quam prop. 6. huius oſtendimus.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Hyperbolæ centro Axem principalem inuenire.

EXhibeatur hyperbolę centrum A ex præc. & facto in eo centro ducatur intra ſectionem BCD arcus BSO, diuiſaque peripheria bifariam à centro ducatur AE, *quam lineam aſſero eſſe diametrum principalem ſectionis, & axem.*



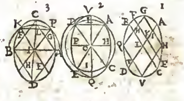
Probatur ducta BD illa à recta AE in F diuidetur bifariam, & ad angulos rectos ex propoſ.27. El. Cor. 6. Cùm ergo BFD ſecta ſit bifariam, & normaliter à linea AE, quæ tranſeat per centrum A, hæc linea erit diameter principalis.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

In Ellipſi diametrorum quamlibet coniungationem inuenire.

SIt Ellipſis ABCD fig. 1. in qua ducatur aliqua HG, & alia illi parallela EF, quæ diuidantur bifariam in I, & K, ducaturque per illa puncta recta AD, & erit vna diameter. Deinde diuidatur bifariam AO in L, & ducatur parallela CB eiſdem EF, vel GH, eritque CB altera diameter coniungata.

Ad quod oſtendendum interuallo LI ducatur applicata à puncto T, & ſit TQ, & TV; connectanturque GQ, & HV, & Dico NG, & NQ eſſe applicatas, & æquales, & idem CB tranſiens per centrum, & bifariam diuidens applicatas eſſe quoque diametrum.



Probatur. Quoniam AO eſt diameter, erit, vt AID rectangulum ad ATD rectangulum, ſic TQ quadratum ad IG quadratum, ſed rectangula ex eſſectione ſunt æqualia; quia fecimus LT æqualem LI; Vnde, & IA æquabitur TD: Ergo quadrata lateraq; IG, & TQ erunt æqualia; vnde QG erit parallela axi AD; ſed, & TQ, & IG ſunt parallelæ ex

effectione. Ergo NG, & NQ erunt æquales lineis LT, & LT æqualibus; Ergo, & inter ſe: quare erunt applicatæ, & CB diameter coniugata.

COROLLARIVM I.

HInc data diametro quacumque ei inuenies coniungatam diametrum, & applicatas: Sit enim data diameter CB; duc ei parallelam HG, quas diuides biſariam in t, & L, & per ea ages rectã AD, quę erit diameter coniugata, huic verò duc parallelas quaſcumq; vt GQ, & erunt applicatæ diametro CB.

COROLLARIVM II.

HInc eruitur, quomodo data Ellipſi in ea centrum inueniatur, ducatur enim, vt cumque HG, & ei parallela VA, quas diuides biſariam, & ages per ea puncta lineam AD. Nam cum ſit diameter, in illa erit centrum; diuidatur itaque biſariam in L, & DL erit Ellipſis centrum.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

Diametros principales coniugatas in Ellipſi exquirere.

* DEtur Ellipſis VPQH in fig. 2. & centro ex ſuperior. Cor. reperto O, ducatur circulus, qui eã ſecat in quatuor aliquibus pũctis, vt A, D, C, E. Diuidatur itaque AD circumferentia biſariam, & item CE, necnon, & ED, & AC; perque puncta diuiſionum ducantur rectę, PH, & VQ & erunt axes.

Probatur. Nam habent duas conditiones, quæ ad axes requiruntur prima; quòd ſint ſibi inuicem perpendiculares, ſecundã, quod vna ſit maxima altera minima omnium diametrorum, quæ in Ellipſi duci poſſunt.

Quod autem ſint ſibi perpendiculares ducantur diametri AE, & CD, eritque ADE ſemicirculus, & DEC talis quoque, ablata itaque communi circumferentia DE, erunt æquales arcus AD, & CE, qui diuiſi biſariam erunt ſemiarcus EQ, & LD æquales arcui AD, quibus additis arcui ED erit LDEQ ſemicirculus, & ideo LQ tranſibit per centrum. Et quia DE peripheria ſecta eſt per medium ex effectione; additis æqualibus erit quoque LDEI ſecta per medium. Vnde OP erit perpendicularis, vtpote à medio arcus DA, & ideo LDEI ducta. Patet autem, quod etiam AD, & CE ſunt diuiſæ biſariam, & ad angulos rectos ex Coroll. 6. prop. 27. lib. 3. Elem. Vnde erunt applicatæ orthogonales.

Quod verò VQ ſit maxima patet. Nam CA, & DE puncta æqualiter diſtant à centro, vtpote puncta quoq; peripheriæ, ergo punctũ Q, & V mediũ inter iſta, & extimum circulo, erit maximè remotum, & de punctis H, & P contrarium dices.

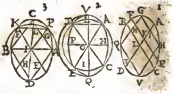
Quod autem punctũ medium V, & Q, ſit maximè remotum, patet. Nam circulus per eorum extrema ductus non ſecat Ellipſim, ſed comprehendit, & tangit in V, & Q; vnde omnes alij circuli eo minores ſecabunt, quare ad puncta ſectionum ductæ ſemper minores erunt radio VQ circuli tangentis, vt ſunt OD, & OA.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

In Ellipſi diametros coniugatas æquales, inuenire.

REpertis axibus CD, & BA coniungantur eorum extrema rectis AC, & CB; ſicut, & AD, & DB in fig. 3. quæ diuidantur biſariam, & per ea puncta rectæ tranſeãt GH, EF. Dico *has lineas eſſe diametros coniugatas, & æquales.*

* Nam, quod ſint æquales patet; Quoniã in triãgulis COI, & CIF ob cõmune latus CI, & ęqualia crura CG, & CF, & angulos apud C æquales, vtpote rectangulorum quoque AIC, & CIB crus IB, & IA æquale, & IC commune habentium erunt ex 22. lib. 1. Elem. æquales anguli PIC, & KIC, quare cũ angulos æquales cõprehẽdãt IK, & IP diametri, ęqualiter remouebũtur ab axe, & ideo erũt æquales. Nam ſi tales nõ ſunt, ſit minor IF, & producatur, vt ſit æqualis IK, ducatur arcus PK, & ſubtenſa PK, quia ergo angulus PIC ęquatur angulo CIK erit ſinus PL æqualis ſinui LK; ſed PL eſt applicata, & ad eundem angulum rectum, cum P ſit in ambitu ellipſis, ergo etiam KL, quare K erit etiam punctum Ellipſis, non ergo terminabit IK in Ellipſim in P iuſta K; quare non erit minor, quam IK, & ideo, nec minor, quàm IP.



Quod verò ſint diametri coniugatę patet; Nam ob æqualia triangula CIA, & BID baſes AC, & DB æquantur, & ſunt parallelę: quare etiam medietates. Cum ergo BC, & AD, coniungant æquales, & parallelas, & ipſę parallelæ ſunt, ſunt autem AG, & GC æquales ex effectione ſicut CF, & FB; Ergo etiam BH, & HD, necnon ED, & EA. Vnde cum biſſecent GC, & GA & BH, HD, ſic EF, FC, & AE, FO parallelas, & æquales, EA, & FH erunt diametri.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

Applicatarum ad diametros coniugas æquales quadrata ſunt æqualia rectangulis ex diametri portionibus.

SIt diameter coniugata in fig. 1. BC ęqualis alteri AD. Dico *quadratum applicatæ* GN eſſe æquale rectangulo BN, & NC.

Probatur BL, & LC rectangulum, ſeu quadratum æquatur quadrato applicatæ LA, quę eſt dimidium alterius diametri, ſed vt rectangulum BL, & LC ad rectangulum BN, & NC ex 6. huius, ita eſt quadratum LA ad quadratum GN; & ideo *permutando*, vt rectangulum BL, & LC ad quadratum LA, ſic BN, & NC rectangulum ad quadratum GN, ſed rectangulum

BL.

EL, LC, vt dixi æquatur quadrato LA. Ergo etiam rectangulum BN, & NC æquabitur quadrato CN ex 22. lib. 5. elem.

PROB. VI. PROPOS. XXXVI.

Data diametro coniugata alteri in Parabola applicatas ponere, & à dato puncto in ea diametrum ducere.

SIt data diameter aliqua coniungata, vt DC, cui applicataa oporteat ponere: Ducatur ipſi CD parallela diameter AB, & altera æquidiſtãs EF, & in puncto E, quo ſecat Parabolam ab A ducatur AE dico eſſe applicatam diametro C.

Patet quia ob æquidiſtantiam diametrorũ AB, & EF à CD erunt æquales AP, & PE, vt patet.



Sit deinde aſſignatum pũctũ A, à quo oporteat diametrum ducere; ducta ab eo puncto quauis AE, & ei paralleſa BF, diuidantur biſariam in D, & P, & ducatur diameter DC per P, D, cui ponatur æquidiſtans AB, quę ex prop. 27. huius diameter erit.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Diametrum coniugatam in Parabola, & axem inuenire.

DEtur Parabola ABC, & duæ parallelæ quæcumque ducantur AC, & DE; diuidanturque per medium, & ducatur HIB, & hæc erit diameter quæcumque ex defin. 11. h.

Deinde huic AH perpendicularis ducatur FC à



puncto C, diuidaturq; biſariam in K, & LK erit axis.

Nam quod ſit diameter patet, eo quòd ſit parallela diametro AI, quod autem ſit axis conſtat; quia applicatæ FC, vtpote biſariam diuiſæ incidit ad angulos rectos, qood ſit æquidiſtans ipſi AI.

EXPENSIO VIII.

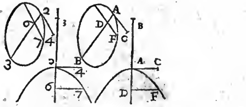
De ſectionum æqualitate.

ANteqnam perueniamus ad ſectionum deſcriptiones explicandas viſum eſt tractationem generalem, quæ omnibus ſectionibus conuenit expedire, & ſimul quoque eas comparare, vt ſciamus, quæ deſcriptio alteri deſeruire poſſit, & quæ non poſſit.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

Si binæ Hyperbolæ, ſeu Ellipſes, æquales habeant Parametros axibus tranſuerſis æqualibus applicatas, æquales erunt inuicem.

SInt binæ Hyperbolæ, vel binæ Ellipſes FA, & 27, quarum æquales ſint diametri tranſuerſæ BA, & 23, & parametri eundem angulum cum diametro facientes, & æquales inuicem CA, & 24. Dico Hyperbolas, vel Ellipſes eſſe inuicem ęquales.



Probatur. Nam ſumantur æquales diametrorum portiones ad libitum, vt DA, & 3, 6, ex quibus ducantur applicatæ FD, & 6, 7. demonſtrabitur enim has futuras ęquales, & pari ratione ſi aliæ, & alię portiones ſumantur diametrorum, à quibus applicatę ducantur, ſemper oſtendetur eas eſſe tum in vna, tum in altera æquales. ergo ſectiones ipſæ ęquales erunt, cum ſuperpoſitæ, quod vult definitio 15. h. vt conuenirent applicatæ applicatis, ita, & ſectiones ſectionibus.

Oſtenditur verò aſſumptum, nempe FD, & 6. 7. futuras æquales. Nam ex 8. h. Cor. 2. vt eſt BA tranſuerſa diameter ad AC parametrum, ita eſt DF quadratũ ad rectangulum AD, DB. Item in alia ſectione, vt eſt 2 3 trãſuerſa diameter ad 2 4 parametrũ, ita eſt quadratũ applicatæ 6 7 ad rectãgulũ ex 6 2, & 3 6 effectum; ſed vt eſt BA ad CA, ita eſt 2 3 ad 2 4 ob earũ æqualitatẽ ex Theſi. Ergo, vt eſt rectangulum AD, & DB ad rectangulum 2 6, & 6 3 ita eſt quadratum DF ad quadratum 6 7: ſed rectangula ſunt æqualia ob æqualia latera AD ad 6 2, & BD ad 6 3 ex Theſi ob ęquales axes tranſuerſas. Ergo, & quadrata erunt ęqualia ex FD, & 6 7: quare, & latera eorum DF, & 6 7 erunt æqualia.

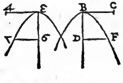
THEOR. II. PROPOS. XXXIX.

Si ſint binæ parabolæ, quæ parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad diametros applicatas Parabolæ erunt inuicem æquales.

SInt Parabolę AF, & 3 7. Dico, quod ſi parametri BC, & 3 4 ſint æquales, & in ęquali angulo applicatæ, Parabolas futuras ęquales.

Sumantur ęquales diametrorum portiones ad libitum BD, & 3 6, à quibus applicatę ducantur DF, & 6 7, probabitur de iſtis, ſicut, & de omnibus aliis, quod ſint inuicem ęquales. Vnde neceſſe erit, quod linea parabolica per eadem puncta

ſta in vtraque tranſeat. Ex Theor. 1. exp. 2. conſtat quadratum FD, eſſe ęquale rectangulo diametro intercepta DS, & parametro contento.



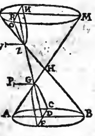
Rectangula autem, tum vnius, tum alterius parabolę ſunt ęqualia ob ęqualem parametrum BC, & 3 4, & æqualem interceptam BD, & 3 6 ex conſtructione. Ergo, & quadrata ęqualia; nempe quadratum ex FD quadrato ex 6 7; quare, & ipſorum latera erunt ęqualia FD, & 6 7, & hinc Parabolę ipſę erunt ęqualia, cum ſuper poſitę, vt patet. vt conuenirent applicatę applicatis, ita, & parabolę parabolis. quę per extrema applicatarum ducerentur, vt vult def. 15. h.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Hyperbolicæ ſectiones, quæ fiunt in duobus conis ad verticem, quorum baſes parallelæ, ab eodem plano, habent æqualem tranſuerſam diametrum, & æquidiſtantem, & eandem parametrum.

SIt conus LHM poſitus ad verticem alteri AHB, tranſeatque per vtroſque idem planum ONFC, quod faciat in eo ſectiones Hyperbolicas OZN, & FGC, ſintque conorum baſes inuicem parallelę; nempe LNMO, & ACBF, dico has Hyperbolas habere eandem tranſuerſam diametrum GZ, & ęqualem parametrum, & ęquidiſtantem alteri parametro, & inuicem ſectiones eſſe ęquales.

Probatur. Nam triangula AGD, & GMR ſunt ęquiangula, cum ſint ad verticem, & inter parallela LM, & AB ſicut, & triangula DZB, & LZR. Vnde obtinebunt latera proportionalia, & propter hoc eam proportionem, quam dicet BD ad DZ, eandem dicent LR ad RZ, & in alijs triangulis RMG, & AGD eam proportionem, quã dicit AD ad DG eãdem quoq; dicet MR ad RG. Quare ex eis poteris componere rectangulum accipiendo duas antecedentes pro vno parallelogrammo, & duas ſequentes pro alio, vt ex propoſ. 23. lib. 6. Eucl. colligitur; Igitur ex BD, & AD antecedẽtibus componatur rectangulum dicet eam proportionem ad rectangulum cõpoſitum ex DZ, & DG conſequentibus, quam rectangulum compoſitum ex MR, & RL antecedentibus ad rectangulum ex conſequentibus RZ, & RG quemadmodum hic vides.



Crus	BD	ad	DZ	eſt vt	AD	ad	DG	
Sic	RL	ad	RZ	vt	RM	ad	GR.	

Ergo, vt compoſitum ad compoſitum.

	BD	&	AD		DZ	&	DG	
Sic	RL,	&	RM	erit ad	RZ,	&	GR.	

Progr. 2. Sed rectangulum ex AD, DB eſt æquale quadrato ex applicata FD, & rectangulum ex MR, & RL quadrato applicatę RO: Ergo quadratum RO habet eam proportionem ipſam ad rectangulum ex GR, & RZ, quam quadratum FD habet ad rectangulum ex DZ, & DG.

Progr. 3. Sed horum quadratorum ad hęc rectangula proportio eſt illa, quã habet ad diametrũ tranſuerſam ZO parameter PG, ergo erit eadem proportio prorſus parametri VZ ad tranſuerſam diametrum GZ, ac ad eandem diametrum GZ parametri PG, ſiquidem huius parametri PG eſt ex 8. h. Cor. 2. eadẽ quam habet quadratum FD ad rectãgulum ZD, & DG, quæ probata eſt eadem cum illa, quam poſſidet quadratum OR ad rectangulum OR, & RZ, quę eſt rurſus ex prop. 8. h. Cor. 2. eadem, quam habet parameter VZ ad diametrum tranſuerſam ZG.

Cum itaq; eidẽ diametro trãſuerſę ZO eandẽ dicant proportionem parameter, PG, & VZ ex 7. lib. 5. Eucl. erunt ęquales parametri. Paralleli quoque ſunt ob parallelas OR, & FD; cui parametri ęquidiſtant; ſiquidem ſunt parallelę; quia ſunt in baſibus parallelis LNMO, & ACBF; Et eis parametri ęquidiſtant, quod ſint contiguę diametri, vt habetur ex prop. 8. huius.

Probatur autem, quod vna ſectio alteri ſit eadem ex pręc. quia habent parametros ęquales in ęqualibus angulis, vtpote perpendiculares diametro RD, & diametrum tranſuerſam eandem.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc oppoſitarum Hyperbolarum, idem eſſe commune centrum, & communes omnes tranſuerſas diametros, axem quoque communem, communeſque vmbelicos, quia erit ad axem tranſuerſam factum rectangulum, (vt docuimus prop. 22. h.) ęquale quartę parti rectangulo ſub axe tranſuerſa, & parametro concluſi, tum vnius, tum alterius ſectionis.

EXPENSIO IX.

De parallelis ad diametrum ſectionis à vertice coni ductis.

PAraboia diametro nulla poteſt eſſe parallela ducta à vertice coni, quia incidit in ipſam ſuperficiem coni. Vnde cum non ſecet baſim, nec rectangulum à ſegmentis diametri baſis factum eius quadrato comparari poteſt.

Quarè portione cruris trianguli per axem, & diametro parabolico rectangulum conſtitutum, rectangulo ſegmentorum, quę diameter parabolicus facit in diametro baſis trianguli per axem, comparabimus.

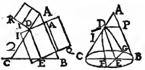
THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

Rectangulum ex baſis portionibus eſt ad rectangulum ex diametro, et intercepta inter verticē coni, & verticē ſectionis trianguli per axem, vt Parameter ad eā interceptam.

SIt Conus BAC idem in vtraque figura, in quo parabola GDF, cuius diameter AD, & applicata EF, intercepta portio cruris trianguli per axem AD, & parameter DI. Dico, *quòd rectangulum ex* EB, *&* EC *eſt ad rectangulum ex* ED, *&* DA, *vt* DI *ad* DA.

Quadrato ex FE applicatæ, ideo rectangulo BE, & EC ex 5. huius eſt æquale rectangulum ex BD, & DI, & ideo ex prop. 22. El. lib. 6. Cor. quadratum DQ ex BD prima erit ad quadratum EB EF ſecunda, vt ED prima ad tertiam proportionalem DI.



Sed rectangulum ex ED, & AD dicit eam proportionem ad rectangulum ex AD, & DI, quam ED ad DI ob eandem altitudinem AD. Ergo quadratum DQ ex DE dicit eam proportionē ad quadratum EF, vel rectangulum ei æquale BE, & EC; quam ADE rectangulum ad IDA rectangulum, quod ſint, vt ED ad DI ex 16. lib. 5. Ergo *permutando* quadratum ex DE erit ad ADE rectangulum eiuſdem baſis DE, vt rectangulum BE, EC ad rectangulum ex DA, & DI.

Verùm, vt quadratum ex ED ad rectangulum ex AD, & DE, ita eſt idem rectangulum ex AD, & DE ad quadratum AR ex DA ob eandem altitudinem ED, & AD.

Rectangulum itaque ex BE, & EC erit ad rectangulum DA, & DI ex 16. lib. 5. vt ADE rectangulum ad AR quadratū ex AD, & *permutando* Rectāgulū ex BE, & EC erit ad rectangulum AD, & DE, vt AD, & DI rectangulum ad DA quadratum, ideſt ob eandem altitudinem, vt ID ad AD.

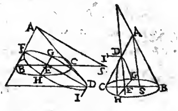
COROLLARIVM.

COlligitur eſſe quoque proportionem BC quadrati ad CA, & BA rectangulum, vt DI ad DA. Quoniam rectanguli BE, & EC proportio ad rectangulum DA, & DE eſt compoſita ex proportione BE, ideſt DF ad DA, eademque ob triangulorum ſimilitudinem ex 4. lib. 6. CB ad CA, & ex proportione EC ad DE, ideſt CB ad BA; quare rurſus componendo rectangulum CB, & CB, ideſt quadratum CB erit ad rectangulum CA, BA, vt ID ad DA.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Si Conus per axem ſectus ſit, & ei triangulari ſectioni ſit normalis Ellipſis, vel Hyperbola, quarum diametro acta ſit parallela à vertice coni, quadratum huius parallelæ eſt ad rectangulū ex interceptis baſis partibus factū, vt trāſuerſæ diametri portio intercepta ad parametrū contiguā.

SIt Conus ABC ſectus triangulo ABC per axem, ſitque ſectio Hyperbolica, vel Elliptica GHI normalis ipſi plano triangulari, cuius diametro FD ducta ſit parallela AS. Dico, quod ſi fiat quadratum ex ipſa AS habebit eam proportionem ad rectangulum ex diametri baſeos portionibus intereeptis SC, & SB in hyperbola BC, & SC in Ellipſi, vt FD diameter tranſuerſa ad parametrum DI.



Præaſſumpt. Aduertendum eſt Quadratum applicatæ EG ex 35. lib. 5. Elem. eſſe æquale quadrangulo ex ſegmentis diametri conici BE, & EC; Et tranſuerſam diametrum FD eſſe ad Parametrum DI ſicut rectangulum FE, ED ad quadratū EH applicatę ex prop. 8. h. Cor. 2. Tandem conſiderandę ſunt lineæ in ſectionibus, quæ proportionem dicunt. Nam vt FE ad EB ita AS ad SB ob parallelas AS, & FB in triangulo BFE, & BAS ex 4. lib. 6. Deinde vt ED ad EC, ita AS ad SC ob parallelas AS, & DE in triangulis ASC, & CED, in Ellipſi ad verticem.

Quare poterimus conficere duo rectangula ex iſtis proportionibus compoſita, vt vides.

FE	vt	AS	&	DE,	vt	AS
ad		ad		ad		ad
EB		SB		[EC		CS

Ergo compoſitum erit, vt compoſitum;

FE	&	DE	AS,	&	AS
	ad			ad	
EB	&	EC	SB,	&	CS

Aſſumendo ſimul fundamenta, quæ non referuntur FE, & DE, & comparando ad ſuos terminos ſimul, quæ proportio erit eadem, quæ AS ad AS ſuos terminos collata quo ſuppoſito.

Probatur. Rectangulum ex EF, & ED eſt ad rectangulum EB, & EC, vt quadratum ex AS ad rectangulum ex BS, & SC. Sed rectangulum FE, & ED ad quadratum HE, hoc eſt ad rectangulum ęquale ex prop. 35. lib. 3. Elem. CE, EB refertur, vt diameter tranſuerſa ad parametrum FD ex Cor. prop. 8. huius. Ergo quadratum AS erit ad rectangulum BS, & SC, vt diameter tranſuerſa FD ad parametrum ID.

EXPENSIO X.

De Aſymptoto Hyperbolarum proprietate.

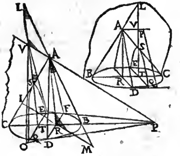
TRiangulum quoddam ambit Hyperbolam, cuius latera ſingularem ipſi analogiam poſſident, eſtque formatum à duorum planorum conum tangentium interſectione, quam cum Hyperbolæ plano extra conum extenſo efficiunt, nec huius trianguli inutilis contemplatio, vt ea, quę deſcriptioni hyperbolarum optimè deſeruit.

THEOR. I. PROP. XLIII.

Sint duo plana, alterum, quod conum tangat, alterum, quod illum ſecet in contactu, & per verticem etiam tranſeat, & huic ſecanti Hyperbola ſit æquidiſtans diameter tranſuerſa Hyperbolica à tangente plano in centro ſecabitur.

DVos caſus hęc propoſitio habet, nam planum contingens conum poteſt ſecare planum per verticem ſecando rectangulè, vel non rectangulè.

Sit ergo primus caſus, in quo planum tangens ſit ADPQ, quod tangat conum BAC ſecundùm lineam AD; cui occurrat, ſecerque aliud planum ductum per verticem A, quod ſit ADR, in ipſa linea contactus AD, huic plano FAD ęquidiſtet Hyperbola EQS. Dico, *quod eius diameter tranſuerſa* TL *ſecabitur ab hoc plano tangente* DAPQ *in centro* V.



Probatur. Nam primo, quòd ſecet clarum eſt. Siquidem, ſi planum BLC interminatum per vtroſque axes AR coni, & TVL Hyperbolæ rectangulum ad eorum plana ducatur. Hoc vtique ſecabitur à plano tangente DAPQ. Ergo etiam ſecabit diametrum TVL in illo plano deſcriptum: Quòd autem à plano tangente DAPQ ſecetur planum ductum per axes BLC patet; quia planum contingens ADPQ occurret vertici coni in A, & eius axi, ergò neceſſariò ſecabit planum per eundem verticem ductum BLC; in quo eſt vertex etiam, & axis RA.

Quod verò punctum V, ſit centrum in quo ſecat diametrum Hyperbolicum planum contingens ADQP.

Probatur. Nam cum planum ADQP ſit rectangulè ad planum per verticem ductum RAD ex hypotheſi, cui etiam eſt rectangulum planum interminatum ductum per verticem; proptereaque plana hæc perpendicularia plano RAD, quare, & eorum communis ſectio AP, cui etiam plano RAD perpendiculare eſt planum coni baſis BFCD. Ergo ex propoſ. 16. tract. 22. & eius communis ſectio RC eum interminato BLC eſt perpēdicularis; Quare ex prop. 7. tract. 22. AP, & RC, cum ſint eidem plano perpendiculares erunt parallelæ. Cùm itaque AL crus incidat in parallelas AR, & LT, angulus L internus angulo BAR externo erit æqualis ex 30. lib. 1. Eucl. Quare, cum ſint rectangula ARA, & AVL triangula erunt quoque ſimilia. Nam reliquus angulus reliquo erit æqualis, ita dicendum de triangulo AVS, cuius angulus ASV alterno SAR eſt ęqualis, & hinc eſt ſimilis triãgulo RAC; Radius autem BR ęquatur RC ex cor. pr. 11. h.

Probatur itaque aſſumptum oſtendendo AV, & VL eidem AV eandem dicere proportionem, & ideo ex 7. lib. 5. Eucl. eſſe inuicem ęquales.

Nam, vt AR ad RA, ita eſt ob ſimilitudinem triangulorum AV ad VL. Item quam proportionē dicit AR, id eſt RC ad RA eandē dicit AV ad VS. Ergo LV, & AV ipſis AV eandem dicit proportionē, quam AR ad RA, & propter hoc erunt æquales; quaderè V erit centrum Hyperboles.

Sit iam ſecundus caſus, in quo planum PADQV tangens conum ſecundûm lineam AD non ſe ſecat cum plano PAD rectangulè; dico *adhuc* V *centrum eſſe Hyperboles.*

Probatur. Nam tracta MI parallela PV, iam clarum eſt, quòd ſecabitur diameter Hyperbolicus à plano PVC, quod tranſit per AR coni, & axē TVL hyperboles, quod verò ſeſſecet cum plano PVC patet, quia in P, & A cum illo concurrit.

Quod verò V ſit centrum demonſtratur, quòd ſint æquales SV, & VL, eo quia eidem AV eandem dicant proportionem.

Siquidem MR, & RI ſunt æquales, vt probabitur: Sed ob parallelas AR, & LT in triangulo LMR ita ſe habet MR ad AR, vt AV ad VL ob ſimilitudinem triangulorum LAV, & MRA, vt infra oſtendam. Rurſus eadem VA ſe habet ad VS, vt RI, id eſt æqualia MR, vt oſtendam, ad RA ob ſimilia triangula AVS, & AIR. Vnde cum eadem VA eiſdem AV, & LV eandem dicat proportionem RM ad RA ipſę SV, & LV erunt inuicem æquales.

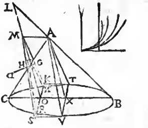
Sunt autem ſimilia triangula ARI, & SAV, quòd angulus S internus niger ſit æqualis angulo SAR externo inter parallelas RA, LT, & angulus SVA alterno VAL ſit æqualis, id eſt angulo ARI, & hinc reliquus reliquo. Sic, & triangula LAV, & MRA ſunt ſimilia; quòd angulus niger L ſit æqualis angulo nigro A ob parallelas RA, & LT, & angulus V, & R nigri ſunt æquales ob parallelas MI, & PV.

Probatur modo MR, & RI ſint in linea MI æquales portiones. Nam ex propoſ. 23. Tract. 15. ita ſe habet CR ad AR, vt CP ad BP. Quamobrem etiam permutando, vt CR ad CP, ita erit AR ad AP; Sed in triangulo PAC, vt CR ad CP, ita RI ad PA ob parallelas PA, & RI, vt ex Coroll. propoſ. 4. lib. 6. Eucl. & vt BR ad BP; ita RM ad PA, eò quòd triangula ſint ad verticem inter parallelas PA, & MR; Ergo eidem PA lineæ RI, & MR eandem dicunt proportionem, quam CR ad CB, vel quæ eadem BR ad PB; quare ſunt æquales.

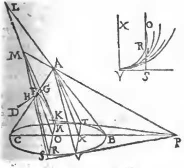
THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLIV.

Si planum aliquod contingat conum, & illud duo plana ſecent, alterum triangulare ductum per verticem coni in ipſo contactu ſecans planum contingens, aliud Hyperbolicum æquidiſtans à triangulo; ſectio hæc contingentis, & Hyperbolici plani accedet ſemper ad Hyperbolem, ſed nunquam eam continget.



SIt ABC conus, & planum contingens AVMS in linea VA, ſiue normaliter ad XV, ſiue non, quod ſecetur à duobus planis; primum ductum ſit per verticem, vt TAV ſecans contingens illud VAMS in linea contactus AV; allud æquidiſtans KMS, in quo Hyperbola NSR. Dico, quòd ſectio huius plani Hyperbolici cum plano contingente AVMS facit ſectionem MS, cui Hyperboles crus FR ſemper accedet; ſed numquam tanget, quantumlibet producantur.



* Probatur primò, quòd nunquam tangat; ſunt enim plana ſecantia triangulare TAV, & Hyperbolicum KMS æquidiſtantia: Ergo VA, & MS ſectiones ipſorum in plano contingente AVMS æquidiſtabunt, quare nunquam conuenient: Sed planum contingens VAMS tangit in linea AV ſolummodo; ergo numquam tanget MS ſuperficiem coni quantumlibet producantur, & planum contingens, & conus. Ergo neque tanget Hyperbolã RF, quæ in ſuperficie coni reperitur, & idem dicendum de plano ad alteram partem contingente TAMK, vt patet.

* Quòd verò ſemper accedat oſtenditur. Quia quælibet portio circuli inter duas parallelas intercepta, nempe VX ductam ad contactum V, & alteram parallelam OS in altera figura ſemper magis accedit ad contingentem VS, quò maior eſt circulus, & portiones SR parallelæ OS interceptę inter peripheriam, & tangentem ſunt ſemper minores, vt eſt minor IS, quam RS.

Sed quò magis conus producitur, eò magis circulus baſis ſit maior; ergo minor erit diſtantia inter contingẽtem VS, & peripheriã VR illius inter plana parallela TAV, & XMS interceptã, qualis eſt RS; diſtantia enim ſectionum TV, & KR ſemper erit eadem productis planis TAV, & XMS parallelis ſed circuli baſes coni ſemper maiores; vnde, & diſtantia RS ſemper minor.

Dicentur verò ſectio SM, & MX Aſymptoti.

THEOR. III. PROPOS. XLV.

Quæ à vertice ſectionis ad vnam, ſeu aliam Aſymptotum recta ducetur linea parallela ordinatim applicatæ, hæc poterit deſcribere quadratum æquale quartæ parti figuræ contentæ à diametro tranſuerſa, & parametro.

SInt eadem fig quę prius, & ab F vertice Hyperboles ducatur FH, vſque ad Aſymptotum MS, vel FG vſq; ad Aſymptotum MK, parallela ſectioni KS baſis BKBC cum plano KMS. Sitque ſectionis parameter, ſeu coefficiens latus FD.

Dico rectã FG, ſeu FH conſtituere quadratum æquale quartæ parti figuræ, quam conſtituit LF diameter tranſuerſa, & parameter FD.

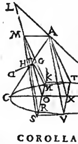
Progreſſ. 1. Probatur. Quadratum conſtitutum ex MF eſt quarta pars quadrati conſtituti ex LF, cum ſit latus eius FM, dimidium lateris LF. Ergo etiam quadratum ex FH quarta pars rectanguli ex LF diametro tranſuerſa, & FD Parametro.

Progr. 2. Probatur conſeq. Nam ſicut ſe habet quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD ita ſe gerit quadratum MF, vt probabitur in 3. progreſſ. ad FH quadratum, & ſic ſe debet gerere quarta pars quadrati FL ad quartam partem rectãguli ex LF, & FD ex 18. lib. 5. Elem. Sed Quadra. ex FM eſt quarta pars quadrati ex FL deſcripti, vt dictum eſt. Ergo etiam quadratum ex FH erit quarta pars rectanguli ex LF diametro tranſuerſa, & parametro FD deſcripti.

Progreſſ. 3. Remanet itaque probandum quadratum MF eſſe ad quadratum HF, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD. Nam cum ſint ſuper eamdem baſim FL, erunt vnum ad aliud, vt altitudines, nempe altitudo quadrati, quæ eſt LF ad altitudinem rectanguli, quæ eſt FD, nempe, vt diameter trãſuerſa ad parametrum: Sed ex prop. 42. huius, vt eſt diameter tranſuerſa ad parametrum, ita eſt quadratum ex AX ad rectangulum ex CX, & XB, vel quod ei æquale ex 35. lib. 3. Eucl. ad quadratum ex XV. Sed, vt quadratum AX ad quadratum XV, tale quoque ob ſimilitudinem triangulorum XAV, & OMS, & MFH reperitur MO quadratum ad quadratum OS, & quadratum FM ad quadratũ FH. Ergo ex 16. l. 5. el. erit eadem proportio quadrati FL ad rectangulum LF, & FD diametri tranſuerſæ, ad parametrum primo

propoſita, ac quadrati FM ad quadratum FH.

Quod verò triangula ſint æquiangula patet, quia ex parallelis conficiuntur. Nam AX, & MG exiſtentes in eodem plano ſunt parallelæ, ſic, & XV, & OR, ſicut, & VA, & SM; quia efficiuntur à planis parallelis ATV, & MKS ſecantibus planum SAC ſecans per axem, & planum BCTV baſim Coni, & planum AVMS contingens, vt patet pr.14. Tr.22.





COROLLARIVM.

Fit igitur quadratum MF dimidiæ tranſuerſæ diametri ad quadratum FH eſſe, vt diameter LF ad parametrum FD; quia ex prog.3. eſt, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF diametro, & FD parametro. Hoc autem quadratum ex LF eſt ad rectangulum ex LF, & FD ob eandem altitudinem FL, vt diameter ad parametrum, vnde etiam talis erit proportio quadrati MF ad quadratum FH.

THEOR. VI. PROPOS. XLVI.

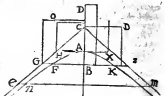
Si in Hyperbola applicata producatur vſq; ad Aſymptotum hinc, & inde, erit rectangulum factum ex vna portione inter figuram, & Aſymptotum intercepta, & ex tota reliqua vſque ad Aſymptotum æquale quartæ parti figuræ à tranſuerſa Diametro, & Parametro comprehenſæ.

Sit Hyperbola FAK, cuius aſymptoti CG, CZ, centrum C, cuius contingens verticem vſque ad Aſymptotum AH, ſitque applicata producta extra ſectionem vſque ad Aſymptotum in Z, & G. Dico, quòd ſi fiat rectangulum ex interclusa inter ſectionem, & Aſymptotum FG pro vno latere, & ex reliqua ZF pro alio; hoc erit æquale quartæ parti figuræ, quæ ſub tranſuerſa diametro AD, & parametro comprehendatur.

Probatur autem. Quia quadratum ex AH, vt ex præcedenti, eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ex parametro, & diametro tranſuerſa comprehenditur. Sed huic quadrato eſt æquale rectangulum ex ZF, & FG, ergo hoc rectangulum eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ à diametro tranſuerſa, & parametro concluditur.

Sunt autem quadratum AH, & rectangulum ZF, & FG æqualia, quod eidem AC quadrato eandem dicant proportionem.

Nam ex prop.6.Cor.a.h.vt diameter tranſuerſa ad parametrum proportione reſpondet, ſic rectangulum ex DB, & BA ad quadratum ex AF proportionem dicit, & eandem proportionem dicit quoque ex præced Coroll. quadratum CA ad quadratum AH, & ex eadem prop. eiua progr.3. quadratum CB ad quadratum BG.



Debes autem antequam progrediamur aduertere, rectangulum DB, & BA eſſe æquale BXD gnomoni, & rectangulum ZF, & FG gnomoni, quid remaneret ablato quadrato FA à quadrato GB, vt ex ſe patet. Aufer ergo duo proportionalia in eadem proportione nimirū rectāgulū DA, & AA à quadrato BCD. aut gnomon BXD æquale illi rectangulo, & remanebit quadratum CX ex CA. Aufer quoque quadratum AF à quadrato BG, & remanebit gnomon æqualis rectangulo ex ZF, & FG, quæ etiam vtpote reſidua rerum dicentium eandem proportionem, ac ſua tota, in quibus erant; erunt ex 19. prop.lib 5. Elem in eadem proportione. Erit que ex AC quadratum reſiduum in eadem proportione ad rectangulum ZF, FG, quam totum BC quadratum ad totum quadratum BG, quę eſt illa ipſa, quam habebat quadratum AC ad AH quadratum. Quamobrem CA quadratū ad quadratum AH eandem proportionē dicit, quā idē CA quadratū ad rectāgulū ZF, & FG, itaque erunt æqualia rectangulum ZF, & FG, & quadratum AH ex 7 lib.5. Elem Vnde hoc rectangulum ZF, & FG quartæ parti figuræ, ex diametro tranſuerſa, & Parametro æquabitur, ſicut ex præc.prop. æquatur ei quadratum AH. Et idem probabitur de rectangulo GX, & XZ, cum militet eadem ratio, cùm æquentur XZ, & FG.

COROLLARIVM.

Quare colligas velim omnia rectangula ex ZF, & FG, & alijs parallelis, vt m n, & n e eſſe æqualia tum inter ſe, tum quadrato AH, vt patet, cùm ſingula ſint æqualia quadrato AH.

PROBL. I. PROPOS. XLVII.

Datæ cuiuſcumque Hyperbolæ Aſymptotos inuenire dato centro, & Parametro contigua.

Rectangulo DV Parametro, & DA tranſuerſa diametro reperiatur quadratum æquale ex propoſ.14. lib.2. Eucl. & huius quadrati dimidium latus à vertice figuræ A ſuper parametrum menſuratum dabit punctum AH, per quod à centro C tranſibit Aſymptotus CG, & ſic producta in aliam partem, quę ſit etiam æqualis ipſi AH dabit aliud punctum, per quod à centro C Aſymptotus tranſibit CZ.

Probatur autem ex prop.45. Quia AH lineæ per quam à centro tranſit Aſymptotus ſubtendit quadratum æquale parti quartę rectanguli à parametro, & diametro tranſuerſa comprehenſi. Sed hoc

hoc quadratum ex AH, vel ei æquali ad alteram partem, vtpote ex dimidio eius latere eſt quarta pars quadrati, quod fecimus, çquale dicto ex diametro tranſuerſa, & parametro rectangulo; Ergo etiam huius rectanguli quarta pars erit, & conſequenter erit linea, per culus extremum à vertice ſectionis à centro tranſibit Aſymptotus, quod facere oportebat.

EXPENSIO VII.

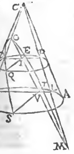
De lineis in ſectionibus, vtcumque ductis applicatas, ſeu parallelas ſecantibus.

NOs hanc doctrinam faciliter trademus, cùm alij,non niſi poſt multas præuias propoſitiones, à quibus dependet, tradant, & non de omnibus ſimul, ſed de ſingulis, vt videre eſt apud Ambroſium Vincentium virum in Mathematicis admirabilem, in quo quædam etiam deſumemus io ſequentibus.

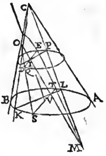
THEOR. I. PROP. XLVIII.

* *Si in ſectione Conica qualibet, quæcumq; ducta ſecet duas parallelas in ipſa ſectione, rectangulum ex ſegmentis illius interceptis ab vna erit ad rectangulum ex interceptis ab alia ſegmentis, vt rectangulum ex ſegmentis vnius ad rectangulum ex ſegmentis alterius parallelarum.*

*SIt conus ABC, & triangulum LKC à vertice deſcendens; at non per axem, & lo ſectione TOS faciat ſectionem MO, ſintque ſectiones effectę à circulis parallelis lo illa parallelæ EQ, & TS. Dico rectangulum MV,VO lineę OM ſecantia conicam figuram in O, & M eſſe ad rectangulum MI,IO,vt rectangulum TV,VS ad rectangulum EI, IQ parallelarum.

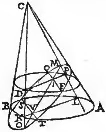


Probatur. Rectangulum LV, & VK ex propoſ. 35. lib.3.Eucl. eſt æquale rectangulo TV, & VS ob eundem circulum, io quo ſe ioterſecāt; & eadem ratione PI, & ID æquatur rectangulo EI, & IQ: Sed vt PI ad LV; ſic eſt IM ad VM, ob parallelismum in triangulo eodem IMP, & vt ID ad VK, ſic OI ad VO ob parallelas in triangulo eodē KOV,ergo ſi cōponātur proportiones,& fiant rectangula, ita erit rectangulum ex PI, & ID ad rectangulum LV:, & VK, vt IM, & OI rectangulum ad rectangulom ex MV, & VO, vt hic vides.



PI vt IM & ID vt OI
ad ad ad ad
LV MV VK VO
Ergo compoſitum, vt compoſitum.
PI; & ID IM & OI
Erit ad compoſitum ad compoſitom.
LV & VK MV & VO

Quare etiam rectangulum EI, & IQ erit ad rectangulum TV, & VS, vt rectangulum MI, & OI ad rectangulum MV,& VO, quod erat probandum. Quod verò ſectio V.g. MTOS parabolę, & MO ſectio in ea, & latus trianguli MC conueniant in M patet. Nam cum ſit planum TOS parabolę, cruri AC parallelum non erit parallelum cruri CM. Vnde conueniet, cum eo crure CM; ſed illud eſt in ſuperficie coni. Ergo conueniet cum eo io ſuperficie coni. Sed puncta plani parabolici In ſuperficie coni ſuot ipſa linea flexa parabola. Ergo ipſa in M incidet;ſed ſectio MO eſt in plano parabolę, & in plano triāguli,cū ſit corū communis ſectio. Ergo ibi debebit eſſe vbi planum parabolæ cruris trianguli coniungūtur in M ſcilicet in ipſa flexa SOTM.



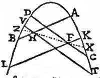
In Ellipſi patet; quia ſi ſecat latera trianguli CBA per axem; tantò magis, & reliquorum triangulorum minorum intra conum ductorum. In Hyperbola CM crus poteſt non conuenire cum ſectionis SOTM plano, ſed neque ſecabit Hyperbolam altero extremo M; quod requiritur in propoſ. Siquidem ſi ſectio OM conueniret cum Hyperbola etiam contra Theſim cum MC conueniret; quia totius trianguli KCL, cuius ſectio eſt, & plani Hyperbolici, tantùm crura, vtpote ſectiones ſuperficiei conicę in ſuperficie conica ſunt. Nota verò, quod ſectio OM poteſt etiam ſecare axem, vt dedimus exemplum io Hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XLIX.

Si duæ parallelæ duas alias parallelas in qualibet conica ſectione interſecent erunt rectangula ſegmentorum proportionalia.

SIt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipſis TADL parallelę in ea BL, & AB alias parallelas interſecantes TV, & CD, & per puncta interſectionum F, & H ducatur BZ. Dico, quod rectangulum AH, & HB erit ad rectangulum ex BF, & FL, vt rectangulum TH, & VH ad rectangulum CF, & FD.

Probatur rectangulum AH, & HB ad rectangulum BF, & FL erit ex preced. vt rectangulum HZ, & HB ad rectangulũ ZF, & FX. Verùm vt ZH, & XH rectangulum ad ZF, & FX rectangulum



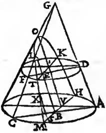
ita eſt quoque ex pręc TH HV rectangulum ad CF, & FD rectãgulũ, ergo cum ſint eædē vni tertię proportioni iſtę proportiones rectanguli, nimirũ BH, & HZ ad BF, & FZ rectangulum, erit quoque AH, & BH rectangulum ad BF, & FL rectangulum, vt TH, & VH rectanguli ad CF, & FD rectangulum, quod erat probandum.

THEOR. III. PROPOS. L.

Si in parabolâ, qualibet parallelæ ſecent diametros, erit intercepta diameter ad interceptã diametrũ vt ex ſegmẽtis vnius parallelæ ad rectãgulũ ex aliùs ſegmentis.

EXponatur conus. In quo parabola HOLM, & triangulum, ſed non per axem AGC ſecet eam in BL, & circulos baſi parallelos in DF, & AC, qui etiam circuli ſecent parabolam in ET, & HM, quæ ſectiones erunt parallelæ, ſicut etiam ſectio BL lateri AG ex Coroll. 3. propoſ. 4. tract. 23. eo, quia totum planum parabolicum ei AG ſit parallelum, & ideo etiam erit parallela diametro principali VO, ex propoſ. 9. eiuſdem tract. & ideo LB erit diameter. Dico itaque EB, & ET rectangulum eſſe ad HB, & BM rectangulũ, vt BL ad LB.

Probatur. Nam rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & BC ob æquales, vtpote inter parallelas, ſunt ad inuicem, vt altitudines EF ad BC; ſed BF, & BC ita eſt BL ad LB. Ergo rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & BC eſt, vt LB ad LB: & ideo vt rectangulum EB, BT ex 35. lib. 3. ęquale DE, & EF rectangulo ad HB, & BM æquale rectangulo AB, & BC.



COROLLARIVM I.

HInc habes SL eſſe ad LB, vt VO ad OI eo, quòd ſint, vt parallelę eędem AG ad DG ex 16. l. 5. El. & ideo MB, BH eſſe ad TB, BE, vt MV, VH ad TI, IE rectangulis; quòd ſint ex pręc. vt LS ad LB, vel VO ad OI. Ideo vt LB, BB ad LE, BE, vel OV, VI ad OI, IV rectangulis ob eandem altitudinem in eadem proportione, ac linearum. Vnde *permutando* MB, BH erit ad MV, HV, vt LB, BB ad OV, IV rectangula, ſ. vt LB ad OV, & ſic alias proportiones potes permutare.

COROLLARIVM II.

HInc haurire licet ea rectangula eſſe æqualia ex ſegmentis à diametro aliquo factis, quibus ipſi diametri inſiſtunt æquales, quoniam HS, & SM rectangulum erit ad BB, & ET rectangulum ad SR ad EL, ſed hæ lineæ SX, EL ſunt æquales ex Theſi, ergo etiam rectangula EBT, & HSM.

EXPENSIO VII.

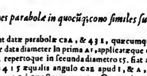
De ſimilitudine Figurarum.

DEfinitio duarum figurarum ſimilium ab Eutocio 3 æquiponderantium, & Apollonio Conici ſexto allata eſt, quòd ſegmenta diametrorum inter verticem, & applicatas vnius ad applicatas ſuas, proportio ſit, vt ſegmenta alterius ad ſuas applicatas, cui Mydorgius lib 4 con. eam conditionem addit, quam demonſtrat omnino neceſſariam, quod applicatarũm ad diametrum anguli ſint ęquales in vtraque figura.

THEOR. I. PROPOS. LI.

Omnes parabolæ in quocũq; cono ſimiles ſunt.

SInt datæ parabolæ CBA, & 431, quæcumque, & data diameter in prima AF, applicatæque CB, & BD, repertoque in ſecunda diametro 15. fiat angulus 415 æqualis angulo CAB apud 1, & A, & ducatur 45 à puncto, in quo 41 Crus trianguli ſecat figuram iuxta eundem angulum, ac CB applicata facit cum diametro AB; Deinde fiat, vt AB ad AD ſic 15 ad 12, & ducatur altera applicata 32.



Progr. 1. Probatur ex prop. 5. h. vt 12 ad 15, & ideo ex effectione, vt AD ad AB, ita quadratum 32 ad quadratum ex 45, & ideo, vt BD quadratum ad CB quadratum, & ideo ex 26. l. 6. El. erit etiam latus 32 ad latus 45, vt latus BD ad latus applicatæ CB.

Progreſſ. 2. Poſtea conſiderandum eſt ob duos angulos ex effectione æquales apud 1, & 5 ipſis B, & A triangula 145, & CAB eſſe ęquiangula ex Cor. prop. 17. lib. 1. Elem. Et ideo eſſe 45 ad 51, vt CB ad BA. Et vt 51 ad 21; Sic BA ad DA. Sed erat in 1. progr. 32 latus ad 45 latus, ſic BD ad CB, & nunc vt 45 ad 51, ſic CB ad BA, & vt 51 ad 21; ſic BA ad DA. Ergo ex æquo, vt 32 ad 21; Sic BD ad DA; Et ſic oſtendetur de alijs, quæ poſſent trahi. Cum ergo ſit 32 applicata ad ſegmentum diametri 12 in vna parabola interceptum, vt

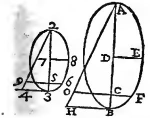
in

in altera applicata BD ad diametri interceptum ſegmentum DA, & idem argumentum ſit de alijs anguliſque applicatarum ſint æquales. Parabolæ erunt ſimiles ex definitione 16. h.

THEOR. II. PROPOS. LII.

Si binæ Ellipſes, ſeu Hyperbolæ, ſint quarum vna, habeat ſegmenta intercepta inter verticem, & applicatas ad alterius ſegmenta, vt applicatæ ſibi ad applicatas alterius in angulis æqualibus; illæ erunt figuræ ſimiles.

*SIt figura 3 6 8. in qua ſit ſegmentum 3 5 ad ſegmentum BC alterius, vt 5 6 applicata ad CF applicatam, & idem ſit de alijs omnibus ſegmentis in angulis æqualibus ACF, & 2 5 6. Dico figuras eſſe ſimiles.

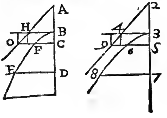


Probatur. Ita ponitur 3 5 ad CB, vt 5 6 ad CF; Ergo *permutando* erit quoque 3 5 ad 5 6, vt CB ad CF, vel *conuertendo* 5 6 ad 3 5, vt CF ad CB. Ergo cùm ſint in angulis æqualibus, figuræ erunt ſimiles ex def. 16. huius.

THEOR. III. PROP. LIII.

Hyperbolæ duæ, ſeu Ellipſes, quarum diameter tranſuerſa vnius ad contiguam parametrum ſit, vt alterius intercepta diameter ad ſuam contiguam parametrum in angulis æqualibus, illæ figuræ erunt ſimiles.

*SIt Hyperbola, ſeu Ellipſis 3 6 8, & DFE, & ſit intercepta diameter 3 2 ad parametrum 3 4, vt AB intercepta alterius ad BH parametrum. Dico eas figuras eſſe ſimiles.



Probatur. Fiat, vt 2 3 ad 3 5. Sic AB ad BC, & ducatur CO, & 5 9. Sicut etiam 2 9, & AO per extrema parametri; Triangula erunt ęquiangula ex 5. l. 6. cũ ponatur 2 3 ad 3 4, vt AB ad BH ex Theſi.

Quia itaque triangula ſunt ęquiangula, erit 5 9 ad 3 4, vt CO ad BH, & vt 3 4 ad 3 2, ſic AH ad BA, & vt 2 3 ad 3 5, ſic ex effectione eſt BA ad BC Ergo ex æquo, vt 5 9 ad 3 5; ſic eſt CO ad C B. Sed CO ad CB habet proportionem duplicatam CF ad CB, ſicut etiam 5 9 ad 5 3 eius quę eſt 5 6 ad 5 3, quia ex propoſ. 8. huius BO rectangulum quadrato CF, & 3 9 rectangulum eſt æquale quadrato 5 6. Vnde ex 19. lib 6. ſunt CO, & CF, & C B veluti etiam 5 9, 5 6, & 5 3 in continua proportione: Ergo erit 5 6 ad 5 3, vt CF ad CB vt tract. 16. propoſ. 2. & idem poterit oſtendi de ſegmentis 3 7, & BD ſicut de applicatis 7 8 & DE, & quibuſcumq; alijs. Cum ergo ſit 5 6 applicata ad interceptam diametri portionem 5 3, vt CF ad CB in æqualibus angulis C, & 5 cum applicatæ parallelæ ſint parametris figuræ; ex defin. 16. ſimiles erunt.

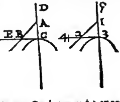
COROLLARIVM.

IDeò figuras eas eſſe ſimiles indicabis, cum rectangulum ex diametro intercepta, & ſegmento V. g. 2 5, & 5 3 eſt ad quadratum applicatæ 5 6 vnius, vt rectangulum AC, & CB ad quadratum C F alterius. Quia enim eſt 2 5, & 5 3 rectangulum ad quadratum 5 6, vt diameter tranſuerſa 3 2 ad parametrum 3 4, & rectangulum AC, & CB ad quadratum CF, vt AB ad BH erit diametri tranſuerſæ 2 3 ad parametrum vnius 3 4, vt AB diameter tranſuerſa ad BH parametrum alterius. Vnde figuræ ſimiles erunt ex prop. pręc.

THEOR. IV. PROPOS. LIV.

Si duæ hyperbolæ ſint, quarum vna obtineat tranſuerſam diametrum ad ductam à vertice ad Aſymptotum, vt alterius diameter tranſuerſa ad ductam ſimiliter, illæ Hyperbolæ erunt ſimiles.

SIt CA ſemidiameter tranſuerſa in Hyperbola AB Aſymptotus, & CB ducta à vertice. Sicut alterius 1 3 ſemidiameter 1 2 Aſymptotus 3 2 ducta à vertice ad Aſymptotum: Dico, quòd ſi ſit 1 3 ad 3 2, vt CD ad CB eas Hyperbulas eſſe ſimiles.



Probatur: Quadratum ex 3 2 ex propoſ. 45. h. æquatur rectangulo ex ſemidiametro 3 1, & ex dimidio parametri 3 4. Ergo cum ex Theſi ponatur 3 1 ad 3 2, vt AC ad CB erit etiam 3 1 ſemidiameter ad ſemiparametrum CB ſ. in duplicata ratione AC ad CB, vel 1 3 ad 3 2 ex Coroll, prop. 21. lib. 1.

lib.6. Elem. Quare. & tota diametee 3 5 ad totam p. e merrum ſuam eam habebit rationem, quam CD tota lameter ad parametrnm ſuam CB ex prop.18. lib.5. Elem. quare ex pręced. figuræ erunt ſimiles.

COROLLARIVM I.

QVod ſi adſint duæ Hyperbolæ, quæ ſint in 'ſymptotia æquiangulis, & etiam a 3, & CB ſint applicatæ ad verticem in angulis æqualibus, tunc illæ Hyperbolæ eeunt ſimiles, quod ob æquiangula triangula, ita ſit 3 1 ad 3 2, vt CA ad CB.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque eaa figuras eſſe ſimilca, quarum rectangula contenta ſub parameteo, & diametro tranſuerſa ſunt ſimilia; quia etiam eune eit diameter vniua ad ſuum parametrum, vt diameter tranſuerſa alterius ad ſuum quoque parameteum ob ſimilitudinem triangulorum ſub ijs contentorum.

EXPENSIO XIII.

De deſcriptione vniuerſali Sectionum.

EX principijs, proprietatibuſque explicatis iam conuenit fructum excerpere, & deſcriptionem Sectionum, tum ad Specula Vſtoria perpolliendа, tum ad Parallelos Solis in Horologijs Solaribus deſceibendoa, tum etiam in motibus planetarũ per Ellipſes explicandis deſeeruientẽ explicaer; Secundùm itaque diuerſa principia, quæ tradidimus, ſic ſunt diuerſi modi Sectionum deſcribendarom, & in hac Expenſione modos docebimua vniuerſales omnibus ſectionibus deſeeruientes.

PROBL. I. PROPOS. LV.

Data baſi ſectionis alicuius, & diametro, & angulo ab illis facto ſectionem deſcribere per puncta.

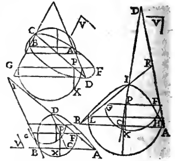
HOe prob. fundatur in ſecunda expenſione de diametro.

Sit itaque primò data ſectionis baſis AB, quę erit etiam coni, nimirum applicata il a, quæ pee centrum b ſis coni tranſit; idecque cum teanſeat pee centrum er t ſemidiameter, quòd verò pertingat ad ſectionem erit applicata.

Hac AB itaque data, & diametro ſectionis CD, & angulo V, quem facit applicata cum diametro, ſic deſceibetur quęlibet ſectio.

Applicabitur diametee totus DC ipſi applicatæ, & baſi BA ſecundùm angulum datum V, ad eius medietatem C, ita vt CA & CP ſint portionea ęquales; duceturque à puncto B, vel A, quæ pertingat ad verticẽ diametri D recta AD, & in parabola ab alio eatremo B educetue diametro parallela BI. In hyperbola autem AB, quæ trãſeat per verticẽ diametri intercepti I, & occureat AD in R.; in Ellipſi verò coniunges aliud extremum diametri C, & baſis B, produceſque quantùm placoerit.

Ducta deinde FG parallelis, & HL, & etiã plneibus ad eaactiorẽ deſcriptionẽ intee FP, & PG eeperies mediam peoportionalem ex prop. 16. lib. 6. Eucl. qualia vna eſt PX; quas mediaa proportionales omnea applicabis diametro CP inteeceptæ à pũcto P ſecundùm angulum datum menſurando eas in lineis GF, peoductis vbi eſt opus, & per extrema eaeum puncta duces manu æquabili fleaam lineam; illa enim ſectionem requiſitam repreſentabit.



Probatur. Nam lineę repertę, quarum vna eſt PX ſunt applicatæ, ergo pee eatrema earum tranſibit ſectio. Conſequentia patet ex definitione applicatarum. Antecedens verò propoſitio probatue, quia quadeatum ex applicatis prop.5. & 6. huius, eſt æquale rectangulo ex diameteia baſium coni confecto, quæ à diametro ſectionis intercipiuntur, quales ibi in fig. illarum prop. ſunt LK, & KM, aut MK' & KN. Sed HL in iſta fig FG, & cęt. ſunt parallelæ diametro baſia coni AB, conus verò eſt IAB, vel BRA, ergo, & etiam ipſæ diametri baſium coni ſunt; quare eorum eectangula ex ſegmentis FP, & PG, & cęt. facta erune æqualia quadrato PX, & cęt. ea Probl.14 lib.2. Eucl. & ex prop.19 lib.6. Ergo erunt applicatæ.

PROBL. II. PROPOS. LVI.

Dato parametro, & diametro intercepta, Sectiones conicas per puncta delineare.

HÆc deſcriptio fundatur in 3. Expenſione.

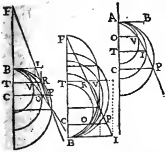
Detur ergo Parametee applicata AA alicuiua paeabolæ, & diametee, cuiuſcumque longitudinis ad placitum AC. Eligantur in ipſo quælibet puncta V. g. punctum C, intee AB, & AC inueniatur media peoportionalis CP hæc erit applicata, ſic ſi electo alio puncto T intee AT, & Parametrum AB inueniatur media proportionalis TI, hæc eeit applicata, ſic facias in puncto O, & eeperias OV. Nam hę omnes, & quaſcumque alias inueneris, erunt applicatæ: quaee ſi pee exteema puncti manu æquabili ducas lineam, hæc erit parabolica ſectio.

Quod vero CP, & TI, & cęt. ſint applicatæ patet. Nam in parabola ex prop.6 h. rectangulum ex Parametro, & intercepta portione diametri inter verticem, & applicatam eſt æquale quadrato

ipſius

ipſius applicatę, ſed ſi ſuper CP, & quamlibet aliam, ita inuentam fiat quadratum hoc erit æquale re-tangulo ex CA diametro intercepta, & AB Parametro: Quoniam eſt media proportionalis inter vtraſque lineas AB, & AC ex conſtructione, vnde fit ex Prop. 19. lib. 6. Euc. quòd quadratum mediæ ſit æquale rectangulo extremarum. Ergo CP, & aliæ ſimiles inuentę erunt applicatæ ex pr. 7. h.

Si verò deſcribenda ſit aliqua Hyperbola, vel Ellipſis, & detur diameter tranſuerſa FB. Parameter verò contigua in Hyperbola, & in Ellipſi BI. Ab extremo diametri BF per extremum Parametri I ducatur recta FI.



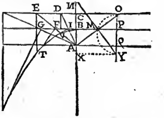
Deinde electis quibuſlibet punctis C, & T ducantur in FI productā, ſi opus fuerit parallelę TV, & CP ipſi IL, interq; TB, & TR inueniatur media proportionalis TV, nā TV erit applicata. Sic ſi inter CB lineam, & CP inueniatur media proportionalis CO hæc erit applicata. Quare ſi inueniantur plurimę aliæ, habebimus puncta, per quæ ſuaui manu ducta linea Hyperbolicam ſectionem, vel Ellipticam exprimet. Quod verò ſint applicatæ patet. Cum ſint medię proportionales V. g. TV inter TB, & & TR erit ex TV quadratum æquale rectangulo ſub TR, & TB contento; Sed hoc rectangulum eſt æquale rectangulo TI, ſub TB, intercepta diametro, & BI parametro, ſi addatur figura IR in Hyperbola auferatur in Ellipſi ſimilis, ſimiliterq; poſita, ergo TV erit applicata, quia continet quadratum iuxta propoſ. 8. huius æquale rectangulo ſub Parametro BI, & intercepta diametro contento deficiente ei in Ellipſi fig. IR, vt ibi requiritur, vel abundante in Hyperbola, vt fiat rectangulum TI ſub parametro BI. & intercepta TP contentum, & ſic aſſeras de omnibus alijs ſimiliter inuentis. Quapropter ſi per extrema puncta earum, cùm plurimæ inuentæ fuerint ducatur flexa, hæc erit Ellipſis, vel Hyperbola.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Datis Vmbelicis, & vertice, & poſitione ſectionum, eas in eodem plano deſcribere per puncta.

SIt datus vertex parabolæ B, & Vmbilicus A diſtantię BA fiat ęqualis BC, perq; puncta B, C ducantur in vtramque partem perpendiculares CE, & BG, & ab Vmbelicu A ad D, & E pūcta, vt placęt in OS rectæ ducantur AD, & AE; & aliæ ad libitum, quæ ſecabunt lineam BG in I, & F, à quibus punctis excitentur perpendiculares IV, & FT; à punctis verò D, & E perpendiculares ad CA educantur DV, & ET; Nam hæ ſe interſecabunt, cum prioribus orthogonalibus IV, & FT in Punctis V, & T, per quę à vertice B neceſſariò parabola ducta tranſibit.

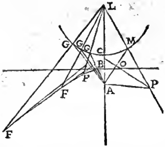
Hæc deſcriptio fundatur in propoſ. 16 huius, pro cuius oſtenſione inſpice dextram partem fig.



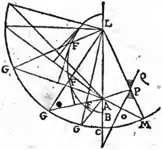
Ibi enim probatur, quod à vertice parabolæ ducta ad contingentem, quę eſt ibi AA, & hic BM ſit æqualis quartæ parti figuræ ſub diametro intercepto, & parametro cōtentæ, & in ipſius probatione progr. t. quod quadratum applicatæ, quæ ibi eſt CB hic XY ſit æquale rectangulo, quod ſub intercepta diametro inter contingentem, & ſectionis verticem, vt ibi eſt AF hic BN, & Parametro continetur. Si ergo hic probetur, quod quadratum MB à vertice in MY perpendicularem ipſi AO ductæ ſit ęquale quartæ parti quadrati, cuius latus XY, hęc erit applicata, & Y punctum, per quod parabola tranſit, & NY contingens. Id verò ita probatur MA eſt æqualis MO ob æquidiſtantes CO, & BP, & AQ. Vnde, & BM erit æqualis PM ob parallelas OY, & CA, & ſimilia triangula POM, & MAA. Quamobrē quadratum ex dimidia MB, vel PM erit quarta pars quadrati totius BP, quale quadratum ex YX; Sed hoc quadratum PM eſt æquale rectangulo ex PY, & PO, vel PQ ęquali ob rectangulum triangulum OMY Ergo hoc rectāgulum erit quarta pars rectanguli contenti ſub PY, & ſub linea quadrupla ipſius PO, vel PQ æquali BA: verū PY æquat BN; ſiquidē ex propoſ. ta. BX, & BN æquantur. Vnde etiam PY, & BN, quod, & ab æquiangulis triangulis MBN, & MYP conſtat. Linea verò QP eſt æqualis ipſi BA, cuius quadrupla eſt parameter; igitur quadratum ex XY erit rectangulo ex BN, & parametro, æquale: Vnde XY latus applicata erit, per cuius extremum Y tranſibit ſectio parabolica.

Si verò ſit Hyperbola, vel Ellipſis datis duobus Vmbelicis A, & L, ſumatur BC æqualis AB, & centro L interuallo LC portio circuli deſcribatur, quam eductæ à centro L, ſecent quæcumque rectę quomodocumque in punctis MCCGG; Et ad hæc puncta ab vmbelico A rectæ ducantur AM, & AG, & cęt. quibus bifariam ſectis V. g. in O, à punctis medietatum perpendiculares excitentur, quæ lineas ab L vmbelico productas ſecent in FFFP. Dico puncta F, F, F, P eſſe in Hyperbolæ, vel Ellipſis ambitu.

Probatur. Nam LC eſt æqualis diametro tranſuerſę; Vmbelici enim ęqualiter ſunt remoti ab extremis diametri tranſuerſę in hyperbola, quidem extra diametri tranſuerſæ extrema, in Elli. ſi verò intra eam: quare diameter tranſuerſa in Hyperbola



perbola eſt minus linea AL diſtantia vmbelicorum gemina BA, qua diſtāt vmbelici à vertice, in Ellipſi verò maior eſt. Sed in vtraque figura talis eſt LC, cum deficiat in Hyparbola AB, & BC æqualibus; in Ellipſi verò abundet. Ergo LC diameter tranſuerſa eſt. Quo poſito, ſi probetur angulos ad P eſſe æquales PO erit tangens ex propoſ. 23. huius, & propter hoc erit punctum P in Hyperbola, ſiquidem ibi oſtenditur tangentem cum duabus emiſſis ab vmbelicis angulos efficere æquales.

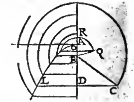


Sed id facilè oſtenditur. Nam triangula MPO, & POA cum ſint rectangula, & habeant PO latus commune, & MO, & OA crura æqualia, ex propoſ. 17. lib. 1. Eucl. habebunt etiam angulos apud P æquale APO, & OPM. Quare, & in Ellipſi QPL erit æqualis cum ſit ad verticem angulo MPO, & conſequenter angulo OPA. Et hinc cùm prouenientes ab vmbelicis LP, & PA faciant cum PO angulos æquales in Hyperbola MPO, & OPA in Ellipſi QPL, & APO, linea PO erit tangens, & punctum P punctum contactus. Vnde erit in ambitu Hyperbolæ, vel Ellipſis. Accedit, quod ob æqualitatem triangulorum PMO, & OPA, baſis PM eſt æqualis baſi PA: quare LP in Hyperbola ſuperat diametrum tranſuerſam LM, vel LC linea PA, In Ellipſi verò addita linea PA ipſi LP, vt fiat LM diametro tranſuerſę æquatur LC iuxta id, quod exigit prop. 23. h.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

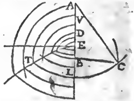
Datis Conicæ ſection's, Vmbelico, & vertice, eam per puncta promptiùs deſcribere.

SIt primùm deſcribenda Parabola, & datus ſit Vmbelicus B, & vertex A. Extendatur diameter AB, quantum opus fuerit, & ſumptis in eo RA æquali AB vltrà verticem, deinde plurima alia puncta, vt O, & D ſumantur, & ab illis ducantur perpendiculares OQ, & DL, deinde interuallo DR, vel OR, nempe ea diſtantia, quà vnaqueque educta DL, & OQ diſtat ab R, centro verò Vmbelico ipſo B ducantur arcus, & vbi ſecant eductas in Q, & L, vel C, ibi tranſibit ambitus Parabolicus.



Probatur ex illis, quę diximus propoſ. 26. huius. Nam omnis linea, vt ibi probatum eſt, quę ducitur ab vmbelico ad applicatas, qualis eſt BC, vel BQ, eſt æqualis diſtantiæ eius à vertice in diametro ſumpta; nimirum diſtantiæ DA, vel OA, & inſuper diſtantiæ, quam vmbelicus habet à vertice AB, vel AR; quare BC, quæ eſt æqualis diſtantię DR, & BQ diſtantiæ OR, cum applicata CD, vel OQ conueniet neceſſariò in puncto Q, vel C ex prop. 26. huius Coroll.

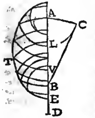
Si verò ſit Hyperbola, vel Ellipſis, in qua dentur Vmbelici B, & A, vertex E. Lineæ EB accipiatur æqualis, quæ ſit EN: deinde centro A ducantur plurimi gyri interuallo maiori, quam AE, in Hyperbola, quorum vnus ſit LT. Et in Ellipſi non maiori, quam AE, ſed maiori, quàm BE, quorum vnus TV. Rurſuſque interuallo D, & quolibet ex circulis ductis facto centro in vmbelico B alij circuli ducantur, quorum vnus ſit TV in Hyperbola radio DL, in Ellipſi verò LT radio DV, vbi ſe interſecant in T, illud punctum T, & alia ſimilia erunt in circũferentia ſectionis conicę. Vnde linea per ea ducta Hyperbolam, vel Ellipſim imitabitur.



Probtur verò ex iis, quæ oſtendimus prop. 25. huius. Nam in Hyperbola, Lineæ, quæ ab vmbelico ad contactum ducitur, quæ ibi eſt, XC debet

debet eſſe maior, quàm alia, quæ ad eundem contactū ab alio vmbelico ducta eſt, vt ibi eſt BC quantitate diametri tranſuerſę, talia autē eſt AC in hac figura. Nam comprehendit diametrum tranſuerſam DA, quæ remanet ſubductis duobus vmbelicis DE, & EB, & inſuper cōprehendit totam DL, quæ eſt menſura lineę BC; Ergo AC eſt ęqualis lineę ac, & diametro tranſuerſę AD.

Sed in Ellipſi ex eadem propoſ. duę lineæ ab vmbelicis ad ambitum eius inclinatę ſimul ſumptę debent eſſe ęquales diametro tranſuerſę talea verò ſunt BC, & CA. Nam BC eſt equalis diametro tranſuerſæ BA, & CA lineę BD; Siquidem tota AD eſt diameter totus, & ſemper gyri accreſcunt tali ratione, vt eâdem quantitate, quâ priùs ducti creſcunt, eâdem poſteriùs ducti decreſcāt, quem modum etiam docuimus prop. 25. tract. 18. vnde patet, quod Ellipſis ibi deſcripta eſt ꝓpriè ſectio coni Elliptica.



EXPENSIO XIV.

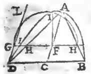
De circumſcriptione figurarum conicarum.

SIcut agit Euclides de circumſcriptione circuli circa figuras rectilineas, ita, & hic breuiter debemus agere de circumſcriptione figurarum, ſaltem circa triangula; cùm illa ſola omnibus figuris poſſint inſcribi, quę à ſectione coni deriuant.

PROBL. I. PROPOS. LIX.

Circa datum triangulum Parabolam circumſcribere.

SIt datum triangulum BAD, cuius baſis AD diuidatur per medium in C, & à vertice A ad diuiſionem C recta ducatur, cui parallela DL excitatur à puncto D. Electis verò in AC, quibuslibet punctis; vt F; ducatur baſi parallela HG, inter autem eius portiones GF, & HF inueniatur media proportionalis ex Eucl. prop. 16. lib. 6. FI, & transferatur ſuper FH, & ſit FI. Dico, quòd per punctum I tranſit parabola, cuius ambitus per BALD tranſeat. Vnde ſi plurimæ aliæ ducantur, vt FG, ab alijſque punctis in AC ad libitum aſſumptis, & mediæ proportionales, vt FI inueniantur plurima puncta obtinebimus, per quę parabola ducatur.



Probatur. Nam quoniam FI eſt media proportionalis inter FH, & FG; quę eſt æqualis DC erunt tres proportionales; vnde ex Cor. prop. 22. lib. 6. Eucl. quadratum ex tertia CD erit ad ſecundę quadratum FI, vt DC ad FH lineas.

Sed, quòd FH, & CD ſint parallelę in triangulo CAD, ita erit CO, vel CA ad FH, velut reſpondet proportione AC ad AF ex Cor. prop. 4. lib. 6. Euc. Ergo quadrata CD ad quadratum FI, ita erit proportione, vt AC ad AF: quare latera horum quadratorum erunt applicatę ex prop. 5. huius, & ſic per extrema earum I, & D tranſibit ambitus parabolę, cuius vertex A.

PROBL. II. PROP. LX.

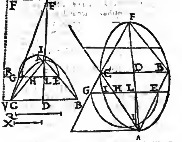
Circa datum triangulum deſcribere Ellipſim, ſeu Hyperbolam etiam ſpecie notam.

SIt triangulum quodcumque ABC, circa, quod deſcribenda ſit Hyperbola, vel Ellipſis, quę poteſt eſſe indeterminata, & quęcumque illa ſit, & & tunc ducta DA, quę diuidat baſim BC per medium à puncto C ducenda erit ad DA productam in F, quod libuerit punctum, recta CF.

Quod ſit proponatur ſectio conica ſpecie nota, cuius diameter ſit ad parametrum, vt Z linea ad X lineam.

Primo lineia DC ſemibaſi, & AO reperiatur tertia proportionalis RV, vt exhibemus in hyperbola exemplum, rectangulumque OR erit ęquale quadrato ex media OC conſtituto, vtpote conſtitutum ab extremis, nempe OV equali DA, & VR.

Secundo fiat, vt X ad Z, ita RV ad OF reperiendo nimirum quartā proportionalem FD. Dico, quod eah bebitur ſpecie nota Hyperbola, vel Ellipſis, cuius diameter tranſuerſa ſit ad contiguam parametrum, vt Z ad X: quia nimirum rectangulum FV ſub FO, & DA contentum dicit eam proportionem ad rectangulum DR ſuper eandem baſim DV conſtitutum, quam altitudo DF ad altitudinem VR ex I. lib. 6. Eu. ergo etiam rectangulum FV ita eſt ad ęquale quadratum ex DC; Sed VR ad DF ſe gerit ex conſtructione, vt X ad Z vel conuertendo DF ad VR, vt Z ad X. Ergo etiam rectangulum FV ad quadratum ex DC. Ergo etiam diameter tranſuerſa FA talis erit ad Parametrum; qui ſemper eſt in quacumque figura conica, vt rectangulum ſub FD, & DA ad quadratum ex DC, quę debet eſſe vna ex applicatis in Hyperbola, vel Ellipſi, quę circumſcribatur circa tres vertices B, A, & C.

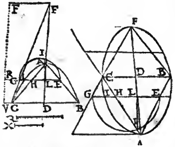


Sit ergo deſcribenda Hyperbola, vel Ellipſis circa BAC, iam ſiue ſit ſpecie nota, ſiue non, ſiue CF ducta ſit fortuitò ad DF, ſiue ad deſcribendam ſpecie notam ſectionem, electa ſit FD modo prędicto eodem pacto deſcribetur,

A puncto quolibet V g. L ducatur baſi BC parallela LH, quę pertingat vſque ad FC, vel CA in G,

interque LG, & LH inueniatur media proportionalia LI, quę hinc inde transferatur ab L verſus E, & I, & ſit LI. Dico, quod Ellipſis, vel Hyperbola tranſiens per B, A, C vertices, tranſibit quoque per I in linea EG punctum ſignatum, & ſic de quibuſcumque alijs, quæ à punctis in DA electis trahantur, & inuentis eodem modo proportionalibus erit dicendum. Vnde plura puncta poterimus venari, per quę Hyperbola, vel Ellipſis ducatur. In Ellipſi verò etiam in FD idem efficiemus, & Ellipſim completam conſequemur, quę tranſeat per BFCA vertices.

Probatur autem. Quia tres ſunt proportionales ex conſtructione LG, & LI, & LH. Ergo quadratum ex media eſt æquale rectangulo ex extremis ex Eucl. prop. 19. lib. 6. quo poſito, ſi probetur rectangulum ex FD, & DA lateribus eſſe ad rectangulum ex FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum ex LI oſtendetur ex propoſ. 6. h. DC, & LI eſſe applicatas, hoc autem ſic oſtenditur.



Nam in triangulo FDC ob parallelam GL ad baſim DC, ita eſt DC ad LG, vt DF ad FL, & eadem DC ob eandem rationem in triangulo DAC ita eſt ad LH ſicut DA ad LA. Si ergo ex antecedentibus in prima combinatione componatur quadratum; nimirum DC. & DC, & ex anteeedentibus in ſecunda rectāgulum DF, & DA; quadratum DC, & CD erit ad rectangulum ex conſequentibus in prima combinatione, & LG, LH, vel huic æquale quadratum ex LI, vt rectangulum DF, DA ad FL, & LA rectangulum ex conſequentibus in ſecunda combinatione, vt eſt regula Rectāgulorum proportionalium Tr. 17. propoſ. 13. vt in parallelogrammis proportionalibus latera proportionalia antecedentis ſint in vno, & conſequentia in alio, vt hic vides.

DC	vt	DF	&	DC	vt	DA
ad		ad		ad		ad
LG		FL		LH		LA

Ergo Compoſitum, vt Compoſitum.

DC	&	DC		DF	&	DA
erit		ad		ad		
LG	&	LH	vt	FL	&	LA
Ideſt	LI					

Vnde patet, quod ita eſt rectangulum FD, & DA ad rectangulum FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum IL, vnde DC, & LI erunt applicatæ, & conſequenter à vertice A per eorum extrema I, & C tranſibit Hyperbola, vel Ellipſis.

EXPENSIO XV.

De Parabolis ſpecialiter deſcribendis.

VIſis Sectionum conicarum vniuerſalibus regulis, quę ſcilicet in omnibus tum Hyperbolis, tum Ellipſibus, tum Parabolis adhiberi poſſunt, oportet etiam aliquas ſpeciales deſcriptiones docere, quæ à ſingularibus vnius cuiuſque ſpeciei proprietatibus ortum habent.

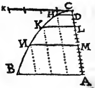
PROBL. I. PROPOS. LX.

Parabolam per puncta deſcribere data diametro, & applicata.

SIt data applicata AB, & diameter quæcumque AC. Diuidatur AB, in quas libuerit partes æquales V.g. in quatuor, & diameter AC in tot alias æquales, quę quadratum numerum prędictarum applicatæ AC partium exęquent V. g. 16.

Si ergo rectę ducantur ęquales applicatæ partibus, & ei parallelę à diametri partibus, quæ quadrato partium in applicata aſſumptarum reſpondeant V. g. vnam ſi aſſumpſeris, quoniam quadratum vnius eſt vnum, duces à prima parte diametri D ęqualem DH vnicę parti applicatæ: Si duas à quarta parte diametri educes LX, ęqualem duabus partibus, quoniam quadratum duarum eſt quatuor; ſi tres à nona parte deduces MN, & cęt. Si ergo per puncta CHXNB ducas flexam, hęc erit Parabola.

Probatur. Nam ex propoſ. x. huius, ita ſe habet AC intercepta ad CL interceptam, vt quadratum AB ad quadratum LX; ſed quadratū AB eſt 16. & quadratum applicatę LX eſt 4. Linea verò CA eſt 16. & linea CL eſt 4. Ergo ita ſe habet AC ad CL, vt quadratum applicatę AB ad quadratum applicatę LX, & ita dicas de alijs.



Poſſent etiam trahi à partibus applicatę AB, quę eſſent ęquales AD, vt AL, aut AM ſucceſſiuè ſemper diminuendo, dempto quadrato à ſingulis partium, à quibus deducitur, vt videa factum in punctatis H, X, & N: Nam à prima H ablatum eſt quadratum vnius; quòd à prima parte, & viciniori diametro deducatur, ſi à X quadratum duarum partium, quòd à gemina. Poſſent quoque trahi à CX contingente verticem, & parallelam applicatæ, quę ſecundum quadrata partium diſtantium à C creſcerent.

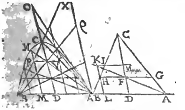
PROBL. II. PROPOS. LXII.

Parabolam circa datum triangulum deſcribere.

SIt triangulum ACB; circa quod oportetat Parabolam delineare. Diuiſa per medium baſi BA in D, ducatur CD, & in illa ſumptis quibuſlibet

partibus

partibus V. g. F; ducatur ab angulo A per F parallela ad baſim AA, quæ ſit GH, & vbi ſecat crua CB oppoſitum angu'o A parallela ducatur ad CD, quę ſit LK occurrens AF ab angulo A ductæ in X. Dico X *punctum eſſe Parabolæ, quæ tranſit per* A, C, B, *vertices tr*:*anguli dati*.



Probatur autem: Quia, ſi ducatur KN, hæc erit applicata. Quare punctum K, vtpote extremum applicatę erit in Parabola. Quod verò KN ſit aplicata patet, quia eſt media proportionalis inter NI, & DB. Vnde iuxta doe. 59 huius erit applicata, quòd verò ſit media proportionis ita patet. Nam in triangulis ADF, & FHX æquiangulis, quòd ſint ad verticem inter parallelas DF, & HK, ita eſt AD, vel æqualis DA ad FH, quæ æquatur NX, & lineę DL, ſicut DF, vel æqualis LH ad HK ideſt eſt DB ad DL, vt LH ad HK in triangulis quoque ad verticem, & inter parallelas IHK, & LHB, ſicut eſt LH ad HK, ita LB ad IX, quamobrem, & reliqua DL, quę eſt æqualis lineæ NX; ad reliquam NI eodem pacto ſe habebit, vt LA ad IK, & LH ad HX, & OB ad FH, vel NX: Si ergo ſicut ſe habet OB ad NX, ita ſe habet NK ad NI; patet. NK eſſe mediam proportionalem inter DB, & HI.

Nota idem ſequi, ſeu parallelæ ſint productę baſi ęquidiſtanter, vt in fig. hac NX, ſeu ab ęquidiſtantibus ducantur diametro parallelę, vt HX ab MP, quę occurrant lineę AX, ſeu in in altera fig RM ab NV ad AN, ſeu æquidiſtantes diametro, vt MN, ſeu XK, ſic nec interet, ſi ab angulo A, ſiue ab angulo C, vel B emitantur. Ita nec interet an partes, per quas tranſeunt, ſint in ipſo diametro DC, vt AV, quæ tranſit per V, ſeu in eius parallela intra partes in diametro producto aſſumptas, vt per R ducitur BR, ſeu extra, vt AX, ad quam ducitur BX, ſeu in partes in diametro producto aſsūptas, & ducitur AO, quę tamen partes in CO producto debent eſſe æquales ijs, quę intra diametrum CD ſunt aſſumptæ.

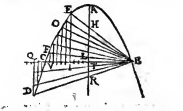
PROBL. III. PROPOS. LXIII.

Parabolam producere, ſeu reſarcire.

SIt Parabola BAC, quam oporteat reſtaurare ab E vſque ad F, ſeu producere à C vſque in D.

Reſarciatur ergo primo reperiendo diametrum quemcumque AL, & applicatam quamcumque BC, à puncto itaque B, vbi applicata ſectionem tangit, è regione partis reſtaurandæ ducantur ad E, & ad F extremas oras abruptæ partis rectę BE, & BF, ſecabunt diametrum in H, & L: Pars ergo diametri intercepta in quot libuerit partes æquales diuidatur V. g. in 5. & à B per eas rectæ ducantur, vt BO. Deinde ab iiſdem notis E, & F ducantur diametro parallelæ EI, & FV, parſque intercepta IV in totidem partes diuidatur V. g. rurſus in 5. & ab iſtis parallelæ diametro ducantur; quæ primò ductis à B occurrant. Nam puncta in quibus occurrunt V. g. O erunt in eadem parabola. Vnde per eam ducta linea EOF partes in parabola abruptas coniunget.

Oſtenſio verò eadem, quæ antecedentia propoſ. vt patet ex ipſa conſtructione, ſicut, & ſequentis operationis.



Similiter, & partes extendentur. Diuiſa enim TC in quotlibuerit partes, ſicut, & diameter TA tot ex ijs partibus diametri V. g. 3 transferantur in productam diametrum TR; & tot ex partibus applicatę TC transferantur in ipſam productam CQ, à quibus diuiſionibus parallelæ diametro educantur, vt QD que occurrant lineis, quę à puncto B per partes in diametro TR producta ſignatis tranſeant: Nā puncta mutui concurſus, vt D linearū QD, & DB erunt ea, per quæ parabola producenda tranſibit.

EXPENSIO XVI.

De Hyperbolarum particulari deſcriptione.

HYperbola ex Aſymptoto, quā ſola habet inter figuras, particulares ſibi vendicat deſcriptiones, quarum plurium modos diuerſis problematibus exponemus.

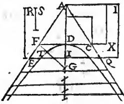
PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Datis Hyperboles tranſuerſa diametro, & eiuſdem ratione ad contiguam parametrum in dato angulo Hyperbolem in plano per puncta deſcribere.

SIt data AD dimidia tranſuerſæ diametri, & proportio eius ad contiguam parametrum, quę ſit vt R ad S. Angulus verò, ſi ita placet, detur rectus. Inter lineas R, & S reperiatur media proportionalis DC, & iam vt R ad S, ita erit ex Coroll. prop. 21. lib. 6. Eucl. quadratum ex AD ad quadratum ex CD; Talis autem etiam eſt ex prop. 44. h. progr. 3. & Coroll. portio diametri tranſuerſæ ad parametrum, nempe quadrati AD ad quadr. CD; ideoque Coroll. prop. 8. huius hyperbola erit ſpecie nota, & AC & AF erunt Aſymptoti ex prop. 47. huius, quę ſic deſcribetur.

A punctis in diametro AD producta, quibuſcumque placuerit, duces æquidiſtantes ad applicatam ad verticem DF, qualis eſt EI, Auferesque quadratum DF à quadrato IE; ita tamen, vt Id, quod remanet quadrati latus exiſtat, quod fiet ex prop. 32. l. 6. vel 11. l. 2, ſi ad id interuallū IE ex puncto C, vel F ducas portionē circuli, quę ſecet diametrū in

G. Nam recta DG erit latus quadrati tale, quod cum quadrato DS erit æquale quadrato IX. In triangulo enim rectangulo FGD quadrata crurum OS, & DG ſunt æqualia quadrato baſis FG æqualis TE. Quare GO eſt latus talis quadrati, cui deficit quadratum ex OF, ad hoc vt æquetur quadrato IE.



Si ergo DG transferatur in IE, vt ſit IT, dicn IT eſſe applicatam, per cuius extremum T à vertice D tranſeat Hyperbola in ſpecie nota.

Probatur autem. Nam ſicut eſt diameter tranſuerſa ad Parametrum, ita eſt rectangulum ex AI, DA pro vno latere, &pro alio ID ad quadratum ex IT, ex 8. b.

Progreſſ. I. Quoniam, ſi auferatur quadratum AD à quadrato ex AI remanebit rectangulum ſub tota diametro tranſuerſa, cuius dimidia eſt AD, & IO pro vno latere, & ID ſeorſim pro alio, qui eſt gnomon IXI, vt patet, & à quadrato IE quadratum DS ablatum fuit in praxi, & remanſit IT.

Progr. 2. In triangulo autem AQI ob parallelas CD, & QI; vt eſt AD, & DC, & ideo etiam eorum quadrata ex AD ad illud ex DC. Ita ex 26.l.6. ſimili proportione alludit quadratum ex AI ad quadratum ex QI. Aufer itaque proportionalia antecedens AD quadratum primæ combinationis ab antecedenti quadrato AI ſecundę combinationis; ſicut, & conſequens CD, vel OS quadratum à conſeſequente QI, vel TA quadrato, vt fecimus prog. I. & remanebunt reſidua adhuc proportionalia. Nempe gnomon IXI, vel quod ęquale rectangulum ex AI, AD pro vno latere, & ID pro alio ad quadratum ex IT ex prop. 22. lib. 5. Elem.

Progr. 3. Sed quadratum AD ex constructione eſt ad quadratum ex DC, vt diameter tranſuerſa ad parametrum: Ergo etiam rectangulum AI, & AO, nempe toto diametro pro vno latere, & DI tantùm pro alio refertur ad quadratum IT, vt diameter tranſuerſa ad parametrum, & vt R ad S, ergo ex propoſ. 8. huius erit punctum T ad hyperbolam, quod erat oſtendendum.

Si verò libeat Hyperbolem ſpecie non notam deſcribere; trahantur AD, & DC, cuius placet longitudinis nullo habito reſpectu ad datas S, & R, & cęt. vt priùs exequantur.

PROB. II. PROPOS. LXV.

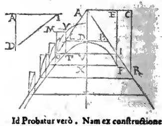
Dato Aſymptoto, & dimidia tranſuerſa diametro cum Angulo Hyperbolam per puncta delineare.

DVobus modis poteſt hoc in opus reduci, vel per lineas diametro tranſuerſę parallelas, & iuxta proportionem datam. Vel per lineas ei perpendiculares.

Sit ergo primus modus. Et dentur Aſymptoti AB, & AL, diametrique tranſuerſę dimidium AD; ſitque ad parametrum diametri tranſuerſæ data proportio, vt quadratum CR ad quadratum CA.

Ducta AC parallela BN, & in ea electis quibuslibet punctis, vt E, ducantur parallelæ ad diametrum AO, vt EF; fiatque AF tantæ longitudinis, vt eius quadratum ſit æquale duobus quadratis AI, & AD eas ſeorſim componendo rectangulè, & ducendo baſim IO, quæ ęquet FE; nam ex pr. 47 l. 1. Euc. Quadratum baſis in rectangulo eſt æquale duobus quadratis crurum. Et EF dabit punctum F, quod erit in Hyperbola, cuius vertex O, & proportio diametri ad contiguam Parametrum, quam quadrati ex RC ad quadratum ex AC. Et ſic erit, ſi eadem artificio alias producas.

Oſtendendum eſt autem, quòd FX ſit applicata ex eo, quòd eius quadratum ſe habeat ad rectangulum AX, & DA, vt vno crure, & DX pro alio, vt tranſuerſa diameter ad parametrum. Nam tunc ſic conſtabit ex prop. 8. huius FX eſſe applicatam, & ideo extremum F lineę ES eſſe in Hyperbola.



Id Probatur verò. Nam ex constructione quadratum AS eſt æquale quadrato IE, & AD quadratum dratum verò idem EF eſt etiam ęquale quadrato eidē AD, & rectangulo AX, AD, & DX, quod ſit ęquale hoc rectangulum reſiduo gnomoni quadrati ex AX, vel AS ablato quadrato AD. Ergo hoc rectangulum ex AX, AD pro vno crure, & DX pro alio erit ęquale quadrato ex linea TA.

Sed in triangulo CEA ob parallelas IE, & CR, vt eſt quadratum CR ad quadratum CA; ita eſt quadratum EI, & conſequenter rectangulum AX, AD, & XD ſibi ęquale ad quadratum ex EA linea, quę eſt ęqualia applicatę FX.

Vnde rectangulum ex AX, AD, & XD erit ad quadratum ex XS, vt diameter tranſuerſa ad parametrum; cum tale ſit quadratum CR ad quadratum CA ex præſuppoſito.

Secundus modus eſt, vt datis Aſymptotis AB, & AL ſemidiametro tranſuerſa AD, & angulo ADL ducantur ad diametrũ tranſuerſam perpendiculares, vt VO, & vbi occurrunt Aſymptotis, vt in O erigantur perpendiculares æquales ipſi LD, qualis eſt OM, & vbi terminat in M ducatur rurſùs perpendicularis MY, quantùm ſufficit. Deinde centro V radio VI portio circuli ducatur OY, & vbi ſecat MY in Y demittatur perpendicularis YT. Nam punctum T erit in Hyperbola.

Probatur facilè. Nam ex Eucl. prop. 16. lib. YT eſt media proportionalis inter TI, & TO. Quare eius quadratum, nempe ex YT erit æquale rectangulo IT, & TO ex prop. 19. lib. 6. Eucl.

Sed rectangulum per cuius latera in lineam extenſa tranſit hyperbola, vt IT, & TO ex propoſ. 42. Coroll. eſt ęquale quadrato ex TY, vel æquali DL ex constructione. Ergo inter IT, & TO

in

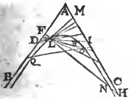
in puncto T tranſibit Hyperbola, cuius vertex D.

PROBL. III. PROPOS. LXVI.

Datam Hyperbolam reſarcire, etiam ſit eius, non niſi vnicum punctum conſtaret, vel vlterius producere. Datis eius Aſymptotis, & vnico eius puncto.

SInt dati Aſymptoti AB, & AC, & punctum L; Ex puncto L ducantur plurimę lineę ad vtrũque Aſymptotum, vt FH, & DI, & diſtantiæ minores ad vnum aſymptotum, quàm ad aliud puncti L transferãtur ſuper eandem lineam ad alterum extremum, quo tangit aliud aſymptotum. V. g. DL transferatur in EI, eo quod ſit minor DL, quàm LI, ſic FL in HN; Nam puncta Q, O, L, E, N, & ſi quę alia inuenta fuerint, erunt in eadem Hyperbola.

Probatur verò ex eò, quòd in Hyperbola puncta ab vtroque Aſymptoto ęqualiter remota, ſignata in eadem linea in Hyperbola reperiantur; Qualia ſunt FL, & NH; ſicuti EI, & DL, & cęt.



Reperiuntur autem, quia quęlibet ducta in ſectione Hyperbolica, vt LN ex propoſ. 28. huius poteſt deſeruire pro applica, cum in duas partes æquales ab aliquo diametro ſecundario diuidi poſſit ex propoſ. verò 46. Coroll. habemus, quòd rectangulum ex ambobus applicatis, quas diuidit diameter, vt tota LN cum intercepta inter ſectionem, & vnum ex aſymptotis, vt FL pro vno latere, nimirum tota NF, & intercepta inter ſectionem, & alterum Aſymptotum, vt NH eſt ęquale rectangulo facto ex LH, & LF: quare habebunt latera proportionalia ex Eucl. propoſ. 10. & erit in eadem proportione NF ad NH, ſicut LH ad FL. Ergo componendo ita erit NH, & NF ſimul, nempe HF ad NH; vt LH, & LF ſimul, quę eſt eadem FH ad LF, cum ergo LF; & NH eidem FH eandem dicant proportionem erunt inuicem æquales ex 7. propoſ. lib. 5. Eucl. Quare cum quælibet hyperbola tranſeat per puncta æqualiter ab aſymptotis remota, vt N, & L alicuius quomodocumque lineæ ductę, iſta puncta L, & N, vel E, & L, vel O, & Q taliter ſignata erunt in Hyperbola.

COROLLARIVM.

HInc ergo patet quaslibet interceptas, vt FL, & NH, quaſcumque inter ſectionem, & Aſymptotos eſſe ęquales inuicem, vt ex oſtenſ. propoſ.

EXPENSIO XVII.

De Deſcriptione particulari Ellipſium.

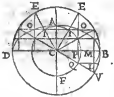
SIcut ſingulari deſcriptione Parabolas, & Hyperbolas proſecuti ſumus, ſic, & Ellipſes, quę propter duos axes coniugatas, quos habent, diuerſas deſcriptiones obtinere queunt.

PROBL. I. PROPOS. LXVII.

Datis Ellypſis extremis diametris, eandem in plano per puncta quotlibet deſcribere.

CEntro C interuallo aſſumpto dimidio diametri maioris CD deſcribatur circulus circa maiorem diametrum BD; rurſúſque eodem centro C circa minorem AF, & à communi centro C radij exeant, qui tranſeuntes per circumferentiam minoris IO ſecent circulum maiorem in DE, vt ſunt CE, à quibus punctis E perpendiculares EP ad diametrum BD deſcendant, quibus occurrant in O puncta I I rectę connectentes: Nam vbi ſecant perpendiculares EP ab ijſdem radijs dimiſſas, vt in O, ibi erit punctum Ellipſis, & per eam interſectionem O tranſibit.

Id verò oſtendetur probando rectam OP, vel ML eſſe applicatam; eò quòd rectãgulum DM, MB ex interceptis diametri trãſuerſę ſegmentis ex propoſ. 6. h. ſe habeat ad quadratum ML, vt quadratũ BC, quę eſt loco rectanguli ex interceptis diametri portionibus BC, & CD ad quadratum CF minoris diametri, quæ, & locum applicatę tenet. Vnde ſi per F tranſibit ambitus Ellipſis tranſibit quoque per L.



In triangulo rectangulo CMV ob parallelas MV, & PQ ex prop. 4. Coroll. lib. 6. Eucl. ita eſt CV, ſeu CB ęqualis ad VM, vt OQ ad PQ, vel LM ęqualem. Ergo *permutando* ita erit CV, vel CB ad QC, vel æqualem CF, vt VM ad ML. Si ergo ex CB fiat quadratũ hoc ſe habebit quadratũ CQ: Vt quadratũ ex VM ad quadratũ ML ex 26. l. 6. El: ſed hoc quadratum VM, eò quòd VM ſit media proportionalis inter ſegmenta BM, & MD, vt patet ex 13. lib. 6. Euel. eſt ęquale rectangulo ex ſegmentis diametri BM & MD. Ergo rectangulum ex ſegmentis diametri DM, & MB ſe habet ad quadratum ML, vt rectangulum, quadratumque ex BC ad quadratum CQ vel CF, quod erat oſtendendum.

PROBL.

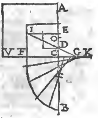
PROBL. II. PROPOS. LXVIII.

Datis Ellipſeos extremis diametris Ellipſim per puncta deſcribere.

SInt dati Ellipſena diametri extremi KF, & AB bifariam inuicem, & ad recto an gulos ſe ſecantea. Sumpta circino eorum ſemidifferentia CO, qua nimirum ſemidiameter CF minor eſt, quã ſemidiameter CA, accõmodetur à G puncto minoria diametri ad libitum electo verſũa C, ductã arcua portione, qua ſecctur diameter maior in D, vt DO ęquet CO, ductaq; GDI fiat DI ęqualis ſemidiametro minori; Dico itaq; quod extremũ I erit in Ellipſi, cuiua ambitua per extrema axiũ K, F, A, B, tranſeat. Vnde ſi plurimæ ex iſtis lineis, ſic ducantur habebimua multa puncta, per quæ ambitum Ellipſena ducere poterimus, vt videa factum in ambitu FE.

Probatur autem ex eo, quòd ducta AI ſit vna ex applicatis, quare I eiua extremum erit in circumferentia Ellipſia.

Quòd autem ſit applicata, oſtenditur ex eo, quòd quadratum ſemidiametri minoria, ſimulque applicatæ CF ſe habeat ad rectangulum, ſimulque quadratum ex ſegmentia CA, CA diametri tranſuerſæ AB, vt quadratum dictæ EI ad rectangolum ex



ſegmentia BE, & EA diametri tranſuerſę AB. Vnde ex doctrina pr.6.h. erit applicata. Quod verò res ita ſe habeat oſtenditur. In triãgulis ad verticẽ & rectangulis, & ideo æquiãgulis, & ſimilibua IDE, & CDG, vt CD ad DE, ita erit GD æqualia ex conſtructione CO ad DI, quæ ęqoatur lineæ OA. Igitur vtendo argumento compoſitionis ita erit CDE ſimol ad ſuam partem ED. Velut AEC ſimul ad ſuam partem AO: Et ita quoque erunt eorum quadrata, nimirùm quadratum EC ad quadratum DE reſpondebit proportione, vt quadratum AC ad quadratũ AO, vel æqualia CF, aut DI ex 26.l.6.

Conſidera verò, quòd, ſi auferatur quadratum ex EC à quadrato CA remanebit gnomõ VIA ęquale rectangulo ex BE, & EA. Sicut ſi quadrato ex DI auferatur quadratum DE remanebit quadratum ex EI, (nam in triangulo rectangulo DEI duo quadrata crurum ſunt æqualia qoadrato baſis ex 11. lib.2. Elem.) Ablatis ergo proportionalibus quadratis EC ab AC, & DE à DI, quæ item proportionalia ſunt in eadem proportione, remanent rectangulum BE, & EA, vel gnomon VIA, & quadratum ex EI ex pr.22.l.5. proportionalia, ac ſua tóta. Erit ergo vt quadratũ AC, quod ſtat loco rectãguli ex ſegmẽtis diametri ad applicatæ, & ſemidiametri minoria CF quadratum, ſic rectangulum ex BE, & EA ſegmentia ad quadratum lineę EI, & *conuertendo*; Vnde AI erit applicata.

EXPENSIO XVIII.

Sectiones omnes deſcribere ope parallelogrammi.

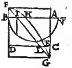
OPortet etiam docere modum deſcriptionis ſectionum, quæ ex datia figuris eruuntur, inter quaa non infimæ ſortia eſt ea deſcriptio, quę ex dato parallelogrammò in opus deducitur.

PROBL. I. PROPOS. LXIX.

Dato quocumque parallelogrammo ex illo Parabolam efformare.

DVctia parallelia AB, & CD vni laterum, & diametro FO inter AE, & IE ponatur BH, ſic inter CD, & LD media proportionalis ED; puncta E, & H, G, F erunt ad parabolam.

Probatur. Quoniam AE, & CD latera æqualia ſunt, erit IB, & AB rectangulum ad CD, & LD rectangulum, ideſt quadratum

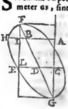


HB ad quadratum ED rectangulis æqualia ex propoſ. 19. lib.6. Elem. eò quod ſint formata ex medija proportionalibua, vt altitudo IB ad LD: Sed IE, & LD eſt vt FE ad FD ob parallelaa ex 4 lib.6. Ergo HB quadratum erit ad ED quadratũ, vt FE ad FD, & iden HB, & ED ex 5. huius erunt ad parabolam.

PROBL. II. PROPOS. LXX.

Ex parallelogrammo quocumque Ellipſim delineare.

SIt datum FG parallelogrammum, & in eo diameter GF, ſintque ductæ parallelæ alteri la-



terum AH, & CE, & inter AB, & AI media fiat BH, & inter CD, & DL media DE. Dico GH, & E, F eſſe ad Ellipſim.

Probatur. Ita eſt AE ad CD, vt BG ad DG; rurſua ita eſt AI ad DL, vt BF ad FD. Ergó rectangula compoſita ex iiſdem proportionibua AB, & AI ad rectangulum CD, & CL erit, vt BG, BF rectangulum ad GD, & DF rectangulum, vt hic videa.

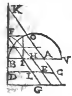
AB	vt	BG		&	BI	vt	BF
ad		ad			ad		ad
CD		DG			DL		FD
Ergo	compoſitum		vt		compoſitum.		
AB	&	BI		erit	BG	&	BF
	ad					ad	
CD	&	DL			DG	&	FD

Quare rectangulum AE, & BI erit ad CD, DL, ideſt ęqualia quadratum HA ad DE quadratom, vt rectangulum BG, & BF ad rectangulum DG, & FD: quare ex 6. h. puncta H, & E erunt ad Ellipſim.

PROBL. II. PROPOS. LXXI.

Dato Parallelogrammo quocumque Hyperbolam delineare.

SIt parallelogrammum OG, & productis CO in K ducatur per F linea KD, fiatq; triangulum CKD, & ductis AB, & CD parallelis lateri OF; inter lineas AB, & BI inueniatur media HB, & inter CD, & LD media ED, & puncta B, & H erunt ad hyperbolam.



Probatur ob ſimilitudinem triangulorum KB eſt ad KD, vt AB ad CD, & vt BF ad DF ſic IB ad LD. Componantur, itaque ex iſtis proportionibus rectangula.

KB	vt	AB	&	BF	vt	IB
ad		ad		ad		ad
KD		CD		DF		DL

Ideo compoſitum erit, vt compoſitum.

KB	&	BF	AB	&	IB
	ad			ad	
KD	&	DF	CD	&	LD

Quare, & quadratum HB ęquale rectangulo AB, & IB erit ad quadratũ DE æquale rectangulo CD, & DL, vt rectangulum KB, & BF ad rectangulum KD, & DF: quare puncta H, & F ex 6. huius erunt ad Hyperbolam.

EXPENSIO XIX.

De tranſumptione figurarum conicarum ex circulo.

SIcut ex dato parallelogrammo ſectiones deducimus, ſic & ex dato circulo eas adipiſcimur, & tantò potiori iure, quantò circulus ſectionibus maiori accedit annalogia.

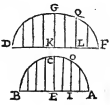
PROBL. I. PROPOS. LXXII.

Dato circulo quocumque Ellipſim quamcumque deſcribere.

SIt datus circulus ABC, ex eo deſcribemus quamcumque Ellipſim, ſi ſtatuamus eius diametrum pro diametro Ellipſeos minori, & ad libitum eligamus maiorem V. g. DF.

Diuidemus itaque AB, in quas placuerit ęquales partes, & trahemus perpendiculares ad diameterum, vt eſt OI, & EC. Diuidemus quoque FD in totidem partes, & erectis ad ea puncta diuiſionum perpendicularibus, quę æquales ſint prioribus in circulo tractis quælibet nimirum ſuæ correſpondenti V. g. KG erit æqualis EC, & LQ correſpondenti OI, & per extrema earum ducemus æquabili manu lineam curuam, quæ erit ambitus Ellipſeos.

Id verò oſtendetur demonſtrando LQ eſſe applicatam ſicut KG, quòd ita ſe habeat rectangulum, & quadratum ex ſegmentis diametri FK, & & KD ad rectangulum ex ſegmentis DL, & LF, vt quadratum KG, ſe habet ad quadratum LQ. Nam ex prop. 6. hæc eſt proprietas eſſentialis applicatarum ellipticarum.



Probatur autem. Nam cum AB, & DF ſint diuiſæ in partes numero ęquales erit tota ad medietatem ſuam, vt alia tota ad medietatẽ, ſicut, & V. g. ſex partes ad duas vnius ſæpe AE ad AI erunt quoq; vt partes ſex ad duas alterius, vt DL ad LF. Igitur, & quadratum ex medietate EB, ita erit ad rectangulum ex AI, & IA, vt quadratum ex medietate KD, ad rectangulum ex DL, & LF, cum ex iiſdem proportionibus cõponãtur rectę BI, ad AI, & DL ad LF &c. Sed rectangulum BI, & AI eſt æquale quadrato IO, cum IO ſit media proportionalis inter BI, & IA. Ergo, & quadrato LQ huic ęquali, ſicut, & quadratum EC, vel EA eſt ęquale quadrato KG. Quare KD, DK, & KF rectangulum erit ad rectangulum ex LD & LF lineis, vt quadratum KG ad quadratum LQ.

COROLLARIVM.

*HInc autem elicies ſufficere ad formandam ellipſim ex circulo, ſi lineam datam, vel maiorem, vel minorem ita ſeces proportionaliter, vt ab applicatis, ſeu ſinubus in circulo ſecatur, vel vt ipſę applicatę, ſinuſque creſcunt.

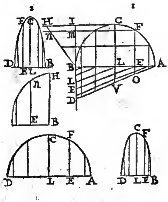
Sit ſemicirculus ABC, in quo diuiſo in partes ęquales ducti ſint ſinus CL, & EF, & cęt. ſeceturq; BI primùm in partes æquales, iuxtà quas ſinus ipſi ſunt, ita, quod BI ſit æqualis LC, & BM ſit æqualis EF, & cęt. deinde iuxtà partes lineę AI detruncetur BH in partes proportionales ex propoſ. 10. lib. 6. ita quòd ſit BH, ad HI, BN ad BM, & cęt. Dico ſinus AH, & AN, & alij ſimiles ſinubus prędictis LC, EF, & alijs diſpoſiti per puncta A, L, & alia in quibus priùs erant ſuis extremis eſſe in ellipſi.

Probatur. Ita eſt AN ad AH, vt EF ad LC: Ergo etiam quadratum ex BN ad quadratũ ex HN erit, vt quadrtũ ex EF ad quadratũ ex LC ex 26. l. 6. ſed quadratũ EF eſt æquale rectangulo AB, & AA, itemq; quadratum LC eſt æquale rectangulo ex AL, & LB. Ergo rectangulum EB, & BA ad rectangulum AL, & LB habebit eandem proportionem, quam quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Ergo etiam eandem, quam quadratum ex AN ad quadratum ex AH;

cum

eum ſint in eadem proportione cum prędicta ex BA, & LC quadratis. Cùm ergo ex BA quadratum ſit ex BH quadratum, vt rectangulum ex AB, & EB ad rectangulum AL,& LB; lineę BA, & BH erunt ad diametrum AB applicatæ in punctis E,& L. Vnde earum extrema puncta erunt in Ellipſi ex 6. h.

Idem dicendum. Si iuxta diuiſiones diametri AB diuidatur proportionaliter aliqua alia linea, ſeu maior, vt AD, ſeu minor, vt BD. Nam ſi illi lineæ, vt factum eſt ſeorſum applicentur ſinus LC,& EF quilibet ad ſuum punctum correſpondens, horum ſinuum extrema puncta erunt in Ellipſi.



* Probatur. Nam quia AB ablatum eſt ad OA ablatum, vt AB totum eſt ad AD totum, erit etiam reliquum EB ad reliquum OD, vt AE eſt ad AO. Quare rectangulum AO, & OD erit compoſitum ex iiſdem proportionibus; quibus AE, & EB componitur. Sic quoque AL ad AV erit; vt AB eſt ad AD. Quare, & reſiduum LB ad reſiduum VD erit, vt AL ad AV: quare, & rectangulum ex AV, & VD, quod eſt quadratum componetur ex iiſdem proportionibus, quibus quadratum ex AL,& LB. Cum ergo rectangulum ex CA & OD ſit compoſitum ex iiſdem proportionibus, quibus rectangulum ex AE, & EB erit ad rectangulum, ſeu quadratum AV, & VD compoſitum ex iiſdem proportionibus, quibus rectangulum, ſeu quadratum AL, & LB, vt rectangulum AE, & EB ad idem quadratum ex AL,& LB: Sed rectangulum ex AE, & EB ad quadratum ex AL, & LB eſt, vt quadratum ex EF ad quadratum ex CL. Ergo etiam rectangulum ex AO, & OD eſt ad rectangulum ex AV, & VD, vt quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Quare EF,& LC erunt applicatę ad diametrum AD,& earum extrema puncta in Ellipſi reperientur.

COROLLARIVM I.

POſſunt etiam Ellipſes è circulo deſumi, etiam, ſi diameter circuli, ſeu ei proportionalis ſumatur pro ſecunda diametro in Ellipſi, & ei ad angulos obliquos eoſdem applicentur, ſeu ſinus, ſeu ſinubus proportionales paralleli; dabunt enim puncta, per quę ducta Ellipſis circundabit diametrum ſecundariam.

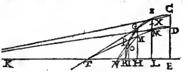
COROLLARIVM II.

QVin etiam deſcribetur Ellipſis, ſi tùm Sinubus, tùm portionibus diametri proportionales ſumantur, vt eſt videre in fig 2. Nam rectangulum BL, & LD eſt ad rectangulum BE, & ED in fig. 1. vt eſt AL, LB rectangulum ad EB, & EA rectangulum, quòd eſt vt quadratum ex LC ad quadratũ ex EF; Quadratũ verò LC ad quadratũ EF eſt, vt quadratũ BH, vel æqualis LC in fig. 2. ad quadratum BN, vel æqualis EF. Quare ex ęquo rectangulum BL, & LD erit ad rectangulum BE, ED erit, vt quadratum LC ad quadratum EF. Quare LC, & EN erunt applicatæ in fig. 2. ad diametrum DB.

PROBL. II. PROPOS. LXXII.

* *Ellipſim dato circulo, & minori diametro per puncta deſcribere.*

*SIt datus circulus, ſeu quadrans BC, & diameter minor Ellipſis ED; diuidaturque circulus in quaſlibuerit partes CZ, ZG, GP, & tandem PB ducanturque rectæ CZK, ZGT, GPV, & cęteræ ſi adſint ad diametrum productum EK; ab iiſdem quoque punctis perpendiculares ducantur ZL, GH, PI, & deinde à vertice D diametri minoris ED ducatur ad punctum diametri X, in quod cadit CZK recta DK, & à puncto M, in quo ſecat ZL ducatur recta ad T; quę ſit MT, in quod cadit ZGT rurſúſque à puncto N, vbi hæc poſtremo ducta ſecat perpendicularem GH ducatur recta NV ad punctum V, in quod cadit GPV, & ſic agatur ſucceſſiuè de aliis. Si ergo per puncta DMNOB flexa æquabili manu ducatur, hæc erit Ellipſis quarta pars, & puncta illa DMNOB erunt in Ellipſi.



Probatur Progr. 1. quia (vt oſtendam) in Ellipſibus ita eſt EC ad ED, vt ZL ad ML, & è contra *conuertendo*. Ergo conuenient in vnicum punctum K. Alioquin ſi aliqua non tranſiret per punctum K, ſed alibi V. g. per X, & perueniret ad punctum D ex Coroll. propoſ. 4. Element. eſſet EC ad ED, vt LZ ad XL, quia enim DXK recta eſſet, vt dicunt aduerſarij, & perueniret ad punctum K per X lineę DE, & LX eſſent in eodem triangulo parallelæ, ſed etiam CE eſſet ad DE, vt ZL ad LM, quia DE, LM ſunt in Ellipſi, vt pręſupponimus quapropter cum XL, & ML eiſdem LZ eãdem proportionem diceret, quam CE ad ED, eſſent inuicem æquales ex propoſ. 9. lib 5. Elem. quòd eſt abſurdum. Ergo DK tranſibit per punctum M, per quod tranſit Ellipſis.

Progreſſ. 2. Quod verò CE in Ellipſibus ſit ad DE, vt ZL ad ML, patet. Nam in circulo ita eſt quadratum EC ad quadratum ZL, vt rectangulum ex EB & EB ad rectangulum ex ſegmentis diametri LB, & reſiduo ſegmento LBA, quod ex propoſ. 35 lib. 3. Elem. quadratum ex EC, & rectangulum ex ſegmentis diametri AE, & reſiduo EB ſint ęqualia ſicut

etiam

Digitized by Google

etiam ZL quadratum, & rectangulum ex LB, & reliquo LES ſegmento eiuſdẽ diametri, ſed etiã quadratũ DS ad quad. ML, vt rectangulũ SE, ES ad rect. ex iiſdem SL. & LES diametri portionibus circuli ſimulque Ellipſis ex prop. 6. h cum ergo in eidem proportione rectangulorum referantur SC quadratum ad LZ quadratum, vt DE quadratum ad LM quadratum erunt ex propoſ. 16 Elem. 5. In eadem proportione. Quare, & latera erunt in eadem proportione ex 26. lib. 6. & erit SC ad LZ, vt SD ad ML; quare *permutando*, quoque erit EC ad SD, vt LZ ad ML.

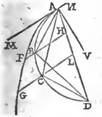
PROBL. III. PROPOS. LXXIV.

Dato circulo, ſeu circuli portione Parabolam deſcribere.

Fiant æquales lineis SA, & AC ductis à vertice A ſegmenti ASCD ad peripheriam ipſius applicatæ GL ad HF, quæ tamen debent eſſe æquidiſtantes tangenti circuli MA: Si deinde per puncta GF ducatur flexa, hęc erit *Parabola*.

Probatur. Nam vt eſt GL quadratum ad SH quadratum, ſic intercepta LA eſt in proportione ad interceptam AH. Ergo ex 6. h. AFG eſt parabola.

Hoc autem oſtenditur. Nam ex prop. 29. lib 3. El. angulus NAH æquatur angulo ABD, & ob parallelas MN, & BH angulo AHS. Quadrẽ ASD angulus ãgulo BHA erit æqualis; angulus verò ad A eſt communis. Ergo triangula ABD, & BAH erũt ęquiãgula; ideoq; ſimilia; ideoque



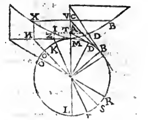
AH erit ad AB, vt AB ad AD, quadere AB erit media proportionalis, & AH, & AD extremæ. Vnde rectangulum ex DA, & AH æquabitur ex progr. 19. lib. 6. quadrato BA, ideſt quadrato HF. Et idem concludes de quadrato CA ideſt LG, quòd ſit æquale rectangulo ex DA, & AL. Ideoque quadratum CA erit ad quadratum BA, vt rectangulum ex AD, & AL ad rectangulum AD, & AH; ſed hæc rectangula ob eandem altitudinem AD ex prop. 1. lib. 6. Elem. ſunt vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum CA ad quadratum BA erit, vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum GL ad quadratum FH, quæ lineis CA, & BA æquantur erunt, vt LA ad HA. Vnde GFA ex 5. huius erit Parabola, & AD Parameter.

PROBL. IV. PROPOS. LXXV.

Dato Circulo Hyperbolam deſcribere.

Tangentes, quæcumque AD, & CB pro applicatis cõſtituantur à pũctis A, & C, quibus interſecant diametrum ML productum, quæ erunt AD, & CB, flexaque BDM per extrema applicatarum ducta erit Hyperbola.

Probatur. Quadratum CB tangentis eſt æquale rectangulo ex CL ſecantis, & CM ex propoſ. 36. lib. 3. Eucl. ſicut, & quadratum AD tangentis eſt æquale rectangulo AL ſecantis, & AM. Ergo vt eſt BC quadratum ad quadratum DA; ſic rectangulum ex CM, & CL ad rectangulum LA, & AM. Quare ex 6. huius BC, & AD erunt applicatæ Hyperbolæ, cuius diameter tranſuerſa ML.



Idem efficies; ſi vtaris tangentibus MZ, MN pro applicatis VX, & TT, & pro interceptis diametri portionibus parte exteriori ſecantium XZ, & ON, quas tranaferas in TM, & VM. Itaque eadem ratione quadratum tangentis IT, vel ZM æquabitur rectangulo YZ ſecantia, & exteriùs aſſumptæ XZ, ideſt rectangulo ex TL, & TM; ſic tangentis quadratũ MN, ideſt ęqualia VX ęquabitur rectãgulo ex NS, & NO, vel VL, & VM, & ideo quad. VX erit ad quadratum TT eſt, vt rectangulum ex VL, & VM ad rectangulum ex TL, & TM. Quapropter erunt ex 6. huius VX, & TT applicatæ hyperbolæ; cuius diameter tranſuerſa ML.

EXPENSIO XX.

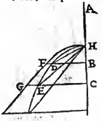
De mutua ſectionum traſſumptione.

Eductioni ſectionum à circulo, & rectangulo debet iure ſuccedere mutua earum transformatio, atque tranſumptio, & modus docendus eſt, quo data vna ſectione, altera ex illa extrahatur.

PROBL. I. PROPOS. LXXVI.

Data Parabola ex ea Hyperbolam tranſcribere, vel è contra.

Sit HC diameter, & ordinatim applicatæ in parabola BD, & CE; cuius parameter AH; Qua-



dratis igitur DB, & BH fiat æquale quadratum ex FB; Iterum quadratis EC, & CH fiat æquale quadra-

tum GC ex 11. lib.2. & puncta G, F extrema erunt ad Hyperbolam.

Sit AH æquale Parametro Parabolæ. Igitur BH, & HA rectangulum æquabitur quadrato DB, & ideo ſi addas quadratum BH; erit rectangulum ex AB, & BH quadratis DB, & BH æquale, & ideo quadrato BF ex Theſi æquale. Sic dicendum de quadrato BC æquale rectangulo AH, & HC; addito, ei quadrato HC quadrata ex EC, & CH, ideſt quadratum GC ex Theſi eis æquale, erit etiam æquale rectangulo AC, & CH. Quapropter ita erit FB quadratum ad quadratum CG, vt AB, & BH rectangulum ad rectangulum AC, CH, ideoque BF, & GC erunt applicatæ Hyperbolæ ex prop.6.huius, cuius diameter intercepta HA.

PROBL. II. PROPOS. LXXVII.

Data Hyperbola, in qua quadrata applicatarum ſint æqualia rectangulis, ex interceptis diametri portionibus Parabolam deſcribere.

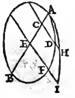
Detrahatur in præced. fig. à quadratis applicatarum FB, & GC quadrata interceptarum diametri portionum BH, & CH ex 33.lib.6. & quadratorum reſiduorum latera erunt applicatæ Parabolicæ ad eaſdem diametri portiones BH, & HC.

Probatur. Nam quia ex Theſi GC quadratum æquatur rectangulo AC, & CH. Ergo ab eis vtriſque ablato quadrato CH erit, quadratum CE æquale rectangulo AH, & HC. Rurſus ſi à BF quadrato, & ab AB, & HB rectangulo dematur quadratum BH erit quadratum DB æquale rectangulo AH, HB; at quia iſta rectangula conficiuntur ex eodem latere HA erunt inuicem, vt altitudines CH ad BH. Ergo etiam quadrata EC ad BD erunt vt CH ad HB: Ideoque CE, & DB erunt applicatæ Parabolæ, cuius parameter HA.

PROBL. III. PROPOS. LXXVIII.

Data Ellipſi Parabolam deſcribere.

Sit Ellipſis AB, & in ea diameter coniugata æqualis alteri AB, & applicatæ DC, & EF: Fiatque quadratum HC æquale quadratis ex DC, & AC, & quadratum IA æquale quadratis FB & BA. Et CH, atque IB horum quadratorum latera erunt applicatæ in Parabola.



Probatur ex prop.35.Tr.24. cum AB ſit diameter coniugata erit rectangulum AC, & CB æquale quadrato CD, & ita quoque AE, & EB æquale quadrato FE: Addito igitur quadrato AC rectangulo AC, & CB fiet totum rectangulum ex AB, & AC æquale quadratis DC, & CA; ſic addito quadrato AE rect. ex BA, & EB fiet totum rectangulum ex AB, & AE æquale quadratis BE, & BA eiuſdem altitudinis AE; ideo erũt inuicem, vt altitudines AC, & EA; ſed quadratum HC rectangulo ex AB, & AC ex effectione æquatur; ſic etiam FI quadratũ rectangulo ex AB & AE. Ergo ita erit quadratum ex CH ad quad. EI, vt AC ad AE. Quare CH, & IL erunt applicatæ parabolicæ.

PROBL. IV. PROPOS. LXXIX.

Data Parabola Ellipſim deſcribere.

Ex parabola deſcribetur Ellipſis adhibita fig. præc. ex propoſ.33.lib.6. Auferatur quadratum AC portionis diametri à quadrato CH, & latus DC reſidui quadrati ſtatuatur pro applicata diametri coniugatæ æqualis alteri.

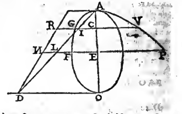
Probatur. Nam quia HC quadratum æquatur rectangulo AB parametri, & AC; ſi auferatur ab vtriſque quadratum ex AC remanebunt æqualia quadratum DC, & CA, CB rectangulũ; ſic dicas de rectangulo AB, & AA, & quadrato FI à quibus ſi auferatur quadratum AA remanebunt EF reſiduum quadrati, & AE, & EB rectãguli æqualia. Quare erit vt quadratum DC ad quadratum FE; ita CA, & CB rectangulum ad rectangulum AE, & EB. Quare ex 6. huius DC, & FA erunt applicatæ Ellipticæ.

Quod verò rectangula applicatarum quadratis æqualia ſint eiuſdem baſis patet, quia habent eundem Parametrum, & AB Parabolæ datæ erit Parameter, at in Ellipſi erit diameter coniugata æqualis alteri, eo quod BEA rectangulum remaneat æquale quadrato FE, & ſic de alijs.

PROBL. V. PROPOS. LXXX.

Data Ellipſi Hyperbolam deſcribere.

Fiat rectangulum iſoſcelles AOD, deinde ductis in Ellipſi CG, & EF applicatis ſecabunt AD in I, & L, fiat quadrato CG æquale rectangulum CI, & IR, & quadrato ex FE æquale rectangulum FL, & LN. Erit ADR triangulum, & recta tranſibit



à puncto D per extrema N, & R. Nam cum ſit CI, & RI rectangulum ad FL, & LN rectangulum, vt CG quadratum ad EF quadratum, ideſt vt CA, & CO rectangulum ad AE, & EO rectangulum habebunt ea rectangula proportionem ex lateribus compoſitam, ſicque ſtabunt.

Compoſ.

Compoſ.			vt	Compoſ.		
CI	&	IR		CA	&	CO
	ad				ad	
EL	&	LN		EA	&	EO.
Ergo	latera			latera		
CI	vt	CA		IR	vt	CO
ad		ad		ad		ad
EL		EA		LN		EO

Sed CO,& EO, vt ID ad LD,& ideo erit, vt RD ad ND, quare ID, RD latera ſtipantia parallelas IR, EN erunt rectæ, quòd triangula ſint ſimilia RID, & NDL ex 5. lib. 6. & ideo poſita vnum ſuper aliud ID angulo D conuenient, & eadem crura efficient.

Si rectangulo igitur CI, & CR fiat quadratum æquale VC, & EL, & EN rectangulo quadratum EP æquale, erunt VC inter CI, & CR, & PE mediæ proportionales inter EN, & LE. Quare ex prop. 59. erunt VC, & PE applicatæ Hyperbolicæ, & P, & V puncta ad Hyperbolam.

PROBL V. PROPOS. LXXXI.

Datam Hyperbolam ad Ellipſim reuocare.

HOc fit auferendo quadratum CA ab VC in fig. præced. & EA ab EP, & cæt. & latera, quæ reſiduorum quadratorum contexunt latera erunt applicatæ in Ellipſi; cuius diameter tranſuerſa eſt eadem, ac diameter Hyperbolica, quæ poteſt etiam eſſe diameter ſecundaria, licet figura ſit de ſolo axe.

TRACTATVS XXV.

De Sectionibus corporum ſphæroicorum per planas ſuperficies.

Vidimus Sectiones Sphęrę per planas ſuperficies, relationes, proprietates, & dependentias; modo ſectiones corporum, quæ aliquid ſphærici poſsident per planas ſuperficies contemplandæ, quæ deinde ad proiectiones, tum ſphæræ, tum circulorum, ſeu orthographicè, ſeu ſtereometricè mirabiliter deſeruiunt.

EXPENSIO I.

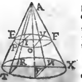
De ſectione Coni, cuiuſcumque per planas ſuperficies.

SEctio coni poſt ſphæram celebrior, vtpote, quę tres mirabiles ſectiones exhibeat Ellipſim, Hyperbolam, Parabolam, & inſuper triangulum, & circulum, & licet iam de coni ſectionibus egerimus, non tamen pro vt etiam pro baſi Ellipſim poſidet, de ijs tractaulmus; quemadmodum nunc agere oportunum iudicamus.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis ſectio coni Elliptici parallela baſi Ellipſis eſt.

*PRobatur, quod in cono AXZ, cuius baſis XYZ ſit Ellipſis, *quod, & ſectio parallela* POPE *ſit Ellipſis*. Nam vt NA ad VA, ſic XN ad FV, & ſic NZ ad VE, & NY ad VO, & *permutando*, ob parallelas in triangulis XAN, & NAY, & ANZ, quorum commune latus eſt NA. Vnde etiam rectangulum XNZ ad rectangulum FVE erit ex 16. lib.6. vt NY quadratum ad VO quadratum. Eodemque modo concludes, quod XR ſit ad FI, vt RZ ad IE, & RT ad IP: ſint in eadem proportione, & *permutando*, ac RA ad IA, eo quòd in triangulis ob parallelas ſimilibus ex 4.l 6. exiſtāt. Quare pariter XR, & RZ rectangulū erit ad rectangulum FI, IE, vt quadratum RT ad quadratum IP. Itaque XN, & NZ rectangulum eſt ad FV, & VE rectangulum, vt quadratum NY ad quadratum VO, & *conuertendo* FV, & VE rectangulum eſt ad XN, & NZ rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum YN, & vt XN, & NZ rectangulum ad XR, & RZ rectangulum, ita eſt quadratum TN ad quadratum RT cum XQZ ex Theſi ſit Ellipſis, vt autem XR, & RZ rectangulum ad FI, & IE rectangulum, ita eſt quadratum RT ad quadratum



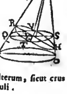
PI, ergo ex *æquo* erit FV, & VE rectangulum ad FI, & IE rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum IP: quare ex propoſ.6. Tract. 24. FOE Ellipſis erit.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis ſectio coni circularis ſcaleni, quæ angulos alternos efficiat æquales baſi, & ipſa quaque circulus eſt.

SIt conus OYP, cuius baſis circularis OP, & circulus æquidiſtans, & parallelus QVTS. Iam notum eſt ex præc.tt.pr.2 quod ſi OP baſis ſit circulus, fore etiam circulum QSVT. Quo ſuppoſito ducatur alius circulus, qui cum iſto QVST angulos alternos æquales efficiat, ita quod angulus H concluſus latere conico OY, & diametro HR, ſit ęqualis angulo Q clauſus latere coni QR, & diametro QS. Et ſuperficies RTH, QTS ſupponantur perpendiculares triangulo per axem OYP, quare TX, & XV ſectio, OYP plano perpendiculariter incumbet ex 16. tract.22.

Reitaque ita concepta Probatur propoſ. Angulus apud R in triangulo RQX eſt æqualis angulo apud H in triangulo XHS. Anguli quoque ad verticem X ſunt ęquales ex prop 12.lib.1. Ergo ex propoſ. 17. lib.1. Coroll. 2. hæc duo triangula ſunt æquiangula: Quamobrem latera erunt proportionalia, quæ circum æquales angulos ex propoſ.4. lib.6. Propterea: ita erit crus XQ ad crus XR alterum, ſicut crus XH ad crus XS alterius trianguli.



Sed

Sed ea propoſ.18.lib.6.ſi quatuor rectæ proportionales fuerint illud rectangulum, quòd conſtituitur à medijs V, g. ex cruribus XH, & BX eſt æquale rectangulo ex extremis conſtituto, nempe vt QX, & XS.

At ex propoſ.35.lib.3. rectangulum QX, & XS conſtitutum æquatur quadrato, ex planorum ſemiſectione XT, aut XV conſtituto, quia ſunt lineę, quæ in circulo ſe interſecant. Ergo pari ratione Rectangulum ex XR, & XH erit eidem quadrato æquale ex ſemiſectione cõſtituto; Quare ex dicta pr.35.l.6 el. hęc duo puncta erũt in circuli circũferentia. Quadropter RTHV circuli circũferentia erit, cùm idem argumentũ valeat, etiã ſi ſectio TV fiat aut ſuperius, aut inferius, dummodo parallela ſectioni iam factæ planorum RTVH, vel QTVS,

COROLLARIVM I.

* Hinc eſt in Cono ſcaleno duos axes reperiri. Quia duo centra ſunt circulorum, à quibus à vertice Y axis ad quemlibet duci poteſt, quæ non coincidunt in idem punctum, nempe baſis rectæ, quæ fieret, qui, & eſſet axis coni propriè dictus, & baſis obliquæ.

* Ponantur enim æquales RX, & XH: Dico XQ, & XS inęquales eſſe, & ideo punctum X circuli QRSV centrum non eſſe. Quod ſi æquales dicantur, oſtenditur ſine abſurdo id eſſe non poſſe.

Nam RXQ, & XHS ſunt triangula ad verticem ex hypotheſi, æqualia quoque crura ambientia æquales angulos ad verticem X, ſcilicet XS, & QX ſicuti RX, & XH ex Theſi, ideo baſes ęquales habebunt QR, & HS. Quare cum anguli apud Q, & H remaneant æquales etiam baſes XS, & RX oppoſitę illis angulis ſepta à cruribus æqualibus erunt æquales ex 23. lib.1. ſed XS ex ęqualia ex aduerſarijs ipſi QX. Ergo QX, & XR erunt baſes æquales. Quare ex 14. lib.1. Elem. anguli R, & Q erunt æquales: Quadere R, & H, vtpote tertio Q æquales erunt æquales anguli alterni, & ideo ex 28. lib.1. QR, & HS eſſent parallelæ: quod eſt abſurdum.

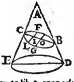
Cum igitur lineæ QX, & XS æquales eſſe nequeant axis baſis QTVS nõ poterit eſſe beſis RTVH etiamſi has baſes ponas eſſe Ellipſes. Ideoque nullæ Ellipſes, vel circuli in ennis habebunt communem axem, niſi paralleli.

THEOR. III. PROP. III.

* *Omnis ſectio Coni Elliptici, quæ ſecet vtrumque latus, in qua poſſit eſſe maior axis æqualis alteri axi circulus eſt.*

Sit in cono ADE ſectio BC, cuius ſemiaxis BO maior poſſit eſſe æqualis axi alteri OG. Dico BFCG *eſſe circulum*;

Probatur. Nam BO, & OC, rectangulum ex radijs eſt ad quadratum OG, æqualis, vt BI, & IC rectangulum ad IL quadratum, & *permutando*; ſed BO, & OC quadratum æquatur quadrato OG; Ergo, & BI, & IC rectangulum æquabitur quadrato IL; cumque BOC axis aſſeratur, Ergo ex 35.lib.3. BFGC erit circulus.



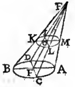
COROLLARIVM.

Illum conum Ellipticum nullam baſim poſſe habere, quæ ſit circulus, ſi ſaltem BC axis qui deberet eſſe maior factus perpendicularis vni laterum trianguli per axem DAE ſit maior adhuc, nã tunc axi minori FG etiam ceteræ omnes ex Cor. propoſ 17. lib.1. Elem. erunt maiores ipſa CB; Quod ſi accidat perpendicularem BC poſſe eſſe minorẽ, tunc aliqua alia longior erit æqualis. Vnde in eo cono poterit fieri aliqua ſectio circulus.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

In Cono quocumque Ellipſes parallelæ ſimiles ſunt.

Sint duę Ellipſes parallelę in quocumque cono, ſiue elliptico, ſeu circulari AEB, nempe MLIX, & ADBC. Dico *eas eſſe ſimiles*.



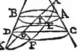
* Probatur. Quod ſint ſimiles, vt FE ad OE; ſic AF ad MO, & ita CF ad LO ob parallelas MO & AF in triangulo MEF, & CF ad LO in triangulo CEF, ſed CF, & LO ſunt applicatæ, & MO, & AF portiones diametri, ergo ACDB, & MLIK erunt Ellipſes ſimiles ex def. 16. Tract. 24.

THEOR. V. PROPOS. V.

* *Omnis ſectio coni Elliptici non parallela baſi etiam Ellipſis, eſt ſi vtrumque latus ſecet trianguli per axem.*

Sint AEB, & CED duæ Ellipſes, & ſit obliqua baſi XEK. Dico eam eſſe Ellipſim.

* Probatur. Dictum eſt pr.53, Cor. Tr.24. AIB rectangulum eſſe ad COD rectangulum, vt quadratũ EI ad quadratũ OF ob ellipſes parallelas, quę ſimiles sũt ex pręc. Sed vt AI ad CO; ſic XI ad XO in triangulis æquiangulis ob parallelas AXI, & CXO. Pariterque vt IB ad OD ita ob eandem rationem IK ad KO.



Componendo igitur proportiones

cum AI	vt	XI	& ſit	IB	vt	KI
ad		ad		ad		ad
CO		XO		OD		OK

Ergo compoſitum vt compoſitum.

AI	&	IB	erit	XI	&	XI
	ad				ad	
CO	&	OD		XO	&	OK

Quare etiam vt rectangulum XI, & XI ad rectangulum XO, & OK ſic erit quadratum EI ad quadratum OF ex propoſ.16. lib.5. cum ſit eadem proportio quadratorum, ac rectangulorum AI, & IB ad CO, & OD. Vnde ex 6. tract.24 XEFK erit ellipſis.

THEOR.

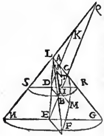
THEOR. VI. PROPOS. VI.

Hyperbolæ parallelæ in Cono ſimiles ſunt,

IN cono GLN ſecto triangulo per verticem ELF ab interſectionibus BD, & FS circulorum RSS, & GFN duæ hyperbolæ parallelæ CMFS, & ATBD diſcedant ei diametri tranſuerſæ protendantur vſque ad Q. & K. Sint autem hæ omnia plana perpendicularia triangulo ex generatione GLN. Dico *has ſectiones parallelas eſſe Hyperbolas,*

Intelligatur I. non ſit ſatis expreſſa ab L vertice in aliquod punctum I productā lineā, & à puncto, quo ſecat diametrum vtrumque I, & V duę perpendiculares ad idem planum LNO erigantur IM, & VT; & ex prop. 8. Tract. 22. erunt parallelæ quoque.

Quo poſito probatur, cùm EQ, & DX ſint parallelæ, & ſegmenta ipſarum erit rectangulum ex XV, & VA ad rectangulum ex DA, & XD, vt rectangulum ex QI, & IC ad rectangulum ex QE, & SC; quòd latera obtineant proportionalia. Vt autem rectā gulum ex XV, & AV ad rectangulum ex XD, & DA, ita eſt TV quadratum ad SD quadratum ex 6. h.



Et vt rectangulum CI, & QI ad rectangulum ex QE, & SC, ita eſt quadratum MI ad quadratum VS. Ergo erit etiam TV quadratum ad quadratū XD velut MI quadratū ad quadratū FS ex 16. l. 5. Quare talia quoque erūt latera ex prop. 26. lib. 6. Elem. ſ. erit TV ad DS, vt IM ad EF; ſed eſt etiā AV ad AD, vt IC ad CE ob paralleliſmū lineatū AD, & CE: Ergo hyperbolæ erūt ſimiles ATSD, & CMFE ex prop. 52. Tr. 24. de conicis.

De circulis, & Parabolis non eſt difficultas. Nam omnes parabolæ, & omnes circuli ſunt ſimiles, vt oſtendimus.

Et omnes quoque in cono circulari ſunt parallelæ figuræ, cùm circulus baſi ſit parallelus, at parabola lateri.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

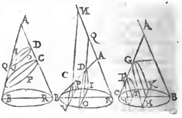
Æquidiſtantes in eodem cono ſectiones, non poſſunt eſſe eædem.

SIt primùm ſectio parabola in cono ABC per axem ſecto plano ASC, & parabolę XGH, & FIV æquidiſtantes.

Dico, quòd hæ ſectiones non ſunt vna alteri eadem.

Probatur. Quia obtinerent parametrum ex propoſ. 39. Tr. 24. æquale, ſi eſſent ſibi eędem, ſed nequeunt conſequi æquale parametrum. Ergo eędem eſſe non poſſunt.

Probatur minor de Parabola. Quoniam ex pr. 41. Cor. Tract. 24. ſi componatur rectangulum ex ęruribus BA, & AC, id habebit eam proportionem ad quadratum BC, quam AG, vel AF portio cruris à verticibus ſectionum, & coni intercepta ad parametrum contiguam; Sed portio AF eſt maior, quam AG; ergo etiam maior Parameter parabolæ IFV quā parab. XGH. Quare nō ſunt eqaē.



Sit deinde data ſectio Hyperbola, vel Ellipſis in conis ARS æquidiſtantes. Dico non eſſe eaſdem inter ſe.

Probatur. Nam ex 38. Tract. 24 conic. diametri tranſuerſæ eſſent inter ſe æquales; ſed CN, & DQ tales non ſunt. Ergo neque ſectiones ſunt eędem inter ſe; Aſſumptum verò oſtenditur. Nam AC maior eſt, quam AD. Ergo etiam tranſuerſa diameter CN maior eſt, quam DQ in ACN; ADQ triangulis ęquiangulis. Vnde Ellipſes, aut Hyperbolę non erunt inuicem æquales; ſi ſint parallelæ.

EXPENSIO II.

De Coni ſectionibus in lineam deſinentis.

SPecies eſt coni, qui cum baſim rotundam obtineat, non deſinit tamen in punctum, ſed in lineam, vt conus repreſentat ABCF, de hoc etiam aliqua dicere neceſſarium videtur.

THEOR. I. PROP. VIII.

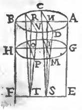
* *In Cono, qui deſinit in lineam rectam habente pro baſi circulum, vel Ellipſim reliquæ omnes parallelæ ſectiones, ſeu intra ſeu vltra baſim, ſi producatur illius coni ſuperficies, ſunt Ellipſes.*

SIt Conus, cuius baſis circulus ACBD, vel ellipſis deſinatq; in lineam EF. Dico, quod ſi in eo fiat aliqua ſectio, vt CMPH parallela baſi illa ſectio exhibebit Ellipſim.

* Probatur ex ea proprietate Ellipſis, quòd conſequatur diametros inæquales, & quòd omnia applicatarum quadrata inuicem, ita ſe in proportione gerant, vt rectangula ſub interceptis diametri portionibus comprehenſa. Sint ergo applicatæ IM, & OP. Dico, quòd ita eſt quadratum IM ad quadratum OP, vt rectangulum ex GI, & SH ad rectangulum ex GO, & OH.

Probatur. Nam ita eſt MI ad DN, vt eſt SI ad SN, & ita eſt PO ad VR, vt TO ad RT. Lineę verò TO, & SI ſunt æquales, ſicut, & SN, & TR: Vnde poſſunt computari pro eadem: Quamobrem etiam erit

erit MI ad DN, vt PO ad VR, eo quòd ſint eædem proportiones vnſ tertiæ ex 16. lib. 5. nempe SI ad SN, vel TO ad TR. Cum ergo ſit MI ad DN, vt PO ad VR erit permutãdo MI ad PO, vt DN ad VR. Quare etiã quadrata ex 26. l. 6. ex illis lineis effecta.



Sed vt ſe habet qoadratum ex DN ad quadtatum ex VR, ita eſt rectãgulum ex AN, & NB partibus diametri intereeptis ab applicata DN, vt rectangulum ex AR, & RX pattibus diametri interceptis ab applicatæ VR. ex 35. lib. 3. Elem. vel ex 6. Tr. 24. cum ſit baſis circulos, vel Ellipſis. Ergo etiam ita erit quadratum ex MI ad quadtatum ex OP, vt rectangulum ex AN, & NX ad rectangulom ex AR, & RB: Sed rectangulum ex AN, & NB eſt æquale rectangulo ex GI, & IH ob parallelas BA, & FB, ob quas æqualia ſont ſegmenta diametrorum ęqualium GI, & AN, ſicut, & IH, & NB. Et ita quoque rectangulum ex AR, & RB ex æquale rectangulo GO, & OH ob eandem rationem ſegmentorum æqualium. Ergo quadtatum ex MI ad quadratum PO, eſt vt rectaogulum ex GI, & IH ad rectaogulum ex GO, & OH. Quaderè erit Ellipſis figura GMPH, cum circulos eſſe nequeat ob diametros inæquales, quia equidẽ eſt maior DN ſemidiameter, quàm MI; ſicut, & maior eſt SN, quam SI, cum quibus ij diametri eandem proportionem dicunt.

EXPENSIO III.

De ſectione ſphæroidis per planas ſuperficies.

AD inueſtigandum ſuperficies corporis ſphęroidis, & ſoliditatẽ, vtile eſt ſcire ſectiones, quæ in ipſo exhiberi poſſunt; ad quam expenſionem ineundam operæ pretium eſt definitiones agnoſcere.

DEFINITIO I.

SEmiellipſis in orbẽ circa ſuum diametrum volutæ, donec redeat ad idem punctum, à quo diſceſſit ſphæroidem circumſcribit.

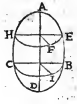
DEFINITIO II.

AXis eius eſt idem axis, circa quem Ellipſis efformatrix circumuoluta eſt, & punctum huius medium centrum ipſius eſt.

THEOR. I. PROP. IX.

Omnis ſectio recta ad axem ſphæroidis circulus eſt.

PRobatur id faciliter ab efformatione ſphæroidis, cũ enim Ellipſis ABCD ſe circũgyrando fecerit ſperoidem, omne punctum eius circulum effecit. Quare punctum E ſe gyrando per F in H circulum delineauit, ſed hic eſt parallelus baſi BIC, atq; normaliter ad axem AD ſphęroidis eo, quòd ſe girando punctum E non mutet diſtãtiam à puncto B: Ergo axi circulus EFH erit normalis, alterique circulo BIC parallelus.



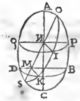
THEOR. II. PROPOS. X.

Omnis ſectio ſphæroidis axi obliqua Ellipſis eſt.

SIt ſecta ſpheroides ABCD plano obliquo OIXS ad axem. Dico *illam eſſe veram Ellipſim.*

Sectio ABCD primigenia ſphæroidem conſtituens, ſit plano OIXS recta, nempe tranſeat per aliquam illi plano perpendicularem; patet enim hoc fieri poſſe abſque alia probatione; Et eidem plano primigenio AXDC perpendiculare quoque planum PIQ & BXD ſecet obliquum OIXS in N puncto: quo obliquum ſecat axem, & in M aliquo alio puncto; Sintque hæc duo plana recta ad axem AC. Sectiones itaque IN, & XM erunt perpendiculares ex propoſ. 16. Tract. 22. plano primigenio BADC, & eius ſectionibus lineis PQ, & BD, & plana PIQ, & BXD erunt circuli, & parallela, vt axi orthogonalia; quibus poſitis, ita.

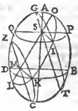
Probatur. Quod PIQ, & BXD plana circuli ſint, & XM, & IN perpendiculares diametris PQ, & XD erit rectangulum PN, & NQ equale quadrato IN. Sicut etiam rectangulum XM, DM erit æquale quadrato MK: Ideo rectangulum erit ad rectangulum, vt quadratum ad quadratum: Sed vt rectangulum ex PN, & NQ ad rectangulum ex XM, & MD. Sic



eſt rectangulum ex ON, & NS ex prop 43. Tr. 24. ad rectangulum OM, & MS, eo quod BADC ſit Ellipſis. Ergo, vt quadratum IN ad quadratum MK, ita eſt rectangulum ex ON, & NS ad rectangulum ex OM, & MS. Ergo ex 6. Tr. 24. DIS eſt Ellipſis.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Omnes Ellipſes in ſphæroide ſunt ſimiles, ſi ſint parallelæ.



SIt conſtructio, vt præcedens, Sectioq; primigenia ſphæroidis ABCD, & plana circulorum perpendicularia eidem ſectioni primigenię ſint PIQ, & BXD, & eidem quoque duæ Ellipſes parallelæ perpendiculares TIG, & CKZ erũt, & interſectiones IS, & KM perpendiculares ex prop. 15.

16. Tract. 22. per quas agatur planum OIXL.

Prob. Sectiones GIT, & ZXC eſſe ſimiles rectangulũ ex OS, SL ad rectãgulũ ax OM, & ML ex pr. 68. præc. T1, vt rectãgulũ GS, & ST ad rectãgulũ ex ZM, & MC: ſed vt rectangulum ex OS, & SL ad rectangulum OM, & ML, ita eſt quadratum IS ad quadratũ MX ex præc. Ergo etiam rectangulũ ex TS, & SG ad rectangulum ex ZM, & MC, vt quadratum IS ad quadratum MX. Quare etiam ex 26. lib. 6 SN, & ST lineæ erunt ad MZ, & MC, vt IS ad XM; quare ex def. 16. Tr. 24. ſectionum ſimilium, erunt ſimilea ſectiones GIT, & CSZ parallelæ.

EXPENSIO IV.

De ſectionibus Conoidis parabolici.

QVoniam egimus de præcipuorum corporum ſectionibua, parabolicum Conoidea inter corpora mathematica non infimum locum obtinens præterire non licet. Tres autem ſectiones in ipſo fieri poſſunt præter primigeniam, ex qua generatur, Circulus, Parabola, & Ellipſis.

DEFINITIO.

COnoides Parabolicum Parabola circa ſuum axem voluta formatur, & axis eius eſt axis etiam parabolæ genitricis.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Sit ſit Conoides parabolicum, cuius baſis circularis, & ſectum ſit plano baſi parallelo, ſectio circulus erit.

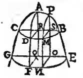
SIt EAG corpus Conoidale Parabolicũ, in fig. pr. ſeq & planũ BDC intelligatur æquidiſtans baſi, quæ ſit circulus EFG. Dico *hoc planum eſſe circulũ.*

Probatur. Nam eius ambitus formabitur à puncto C per motum parabolæ circa axem AQ, Et cum illud punctum ſemper æquidiſtanter baſi moueatur, cumque perimetrum parabolæ maneat ſemper inuariatum punctum illud C per D, M, B sẽper in æquali diſtãtia, à cẽtro R, & circulo CPMB ꝓmouebitur, vt patet. Quare CDMB circulus erit.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Omnis ſectio Parabolici Conoidis æquidiſtans axi Parabola eſt.

SIt Conoides Parabolicum BAG Axis AQ; ſintq; parallelæ ſectiones OPMN, & altera QADF per axem AQ. Sintque circuli paralleli BMDC, & ENFG, & perpendicularea Parabolę primigenię BACG. Dico OPMN *ſectionem axi* QA *parallelam eſſe parabolam.*



Probatur OP eſt diameter coniugata in parabola primigenia EAG. Ideoque BS, & SC rectangulum eſt ad EO, & OG rectangulum, vt PA eſt ad OP ex propoſ. 50. Tract 24. ſed ex BS, & SC rectangulum eſt æquale quadrato SM, & rectangulum ex EO, & OG quadrato ON. Ergo quadratum SN ad quadratũ OM erit, vt SP ad OP, quę eſt ex prop. 5. Tract. 24. proprietas parabolæ.

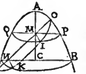
PROBL. III. PROPOS. XIV.

Omnis ſectio Conoidis parabolici ad axem obliqua Ellipſim efformat.

DVcantur paralleli baſi circuli BSD, & PSQ, qui ſecent OIXL planum ſectioni primigeniæ AAD normale. Eruntq; MI, & XN interſectiones planorum perpendiculares interſectionibus BD, & PQ, & OL ex prop. 16. Tract. 22.

Dico *itaque* OIKL *obliquum planum axi* AC *eſſe Ellipſim.*

Probatur. Cum PM, & MQ rectangulum quadrato MI, & BN, & ND rectãgulum quadrato NX ſit equale eo, quòd ſint circuli vt ex pr. 35. El. l. 3. erit rectangulũ PM, & MQ ad rectangulum BN, & ND vt quadratum IM ad quadratum NK ex propoſ. 7. lib. 5.

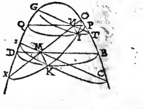


Vt autem rectangulum PMQ ad rectangulum BND, ita ex propoſ. 48. Tract 24. eſt rectangulum OML ad rectangulum ONL. Quaderè rectangulum OML erit ad rectangulum ONL, vt quadratum MI ad quadratum NX, hæc autem ex propoſ. 6. Tract. 24. eſt proprietas Ellipſi prima, & eſſentialis.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Ellipſes in Conoide Parabolico parallelæ ſunt ſimiles.

SInt duæ, GIT, & SMC parallelæ Ellipſes. Dico *eas eſſe ſimiles.*



Prob. Suppoſita eadẽ prorſũs coſtructione, quę propoſ. 31. cum, & ſit iiſdẽ verbia eadẽ demonſtratio. Rectangulũ ON, & NX eſt ad rectãgulum OM, & MX ex prop. 48. Tract. 24. vt rectãgulũ GN, & NT ad rectangulum ex SM, & MC; Sed vt rectangulum ON, & NX ad rectangulum OM, & MX, ita eſt quadratũ IN ad quadratũ MX ex 14. h. Ergo etiã rectangulum ex TN, & NG ad rectangulum ex SM, & MC, vt quadratum IN ad quadratum MX. Quare

etiam

etiam ex propoſ.26. lib.6. Elem. ita erit NG, & NT lineæ ita erunt ad SM, & MC, vt IN ad KM: quare ex def. Ellipſes GIT, & SKD erunt ſimiles.

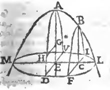
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

In Conoide Parabolico Parabolæ axi æquidiſtantes ſimiles, & æquales ſunt.

PArabola IBF detur parallela axi AE, & parabolæ per axem VAD. Dico *eam eſſe ſimilem, & æqualem ipſi* VAD.

Detruncetur AG ex axe æqualis ac diametro, & ducatur applicata GH, quæ erit parallela ED.

Probatur. Quia vt AG ad AE, ita eſt quadratum GH ad DE, & quia LAM parabola eſt; erit LCM rectangulum ex Cor.1.prop. 50.Tr.24.de Conicis ad LCM rectangulum, ideſt ex 35. lib.3. illi CL, CM æquale FC quadratum ad quadratum DE æquale LE, EM rectangulo, vt CE ad AE: ſed GH quadratum eſt ad quadratum ED, vt AG ad A, ideſt EC ad EA. Ergo cum CF quadratum ad EO quadratũ eãdem proportione alludat, vt GH quadratum ad idem ED quadratum erunt æqualia GH, & CF quadrata. Ergo, & lineæ GH, & CF. Quare cũ diametri ſint æquales, æqualeſque applicatæ, parametri quoque, vtpote æqualium applicatarum quadratis rectangulorum cum diametro latera erunt æqualia. Vnde parabolæ erunt ſimiles, & æquales, vt ex definitione.



EXPENSIO V.

De ſectione Conoidis Hyperbolici per planas ſuperficies.

COnoides Hyperbolicum recipit omnes ſectiones planis diuerſimodè illud ſecantibus; nempe circulum, Ellipſim, Parabolam, & Hyperbolam; de Circulo nihil dicemus, cùm pateat ex antecedentibus oſtenſionibus Circulum exhibere ſi planum ſecet Conoidem, Hyperbolicum parallelũ baſi, & eãdem prorſùs demonſtratio eſt, quam adhibuimus in Parabola. Vnde ad alias ſectiones oſtendendas accedimus.

DEFINITIO.

COnoides Hyperbolicum ab Hyperbola circa ſuum axem voluta formatur, & axis eius eſt idem, ac generantis Hyperbolæ.

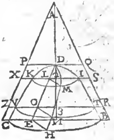
THEOR. I. PROPOS. XVII.

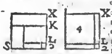
Si planum ſecet Conoidem Hyperbolicum parallelè ad aſymptotum figuræ ex generatione; illa ſectio eſt parabola.

SIt Conoides Hyperbolicum TDV, & figuræ ex generatione eidem TDV Aſymptoti ſint EA, & AC; ſitque DA parallela Aſymptoto AC; per quam agatur planũ DHE. Dico *figuram* DHE *eſſe Parabolã.*

Ad quod oſtendendum conſtituantur ordinatim applicatæ parallelæ baſi 2 X, & 3 V hinc inde, & extendantur vſque ad Aſymptotos in X, & Z, K, S, & quia ſunt parallelæ baſi plana IMK, & TNV circuli erunt, ſitque QP tangens ſectionem parallela ipſi XS. Quibus perfectis erunt omnes æquales, vtpote inter parallelas lineæ DP, LX, OZ.

Probatur igitur. Quoniam 2 X eſt ſecta, vtcumq; in L ex propoſ.6. lib.2. El. erit quadratum totius 2 X æquale duobus rectangulis ex ſegmentis 2 L, & LX, & quadratis ex iiſdẽ 2 L, & LX, vt in quad. 4. vides. Quadratum verò malus ex LX; q ſit æquale DP æquatur rectangulo ex KX, & XS, ex pt.46. Tr.24 q facit gnomonem circa 2 K; ſiquidẽ 2S & KX integrat vnã portionẽ, & 2 K alteram ſub altero latere KX, vt eodem modo rectangulũ ex LE, & EI faciet gnomonẽ concluſum prędicto gnomone ambiens quadratum ex EL, vt in quadrato XS eſt videre. Quare quadratum XE æquabitur quoq; duobus rectãgulis vni ex SK, & KX, & alteri IL, & KL, vnà cum quadrato E L, ſiquidem hæc omnia ambit quadratũ, cuius latus 2 S, vel 2 X. Si ergo auferatur quadratum paruum 2 L commune vtriſque, & gnomon, ideſt rectangulum XX, KS, & quadratum malus ex LX, quæ inuicem æquantur remanebit gnomon intermedius, nempe rectangulum ex LK, & LI æquale duobus rectangulis EX, & L2. Sed rectangulum 1L, & LX æquat quadratum ML ex 35. lib 3. Ergo etiam duo rectangula ex LX, & LE æquabunt quadratum ML.





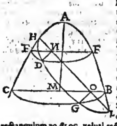
Idem dicas de rectãgulis duobus O 3, & OZ, quę æquabunt quadratũ ON. Et ideo erunt rectangula duo ex EL, & LX ad rectangula duo ex 3 O, & OZ, vt LM quadratũ ad quadratũ NO. Ideoq; etiã erit medietas, nempe vnicum rectangulum ex E L, & LX ad medietatem rectangulum vnicum 3 O, & OZ, vt quadratum ML ad quadratum NO. Sed rectangulum ex E L, & LX ad aliud ex 3 O, & OZ eſt, vt baſis E L ad 3 O baſim ob eandem altitudinem ęquatium LX, & OX: baſis verò E L ad baſim 3 O eſt, vt DL ad DO. Ergo quadratum ML erit ad quadratum NO, vt DL ad DO, quę ex prop.5. Tract.24. eſt proprietas parabolæ.

THEOR. II, PROPOS, XVIII.

Omnis ſectio conoidis Hyperbolici ad axem obliqua Ellipſim exhibet ſi ſecet vtrumq; latus ſectionis per axem.

SIt ſectum Conoides Hyperbolicum BAC duobus planis parallelis ad baſim. Hyperbolęque primitiuæ BAC normalibus FDA, & BGC, quę ſecent planum aliud obliquum axi AM, & eidem ſectioni primitiuæ normale HDGL. Dico hoc planum Ellipſim exhibere.

Probatur. Nam cum plana normalia ſint ad hyperbolem primitiuam BAO ſectiones DN, & GO erunt quoque normales propoſ. 16. Tr. 25. quare rectangulum ex FN, & NE erit æquale quadrato DN, & rectangulum ex BO, & OC quadrato OG; Sed rectangulum ex FN, & NE eſt ad



rectangulum BO, & OC, veluti rectangulum ex HN, & NL eſt ad rectangulum ex OH, & OL ex prop. 48. Tr. 24. Conic. Ergo rectangulum ex HN, & NL eſt ad rectangulum ex HO, & OL, vt quadratum DN ad quadratum OG: quæ eſt proprietas Ellipſium ex 5. Tract. 24. Conic.

COROLLARIVM.

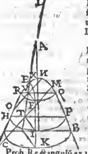
ELlipſes parallelaa in Conoide Hyperbolico eſſe quoque ſimiles eadem autem figura eſt, quæ in parabolico Conoide, & eadem oſtenſio.

THEOR. III, PROPOS. XIX.

Omnis ſectio Conoideos, quæ tranſeat per centrum hyperbolę primitiuæ Hyperbolam format.

SIt centrum hyperbolę primitiuæ A, & ipſa ſectio BMNC, quæ etiam exprimat Conoidem hyperbolicum, ſitque ſectio TEFI, quę producta tranſeat per centrum A. Dico hanc eſſe hyperbolā.

Sint plano Hyperbolæ primitiuę BNC normalia, & baſi circulari parallela plana QFR, & PIH, ipſaque ſectio TEI. Sit quoq; ei BNC normalis, & FV, & TI ſectiones erunt normales interſectionibus QR, & PH. Ducantur poſtea applicatę VN, & TM diametro TA ad puncta V, & T.



Prob. Rectangulū ex VQ, & RV eſt ęquale quadrato V: Sic rectāgulū ex PT, & TH eſt ęquale quadrato TI. Ergo, vt quadratū ad quadratū, ita rectāgulum ad rectangulum. Sed rectangulum ex QV, & VR eſt ad rectangulum NV, & VO, ideſt quadratum ſunt enim ęquales, vtpote applicatę, veluti rectangulum ex PT, & TH ad rectangulum ex MT, & TC, ideſt quadratū ex 49. Tr 24. Quadratū verò NV ad quadratū MT eſt, vt rectāgulū ex diametro tranſuerſa LV, & VX ad rectangulū ex TE, & LT ex pr. 6. Tract. 24. Ergo etiam ex 16. lib. 5. quadratum VF ad quadratum TI, vt rectangulum LV, & VE ad rectangulum ex LT & TE, quę eſt proprietas Hyperbolarum ex prop. 6. Tract. 24. Conic.

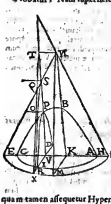
THEOR. IV. PROPOS. XX.

Aſymptoti hyperbolæ in hyperbolico Conoide ſunt ijdem, ac hyperbolæ in eodem plano exiſtentis, & coni aſymptotici ſectione effectæ.

SIt Conoides hyperbolicum, atqueadeo eius ſectio per axem, & ex generatione ABC, cuius Aſymptoti NE, NH; qui, & conū Aſymptoticū formeut NERH, ſitque ſectus tum conus HNE, tum conoides ABC plano VSR, in quo formentur duę ellipſes, altera quidem SR ſectione coni HNER effecta, altera DPI ſectione Conoidis hyperbolici ABC producta. Aſymptotus verò Hyperbolę conicę SR, ſit TX.

Dico itaque TX aſymptotum hyperbolę conicæ SR *eſſe quoque aſymptotum hyperbolæ conoidalis* DPI.

Probatur. Nam ſuperficies conoidis ABC ſemper quidem accedet ad ſuperficiem coni HNE, numquam tamen illam aſſequetur, eò quòd formetur à circumagitatione trianguli ex HNE aſymptotis cōſtituti, quibus hyperbola ſemper accedit, licet numquā aſſequatur ex prop. 44. tract. 24 Quamobrem Hyperbola conoidalis DPI, vtpote in ſuperficie conoidis exiſtens cum ipſa ſuperficie conoidis ſēper quidem accedet, numquam tamen aſſequetur Hyperbolam SR conicam, &à ſuperficie coni effectam, ſed & SR ſemper accedit ad aſymptotum ſuum TX, & numquam aſſequitur; Ergo etiam Hyperbola DPI accedet ad TX aſymptotum, ſed illum non aſſequetur. Quare etiam XT hyperbolæ conoidalis DPI erit Aſymptotus, quod accedendo quidem ad SR accedentem ad TX accedat quoque ad TX; quam conſequi non poteſt, cùm nec hyperbolam SR, quæ nec ipſa acquirere poteſt XT numquam obtinere queat.



COROLLARIVM.

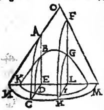
HInc eſt hyperbolas SR coni & DPVt conoidis eſſe ſimiles; quia cum habeant eoſdem aſymptotos ductis SQ, & PO erunt diametri rectę applicatę ſub angulo recto ipſi axi VT; quare erit vt TS ad QS, ſic TP ad PO. Vnde ſectiones ex prop. 54. tract. 24. ſimiles erunt DPI conoidis, & SR coni aſymptotici.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXI.

In Conöide omnes Hyperbolæ parallelæ. ſunt ſimiles.

SIc conus aſymptoticus MON hyperbolę primigeniæ KBC conoidis, & hyperbolæ in conoide LGI, & BDE, in cono autem FHL, & CAE. Dico DEB, & IGL *eſſe ſimiles Hyperbolas*.



Probatur. Nam ex Coroll. prop. 20 huius DBE Hyperbola Conoidis eſt ſimilis Hyperbolę CBA coni ex prop. autem 6 h. CAE eſt ſimilis HFL hyperbolæ, & hæc ex Coroll citato hyperbolæ LGI: Ergo Hyperbolę ILG, & DBE ſunt ſimiles.

EXPENSIO VI.

De ſectionibus Cylindrorum per planas ſuperficies.

CYlindri quoque ſectiones conſiderandę ſunt, & quidem ſi Cylindrus baſim circulum poſſideat, patet, ſectiones baſi parallelas eſſe circulos baſi ęquales, ſic ſi ſit Ellipſis, patet quoque, omnes ſectiones baſi parallelas æquales eſſe Ellipſes, quod ne in apertis immoremur per ſe manifeſtum præſupponimus, ſicut, & omnem ſectionem axi parallelã eſſe Quadratũ, vel Rectãgulũ, vel Rhombum, vel Rhomboidem in manifeſtis eſt. Igitur ea ſolummodo de Cylindri ſectione afferemus, quæ minus clara ſunt.

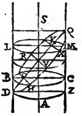
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si ſectio fiat in Cylindro, cuius baſes ſint circuli ab aliquo plano obliquo axi, ſectio hæc Ellipſim repreſentabit.

PRobatur. Nam illam proprietatem Ellipſium conſequitur, quod habeat diametros inæquales, quos circulus non obtinet, & tamen, quod quadrata applicatarum ad diametrum ſint inuicem in proportione illa, qua rectangula ſub contiguis diametri portionibus comprehenſa.

Nam quod ſint duo inæquales diametri, patet; Quod VR ſit diameter idem, qui baſis Cylindri DZ, qui eſt circulus: at verò diameter QD longior erit, vtpote baſis in rectangulo QDZ diametro circuli ZD.

Quod autem quadrata applicatarum ad diametrum QD quales ſunt XK, & OH, ſe habeant ad inuicem, vt interceptarum diametri QD portionũ rectangula, nempe ex QK, & KD ad rectangulum ex QO, & OD. Prob. Nam ex prop. 35. lib. 3. quadratum XK eſt æquale rectangulo ex MK, & KL; cùm in circulo ſint ductæ; & idem dicas de quadrato OH, quod erit æquale rectangulo ex CO, & OB eò quòd ſint quoque in circulo. At rectangula habent inuicem eam proportionem, quę ex lateribus componitur ex prop. 23. lib 6. quare proportio rectanguli ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL componetur ex proportione CO ad MK, & OB ad KL. At proportio CO ad MK eſt eadem, quę QO ad QK ob parallelas MK, & CO in triangulo CQO. Et proportio OB ad KL eſt eadem, ac proportio OD ad KD. Eadem ergo erit proportio ex CO, & OB rectangulum ad MK, & KL rectangulum: quæ eſt rectanguli OD, & OQ ad rectangulum KQ, & KD, vtpote, quia hæc rectangula ex lineis dicentibus inuicem eandem proportionem ſint compoſita: Sed illa rectangula, nempe ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL dicunt eam proportionem, quam quadratum HO ad quadratum XK, cùm iſtis rectangulis oſtenſa ſint ęqualia. Ergo etiam rectangulum ex OD, & OQ ad rectangulum ex QK, & KD, erit vt quadratum OH ad quadratum XK: quæ eſt proprietas Ellipſium ex propoſ. 6. tract. 24.



COROLLARIVM.

OMnes Ellipſes parallelas in Cylindro eſſe æquales patet; quoniam habent æquales axes ob earum paralleliſmum.

Vnde etiam patet, quòd, & ſi baſes cylindri ſint ellipſes, eſſe quoque ſectionem obliquam axi Ellipſim, eò, quòd ex 6. Tract. 24. ſit Ellipſium æqualiũ, vtpote: quod prò eadem computari poſſ[illegible] ſint BO, & OC rectangulum ad KM, & KL rectangulum, vt quadratum HO ad quadratum KX; quare etiam rectangulum ex OD, & OQ prædicta ratione erit ad rectangulum DK, & KQ, vt quadratum OH ad quadratum KX. Vnde ex 6. Tract. 24. DHXQ Ellipſis erit.

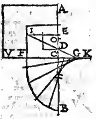
PROBL. II. PROPOS. LXVIII.

Datis Ellipſeos extremis diametris Ellipſim per puncta deſcribere.

SInt dati Ellipſeos diametri extremi KF,& AB bifariam inniceem, & ad rectos angulos ſe ſecantes. Sumpta circlno eorum ſemidifferentia CO, qua nimirum ſemidiameter CF minor eſt, quã ſemidiameter CA, accõmodetur à G puncto minoria diametri ad libitum electo verſùs C, ductà arcus portione, qua ſecetur diameter maior in D, vt DG æquet CO, ductaq; GDI fiat DI equalis ſemidiametro minoris Dico itaq; quod extremũ I erit in Ellipſi, coius ambitus per extrema axiũ K,F,A,á,tranſeat. Vnde ſi plurimæ ea iſtis lineia, ſic ducantur habebimus multa puncta, per quæ ambitum Ellipſeos ducere poterimus, vt vides factum in ambitu FA.

Probatur autem ex eo, quòd ducta EI ſit vna ex applicatis, quate I eius extremum erit in circumferentia Ellipſis.

Quòd autem ſit applicata, oſtenditur ex eo, quòd quadratum ſemidiametri minoris, ſimulque applicatæ CF ſe habeat ad rectangulum, ſimulque quadratum ex ſegmentis CB, CA diametti tranſuerſæ AB, vt quadratum dictæ EI ad rectangulum ex ſegmentis BE, & EA diametti tranſuerſę AB. Vnde ex doctrina pr.6:h. erit applicata. Quod verò res ita ſe habeat oſtenditur. In triãgulis ad verticẽ & rectangulis, & ideo æquiãgulis, & ſimilibus IDE, & CDG, vt CD ad DE, ita erit GD æqualia ex conſtructione CO ad DI, quæ ęquatur lineæ OA. Igitur vtendo argumento compoſitionis ita erit CDE ſimul ad ſuam partem ED. Velut AEC ſimul ad ſuam partem AO I Et ita quoque erunt eorum quadrata, nimirùm quadratum AC ad quadratum DE reſpondebit proportione, vt quadratum AC ad quadratũ AO, vel æqualis CF, aut DI ex 26.l.6.



Conſidera verò, quòd, ſi auferatur quadratum ex AC à quadrato CA remanebit gnomõ VIA ęquale rectangulo ex BE, & EA. Sicut ſi quadrato ex DI auferatur quadratum DE remanebit quadratum ex EI, (nam in triangulo rectangulo DEI duo quadrata crurum ſunt æqualia quadrato baſis ex II. lib.2. Elem.) Ablatis ergo proportionalibus quadratis EC ab AC, & DE à DI, quæ item proportionalia ſunt in eadem proportione, remanent rectangulum BE, & EA, vel gnomon VIA, & quadratum ea EI ex pr.22.l.5. proportionalia, ac ſua tota. Erit ergo vt quadratũ AC, quod ſtat loco rectãguli ex ſegmentis diametri ad applicatæ, & ſemidiametri minoris CF quadratum, ſic rectangulum ex BE, & EA ſegmentis ad quadratum lineę EI, & *conuertendo*; Vnde EI erit applicata.

EXPENSIO XVIII.

Sectiones omnes deſcribere ope parallelogrammi.

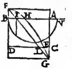
OPortet etiam docere modum deſcriptionis ſectionum, quæ ea datis figuris eruuntur, inter quoa non infimæ ſortis eſt ea deſcriptio, quę ex dato parallelogrammò in opus deducitur.

PROBL. I. PROPOS. LXIX.

Dato quocumque parallelogrammo ex illo Parabolam efformare.

DVctis parallelis AB, & CD vni laterum, & diametro FG inter AE, & IE ponatur BH, ſic inter CD, & LD media proportionalis ED; puncta E, & H, G, F erunt ad parabolam.

Probatur. Quoniam AE, & CD latera æqualia ſunt, erit IB, & AE rectangulum ad CD, & LD rectangulum, ideſt quadratum HB ad quadratum ED rectangulis æqualia ex propoſ.19. lib.6. Elem. eò quod ſint formata ea medija proportionalibus, vt altitudo IB ad LD: Sed IE, & LD eſt vt FE ad FD ob parallelas ea 4 lib.6. Ergo HB quadratum erit ad ED quadratũ, vt FB ad FD, & ideo HB, & ED ex 5. huius erunt ad parabolam.

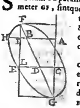


PROBL. II. PROPOS. LXX.

Ex parallelogrammo quocumque Ellipſim delineare.

SIt datum FG parallelogrammum, & in eo diameter GF, ſintque ductæ parallelæ alteri laterum AH, & CB, & inter AE, & BI media fiat BH, & inter CD, & DL media DE. Dico GH, & E, F eſſe ad Ellipſim.

Probatur. Ita eſt AE ad CD, vt BG ad DG; rurſùs ita eſt AI ad DL, vt BF ad FD. Ergó rectangula compoſita ex iiſdem proportionibus AB, & BI ad rectangulum CD, & CL erit, vt BG, AF rectangulum ad GD, & DF rectangulum, vt hic videa.



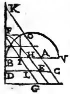
AB	vt	BG	&	BI	vt	BF	
ad		ad		ad		ad	
CD		DG		DL		FD	
Ergo	compoſitum		vt	compoſitum.			
AE	&	BI	erit	BG	&	BF	
	ad				ad		
CD	&	DL		DG	&	FD	

Quare rectangulum AB, & BI erit ad CD, DL, ideſt ęqualia quadratum HB ad DE quadratum, vt rectangulum BG, & BF ad rectangulum DG, & FD: quare ex 6. h. puncta H, & E erunt ad Ellipſim.

PROBL. II. PROPOS. LXXI.

Dato Parallelogrammo quocumque Hyperbolam delineare.

SIt parallelogrammum OG, & producta CO in K ducatur per F linea KD, fiatq; triangulum CKD, & ductis AB, & CD parallelis lateri OF; inter lineas AB, & BI inueniatur media HB, & inter CD, & LD media BD, & puncta E, & H erunt ad hyperbolam.



Probatur ob ſimilitudinem triangulorum KA eſt ad KD, vt AB ad CD, & vt AF ad DF ſic IB ad LD. Componantur, itaque ex iſtis proportionibus rectangula.

KB	vt	AB	&	BF	vt	IB
ad		ad		ad		ad
KD		CD		DF		DL

Ideo compoſitum erit, vt compoſitum.

KB	&	BF	AB	&	IB
	ad			ad	
KD	&	DF	CD	&	LD

Quare, & quadratum HB ęquale rectangolo AB, & IB erit ad quadratū DE æquale rectangulo CD, & DL, vt rectangulum KB, & BF ad rectangulum KD, & DF: quare puncta H, & F ex *6.* huius erunt ad Hyperbolam.

EXPENSIO XIX.

De tranſumptione figurarum conicarum ex circulo.

SIcut ex dato parallelogrammo ſectiones deduximus, ſic & ex dato circulo eas adipiſcimur, & tantò potiori iure, quantò circulus ſectionibus maiori accedit annalogia.

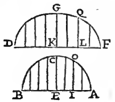
PROBL. I. PROPOS. LXXII.

Dato circulo quocumque Ellipſim quamcumque deſcribere.

SIt datus circulus ABC, ex eo deſcribemus quamcumque Ellipſim, ſi ſtatuamus eius diametrum pro diametro Ellipſeos minori, & ad libitum eligamus maiorem V. g. DF.

Diuidemos itaque AB, in quas placuerit ęquales partes, & trahemus perpendiculares ad diametrum, vt eſt OI, & EC. Diuidemus quoque BD in totidem partes, & erectis ad ea puncta diuiſionum perpendicularibus, quę æquales ſint prioribus in circulo tractis quælibet nimirum ſuæ correſpondenti V. g. KG erit æqualis EC, & LQ correſpondenti OI, & per extrema earum ducemus æquabili manu lineam curuam, quæ erit ambitus Ellipſeos.

Id verò oſtendetur demonſtrando LQ eſſe applicatam ſicut eo, quòd ita ſe habeat rectangulum, & quadratum ex ſegmentis diametri FB. & & KD ad rectangulum ex ſegmentis DL, & LF, vt quadratum KG, ſe habet ad quadratum LQ. Nam ex prop.*6.* hæc eſt proprietas eſſentialis applicatarum ellipticarum.



Probatur autem. Nam cum AB, & DF ſint diuiſæ in partes numero ęquales erit tota ad medietatem ſuam, vt alia tota ad medietatē, ſicut, & V.g. ſex partes ad duas vnius ſicut BI ad AI erunt quoq; vt partes ſex ad duas alterius, vt DL ad LF. Igitur, & quadratum ex medietate EB, ita erit ad rectangulum ex BI, & IA, vt quadratum ex medietate BD, ad rectangulum ex DL, & LF, cum ex ijſdem proportionibus cōponātur rectę BI, ad AI, & DL ad LF &c. Sed rectangulum BI, & AI eſt æquale quadrato IO, cum IO ſit media proportionalis inter BI, & IA. Ergo, & quadrato LQ huic ęquali, ſicut, & quadratum EC, vel AB eſt ęquale quadrato BO. Quare KO, DB, & KF rectangulum erit ad rectangulum ex LD & LF lineis, vt quadratum KG ad quadratum LQ.

COROLLARIVM.

*HInc autem elicies ſufficere ad formandam ellipſim ex circulo, ſi lineam datam, vel maiorem, vel minorem ita ſeces proportionaliter, vt ab applicatis, ſeu ſinubus in circulo ſecatur, vel vt ipſę applicatę, ſiueſque creſcunt.

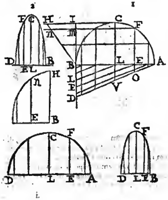
Sit ſemicirculus ABC, in quo diuiſo in partes ęquales ducti ſint ſinus CL, & BF, & cęt. ſeceturq; BI primùm in partes æquales, iuxtà quas ſinus ipſi ſunt, ita, quod BI ſit æqualis LC, & BM ſit æqualis BF, & cęt. deinde iuxtà partes lineę BI detruncetur BH in partes proportionales ex propoſ. 10. lib. *6.* ita quòd ſit BH, ad BI, BN ad BM, & cęt. Dico ſinus BH, & BN, & alij ſimiles ſinubus prędictis LC, BF, & alijs diſpoſiti per puncta B, L, & alia in quibus prima erant ſuis extremis eſſe in ellipſi.

Probatur. Ita eſt BN ad BH, vt BF ad LC: Ergo etiam quadratum ex BO ad quadratū ex HB erit, vt quadrtū ex BF ad quadratū ex LC ex 26. l. *6.* ſed quadratū BF eſt æquale rectangulo BB, & BA, itemq; quadratum LC eſt æquale rectangulo ex AL, & LB. Ergo rectangulum AB, & BA ad rectangulum AL, & LB habebit eandem proportionem, quam quadratum ex BF ad quadratum ex LC. Ergo etiam eandem, quam quadratum ex BN ad quadratum ex BH;

cum

eum ſint in eadem proportione cum prędictis ex BF, & LC quadratis. Cùm ergo ex BN quadratum ſit ex BH quadratum, vt rectangulum ex AE, & EB ad rectangulum AL,& LB; lineę BN, & AH erunt ad diametrum AD applicatæ in punctis E,& L. Vnde earum extrema puncta erunt in Ellipſi ea 6. h.

Idem dicendum. Si iuxta diuiſiones diametri AD diuidatur proportionaliter aliqua alia linea, ſeu maior, vt AD, ſeu minor, vt FD. Nam ſi illi lineæ, vt factum eſt ſeorſum applicentur ſinus LC,& BF quilibet ad ſuum punctum correſpondens, horum ſinuum extrema puncta erunt in Ellipſi.



* Probatur. Nam quia AE ablatum eſt ad OA ablatum, vt AB totum eſt ad AD totum, erit etiam reliquum EB ad reliquum OD,vt AE eſt ad AO. Quare rectangulum AO, & OD erit compoſitum ea ijſdem proportionibus; quibus AE, & EB componitur. Sic quoque AL ad AV erit, vt AB eſt ad AD. Quare, & reſiduum LB ad reſiduum VD erit, vt AL ad AV: quare, & rectangulum ex AV, & VD, quod eſt quadratum componetur ex ijſdem proportionibus, quibus quadratum ex AL,& LB. Cum ergo rectangulum ex CA & OD ſit compoſitum ea ijſdem proportionibus, quibus rectangulum ex AE, & EB erit ad rectangulum, ſeu quadratum AV, & VD compoſitum ex ijſdem proportionibus, quibus rectangulum, ſeu quadratum AL, & LB, vt rectangulum AE, & EB ad idem quadratum ex AL,& LB: Sed rectangulum ex AE, & EB ad quadratum ex AL, & LB eſt, vt quadratum ex EF ad quadratum ex CL. Ergo etiam rectangulum ex AO, & OD eſt ad rectangulum ex AV, & VD, vt quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Quare EF,& LC erunt applicatę ad diametrum AD,& earum extrema puncta in Ellipſi reperientur.

COROLLARIVM I.

POſſunt etiam Ellipſes è circulo deſumi, etiam, ſi diameter circuli, ſeu ei proportionalis ſumatur pro ſecunda diametro in Ellipſi, & ei ad angulos obliquos eaſdem applicentur, ſeu ſinus, ſeu ſinubus proportionales parallelli; dabunt enim puncta, per quę ducta Ellipſis circundabit diametrum ſecundariam.

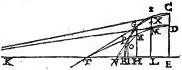
COROLLARIVM II.

QVin etiam deſcribetur Ellipſis, ſi tùm Sinubus, tùm portionibus diametri proportionales ſumantur, vt eſt videre in fig 2. Nam rectangulum BL, & LD eſt ad rectangulum BE, & ED in fig. 1. vt eſt AL, LE rectangulum ad AE, & EA rectangulum, quòd eſt vt quadratum ex LC ad quadratũ ex EF; Quadratũ verò LC ad quadratũ BF eſt, vt quadratũ BH, vel æqualis LC in fig. 2. ad quadratum BN, vel æqualis BF. Quare ea ęquo rectangulum BL, & LD erit ad rectangulum BE, ED erit, vt quadratum LC ad quadratum EF. Quare LC, & BF erunt applicatæ in fig. 2. ad diametrum DB.

PROBL. II. PROPOS. LXXII.

** Ellipſim dato circulo, & minori diametro per puncta deſcribere.*

* SIt datus circulus, ſeu quadrans BC, & diameter minor Ellipſis ED; diuidaturque circulus in quaſlibuerit partes CZ, ZG, GP, & tandem PE ducanturque rectæ CZK, ZGT, GPV, & cęteræ ſi adſint ad diametrum productum EK; ab ijſdem quoque punctis perpendiculares ducantur ZL, GH, PI, & deinde à vertice D diametri minoris ED ducatur ad punctum diametri K, in quod cadit CZ a recta DK, & à puncto M, in quo ſecat ZL ducatur recta ad T; quę ſit MT, in quod cadit ZGT rurſúſque à puncto N, vbi hæc poſtremo ducta ſecat perpendicularem GH ducatur recta NV ad punctum V, in quod cadit GPV, & ſic agatur ſucceſſiuè de alijs. Si ergo per puncta DMNOB ſicba æquabili manu ducatur, hæc erit Ellipſis quarta pars, & puncta illa DMNOB erunt in Ellipſi.



Probatur Progr. 1. quia (vt oſtendam) in Ellipſibus ita eſt EC ad ED, vt ZL ad ML, & è contra *cõuertendo*. Ergo conuenient in vnicum punctum X. Alioquin ſi aliqua non tranſiret per punctum X, ſed alibi V. g. per X, & perueniret ad punctum D ex Coroll. propoſ. 4. Element. eſſet EC ad ED, vt LZ ad XL, quia enim DXB recta eſſet, vt dicunt aduerſarij, & perueniret ad punctum K per X lineę DE, & LX eſſent in eodem triangulo parallelæ, ſed etiam CE eſſet ad DE, vt ZL ad LM, quia DE, LM ſunt in Ellipſi, vt prę ſupponimus quapropter eum XL, & ML eiſdem LZ eãdem proportionem diceret, quam CE ad ED, eſſent inuicem æquales ex propoſ. 9. lib 5. Elem. quŏd eſt abſurdum. Ergo DK tranſibit per punctum M, per quod tranſit Ellipſis.

Progreſſ. 2. Quod verò CE in Ellipſibus ſit ad DE, vt ZL ad ML, patet. Nam in circulo ita eſt quadratum EC ad quadratum ZL, vt rectangulum ex BE & EA ad rectangulum ex ſegmentis diametri LB, & reſiduo ſegmento LEE, quod ex propoſ. 35 lib. 3. Elem. quadratum ea AC, & rectangulum ex ſegmentis diametri AE, & reſiduo EB ſint ęqualia ſicut etiam

Digitized by Google

etiam ZL quadratum, & rectangulum ex LB, & reliquo LES ſegmento eiuſdē diametri, ſed etiā quadratū DB ād quad. ML, vt rectangulū EE, ES ad rect. ea iiſdem BL. & LES diametri portionibus circuli ſimulque Ellipſis ex prop. 6. h cum ergo in eidem proportione rectangulorum referantur EC quadratum ad LZ quadratum, vt DE quadratum ad LM quadratum erunt ea propoſ. 16 Elem. 5. in eadem proportione. Quare, & latera erunt in eadem proportione ex 26. lib. 6. & erit BC ad LZ, vt BD ad ML; quare *permutando*, quoque erit EC ad ED, vt LZ ad ML.

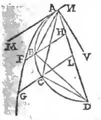
PROBL. III. PROPOS. LXXIV.

Dato circulo, ſeu circuli portione Parabolam deſcribere.

F Iant æquales lineis BA, & AC ductis à vertice A ſegmenti ABCD ad peripheriam ipſius applicatæ GL ad HF, quæ tamen debent eſſe æquidiſtantes tangenti circuli MA: Si deinde per puncta GF ducatur flexa, hęc erit *Parabola*.

Probatur. Nam vt eſt GL quadratum ad FH quadratum, ſic intercepta LA eſt in proportione ad interceptam AH. Ergo ex 6. h. AFG eſt parabola.

Hoc autem oſtenditur. Nam ex prop. 29. lib 3. El. angulus NAH æquatur angulo ABD, & ob parallelas MN, & BH angulo AHB. Quaderè ABD angulus āgulo BHA erit æqualis; angulus verò ad A eſt communis. Ergo triangula ABD, & BAH erūt ęquiāgula; ideoq; ſimilia; Ideoque



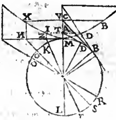
AH erit ad AB, vt AB ad AD, quadere AB erit media proportionalis, & AH, & AD extremæ. Vnde rectangulum ex DA, & AH æquabitur ex progr. 19. lib. 6. quadrato BA, ideſt quadrato HF. Et idem concludes de quadrato CA ideſt LG, quòd ſit æquale rectangulo ex DA, & AL. Ideoque quadratum CA erit ad quadratum BA, vt rectangulum ex AD, & AL ad rectangulum AD, & AH; ſed hæc rectangula ob eandem altitudinem AD ex prop. 1. lib. 6. Elem. ſunt vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum CA ad quadratum BA erit, vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum GL ad quadratum FH, quæ lineis CA, & BA æquantur erunt, vt LA ad HA. Vnde GFA ex 5. huius erit Parabola, & AD Parameter.

PROBL. IV. PROPOS. LXXV.

Dato Circulo Hyperbolam deſcribere.

T Angentes, quæcumque AD, & CB pro applicatis cōſtituantur à pūctis A, & C, quibus intercecant diametrum ML productum, quæ erunt AO, & CB, flexaque BDM per extrema applicatarum ducta erit Hyperbola.

Probatur. Quadratum CB tangentis eſt æquale rectangulo ex CL ſecantis, & CM ex propoſ. 36. lib. 3. Eucl. ſicut, & quadratum AD tangentis eſt æquale rectangulo AL ſecantis, & AM Ergo vt eſt BC quadratum ad quadratum DA; ſic rectangulum ea CM, & CL ad rectangulum LA, & AM. Quare ex 6. huius BC, & AD erunt applicatæ Hyperbolæ, cuius diameter tranſuerſa ML.



Idem efficies; ſi vtaris tangentibus MX, MN pro applicatis VX, & IT, & pro interceptis diametri portionibus parte exteriori ſecantium XZ, & ON, quas transferas in TM, & VM. Itaque eadem ratione quadratum tangentis IT, vel ZM æquabitur rectangulo YZ ſecantis, & exteriùs aſſumptæ XZ, ideſt rectangulo ex TL, & TM; ſic tangentis quadratū MN, ideſt ęqualis VX ęquabitur rectāgulo ea NS, & NO, vel VL, & VM, & ideo quad. VX erit ad quadratum TI eſt, vt rectangulum ex VL, & VM ad rectangulum ex TL, & TM. Quapropter erunt ex 6. huius VA, & TI applicatæ hyperbolæ; cuius diameter tranſuerſa ML.

EXPENSIO XX.

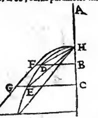
De mutua ſectionum traſſumptione.

D Eductioni ſectionum à circulo, & rectangulo debet iure ſuccedere mutua earum transformatio, atque tranſumptio, & modus docendus eſt, quo data vna ſectione, altera ex illa extrahatur.

PROBL. I. PROPOS. LXXVI.

Data Parabola ex ea Hyperbolam tranſcribere, vel è contra.

S It HC diameter, & ordinatim applicatæ in parabola BD, & CE; cuius parameter AH; Qua-



dratis igitur DB, & BH fiat æquale quadratum ex FB; Iterum quadratis EC, & CH fiat æquale quadra-

tum GC ex 11. lib. 2. & puncta G, F extrema erunt ad Hyperbolam.

Sit AH æqoale Parametro Parabolæ. Igitur BH, & HA rectangulum æquabitur quadrato DB, & ideo ſi addas quadratum BH; erit rectangulum ea AB, & BH quadratis DB, & BH æquale, & ideo quadrato BF ex Theſi æquale. Sic dicendum de quadrato EC æquale rectangulo AH, & HC; addito, ei quadrato HC quadrata ex EC, & CH, ideſt quadratum GC ex Theſi eis æquale, erit etiam æquale rectangulo AC, & CH. Quapropter ita erit FB quadratum ad quadratum CG, vt AB, & BH rectangulum ad rectangulum AC, CH, ideoqoe BF, & GC erunt applicatæ Hyperbolæ ex prop. 6. huius, cuius diameter intercepta HA.

PROBL. II. PROPOS. LXXVII.

Data Hyperbola, in qua quadrata applicatarum ſint æqualia rectangulis, ex interceptis diametri portionibus Parabolam deſcribere.

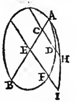
Detrahatur in præced. fig. à quadratis applicatarum FB, & GC quadrata interceptarum diametri portionum BH, & CH ex 33. lib. 6. & quadratorum reſiduorum latera erunt applicatæ Parabolæ ad eaſdem diametri portiones BH, & HC.

Probatur. Nam quia ex Theſi GC quadratum æquatur rectangulo AC, & CH. Ergo ab eis vtriſque ablato quadrato CH erit, quadratum CE æquale rectangulo AH, & HC. Rurſus ſi à BF quadrato, & ab AB, & HB rectangulo dematur quadratum BH erit quadratum DB æqnale rectangulo AH, HB; at quia iſta rectangula conficiuntur ex eodem latere HA erunt inuicem, vt altitudines CH ad BH. Ergo etiam quadrata EC ad BD erunt vt CH ad HB: Ideoq; CE, & DB erunt applicatæ Parabolæ, cuius parameter HA.

PROBL. III. PROPOS. LXXVIII.

Data Ellipſi Parabolam deſcribere.

Sit Ellipſis AB, & in ea diameter coniugata æqualis alteri AB, & applicatæ DC, & BF: Fiatque quadratum HC æquale quadratis ex DC. & AC, & quadratum IB æquale quadratis FB & BA. Et CH, atque IB horum quadratorum latera erunt applicatæ in Parabola.



Probatur ex prop. 35. Tr. 24. cum AB ſit diameter coniugata erit rectangulum AC, & CB æquale quadrato CD, & ita quoque AE, & EB æquale quadrato FE: Addito igitur quadrato AC rectãgulo AC, & CB fiet totum rectangulum ex AB, & AC æquale quadratis DC, & CA; ſic addito quadrato AB rect. ex BA, & BE fiet totum rectangulum ex AB, & AE æquale quadratis BE, & BA eiuſdem altitudinis AB; ideo erũt inuicem, vt altitudines AC, & EB; ſed quadratum HC rectangulo ex AB, & AC ex effectione ęquatur; ſic etiam EI quadratũ rectangulo ex AB & AE. Ergo ita erit quadratum ex CH ad quad. EI, vt AC ad AE. Quare CH, & IE erunt applicatæ parabolæ.

PROBL. IV. PROPOS. LXXIX.

Data Parabola Ellipſim deſcribere.

Ex parabola deſcribetur Ellipſis adhibita fig. pręc. ex propoſ. 33. lib. 6. Auferatur quadratum AC portionis diametri à quadrato CH, & latus DC reſidui quadrati ſtatuatur pro applicata diametri coniugatæ æqualis alteri.

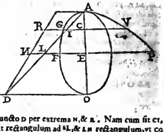
Probatur. Nam quia HC quadratum æquatur rectangulo AB parametri, & AC; ſi auferatur ab vtriſq; quadratum ex AC remanebunt æqualia quadratum DC, & CA, CB rectangulũ; ſic dicas de rectangulo AB, & AE, & quadrato EI à quibus ſi auferatur quadratum AE remanebunt EF reſiduum quadrati, & AE, & EB rectãguli ęqualia. Quare erit vt quadratum DC ad quadratum FE; ita CA, & CB rectangulum ad rectangulum AE, & EB. Quare ex 6. huius DC, & FE erunt applicatę Ellipticæ.

Quod verò rectangula applicatarum quadratis æqualia ſint eiuſdem baſis patet, quia habent eundem Parametrum, & AB Parabolæ datæ erit Parameter, at in Ellipſi erit diameter coniugata æqualis alteri, eo quod BEA rectangulum remaneat æqvale quadrato FE, & ſic de alijs.

PROBL. V. PROPOS. LXXX.

Data Ellipſi Hyperbolam deſcribere.

Fiat rectangulum iſoſcelles AOD, deinde ductis in Ellipſi CG, & EF applicatis ſecabunt AD in I, & L, fiat quadrato CG æquale rectangulum CI, & IR, & quadrato ea FE æquale rectangulum EL, & LN. Erit ADR triangulum, & recta tranſibit



à puncto D per extrema N, & R. Nam cum ſit CI, & RI rectangulum ad EL, & LN rectangulum, vt CG quadratum ad EF quadratum, ideſt vt CA, & CO rectangulum ad AE, & EO rectangulum habebunt ea rectangula proportionem ex lateribus compoſitam, ſicque ſtabunt.

Compoſ.

Compoſ.			vt	Compoſ.		
CI	&	IR		CA	&	CO
	ad				ad	
EL	&	LN		EA	&	EO.
Ergo	latera			latera		
CI	vt	CA		IR	vt	CO
ad		ad		ad		ad
EL		EA		LN		EO

Sed CO, & EO, vt ID ad LD, & ideo erit, vt RD ad ND, quare ID, RD latera ſtipantia parallelas IR, EN erunt rectæ, quòd triangula ſint ſimilia RID, & NDL ex 5. lib. 6. & ideo poſita vnum ſuper aliud in angulo n conuenient, & eadem crura efficient.

Si rectangulo igitur CI, & CR fiat quadratum æquale VC, & aL, & EN rectaugulo quadratum EP æquale, erunt VC inter CI, & CR, & PE mediæ proportionales inter EN, & LE. Quare ex prop. 59. erunt VC, & Pa applicatæ Hyperbolicæ, & P, & V puncta ad Hyperbolam.

PROBL V. PROPOS. LXXXI.

Datam Hyperbolam ad Ellipſim reuocare.

Hoc fit auferendo quadratum CA ab VC in fig. præced. & EA ab EP, & cęt. & latera, quæ reſiduorum quadratorum contexunt latera erunt applicatę in Ellipſi; cuius diameter tranſuerſa eſt eadem, ac diameter Hyperbolica, quę poteſt etiam eſſe diameter ſecundaria, licet figura ſit de ſolo axe.

TRACTATVS XXV.

De Sectionibus corporum ſphæroicorum per planas ſuperficies.

VIdimus Sectiones Sphęrę per planas ſuperficies,relationes, proprietates,& dependentias;modo ſectiones corporum, quæ aliquid ſphærici poſsident per planas ſuperficies contemplandæ, quæ deinde ad proiectiones, tum ſphæræ, tum circulorum, ſeu orthographicè, ſeu ſtereometricè mirabiliter deſeruiunt.

EXPENSIO I.

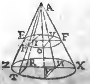
De ſectione Coni, cuiuſcumque per planas ſuperficies.

SEctio coni poſt ſphæram celebrior,vtpote,quę tres mirabiles ſectiones exhibeat Ellipſim, Hyperbolam, Parabolam, & inſuper triangulum, & circulum, & licet iam de coni ſectionibus egerimus, non tamen pro vt etiam pro baſi Ellipſim poſsidet,de ijs tractauimus; quemadmodum nunc agere oportunum iudicamus.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis ſectio coni Elliptici parallela baſi Ellipſis eſt.

PRobatur, quod in cono AXZ,cuius baſis XTZ ſit Ellipſis, quod, & ſectio parallela FOPE ſit Ellipſis. Nam vt NA ad VA, ſic XN ad FV, & ſic NZ ad VE, & NY ad VO, & permutando, ob parallelas in triangulis XAN, & NAY, & ANZ, quorum commune latus eſt NA. Vnde etiam rectangulum XNZ ad rectangulum FVE erit ex 26. lib. 6. vt NY quadratum ad VO quadratum. Eodemque modo concludes, quod XR ſit ad FI, vt RZ ad IE,& RT ad IP: ſint in eadem proportione,& permutando,ac RA ad IA,eo quòd in triangulis ob parallelas ſimilibus ex 4.l 6.exiſtãt. Quare pariter XR,& RZ rectangulũ erit ad rectangulum FI, IE, vt quadratum RT ad quadratum IP. Itaque XN,& NZ rectangulum eſt ad FV, & VE rectangulum, vt quadratum NY ad quadratum VO, & conuertendo FV, & VE rectangulum eſt ad XN, & NZ rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum YN, & vt XN. & NZ rectangulum ad XR, & RZ rectangulum, ita eſt quadratum YN ad quadratum RT cum XQZ ex Theſi ſit Ellipſis, vt autem XR,& RZ rectangulum ad FI,& IE rectangulum, ita eſt quadratum RT ad quadratum



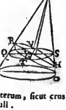
PI, ergo ex æquo erit FV, & VE rectangulum ad FI, & IE rectangulum, vt quadretum VO ad quadratum IP: quare ex propoſ.6. Tract. 24. FOE Ellipſis erit.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis ſectio coni circularis ſcaleni, quæ angulos alternos efficiat æquales baſi, & ipſa quaque circulus eſt.

SIt conus OYP, cuius baſis circularis OP, & circulus æquidiſtans,& parallelus QVTS. Iam notum eſt ex præc.tr.pr.2.quod ſi OP baſis ſit circulus, fore etiam circulum QSVT. Quo ſuppoſito ducatur alius circulus, qui cum iſto QVST angulos alternos æquales efficiat, ita quod angulus H concluſus latere conico OY, & diametro HR, ſit ęqualis angulo Q clauſus latere coni QR,& diametro QS. Et ſuperficies RTH, QTS ſupponantur perpendiculares triangulo per axem OYP, quare TX, & XV ſectio,OYP plano perpendiculariter incumbet ex 16. tract.22.

Reitaque ita concepta Probatur propoſ Angulus apud R in triangulo RQX eſt æqualis angulo apud H in triangulo XHS. Anguli quoque ad verticem X ſunt ęquales ex prop.12.lib.1. Ergo ex propoſ. 17. lib.1. Coroll. 2. hæc duo triangula ſunt æquiangula: Quamobrem latera erunt proportionalia, quæ circum æquales angulos ex propoſ.4. lib.6. Proptereaq; ita erit crus XQ ad crus XR alterum, ſicut crus XH ad crus XS alterius trianguli.



Sed

Sed ea propoſ.18.lib.6.ſi quatuor rectæ proportionalea fuerint illud rectangulum, quòd conſtituitur à medijs V, g. ex cruribus XH, & RX eſt æquale rectangulo ex extremis conſtituto, nempe vt QX, & XS,

At ex propoſ.35. lib.3. rectangulum QX, & XS conſtitutum æquatur quadrato, ex planorum ſemiſectione XT, aut XV conſtituto, quis ſunt lineę, quæ in circulo ſe interſecant. Ergo pari ratione Rectangulum ex XR, & XH erit eidem quadrato æquale ex ſemiſectione cõſtituto; Quare ex dictis pr.35.l.6 el. hęc duo puncta erũt in circuli circũferentia. Quadropter RTHV circuli circũferentiæ erit, cùm idem argumentũ valeat, etiã ſi ſectio TV fiat aut ſuperius, aut inferius, dummodo parallela ſectioni iam factæ planorum RTVH, vel QTVS,

COROLLARIVM I.

* Hinc eſt in Cono ſcaleno duos axes reperiri. Quia duo centra ſunt circulorum, à quibus à vertice Y axis ad quemlibet duci poteſt, quæ non coincidunt in idem punctum, nempe baſia rectæ, quæ ſieret, qui, & eſſet axis coni propriè dictus, & baſis obliquæ.

* Ponantur enim æquales RX, & XH: Dico XQ, & XS inęquales eſſe, & ideo punctum X circuli QTSV centrum non eſſe. Quod ſi æqualea dicantur, oſtenditur ſine abſurdo id eſſe non poſſe.

Nam RXQ, & XHS ſunt triangula ad verticem ex hypotheſi, æqualia quoque crura ambientia æquales angulos ad verticem X, ſcilicet XS, & QX ſicuti RX, & XH ex Theſi, ideo baſes ęqualea habebunt QR, & HS. Quare enim anguli apud Q, & H remaneant æquales etiam baſea Xa, & RX oppoſitę illis angulis ſeptis à cruribus æqualibus erunt æquales ex 23. lib.1. ſed Xa ex ęqualis ex aduerſarijs ipſi QX. Ergo QX, & XR erunt baſes æquales. Quare ex 14. lib.1. Elem. anguli R, & Q erunt æqualea: Quadere R, & H, vtpote tertio Q æquales erunt æqualea anguli alterni, & ideo ex 28. lib.1. QR, & HA eſſent parallelæ: quod eſt abſurdum.

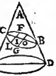
Cum igitur lineæ QX, & XS æquales eſſe nequeant axis baſia QTVS nõ poterit eſſe baſis RTVH etiamſi has baſes ponas eſſe Ellipſea. Ideoque nullæ Ellipſes, vel circuli in conis habebunt communem axem, niſi paralleli.

THEOR. III. PROP. III.

* *Omnis ſectio Coni Elliptici, quæ ſecet vtrumque latus, in qua poſſit eſſe maior axis æqualis alteri axi circulus eſt.*

Sit in cono ADE ſectio BC, cuius ſemiaxis BO maior poſſit eſſe æqualis axi alteri OO. Dico BFCG *eſſe circulum*;

Probatur. Nam BO, & OC, rectangulum ex radija eſt ad quadratum OO, æqualis, vt BI, & IC rectangulum ad IL quadratum, & *permutando*; ſed BO, & OC quadratum æquatur quadrato OG; Ergo, & BI, & IC rectangulum æquabitur quadrato IL; cumque BOC axeis aſſeratur, Ergo ex 35.lib.3. BFGC erit circulus.



COROLLARIVM.

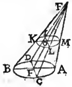
Illum conum Ellipticum nullam baſim poſſe habere, quæ ſit circulus, ſi ſaltem BC axis qui deberet eſſe maior factus perpendicularis vni laterum trianguli per axem DAE ſit maior adhuc, nã tunc axi minori FG etiam cęteræ omnea ex Cor. propoſ 17. lib.1. Elem. erunt maiores ipſa CB; Quod ſi accidat perpendicularem BC poſſe eſſe minorẽ, tunc aliqua alia longior erit æqualis. Vnde in eo cono poterit fieri aliqua ſectio circulus.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

In Cono quocumque Ellipſes parallelæ ſimiles ſunt.

Sint duę Ellipſes parallelę in quocumque cono, ſiue elliptico, ſeu circulari AEB, nempe MLIK, & ADBC. Dico eas *eſſe ſimiles*.

* Probatur. Quod ſint ſimiles, vt FB ad OE; ſic AF ad MO, & ita CF ad LO ob parallelas MO & AF in triangulo MEF, & CF ad LO in triangulo CEF, ſed CF, & LO ſunt applicatæ, & MO, & AF portiones diametri, ergo ACDB, & MLIK erunt Ellipſes ſimilex ex def. 16. Tract. 24.

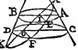


THEOR. V. PROPOS. V.

* *Omnis ſectio coni Elliptici non parallela baſi etiam Ellipſis, eſt ſi vtrumque latus ſecet trianguli per axem.*

Sint AEB, & CFD duæ Ellipſes, & ſit obliqua baſi XEK. Dico eam eſſe Ellipſim.

* Probatur. Dictum eſt pr.53, Cor.Tr.24. AIB rectangulum eſſe ad COD rectangulum, vt quadratũ EI ad quadratũ OF ob ellipſes parallelas, quę ſimiles ſũt ex pręc. Sed vt AI ad CO; ſic XI ad XO in triangulis æquiangulis ob parallelas AXI, & CXO. Pariterque vt IB ad OD ita ob eandem rationem IK ad KO.



Componendo igitur proportiones

cum AI	vt	XI	& ſit	IB	vt	KI	
ad		ad		ad		ad	
CO		XO		OD		OK	

Ergo compoſitum vt compoſitum.

AI	&	IB	erit	XI	&	KI
	ad				ad	
CO	&	OD		XO	&	OK

Quare etiam vt rectangulum XI, & KI ad rectangulum XO, & OK ſic erit quadratum EI ad quadratum OF ex propoſ.16. lib.5. cum ſit eadem proportio quadratorum, ac rectangulorum AI, & IB ad CO, & OD. Vnde ex 6. tract.24. XEFK erit ellipſis.

THEOR.

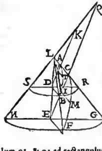
THEOR. VI. PROPOS. VI.

Hyperbolæ parallelæ in Cono ſimiles ſunt,

IN cono GLN ſecto triangulo per verticem KLF ab interſectionibus BD, & FK circulorum RBS, & GFN duæ hyperbolæ parallelæ CMFa, & AT-aD diſcedant ei diametri tranſuerſæ protendantur vſque ad Q. & K. Sint autem hæ omnia plana perpendicularia triangulo ex generatione GLN. Dico *has ſectiones par-llel-s eſſe Hyperbolas*,

Intell.gatur I non ſit ſatis expreſſa ab L vertice in aliquod punctum I productâ lineâ, & à puncto, quo ſecat diametrum vtrumque I, & V duę perpendiculares ad idem planum LNO erigantur IM, & VT; & ea prop. 8. Tract. 22. erunt parallelæ quoque.

Quo poſito probatur, cùm EQ, & DK ſint parallelæ, & ſegmenta ipſarum erit rectangulum ex KV, & VA ad rectangulum ex DA, & KD, vt rectangulum ex QI, & IC ad rectangulum ex QE, & EC; quòd latera obtineant proportionalia. Vt autem rectâ gulum ex KV, & AV ad rectangulum ex KD, & DA, ita eſt TV quadratum ad SD quadratum ex 6. h.



Et vt rectangulum CI, & QI ad rectangulum ex QE, & EC, ita eſt quadratum MI ad quadratum FS. Ergo erit etiam TV quadratum ad quadratū SD velut MI quadratū ad quadratū FS ex 16. l. 5. Quare talia quoque erũt latera ex prop. 26. lib. 6. Elem. ſ. erit TV ad DS, vt IM ad EF; ſed eſt etiā AV ad AD, vt IC ad CE ob parallelismū linearū AD, & CE: Ergo hyperbolæ erũt ſimiles ATSD, & CMFE ex prop. 52. Tr. 24. de conicis.

De circulis, & Parabolis non eſt difficultas. Nam omnes parabolæ, & omnes circuli ſunt ſimiles, vt oſtendimus.

Et omnes quoque in cono circulari ſunt parallelæ figuræ, cùm circulus baſi ſit parallelus, at parabola lateri.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

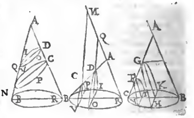
Æquidiſtantes in eodem cono ſectiones, non poſſunt eſſe eædem.

SIt primùm ſectio parabola in cono ABC per axem ſecto plano ABC, & parabolę KGH, & FIV æquidiſtantes.

Dico, quòd hæ ſectiones non ſunt vna alteri eadem.

Probatur. Quia obtinerent parametrum ex propoſ. 39. Tr. 24. æquale, ſi eſſent ſibi eędem, ſed nequeunt conſequi æquale parametrum. Ergo eędem eſſe non poſſunt.

Probatur minor de Parabola. Quoniam ex pr. 41. Cor. Tract. 24. ſi componatur rectangulum ex cruribus BA, & AC, id habebit eam proportionem ad quadratum BC, quam AG, vel AF portio cruris à verticibus ſectionum, & coni intercepta ad parametrum contiguam; Sed portio AF eſt maior, quam AG; ergo etiam maior Parameter parabolæ IFV quā parab. KGH. Quare nõ ſunt eqūē.



Sit deinde data ſectio Hyperbola, vel Ellipſis in conis ABA æquidiſtantes. Dico non eſſe eaſdem inter ſe.

Probatur. Nam ex 38. Tract. 24 conic. diametri tranſuerſæ eſſent inter ſe æquales; ſed CN, & DQ tales non ſunt. Ergo neque ſectiones ſunt eędem inter ſe; Aſſumptum verò oſtenditur. Nam AC maior eſt, quam AD. Ergo etiam tranſuerſa diameter CN maior eſt, quam DQ in ACN; ADQ triangulis ęquiangulis. Vnde Ellipſes, aut Hyperbolę non erunt inuicem æquales; ſi ſint parallelæ.

EXPENSIO II.

De Coni ſectionibus in lineam deſinentis.

SPecies eſt coni, qui cum baſim rotundam obtineat, non deſinit tamen in punctum, ſed in lineam, vt conus repreſentat ABCF, de hoc etiam aliqua dicere neceſſarium videtur.

THEOR. I. PROP. VIII.

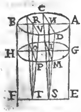
* *In Cono, qui deſinit in lineam rectam habente pro baſi circulum, vel Ellipſim reliquæ omnes parallelæ ſectiones, ſeu intra ſeu vltra baſim, ſi producatur illius coni ſuperficies, ſunt Ellipſes.*

SIt Conus, cuius baſis circulus ACBD, vel ellipſis deſinatq; in lineam EF. Dico, quod ſi in eo fiat aliqua ſectio, vt GMPH parallela baſi illa ſectio exhibebit Ellipſim.

* Probatur ex ea proprietate Ellipſis, quòd conſequatur diametros inæquales, & quòd omnia applicatarum quadrata inuicem, ita ſe in proportione gerant, vt rectangula ſub interceptis diametri portionibus comprehenſa. Sint ergo applicatæ IM, & OP. Dico, quòd ita eſt quadratum IM ad quadratum OP, vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH.

Probatur. Nam ita eſt MI ad DN, vt eſt SI ad SN, & ita eſt PO ad VR, vt TO ad RT. Lineę verò TO, & SI ſunt æquales, ſicut, & SN, & TR: Vnde poſſunt computari pro eadem: Quamobrem etiam erit

erit MI ad DN, vt PO ad VR, eo quòd ſint eædem proportiones vel tertiæ ex 16. lib. 5. nempe SI ad SN, vel TO ad TR. Cum ergo ſit MI ad DN, vt PO ad VR erit permutãdo MI ad PO, vt DN ad VR. Quare etiã quadrata ex 26. l. 6. ex illis lineis effecta.



Sed vt ſe habet quadratum ex DN ad quadratum ex VR, ita eſt rectãgulum ex AN, & NA partibus diametri interceptis ab applicata DN, vt rectangulum ex AR, & RA partibus diametri interceptis ab applicata VR. ex 35. lib. 3. Elem. vel ex 6. Tr. 24. cum ſit baſis circulus, vel Ellipſis. Ergo etiam ita erit quadratum ex MI ad quadratum ex OP, vt rectangulum ex AN, & NB ad rectangulum ex AR, & RA: Sed rectangulum ex AN, & NB eſt æquale rectangulo ex GI, & IH ob parallelas EA, & FB, ob quas æqualia ſunt ſegmenta diametrorum æqualium GI, & AN, ſicut, & IH, & NB. Et ita quoque rectangulum ex AR, & RA ex æquale rectangulo GO, & OH ob eandem rationem ſegmentorum æqualium. Ergo quadratum ex MI ad quadratum PO, eſt vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH. Quaderè erit Ellipſis figura GMPH, cum circulus eſſe nequeat ob diametros inæquales, quia equidẽ eſt maior DN ſemidiameter, quàm MI; ſicut, & maior eſt SN, quam SI, cum quibus ij diametri eandem proportionem dicunt.

EXPENSIO III.

De ſectione ſphæroidis per planas ſuperficies.

AD inueſtigandum ſuperficies corporis ſphæroidis, & ſoliditatẽ, vtile eſt ſcire ſectiones, quæ in ipſo exhiberi poſſunt; ad quam expenſionem ineundam operæ pretium eſt definitiones agnoſcere.

DEFINITIO I.

SEmiellipſis in orbẽ circa ſuum diametrum, voluta, donec redeat ad idem punctum, à quo diſceſſit ſphæroidem circumſcribit.

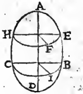
DEFINITIO II.

AXis eius eſt idem axis, circa quem Ellipſis efformatrix circumuoluta eſt, & punctum huius medium centrum ipſius eſt.

THEOR. I. PROP. IX.

Omnis ſectio recta ad axem ſphæroidis circulus eſt.

PRobatur id faciliter ab efformatione ſphæroidis, cũ enim Ellipſis ABCD ſe circũgyrando fecerit ſpæroidem, omne punctum eius circulum effecit. Quare punctum E ſe gyrando per F in H



circulum delineauit, ſed hic eſt parallelus baſi BIC, ac normaliter ad axem AD ſphæroidis eo, quòd ſe girando punctum E non mutet diſtãtiam à puncto A: Ergo axi circulus EFH erit normalis, alterique circulo BIC parallelus.

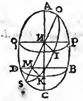
THEOR. II. PROPOS. X.

Omnis ſectio ſphæroidis axi obliqua Ellipſis eſt.

SIt ſecta ſphæroidea ABCD plano obliquo OIKS ad axem. Dico *illam eſſe veram Ellipſim.*

Sectio ABCD primigenia ſphæroidem conſtituens, ſit plano OIKS recta, nempe tranſeat per aliquam illi plano perpendicularem; patet enim hoc fieri poſſe abſque alia probatione; Et eidem plano primigenio ABDC perpendiculare quoque planum PIQ, & BKD ſecet obliquum OIKS in N puncto I quo obliquum ſecat axem, & in M aliquo alio puncto; Sintque hæ duo plana recta ad axem AC. Sectiones itaque IN, & KM erunt perpendiculares ex propoſ. 16. Tract. ax. plano primigenio BADC, & eius ſectionibus lineis PQ, & BD, & plana PIQ, & AKD erunt circuli, & parallela, vt axi orthogonalia; quibus poſitis, ita.

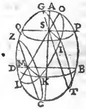
Probatur. Quod PIQ, & AKD plana circuli ſint, & KM, & IN perpendiculares diametris PQ, & BD erit rectangulum PN, & NQ equale quadrato IN. Sicut etiam rectangulum BM, DM erit æquale quadrato MK: Ideo rectangulum erit ad rectangulum, vt quadratum ad quadratum: Sed vt rectangulum ex PN, & NQ ad rectangulum ex BM, & MD. Sic



eſt rectangulum ex ON, & NS ex prop. 48. Tr. 24. ad rectangulum OM, & MS, eo quod BADC ſit Ellipſis. Ergo, vt quadratum IN ad quadratum MK, ita eſt rectangulum ex ON, & NS ad rectangulum ex OM, & MS. Ergo ex 6. Tr. 24. DIS eſt Ellipſis.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Omnes Ellipſes in ſphæroide ſunt ſimiles, ſi ſint parallelæ.



SIt conſtructio, vt præcedens. Sectioq; primigenia ſphæroidis ABCD, & plana circulorum perpendicularia eidem ſectioni primigeniæ ſint PIQ, BKD, & eidem quoque duæ Ellipſes parallelæ perpendiculares TIG, & CKZ erũt, & interſectiones IS, & KM perpendiculares ex prop. 15.

16. Tract. 22. per quas agatur planum OIKL.

Prob. Sectiones GIT, & ZKC eſſe ſimiles rectangulũ ex OS, SL ad rectãgulũ ex OM, & ML ex pr. 68. præc. T. 1. vt rectãgulũ GS, & ST ad rectãgulũ ex ZM, & MC: ſed vt rectangulum ex OS, & SL ad rectangulum OM, & ML, ita eſt quadratum IS ad quadratũ MK ex præc. Ergo etiam rectangulũ ex TS, & SG ad rectangulum ex ZM, & MC, vt quadratum IS ad quadratum MK. Quare etiam ex 26. lib. 6 SG, & ST lineæ erunt ad MZ, & MC, vt IS ad KM; quare ex def. 16. Tr. 24. ſectionum ſimilium, erunt ſimiles ſectiones GIT, & CKZ parallelæ.

EXPENSIO IV.

De ſectionibus Conoidis parabolici.

QVoniam egimus de præcipuorum corporum ſectionibus, parabolicum Conoidea inter corpora mathematica non infimum locum obtinens prætetire non licet. Trea autem ſectiones in ipſo fieri poſſunt præter primigeniam, ex qua generatur, Circulus, Parabola, & Ellipſis.

DEFINITIO.

COnoides Parabolicum Parabola circa ſuum axem voluta formatur, & axis eius eſt axis etiam parabolæ genitricis.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Sit ſit Conoides parabolicum, cuius baſis circularis, & ſectum ſit plano baſi parallelo, ſectio circulus erit.

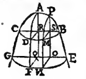
SIt EAG corpus Conoidale Parabolicũ, in fig. pr. ſeq & planũ BDC intelligatur æquidiſtans baſi, quæ ſit circulus EFG. Dico *hoc planum eſſe circulũ.*

Probatur. Nam eius ambitus formabitur à puncto C per motum parabolæ circa axem AQ. Et cum illud punctum ſemper æquidiſtanter baſi moueatur, cumque perimetrum parabolæ maneat ſemper inuariatum punctum illud C per D, M, B ſẽper in æquali diſtãtia, à cẽtro H, & circulo GFNB pmouebitur, vt patet. Quare CDMB circulus erit.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Omnis ſectio Parabolici Conoidis æquidiſtans axi Parabola eſt.

SIt Conoides Parabolicum EAG Axis AQ; ſintq; parallelæ ſectiones OPMN, & altera QADF per axem AQ. Sintque circuli paralleli BMDC, & ENFG, & perpendiculares Parabolę primigenię BACG. Dico OPMN *ſectionem axi* QA *parallelam eſſe parabolam.*



Probatur OP eſt diameter coniugata in parabola primigenia BAG. Ideoque BS, & SC rectangulum eſt ad EO, & OG rectangulum, vt PS eſt ad OP ex propoſ. 50. Tract. 24. ſed ex BS, & SC rectangulum eſt æquale quadrato SM, & rectangulum ex EO, & OG quadrato ON. Ergo quadratum SM ad quadratũ OM erit, vt SP ad OP, quę eſt ex prop. 5. Tract. 24. proprietas parabolæ.

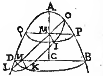
PROBL. III. PROPOS. XIV.

Omnis ſectio Conoidis parabolici ad axem obliqua Ellipſim efformat.

DVcantur paralleli baſi circuli BKD, & PIQ, qui ſecent OIKL planum ſectioni primigeniæ AAD normale. Eruntq; MI, & KN interſectiones planorum perpendiculares interſectionibus BD, & PQ, & OL ex prop. 16. Tract. 22.

Dico *itaque* OIKL *obliquum planum axi* AC *eſſe Ellipſim.*

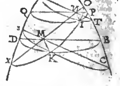
Probatur. Cum PM, & MQ rectangulum quadrato MI, & BN, & ND rectãgulum quadrato NK ſit æquale eo, quòd ſint circuli vt ex pr. 35. El. l. 3. erit rectangulũ PM, & MQ ad rectangulum AN, & ND vt quadratum IM ad quadratum NK ex propoſ. 7. lib. 5. Vt autem rectangulum PMQ ad rectangulum BND, ita ex propoſ. 48. Tract. 24. eſt rectangulum OML ad rectangulum ONL. Quaderè rectangulum OML erit ad rectangulum ONL, vt quadratum MI ad quadratum NK, hæc autem ex propoſ. 6. Tract. 24. eſt proprietas Ellipſi prima, & eſſentialis.



THEOR. IV. PROPOS. XV.

Ellipſes in Conoide Parabolico parallelæ ſunt ſimiles.

SInt duæ, GIT, & SMC parallelæ Ellipſes. Dico *eas eſſe ſimiles.*



Prob. Suppoſita eadẽ prorſus coſtructione, quę propoſ. 11. cum, & ſit ijſdẽ verbis eadẽ demonſtratio. Rectangulũ ON, & NX eſt ad rectãgulum OM, & MK ex prop. 48. Tract. 24. vt rectãgulũ GN, & NT ad rectangulum ex SM, & MC; Sed vt rectangulum ON, & NX ad rectangulum OM, & MX, ita eſt quadratũ IN ad quadratũ MK ex 14. h. Ergo etiã rectangulum ex TN, & NG ad rectangulum ex SM, & MC, vt quadratum IN ad quadratum MK. Quare

etiam

etiam ex propoſ.26. lib.6. Elem. ita erit NG, & NT lineæ ita erunt ad SM, & MC, vt IN ad AM: quare ex def. Ellipſes GIT, & SKD erunt ſimiles.

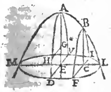
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

In Conoide Parabolico Parabolæ axi æquidiſtantes ſimiles, & æquales ſunt.

PArabola IBF detur parallela axi AE, & parabolæ per axem VAD, Dico *eam eſſe ſimilem, & æqualem ipſi* VAD.

Detruncetur AG ex axe æqualis BC diametro, & ducatur applicata GH, quæ erit parallela ED.

Probatur. Quia vt AB ad AE, ita eſt quadratum GH ad DA, & quia LAM parabola eſt; erit LCM rectangulum ex Cor.1.prop.50.Tr.24.de Conicis ad LCM rectangulum, Ideſt ex 35. lib.3. illi CL, CM æquale FC quadratum ad quadratum DE ęquale LA, EM rectangulo, vt CB ad AE: ſed GH quadratum eſt ad quadratum ED, vt AG ad A, Ideſt BC ad AA. Ergo cum CF quadratum ad ED quadratũ eãdem proportione alludat, vt GH quadratum ad idem ED quadratum erunt æqualia GH, & CF quadrata. Ergo, & lineæ GH, & CF. Quare cũ diametri ſint æquales, æqualeſque applicatæ, parametri quoque, vtpote æqualium applicatarum quadratis rectangulorum cum diametro latera erunt æqualia. Vnde parabolæ erunt ſimiles, & æquales, vt ex definitione.



EXPENSIO V.

De ſectione Conoidis Hyperbolici per planas ſuperficies.

COnoides Hyperbolicum recipit omnes ſectiones planis diuerſimodè illud ſecantibus; nempe circulum, Ellipſim, Parabolam, & Hyperbolam; de Circulo nihil dicemus, cùm pateat ex antecedentibus oſtenſionibus Circulum exhibere ſi planum ſecet Conoidem, Hyperbolicum parallelũ baſi, & eãdem prorſùs demonſtratio eſt, quam adhibuimus in Parabola. Vnde ad alias ſectiones oſtendendas accedimus.

DEFINITIO.

C*Onoides Hyperbolicum ab Hyperbola circa ſuum axem voluta formatur, & axis eius eſt idem, ac generantis Hyperbolæ.*

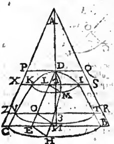
THEOR. I. PROPOS. XVII.

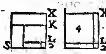
Si planum ſecet Conoidem Hyperbolicum parallelè ad aſymptotum figuræ ex generatione; illa ſectio eſt parabola.

SIt Conoides Hyperbolicum TDV, & figuræ ex generatione eidem TDV Aſymptoti ſint BA, & AC; ſitque DE parallela Aſymptoto AC; per quam agatur planũ DHE. *Dico figuram* DHE *eſſe Parabolã.*

Ad quod oſtendendum conſtituantur ordinatim applicatæ parallelæ baſi a a, & 3 V hinc inde, & extendantur vſque ad Aſymptotos in X, & Z, R, S, & quia ſunt parallelæ baſi plano IMA, & TNV circuli erunt, ſitque QP tangens ſectionem parallela ipſi XS. Quibus perfectis erunt omnes æquales, atpote inter parallelas lineæ DP, LX, OZ.

Probatur igitur. Quoniam a X eſt ſecta, vtcumq; in L ex propoſ.6. lib.2. El. erit quadratum totius a X æquale duobus rectangulis ex ſegmentis a L, & LX, & quadrati a ex iiſdẽ a L, & La, vt in quad. 4. videa. Quadratum verò maius ex LX; q ſit æquale DP æquatur rectangulo ex Ka, & aS, ex pr.46. Tr.24 q facit gnomonem circa a K; ſiquidẽ aS & Ka integrat vnã portionẽ, & a K alteram ſub altero latere KX, vt eodem modo rectangulũ ex LX, & La faciet gnomonẽ concluſum prędicto gnomone ambiens quadratum ex aL, vt in quadrato XS eſt videre. Quare quadratum Xa æquabitur quoq; duobus rectãgulia vni ex SK, & aX, & alteri aL, & KL, vnã cum quadrato a L, ſiquidem hæc omnia ambit quadratũ, cuius latus aS, vel aX. Si ergo auferatur quadratum partium a L commune vtriſque, & gnomon, ideſt rectangulum Xa, KS, & quadratum maius ex LX, quæ inuicem æquantur remanebit gnomon intermedius, nempe rectangulum ex LK, & LI æquale duobus rectangulis LX, & La. Sed rectangulum IL, & LK æquat quadratum ML ex 35. lib 3. Ergo etiam duo rectangula ex LX, & La æquabunt quadratum ML.





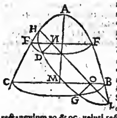
Idem dicas de rectãgulis duobus O 3, & OZ, quę æquabunt quadratũ ON. Et ideo erunt rectangula duo ex aL, & LX ad rectangula duo ex 3 O, & OZ, vt LM quadratũ ad quadratũ NO. Ideoq; etiã erit medietas, nempe vnicum rectangulum ea a L, & LX ad medietatem rectangulum vnicum 3 O, & OZ, vt quadratum ML ad quadratum NO. Sed rectangulum ex a L, & LX ad aliud ex 3 O, & OZ eſt, vt baſis a L ad 3 O baſim ob eandem altitudinem ęqualium LX, & OZ: baſis verò a L ad baſim 3 O eſt, vt DL ad DO. Ergo quadratum ML erit ad quadratum NO, vt DL ad DO, quę ex prop.5. Tract.24.. eſt proprietas parabolæ.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis ſectio conoidis Hyperbolici ad axem obliqua Ellipſim exhibet ſi ſecet vtrumq; latus ſectionis per axem.

SIt ſectum Conoides Hyperbolicum BAC duobus planis parallelis ad baſim. Hyperboleque primitiuæ BAC normalibus FDE, & BGC, quæ ſecent planum aliud obliquum axi AM, & eidem ſectioni primitiuæ normale HDGL. Dico hoc planum Ellipſim exhibere.

Probatur. Nam cum plana normalia ſint ad hyperbolem primitiuam BAO ſectiones DN, & GO erunt quoque normales propoſ. 16. Tr. 22. quare rectangulum ex FN, & NE erit æquale quadrato DN, & rectangulum ex BO, & OC quadrato OG; Sed rectangulum ex FN, & NE eſt ad



rectangulum BO, & OC, veluti rectangulum ex HN, & NL eſt ad rectangulum ex OH, & OL ex prop. 48. Tr. 24. Conic. Ergo rectangulum ex HN, & NL eſt ad rectangulum ex HO, & OL, vt quadratum DN ad quadratum OG: quæ eſt proprietas Ellipſium ex 5. Tract. 24. Conic.

COROLLARIVM.

ELlipſes parallelas in Conoide Hyperbolico eſſe quoque ſimiles eadem autem figura eſt, quæ in parabolico Conoide, & eadem oſtenſio.

THEOR. III. PROPOS. XIX.

Omnis ſectio Conoideos, quæ tranſeat per centrum hyperbolæ primitiuæ Hyperbolam format.

SIt centrum hyperbolę primitiuæ A, & ipſa ſectio BMNC, quæ etiam exprimat Conoidem hyperbolicum, ſitque ſectio TEFI, quę producta tranſeat per centrum A. Dico *hanc eſſe hyperbolā*.

Sint plano Hyperbolæ primitiuę BNC normalia, & baſi circulari parallela plana QFR, & PIH, ipſaque ſectio TEI. Sit quoq; ei BNC normalis, & FV, & TI ſectiones erunt normales interſectionibus QR, & PH. Ducantur poſtea applicatę VN, & TM diametro TA ad puncta V, & T.



Proh. Rectangulū ex VQ, & RV eſt ęquale quadrato V: Sic rectāgulū ex PT, & TH eſt ęquale quadrato TI. Ergo, vt quadratū ad quadratū, ita rectāgulum ad rectangulum. Sed rectangulum ex QV, & VR eſt ad rectangulum NV, & VO, ideſt quadratum ſunt enim ęquales, vtpote applicatę, veluti rectangulum ex PT, & TH ad rectangulum ex MT, & TC, ideſt quadratū ex 49. Tr 24. Quadratū verò NV ad quadratū MT eſt, vt rectangulū ex diametro tranſuerſa LV, & VE ad rectangulū ex TE, & LT ex pr. 6. Tract. 24. Ergo etiam ex 16 lib. 5. quadratum VF ad quadratum TI, vt rectangulum LV, & VE ad rctangulum ex LT & TE, quę eſt proprietas Hyperbolarum ex prop. 6. Tract. 24. Conic.

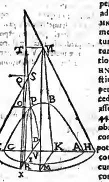
THEOR. IV. PROPOS. XX.

Aſymptoti hyperbolæ in hyperbolico Conoide ſunt ijdem, ac hyperbolæ in eodem plano exiſtentis, & coni aſymptotici ſectione effectæ.

SIt Conoides hyperbolicum, atqueadeo eius ſectio per axem, & ex generatione ABC, cuius Aſymptoti NE, NH; qui, & conū Aſymptoticū forment NERH, ſitque ſectus tum conus HNE, tum conoides ABC plano VSR, in quo formentur duę ellipſes, altera quidem SR ſectione coni HNER effecta, altera OPI ſectione Conoidis hyperbolici ABC producta. Aſymptotus verò Hyperbolę conicę SR, ſit TX.

Dico itaque TX aſymptotum hyperbolę conicæ SR *eſſe quoque aſymptotum hyperbolæ conoidalis* DPI.

Probatur. Nam ſuperficies conoidis ABC ſemper quidem accedet ad ſuperficiem coni HNE, numquam tamen illam aſſequetur, eò quòd formetur à circumgitatione trianguli ex HNE aſymptotis conſtituti, quibus hyperbola ſemper accedit, licet numquā aſſequatur ex prop. 44. tract. 24 Quamobrem Hyperbola conoidalis DPI, vtpote in ſuperficie conoidis exiſtens cum ipſa ſuperficie conoidis ſępee quidem accedet, numquam tamen aſſequetur Hyperbolam SR conicam, ſcà ſuperficie coni effectam, ſed & SR ſemper accedit ad aſymptotum ſuum TX, & numquam aſſequitur; Ergo etiam Hyperbola DPI accedet ad TX aſymptotum, ſed illum non aſſequetur. Quare etiam XT hyperbolæ conoidalis DPI erit Aſymptotus, quod accedendo quidem ad SR accedentem ad TX accedat quoque ad TX, quam conſequi non poteſt, cùm nec hyperbolam SR, quæ nec ipſa acquirere poteſt XT numquam obtinere queat.



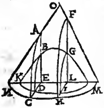
COROLLARIVM.

HInc eſt Hyperbolas SR coni & DPVI conoidis eſſe ſimiles; quia cum habeant eoſdem aſymptotos ductis SQ, & PO erunt diametri rectę applicatę ſub angulo recto ipſi axi VT; quare erit vt TS ad QS, ſic TP ad PO. Vnde ſectiones ex prop. 54. tract. 24. ſimiles erunt DPI conoidis, & SR coni aſymptotici.

THEOR. V. PROPOS. XXI.

In Conoide omnes Hyperbolæ parallelæ ſunt ſimiles.

SIt conus aſymptoticus MON hyperbolę primigeniæ KBC conoidis, & hyperbolæ in conoide LGI, & BDK, in cono autem FHL, & CAE. Dico DEB, & IGL *eſſe ſimiles Hyperbolas.*



Probatur. Nam ex Coroll. prop. 20 huius DBE Hyperbola Conoidis eſt ſimilis Hyperbolę CEA coni ex prop. autem 6 b. CAK eſt ſimilis HFL hyperbolæ, & hæc ex Coroll citato hyperbolæ LGI: Ergo Hyperbolę ILG, & DBK ſunt ſimiles.

EXPENSIO VI.

De ſectionibus Cylindrorum per planas ſuperficies.

CYlindri quoque ſectiones conſiderandę ſunt; & quidem ſi Cylindrus baſim circulum poſſideat, patet, ſectiones baſi parallelas eſſe circulos baſi ęquales, ſic ſi ſit Ellipſis, patet quoque, omnes ſectiones baſi parallelas æquales eſſe Ellipſes, quod ne in apertis immoremur per ſe manifeſtum præſupponimus, ſicut, & omnem ſectionem axi parallelā eſſe Quadratū, vel Rectāgulū, vel Rhombum, vel Rhomboidem in manifeſtis eſt. Igitur ea ſolummodo de Cylindri ſectione afferemus, quæ minùs clara ſunt.

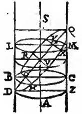
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si ſectio fiat in Cylindro, cuius baſes ſint circuli ab aliquo plano obliquo axi, ſectio hæc Ellipſim repreſentabit.

PRobatur. Nam illam proprietatem Ellipſium conſequitur, quod habeat diametros inæquales, quos circulus non obtinet, & tamen, quod quadrata applicatarum ad diametrum ſint inuicem in proportione illa, qua rectangula ſub contiguis diametri portionibus comprehenſa.

Nam quod ſint duo inæquales diametri, patet: Quod VR ſit diameter idem, qui baſis Cylindri DZ, qui eſt circulus: at verò diameter QO longior erit, vtpote baſis in rectangulo QDZ diametro circuli ZD.

Quod autem quadrata applicatarum ad diametrum QD quales ſunt XK, & OH, ſe habeant ad inuicem, vt interceptarum diametri QD portionū rectangula, nempe ex QK, & KD ad rectangulum ex QO, & OD. Prob. Nam ex prop. 35. lib. 3. quadratum XK eſt æquale rectangulo ex MK, & KL; cùm in circulo ſint ductæ; & idem dicas de quadrato OH, quod erit æquale rectangulo ex CO, & OB eò, quòd ſint quoque in circulo. At rectangula habent inuicem eam proportionem, quę ex lateribus componitur ex prop. 23. lib 6. quare proportio rectanguli ex CO, & OB ad rectangulum MK, & XL componetur ex proportione CO ad MK, & OB ad KL. At proportio CO ad MX eſt eadem, quę QO ad QK ob parallelas MK, & CO in triangulo CQO. Et proportio OB ad XL eſt eadem, ac proportio OD ad XD. Eadem ergo erit proportio ex CO, & OB rectangulum ad MK, & XL rectangulum: quæ eſt rectanguli OO, & OQ ad rectangulum XQ, & KD, vtpote, quia hæc rectangula ex lineis dicentibus inuicem eandem proportionem ſint compoſita: Sed illa rectangula, nempe ex CO, & OB ad rectangulum MK, & XL dicunt eam proportionem, quam quadratum HO ad quadratum XK, cùm iſtis rectangulis oſtenſa ſint ęqualia. Ergo etiam rectangulum ex OD, & OQ ad rectangulum ex QK, & KD, erit vt quadratum OH ad quadratum XK: quæ eſt proprietas Ellipſium ex propoſ. 6. tract. 24.



COROLLARIVM.

OMnes Ellipſes parallelas in Cylindro eſſe æquales patet; quoniam habent æquales axes ob earum paralleliſmum.

Vnde etiam patet, quòd, & ſi baſes cylindri ſint ellipſes, eſſe quoque ſectionem obliquam axi Ellipſim, eò, quòd ex 6. Tract. 24. ſit Ellipſium æqualiū, vtpote; quod prò eadem computari poſſ ſint BO, & OC rectangulum ad KM, & XL rectangulum, vt quadratum HO ad quadratum KX; quare etiam rectangulum ex OD, & OQ prædicta ratione erit ad rectangulum DK, & KQ, vt quadratum OH ad quadratum KX. Vnde ex 6. Tract. 24. DHXQ Ellipſis erit.

TRACTATVS XXVI.

DE PROIECTVRIS PARS PRIMA.

De Orthographia.

PRoiectionum vſus ampliſſimus, tum horologijs, tum iſtrumentis mathematicis, V.g. Aſtolabio, & Quadrantibus: tum Coſmographiæ in planum ad circulos longitudinis, & latitudinis proiciendos, & tandem, & maximè Architecturæ ad proicienda corporum, ſingularumque planicietum delineamenta perutilis. Et hinc proſpectiuæ, cùm priùs illud, quòd iuxta diminutionem ocularis proſpectus repreſentatur in planum extendere oporteat, & ipſa quoque corpora, ſuperficieſque in planum proicere.

EXPENSIO I.

Quid, & quotuplex ſit proiectio?

PRoiectionis nomen diuerſo ſenſu vſurpatur: Nã apud Vitruuiũ, quidquid extra ſoliditatẽ, vel columnarum, vel parietum profertur; vt cornices Cymacia Coronides, baſiumque crepidines proiectura appellatur, quòd extra ſoliditatem promineat, & quaſi proiectum fuerit. At hic proiectionem dicimus figuram quandam in plano deſcriptam, quę rem, ſiue planam, ſiue ſolidam imitatur à plano, vel omnino, vel ſui aliqua parte eleuatam. At qui verò, vt Aguilon lib. 6. Optices exiſtimãt proiectionem pertinere ad Opticam, & eſſe Opticę partem: quod minimè concedimus: quare hęc quęſtio inſtituta eſt, vtpote huius per neceſſarię operationis naturam perſpectam habeamus.

DEFINITIO.

P*Roiectio eſt ſuperficiei aliam ambientis in planum impreſſio.*

Solet definiri proiectio, quod ſit *rei ſolidæ in planum tranſcriptio*. Verùm ſi hæc definitio, prout verba ſonant, intelligatur, omnino impoſſibilitatem inuoluit: ſiquidem res ſolida nunquam poteſt in planum tranſcribi; ſed ſolùm illius ſinguiæ ſuperficies: quibus ſuper planum deſcriptis; deinde res ipſa ſolida repreſentatur; & licet hoc ſenſu intellecta, vera euadat; aptiùs tamen videtur definienda. *Impreſſio, aut veſtigium alicuius ſuperficiei in plano impreſſum, quæ aliam ſuperficiem ambiat, & ita illam aliquo modo repreſentet*; Nam quòd propriè tranſcriptio non ſit patet, quia circulus à plano eleuatus in planũ proiectus per perpendiculares fit Ellipſis. Non poteſt autẽ dici per deſcriptionẽ Ellipſis trãſcriptus circulus; quia alterius ſpeciei figura eſt, quis enim affirmabit tranſcriptum hominem in figura, aut in effigię alicuius bruti?

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Duplex eſt proiectio, alia vocatur Orthographia. Alia Stereographia.

PRobat. auctoritate Mathematicorum, qui ita ſufficienter diuiſiſſe proiectionem arbitrati ſunt, tum quia ſuperficies, quę aliam ambit duplex ſolùm eſſe poteſt, nempe ſibi, ſuiſque partibus parallela, vt priſma, & Cylindrus. Aut non parallela, ſed in vnum punctum contendens ad inſtar coni, aut Pyramidis; Si ſuperficies illa ſit parallela ſibi, ſuiſque partibus, dicitur eius impreſſio facta in plano orthographia: ſi verò ſit ad modum pyramidis, vel coni in punctũque conueniat, dicitur Stereographia, Et hinc vtraque definietur.

DEFINITIO.

* O*Rthographia eſt ſuperficiei in aliam incidentis in planum orthogonalis impreſſio.*

Per hoc enim dicitur orthographia, à verbo gręco ὀρθὴ; quod eſt recta, quod ſcilicet illa ſuperficies directè in planum incidat, & in eam imprimatur.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

* *Orthographia non naſcitur à diſtantia oculi infinita, quæ lineas viſuales rem viſam lambentes orthogonaliter in planum imprimat: Eſt con Franciſcũ Aguilon lib. 6. opticor. in præfat. ad prop. 16.*

PRobatur. Nam lineæ viſuales numquam ſunt paral-

Digitized by Google

parallelæ, ſed in oculum tandem coniunguntur. Dices. Quod data infinita diſtantia fierent parallelæ. Reſpond. negando. nam primò non eſt hæc diſtantia poſſibilis, & ideo fruſtratoria eſt ſuppoſitio, & abſurda eſſe undè etiam ſi daretur nulla fieret viſio, quę determinatos limites habet; quia ſi infinitè diſtaret oculus, etiam infinita rei viſæ fieret diminutio; ſed infinita diminutio in nihil terminat; Ergo nihil videretur. Tandem neque ea diſtantia data lineæ eſſent parallelę; quia ſemper eſſent lineę viſuales; quę eſſentialiter in oculo conueniunt. Neque dicas eſſe parallelas putatiuè, & iuxta ęſtimationem; Quia licet id eſſet verum quoad praxim, non tamen abſtractè, & ſpectata linearum viſualium naturâ: Mathematici verò de abſtractis loquuntur, vt dictum eſt tract. 3. expenſ. 2.

DEFIITNIO III.

Stereographia eſt ſuperficiei in punctum terminantis, & aliquam aliam ſuperficiem ambientis impreſſio in plano.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Stereographia non naſcitur ab intuitu oculi, cuius lineæ viſuales tranſeuntes per corpus aliquod in ſubiecto aliquid deſcribant. Eſt contra Aguil. lib. 6. Optic. paſſim Stereographiam oculo tribuentem.

PRobatur primò. Quia, vt oſtendemus, ſi Deus dederit, cùm de proſpectiua agemus, Oculus debet eſſe remotus à rebus, quas videt, cum ex Ariſt. ſenſus ſuper ſenſibile non faciat ſenſū. At verò Centrum Stereographum admittitur ſuper ipſam ſpęram: vnde illud punctum non poteſt pręſupponi pro pupilla, cum pupilla ſuper ſphęram nihil omnino videret.

Probatur ſecundò. Quia alio modo planum ſtereographum ſe habet, ac planum; quo res viſę deſcribuntur, nam hoc interponitur inter centrum concurſus linearum coni, & rem deſcribendam: illud verò in planum collocatur poſt rem deſcribendam, vt ſit priùs centrum, deinde res deſcribenda, & tandem planum, in quo deſcribenda eſt.

Probatur tertiò. Manente re viſa, & oculo in eadem diſtantia, ſi planum mutetur res eodem modo oculis apparet, & tamen in ipſo plano lineæ à puncto, in quo eſt oculus, ductę aliam deſcriptionem faciunt priori, quæ cum res erat immota, imprimebatur diſſimilem. Ergo deſcriptio hæc non pendet ab oculo: ſed à ſubiecto, & à puncto, quod, ſiue ſit oculi, ſeu ſit quodcumque aliud punctum, à quo proiectrices prouenient, & pertingentes corpus deſcribendum in ſubiectum, in quo facienda eſt deſcriptio, ſe conferant.

Probatur quartò. Quia Stereographia repreſentat omnes ſuperficies corporis, tum ſuperiores, tum inferiores, & quaſcumque alias; quod non facit oculus. Nam ſolum extrinſecum ambitum rei, quem lineę viſuales lambunt in ſubiecto retrò rem viſam manente intuetur deſcriptum.

CONCLVSIO IV. PROPOS. IV.

Tria Proiectionem immutant, ſitus rei, ſitus plani, & eorum diſtantia.

PRobatur de ſitu, tum rei, tum plani. Quia, vt patebit, diuerſimodè res ſituata, vel planum collocatum deſcriptionem variat ſuperficierum; ita vt transferat, etiam, & in alteram ſpeciem lineas ſuperficies, anguloſque commutet. Diſtantia quoq; totius ſubiecti, licet in Orthographia nihil immutet; in Stereographia tamen valdè figuras alterat, & in diuerſam magnitudinem diducit.

DEFINITIO IV.

Linea, vel planum primigenium eſt illud: quod repreſentandum proponitur.

DEFINITIO V.

Lineæ proiectrices, vel ſuperficies ſunt à terminis lineæ, vel plani primigenij diſcedentes, & in ſubiectum planum, in quod proiectura cadit; terminantes.

DEFINITIO VI.

Planum proiectorium, & illud: quod proiectionem recipit.

EXPENSIO II.

De Orthographia Partium ſuperficiei.

PRiùs agemus de orthographia, quam de ſtereographia, cùm ſit facilior, & vt eius ſternamus fundamenta, in primis de partibus ſuperficiei agemus; nempe de puncto, lineis, & angulis.

Præaſſumptum. Licet orthographia, etiam lineis plano non perpendicularibus: ſed cum eo certum, & ſemper æqualem angulum facientibus V g. 30. Grad. poſſet operi demandari. Sic enim omnes lineę ſub eodem angulo incidentes in planum eſſent parallelę poſſet colligi ex Tr. 22. de ſectionibus planorum.

Veruntamen hoc ſenſu orthographia non ſumitur: niſi aliquando neceſſitas poſtulet. Sed ſēper intelligitur fieri p perpendiculares ipſi plano; tum quia certiores ſunt, tùm quia finis orthographię eſt loca corporum, ſituationeſque reperire, quę videntur eſſe illę, ad quæ corpora ſuo ipſo pondere feruntur; pondus verò orthogonaliter in ſubiectum planum incidit.

THEOR. I. PROP. V.

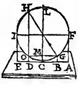
Linea parallela plano ſubiecto in lineam æqualem proicitur, non parallela, ſeu curua in lineam breuiorem; perpendicularis in punctum.

PArs 1. Probatur. Lineę proiectoriæ EI, & AF proicientes lineam AF incidunt in planum

AS

AB ex hypotheſi orthogonaliter; Ergo etiam ipſi lineę AB, & conſequenter lineę plano parallelæ proiciendę FI; cùm linea proicienda parallela in prima parte propoſ. ponatur plano, & ideo lineę AE. Ideoq; angulos rectos efficiet ad F, & I. Vnde AIFB erit parallelogrammũ ex def. 25. tr. 3. ſiquidẽ in eodem plano lineę erunt ex propoſ. 2. tract. 21. Ergo ex propoſ. 33. lib. 1. Elem. lineę FI, & AB erunt æquales.

Probatur ſecunda pars. Et ſit linea proicienda GH obliqua plano EA.



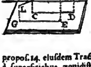
Cum GH, & GO, & OH, & BD ſe ſecent ex propoſ. 2. cit. erunt in eodem plano. Itaque ponatur; quòd GO faciat angulum rectum cùm Orthographicis V.g. OH; erit itaque GHO triangulum, cuius angulus O rectus, & ideo maior alijs; Ideoque baſis ſubtenſa maiori angulo recto maior cruribus ex propoſ. 19. lib. 1. Elem. Perinde GH proicienda linea obliqua erit maior crure GO, quod eſt æquale lineę proiectæ AD.

Tertia pars quoque patet. Quod proiciatur linea plano perpendicularis in punctum. Quia LM orthogonalis, ſed etiam orthographica LC tranſiens per ipſam orthogonalis eſt. Ergo cum ipſa eadem eſt: ſed omnis linea in planum incidens imprimit punctum: Ergo etiam LM in planum proiecta imprimet punctum C.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Lineæ parallelæ, aut in eodem, aut in diuerſo plano, licet obliquæ ſint plano orthographo, in lineas parallelas proiectæ tranſeunt.

Sint lineæ AB, & HL, aut in eodem, aut diuerſo plano. Dico eas in parallelas, proiectas profundi CD, & EG. Nam proiectrices AD, & HE, ſicut, & CB & LG ex prop. 7. Tract. 22. ſunt parallelę. & AB, & HL ex hypotheſi. Ideoque ex propoſ. 13. eiuſdem Tract. etiam ſuperficies per eas ductæ AC, & HG erunt parallelæ: Ideoque ex propoſ. 14. eiuſdem Tract. ſectiones CD, & EG, vt à ſuperficiebus æquidiſtantibus factæ erunt parallelæ.

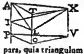


THEOR. III. PROP. VII.

* *Omnis angulus in triangulo omnibus cruribus parallelis plano orthographo proicitur in angulum æqualem: At cruribus non parallelis, & baſi parallela obtuſior proiectus erit.*

Ac cruribus non parallelis angulus proiectus erit acutior, qui lateri magis obliquo opponitur.*

Sit AXT angulus proiciendus, & ſint crura omnia AX, & TX, & TA parallela plano POV. Dico angulum OVP proiectũ eſſe æqualem angulo AXT. Patet, quia cum ſint ſuperficies proiectrices VOXT, & XVAP ex Theſi perpendiculares plano orthographo POV, ideoq; etiã erunt plano parallelo AXT proiciẽdi anguli, ideoque angulus AXT, & PVO ex propoſ. 4. Cor. 2. tract. 22. erunt anguli inclinationis, qui ex 18. Tr. 22. vbique ſunt æquales quocumque loco inter plana inclinata accipiantur.



Probatur 2. pars, quia triangulum IXL habens baſim IL parallelã plano VOP magis accedet ad ſectionem XV ſuperficierum proiectricum, ergo maiorẽ angulũ cauſabit, quam ſi non accederet, ſed rectangulè ſe haberet, vt AXT ex prop. 22. tract. 22. ſed rectangulè ſe habens cum ſectione VX ex parte prima propoſ. b. angulum proiectum eundem effecit. Ergo IXL angulus baſi parallelis, & cruribus obliquis maiorem angulum OVP efficiet.

Probatur 3. pars. Quia quò minus obliquè incidit angulus AXL eo maiorem angulum inclinationis cauſat ex prop. 22. tract. 22. Ergo quò magis obliquè intercipietur, ideſt quantò magis inclinabit ad proiectrices ſuperficies, eò erit angulus inclinationis planorum PVO acutior; ſed angulus inclinationis planorum eſt angulus proiectus, vt p. 1. h. pr Ergo quò magis inclinabit eò faciet angulum proiectum acutiorem.

COROLLARIVM.

Elicies tamen, quod ſi alterum crus anguli recti ſit parallelum plano etiam ſi obliquo altero crure; ſemper in angulum rectum proici. Eo quia ſi XAT parallelo plano exiſtens ponatur angulus rectus linea XA incidet, ue dum in lineam TA normaliter. Verùm defin. 2. Tract. 22. in omnes ab A procedentes in ſuperficie TAOP exiſtentes, vt in AL: quare XAL angulus rectus ſicut XAT, ſed XAT facit angulũ rectũ proiectũ ex pr. 7. h. vtpote in plano parallelo ipſi plano orthographico, ergo, & XAL obliquuo crure proiectus fiet angulus rectus.

EXPENSIO III.

De proiectione ſuperficierum in genere.

Viſis partibus ſuperficierum, nempe lateribus, & lineis; modo ipſarum figurarum proiectiones ſunt inſpiciendæ.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omnis ſuperficies plano perpendicularis in planum proiecta transformatur in lineam æqualem lineæ parallelæ plano, quæ inter lineas proiectorias intercipiatur.

SIt V. g. ſuperficies circulus LFMI, lineęque extremæ proiectrices, quę lambant extremos margines ſuperficiei ſint, FA, & IE, inter que eas intercipiatur linea FI. Dico, quod AE æqualis ipſi FI eſt proiectio circuli.

Probatur primò, quod proiectio ſuperficiei perpendicularis, ſit linea; Omnis ſuperficiei ſectio linea eſt, propoſ. 3. tract. 22. Quamobrem ſuperficies proiectrix in plano Orthographico lineā imprimet. Sed cū ſuperficie perpendiculari proicienda LFMI eſt eadem ſuperficies proiectrix. Ergo lineā tantùm imprimet. Quòd verò ſit eadem cum ſuperficie proicienda proiectrix ſuperficies,



patet; quia cum ambæ ſint perpendiculares, & per eius extrema FI tranſeat neceſſariò vna ſuperficies ſit; quòd ſi non eſſet vna ſuperficies; ſuper ſuperficiem poſita ſuperficies faceret craſſitudinem, quod contrà conceptum ſuperficiei eſt.

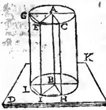
Probatur ſecunda pars. Nam illa erit longitudo lineę proiectę AE, quæ latitudo ſuperficiei rectangula. Neque enim poteſt eſſe longior, quia excederet ſuperficiem proicientem; Ergo erit æqualis lineæ FI, quę inter proiectrices lineas AF, & EI orthogonaliter intercipitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Superficies parallela plano in æqualem, & eandem ſpecie ſuperficiem proicitur.

PRobatur, & exemplum ſit circulus, ex quo licebit argumentari ad quamcumque aliam figuram.

Sit itaque circulus CEG, cuius centrum A, perque eius circumferentiam CEG tranſeat ſuperficies proiectrix, quæ circa illum curuabitur, vt ſuperficies cylindrica, eique erit orthogonalis, cùm ſit perpendicularis plano XD, cui circulus ponitur parallelus, & ideo EI, GL, CH, & axis BA plano KD ex hypotheſi perpēdiculares, erūt parallelæ ex 7. Tr. 22. & æquales. Ergo lineæ coniungētes AE, & BI ex propoſ. 33. lib. 1. æquales erunt; ſic CA, & BH, ſic AG, BL, & ſic quælibet aliæ: ſed AG, AE, & AC ſuis extremis ſunt in circumferentia circuli; ergo etiam BH, BI, & BL.



Et idem erit de qualibet alia figura, v.g. ſi in circulo deſcriptū ſit octangulum, aut triangulū, aut etiam ſine circulo; vt patet in figura ACEG, & ei æquali BHIL, proiectæ in planum KD.

THEOR. III. PROPOS. X.

Partes cuiuſcumque ſuperficiei, vel laterum eius, quæ in lineam proiectæ fuerint, in ipſa linea proiectionis diſtinguere.

SIt proicienda pars FG V g. circuli FLMI fig. pr. 5. vel 8. in planum; ducantur, à punctis terminantibus perpendiculares FA, & GB, eritque factum, quod deſideratur.

Patet, quia omnis linea, ſeu curua, ſeu recta ortbogonalibus plano in lineam proicitur. Ergo etiam pars FG in lineam AB proiecta erit, cum FA, & GB proicientes ſint perpendiculares.

De partibus verò lineæ orthographo plano parallelę non eſt difficultas vlla, cùm ex propoſ. 9. demonſtrauerimus OM, & CO eſſe æquales, vnde figura proiecta diuidenda erit iuxta æqualitatem partium figuræ primigeniæ.

EXPENSIO IV.

De ſuperficiebus rectilineis proijciendis.

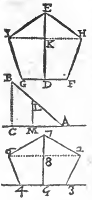
VSque huc facilia tradidimus, & quaſi principia exhibuimus; nunc autem ipſam artem tractamus; & de proiectione ſuperficierum rectilinearum agimus; non quidem cum omnium eorum latera ſunt parallela plano, neque, cum ipſa ſuperficies eſt ei perpendicularis; ſatis enim de hoc vniuerſaliter egimus antecedenti expenſ. ſed modo, aut cum tantùm vnicum, aut alterum latus ſuperficiei eſt plano parallelum, aut nullum, ſed omninò à paralleliſmo diſcrepat.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Superficiem rectilineam, cuius vnum, vel alterum latus ſit parallelum plano orthographo, in planum proicere dato angulo inclinationis.

IAm notum eſt, quinam ſit hic angulus inclinationis ex def. 4. tract. 22. nempe linearū, quæ cùm ſectione, quam imprimit in plano ſuperficies ei inclinans, angulos rectos faciūt, & licet multoties planum proiciendum planum orthographum non ſecet; adhuc tamen ſi extenderetur, cum ad illud inclinet, tandem ſecaret, eique ſectioni latus plano parallelum, parallelè ſe haberet ex Cor. 3. propoſ. 4. Tract. 22. Vel planum orthographicum accedere poſſet ad figuram proiciendam, & tangere ſecundùm latus parallelum. Huic ergo contactui, quem faceret, lineę perpendiculares altera

altera in vno, alis verò in altero plano exiſtentes, angulum inclinationis conſtituunt, quem angulum notum præſupponimus; Et ſit angulus A, cuius latus AK inſiſtat perpendiculariter lateri OF figuræ proiiciendę EHFOI nimirum lateri plano orthographo, ex hypotheſi parallelo, & propterea ſectioni, vt ex Cor. 3. prop. 4. tr. 28. de interſect. diximus. Ideoque perpendicularis DB in fig. erit eadem, ac AB in angulo inclinationis. Transferantur itaque anguli pentagoni proiiciendi I, & H, in lineam DK anguli inclinationis ope HK, & KI.



Deinde interuallis DK, & ED transferantur in latus AB inclinationis; nimirum DK, in AL, & DB in AB, & à punctis L, & K deducantur perpendiculares ad AC exiſtenti in plano orthographo, quæ incident in M, & C. Quia itaque FG ponitur parallela plano ex prop. 5. huius in plano delineata, & proiecta erit eiuſdem menſuræ, nempe linea 34. & quia eſt quoq; 34. parallela lateri FG, ipſi lineA AC anguli inclinationis erit perpendicularis, & omni lineę, quę ſit parallela ipſi ſectioni ex Coroll. 3. prop. 4. tract. 28. Linea verò 34. talis eſt, cùm ſit, vt dixi parallela FG lateri proiciendo ſectioni parallelo, & prop. 9. Ideoque linea 57. erit eadem, ac AC. Puncta itaque M & C in eam transferantur eodem interuallo ab A, & ſint 8. & 7. & per 8. parallela agatur lateri 3 4. & ſit 2. 6. Et quia HK, & KI cùm ſit paralla lateri FG, eſt etiā parallela plano. Ideo in figura proiecta, & genita erit ei ęqualis a 8, & 86. Coniungantur itaque puncta 2. 7. 6. 3. 4. rectis, & iam erit pentagonum proiectum.

Quod patet ex ipſa operatione, ſimul enim operando ipſam operationem oſtendimus. Nam puncta H, & I à media DK non ſunt immutata, quo ad diſtantiam, quia diſtantia eorum menſuratur per parallelam KI ſectioni DK, & plano, ideoque ex propoſ. 5. huius manet eadem. At verò diſtantia à ſectione FG, cum per DK menſuretur, quæ non eſt parallela plano, decurtata eſt iuxta prop. 5. eo decremento, quod à perpendicularibus LM, & BC exhibitum eſt in linea AC plano orthographo ducta & pūcta 234, & 6 ſunt illa ipſa, quę lineę orthographicè LM, & BC imprimerent, cùm tum quoad latitudinem, tum quoad longitudinem, ac puncta M, & C diſtent à lineis, & 3 4. & 7 5.

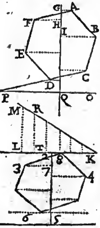
THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Superficiem rectilineam, cuius nullum latus ſit parallelum plano orthographo; dato angulo lateris figuræ cum ſectione, & inclinationis plani proiicere.*

*SIt Sexagonum ABCD, & cęt. & angulus inclinationis datus K, & ſectionis PO cum latere DC angulus, quòd enim nullum latus ſexagoni ſit plano parallelum, neque erit ipſi ſectioni. Quoniam, ſi eſſet aliquod latus ſectioni, eſſet etiam parallelum plano, vt ex Coroll. [illegible] prop. 4. de Interſect.

Ducatur GQ perpendicularis ſectioni, eique à ſingulis angulis ducantur perpendiculares AG, & FH, & BI, & cęt. quę cum ſint perpendiculares OQ, erunt parallelæ ſectioni, quæ quoque illi orthogonalis eſt; Ideoque eorum longitudines erunt æquales longitudinibus linearum proiectarum ipſas exprimentium ex prop. 5. h.

Diſtantiæ verò angulorum normales in linea QG à ſectione PO notentur punctis G, H, I, & cęt. Quia igitur QO, vtpote perpendicularis, ſect eſt linea anguli inclinationis ex def. 4. tr. 28. Ideo ſtabit loco lineæ KM, & ideo in linea KM à K transferenda ſunt omnia interualla QG & QH, & QI, & cęt. quæ erunt KM, & KR, & cęt. Ductis itaque perpendicularibus ML. & RT, & cęt. habebimus omnes prędictas diſtantias angulorum à ſectione; ſed in linea KL, quę eſt in plano orthographo, nimirum KL, & KT, & reliquas perpendicularibus translatas. Ideoque ducta rurſùs ſectione 5 6 perpédicularem ei faciemus lineam 5 2, quæ exprimet alterum latus anguli ſectionis KL, transferemuſq; decurtatas angulorum diſtantias KL in 5 2, KT in 5 7, &c.



perque puncta 2, 7, & alia ducemus punctatas 2 8, & 7 3, & ſimiles: quæ expriment in figura transferenda lineas AG, & HF, & reliquas, quæ vt diximus ſunt eiuſdem longitudinis, cum ſit parallelę plano orthographo, ac ipſę in plano proiectæ ipſarum vicarię; ideoque linea vicaria 2 8 erit æqualis lineę AG, & linea 7 3 lineę HF, & ſic de reliquis: Igitur per omnia puncta terminantia ducantur rectæ, & illæ latera ſexagoni proiecti efficient.

Probatumque id eſt in ipſa ſerie proiectionis; dum ſingularum operationum ratio reddita eſt.

COROLLARIVM.

IN omnibus figuris proiectis plano non parallelis angulos, lateraque variari, obliquioraque latera magis decurtari, vt ex propoſ. 5. huius poteſt colligi. Et angulos, quorum latera oppoſita magis obliqua ſunt minores fieri; Quorum verò aliquod latus parallelum plano orthographico fieri maiores iuxta oſtenſa propoſ. 7.

EX-

EXPENSIO V.

De proiectione ſuperficierum circularium.

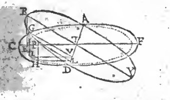
NVnc de curuilinearum ſuperficierum proiectione ſermo eſt, quæ immenſos vſus habet, tum in Gnomonica, tum in Architectura, tum in Proſpectiua. Ideoque ſicut dignâ ſtudio, ſic non difficilis euadet, illis, qui præcedentia legerint de ſectionibus corporum, & maximè conorum.

THEOR. I. PROPOS. XIII.

Proiectus circulus obliquus plano orthographo Ellipſis eſt.

SIt circulus ABD inclinatus ad alium, ſeu circulum, ſeu quodcumque aliud planum ACD orthographum, & ſuperficies proiectrix perpendicularis plano, quæ rectis BB, & GI, & PH exprimatur *hæc ſignabit in plano* ACD *Ellipſim* AED.

Trahantur ex punctis G, P perpendiculares diametro GV, & PL. Rurſuſque VI, & HL coniungentes puncta incidentię, tum proicientium, tum perpendicularium ſectioni AD.



Probatur itaque propoſ. Linearum VI, ad LH applicatarum quadrata dicunt ad inuicem eam proportionem, quam ex AV, & VD rectangulum ad rectangulum ex AL, & LD.

Quoniam VG eſt applicata ad diametrum. Vnde ex propoſ 35. Elem. lib 3. erit eius quadratum æquale rectangulo ex AV, & VD; Et tale erit ob eandem rationem quadratum LP æquale rectangulo ex LA, & LD ex eadem propoſ. 35. lib. 3. Elem. Sed cum triangula VGI, & LHP ſint æquiangula ob latera parallela, quibus ambiuntur ex propoſ. 15. Tract. 22. & propoſ. 18. ita erit VG ad LP, vt VI ad LH, & ita quadratum ex VG ad quadratum ex PL, vt quadratû ex VI ad quadratû ex LH ex 20. l. 6. Ergo quadratum ex VI ad quadratû LH habebit eam proportionem, quam rectangulum ex AV, & VD ad AL, & LD rectang. quæ eſt proprietas, tum Ellipſium, tum circulorum ex pr. 6. Tr. 34. ſed circulus eſſe nequit, cum ſemidiam. ET ſit minor; quam ſemidiameter circuli TD; Ergo erit Ellipſis circumferentia, quæ per puncta H, & I tranſit, & ſic dicas de quibuſcumque alijs punctis.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Proiectura Ellipſis, aut circulus eſt, aut Ellipſis, ſi ſit obliqua plano orthographo.*

SIt ABD Ellipſis in fig. præc. & ſuperficies proiectrix ab ipſius ambitu decidat in planû ſubiectum; quæ exprimatur rectis GI, & PH, & quibuſcumque ſimilibus plano ACD perpendicularibus, ab eiuſque incidentia formetur circumferentia AED. Dico *hanc aut eſſe circulum, aut eſſe Ellipſim.*

* Probatur. Ductis, vt ſupra rectis VG, & LP, & perpendicularibus ad ſectionem AD, quæ erunt parallelę, & VI, & LH coniungentes puncta incidentiæ V, I, & L, H ſimul, ob parallelismum triangulorum VGI, & LHP, quod in anteced. prop. oſtenſum eſt, VG eſt ad LP, vt VI ad LH. Sed quadratum ex VG ad quadratum ex LP, eſt vt rectangulum ex interceptis diametri portionibus AV, & VD ad rectangulum AL, & LD. Ergo etiam erit quadratum ex VI ad quadratum ex LH, vt rectangulum ex AV, & VD ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando*, quoque erit quadratum ex VI ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum AL, & LD. Vel igitur quadratum ex VI dicit proportionem ęqualitatis ad rectangulum ex AV, & VD, vel non. Si dicit proportionē ęqualitatis. Ergo etiã quadratû LH dicet proportionē ęqualitatis ad rectãgulû ex AL, & LD ex 11. l. 5. Quare AED erit circulus ex propoſ. 35. lib. 3. Elem. Vel non dicunt, & ſic erit Ellipſis, cùm vt Ellipſis in ſe ſe redeat, & cõſequantur eius diametro AD applicatarû quadrata eã proportionem, vt rectangula ex interceptis diametri portionibus, quam requirit propoſ. 6. Tract. 24. Si enim eſt VI quadratum ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando* erit VI quadratum ad LH quadratum, vt rectangulum AV, & VD ad rectangulum AL, & LD: quæ eſt conditio ad Ellipſes requiſita.

Intellige verò propoſ. etiam ſi ſectio, quam facit cum plano non ſit diameter, nec maximus, nec minimus, ſed aliquis intermedius.

THEOR. III. PROPOS. XV.

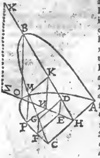
* *Situs, ſeu proiectio parabolæ parabola eſt.*

DEtur ABC parabola, & eius proiectio AOC. Dico *hanc proiectã figurã eſſe quoq; parabolã.* Ducatur diameter BE orthogonalis ſectioni AB, eiuſq; proiectio OE facta à proiectrice ſuperficie BOE, & ab eo applicatę DG, KM, & à punctis D, & G, & K, & M earum extremis proiectrices deſcendant DE, & GF, ſicut, & KN, & MP, connectanturque puncta incidentiæ E, F, ſicut P, N proicientium, rectis, quæ ſunt EB, & PN, & curſus per puncta E, & O recta EO.

Probatur progr. 1. Nam applicatę AE, & DG, vtpote quod DG ſit parallela plano ęquales ſunt ex propoſ. 5. huius. Sic etiam applicatæ KM, & PN ob eandem rationem: Sed vt eſt DB ad KB diametri portiones, ita ex 5. pr. tr. 24. eſt quadratû applicatarum DG ad quadratum KM, ergo etiam erit portio DB ad portionem KB, vt quadratum EF ad

quadratum NP. Quo ſuppoſito.

Prog. 2. vt eſt HB ad HO, ita eſt HO ad HE, quare etiam erit reſiduum DB ad BO, vt totum HB ad totum HO ad 22. l.5. Et pariter, vt HB ad HO, ita eſt HX ad HN, vnde erit etiam ex prop. 22. lib.5. Elem. reſiduum XB ad reſiduum NO, vt totum HB ad totũ HO, Ergo ex 16. lib.5 ita erit DB ad EO, vt KB ad NO, cùm eidem rationi, quę eſt inter HB, & HO ſint eędem rationes. Quare *permutando* erit DB ad XB, vt EO ad NO: Sed vt DB ad XB, ita eſt quadratum ex DG ad quadratum ad KM, & quadratum ex EF ad quadratum ex NP ex progr. 1. Ergo vt EO ad NO interceptæ portiones, ita eſt quadratum EF ad quadratum NP, quæ eſt proprietas Parabolæ ex prop.5. Tract.24.



THEOR. IV. PROPOS. XVI.

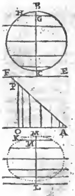
* *Proiectio Hyperbolæ Hyperbola eſt.*

SIt Hyperbola ABC in fig. ſuperiori, cuius proiectura AOC. Diameter HB perpendicularis ſectioni AC, tranſuerſaq; XB. Applicatę verò DG, & KM. Deducanturque OE, & XN, & BO, nec non & MP, & GF proiectrices, & item XZ quæ extremum tranſuerſæ diametri B proiciat in Z, ducaturque ZH, quę tranſibit per puncta O, N, E, vt ex propoſ 10 huius conſtare poteſt, cum diameter tota, ſit proiecta in HZ, eiuſque partes ſint in E, N, & O, connectantur tandem puncta FE, & PN. Cùm itaq; lineæ GO, & KM applicatæ ſint parallelæ ſectioni, erunt etiam parallelæ plano orthographo ex Coroll. prop.4. Tract.22. Ideoquę ex propoſ. 5. h. EF & NP erunt etiam æquales.

Probatur. vt eſt rectangulum ex XD, & DB ad rectangulum ex XK, & KB, ita eſt quadratum DG ad quadratum KM; Sed ſuperiori propoſ. argumentati ſumus, vt eſt BH, ad HZ, ita eſt OH, ad HB, & HB ad HO, ablatis ergo proportionalibus HD, & HE; reſidua remanebunt proportionalia, ex prop. 22. lib.5. Elem. ideoque erit DX ad EZ, ita DB ad EO, nempe in ea proportione, ac ſua tota XH ad HZ, ideoque *permutando* erit DX ad DB, vt EZ ad EO; & eadem ratione, vt XK ad KB, ſic ZN ad ON. Ergo etiam rectangula ex lateribus proportionalibus iſtis compoſita ex propoſ. 26. lib. 6. erunt proportionalia. Ideoque erit rectangulum XD, & DB ad rectangulum ZE, & OE, vt rectangulum XK, & XB ad rectangulum ZN, & NO: Quare *permutando*, vt rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB. Ita rectangulum ZE, & OE ad rectangulum ZN, & NO. Sed, vt eſt rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB, ita quadratum in Hyperbola ex applicatis DG ad quadratum KM, & ideo, vt quadratum ex EF æqualis, vt ſupra dictum eſt ipſi DG ad quadratum ex NP æquali ipſi KM. Igitur ex 16. lib.5. erit, vt rectangulum ZE, & EO ad rectangulum ex ZN, & NO, tale quadratum EF ad quadratum PN, quæ eſt proprietas Hyperbolarum, vt ex propoſ.6. Tract.24.

COROLLARIVM I.

HInc elicies modum pro[illegible]ndi omnes figuras flexas regulares: nempe Circulos, Ellipſes, Parabolas, Hyperbolas. Sufficit enim proicere diametrum ſectioni perpendicularem, & baſim parallelam ſectioni, ſeu ipſam ſectionem V.g. in fig. pr.13.h. AD, & EE, vel in fig. pr.14 ſi ſit parabola AC, & HB: Si ſit hyperbola AC, & HB, & XB. Data enim baſi, & angulo, & diametro iam pr.55. Tract.24. docuimus deſcribere, quamlibet ex iſtis figuris. Sicut etiam propoſ. 57 data gemina diametro intercepta in Ellipſi ſectionis deſcribemus proiecturam, & poterimus quoque vel alijs modis prædictis, tùm ex Tractat.24. tum ijs, quibus functi ſumus in deſcribendo figuras rectilineas dummodò plura puncta inueniatur, & per extrema flexa æquali manu ducatur; vt potes videre in figura hic appoſitâ, in quà dato angulo inclinationis OAP, & diametro CB perpendiculari ſectioni FE ductis à partibus circumferentiæ, velibet V.g. 5. parallelis ſectioni, & ideo plano orthographo, & eorum diſtantijs in AP translatis, & deinde projectibus lineis in AO deductis, quæ eſt in plano orthographo, & diſtantis OA, & cęt. in ML; & IN translatis ductiſque perpendicularibus ipſi LN, vt NK, & cęt. & tandẽ longitudinibus GH in NK, & aliarũ applicatarum tranſlatis in alias parallelas ipſi NK dabunt puncta, perque æquabili manu flexa linea deducta exhibebit Ellipſim, in quam transfunditur circulus, eo ſitu, quam exhibet angulus A, & planũ AP, in quo eſt circulus ſuper planum OA pendulus; plura verò de iis agemus, cum de ſuperficiebus corporum proiciendis, & in planitiem redigendis ſermo erit.



COROLLARIVM II.

*ELicere hinc potes Cylindros parabolicos, & Hyperbolicos, qui ſuperficie plana conſtant, & altera parabolica, ſeu Hyperbolica, vt figura ABCO pr.15.h. ſatis repreſentat ſectiones eſſe hyperbolas, ſeu parabolas: quod euidens eſt ex præced. nam ſuperficies proiectrix eſt eadem, quæ Cylindri Parabolici, ſeu Hyperbolici.

COROLLARIVM III.

HInc deducitur, quod quocumque ſitu planum Horthographum ſecet parabolicum, ſeu Hyperbolicum primigenium ſemper figura eiuſdem ſpeciei deſcribetur; quia illa ſectio planorum poterit eſſe applicata in aliquo diametro ſecundaria: vnde ſemper omnes aliæ applicatæ ei erunt parallelæ, & eædem demonſtrationes valebunt:

EXPEN-

EXPENSIO VI.

De ſpeciali proiectura circuli in ordine ad ſphæram proiciendam.

IN proiectione circulorum ſphæræ ſcimus principalem aliquando diametrum proiciendi circuli, & punctum contactus alicuius paralleli cum illo, & Ellipſim illius circuli repreſentatiuam volumus exarare. Quapropter hanc Expenſ. ſpecialiter ordinamus ad id rectè peragendum.

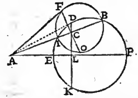
LEMMA PROPOS. XVII.

Si aliqua in circulo ſit ſecta, vt pars maior ſit ad minorem, vt tota cum adiecta aliqua ad adiectam extra circulum, etiam alia ab eius extremo in circulum cadens talis erit, ſi à puncto ſectionis illius perpendicularis in hanc demittatur. Nam ita ſegmentum maius ab hac perpendiculari factum erit ad minus, vt tota cum adiuncta eſt ad adiunctam extra circulum remanentem.

SIt ſecans AB ita diuiſa in C, vt BC ad CI pars maior ad minorem intra circulum exiſtentes; ſic tota BA ad partem exteriorem IA. Quod fiet ex tract. 15. propoſ. 23. ſi ſuper BI fiat circulus, & ducatur AF tangens & à contactu ducatur perpendicularis CF. Nam vt ibi demonſtratur BC erit ad CI, vt BA ad IA. Si itaque ſecans BA talis ſit, & ducatur AP per centrum, & à puncto C perpendicularis cadat in L. Dico, quod erit quoque PL maior ad LE minorem internæ partes, vt tota PA ad ſegmentum exterius EA.

Progreſſ. 1 Probatur. Nam producta LC in D, & à O ducta punctata OA; hæc erit, vt oſtẽdam contingens. Vnde ex cit. Lemmate ita erit PL ad LE, vt PA ad EA.

Quod verò DA tangens ſit ita probatur.



Quadratum ex CF, & CO æquale eſt rectangulo ex BC. & CI: Ideoque rectangulo ſibi æquali ex 35. lib. 3. Eucl. DC, & CX. Huic ergo rectangulo ex CD, & CX comite ei quadrato CL æquatur CF, & CO quadratum cum eodem quadrato CL.

Progreſſ. 2. Rectangulo verò ex CD, & CX addito quadrato CL æquatur quadratum LD ex 7. lib. 2. Elem Ideoque CF, & CO quadratum cum quadrato CL erit æquale quadrato LD.

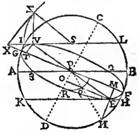
Progreſſ. 3. Quadrata LA cum CL ſunt æqualia quadrato CA ex 11. lib. 2. Elem. & hoc CA cum CF quadrato ſunt æqualia quadrato AF. Ergo quadratum CF, & CO cum quadrato CL, & quadrato LA ſunt æqualia quadrato FA.

Progreſſ. 4. Pone loco duorum quadrati LC, & quadrati CF, & CO quadratũ LO ex prog. 2. eis æquale, eritq; quadratum FA æquale quadratis LD, & LA. Sed ex 11. lib 2. Elem. iſtis eiſdem eſt æquale quadratum OA. Ergo hæc duo quadrata inuicem erunt æqualia: Sed quadratum FA eſt æquale ex 36. lib. 3. Elem. rectangulo ex BA, & IA. Ergo erit etiam æquale quadratum DA: Quare ex prop. 37. lib. 3. DA tangens erit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Dato ſitu diametri, & puncto circumferentiæ proiecto in aliqua proiectione ſphæræ proiectionem circuli, qui per illud incedit inuenire.

DEtur proiectio alicuius ſphæræ, vel circulorum in ea V.g. BCAD paralleli plano orthographo, BA perpendiculari maximo, LI, & VK perpendicularibus parallelis, & cæt. In hac autem proiectione ſit notus diameter circuli maximi FG, & punctum E, in quo tangit parallelum HX, & huius circuli proiecturam inuenire oportet.



Ab E dato puncto deſcendat ad diametrum FG perpendicularis EM, & prolungetur in N circuli punctum, & à puncto N linea NF ad centrum tendat: Rurſuſque à puncto E parallela diametro FG ducatur EO, ſegabitque primo ductam in Q. Itaq; linea FQ erit æqualis ſemidiametro minori Ellipſis repreſentantis circulum per punctum E incedentem.

Probatur. Nam Tr. 24. Conic Probl. 2. Prog. 2. propoſ. 71. Ita eſt in Ellipſi alicuius circuli diameter maior OF ad minorem RP, vt applicata circulo NM ad applicatam Ellipſis EM, ſed vt NM ad NE: Ita ex 2. lib. 6. Eucl. NP ad QP, ideoque ablatis NE, & NQ ex 19. lib. 5. Eu. vel ex 2. lib. 6. erit NM ad EM, vt NP, vel æqualis DP ad QP, vel æqualem RD. Cum itaque obtineamus DP diametrum maiorem, & RP minorem, Ellipſim poterimus deſcribere, trãſeuntem per E applicatæ ME extremum ex dictis de Ellipſibus Exp. 19. Tract. 24. Conic. quæ per G, R, F quoque tranſeat.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis duobus diametris Ellipſim in plano circuli repreſentatiuam exhibere.

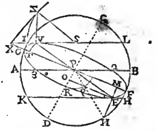
SInt dati duo diametri proiecti FG. & 23. Dico per illoa duos diametroa decurtatos Ellipſim nos poſſe deſcribere, & hoc docuimus propoſ. 55. Tract. 24. Nam hic datur baſis 23 diameter GF, & angulus ab iſtis factus 2 PM. Vnde Ellipſim iuxta doctrinam illius Problem. delineabimus.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Dato puncto tantùm in aliqua ſphæræ proiectura, per quod alicuius circuli tranſeat circumferentia, ipſam Ellipſim circuli expreſſiuam in plano conſignare.

SIt datum punctum V in parallelo proiecto LI, oporteatque reperire diametri maioris ſitnm, ex quò deinde cętera conficiantur, vt priùs.

Fiat, vt LV ad VI ita tota LX ad IX adiunctam, quod fiet ex tract. 15. prop. 22. ſi erigatur perpendicularis VZ; quæ ſecet ſemicirculũ LZI, & ductâ ZS à Z, tangens ZX ei rectãgula ducatur, & LI producatur in X: Nam ex prop. 22. citati tractatus 15. ita erit LX ad IX, vt LV ad VI. A puncto deinde X ducatur per centrum P recta FX. Nam FG erit axis maior Ellipſis.



Probatur ex prop. 13. Tract. 24. Nam ducta VT applicata habebit eam conditionem, quę requiritur ad diametrum, & ad tangentem VX, erit enim FX ad GX, vt FT ad TG. Vnde FG erit diameter VX tangens; & VT applicata: Quod autem tota XF ſit ad partem exteriorem GX, vt pars interoa maior FT eſt ad minorem TG interiorem.

Patet ex Lemmate 1. huius. Quodſi LV ad VI, ſic vt LX tota ad adiunctam IX; quod etiam talia erit FT intercepta ad TG, vt FX tota diameter cum adiuncta ad GX adiunctam. quod TV cadat ab V vbi perpẽdicularia ZV cadit, & FX ab extremo X ducta, quod eſt lineæ diuiſæ, vt LV ſit ad VI, vt LX ad XI.

TRACTATVS XXVI.

PARS SECVNDA.

De Stereographia.

QVamuis Stereographia poſſit in opus redigi puncto concurſus linearum proicientium à re proiecta diſtante, ſicut, & ſupra Orthographia per lineas plano non rectangulas exerceri, nihilominùs, quia Stereographia ſpecialiter ſphæræ circulis proiciendis instituta eſt, & in hunc ſcopum præcipuum ante omnia collimat; ideo concurſus linearum proicientium in ſuperficie ipſius ſphæræ in primis ſumitur. Quamuis etiam remotum ab ipſa re proiecta ſumatur, cum de alijs rebus proiciendis, & etiam de ipſa ſphæra, non tamen in ordine ad cęleſtes motus, agitur.

EXPENSIO I.

De proiectura lineæ.

HIc itaque lineas in circulo præcipuè conſiderabimus, vtpote, quod Stereographia ſit ad proiectionem corporis ſphærici in ordine ad cęleſtem ſphæram deſtinata, & quia corpus cęleſte luminoſum circa ſphærã ſe voluens, eiuſq; circulos radijs incurrens tali modo vmbras eorũ in planum, profunderet; hinc Stereographia inuenta, & ad id deſtinata; vt cæleſtes corporum opacorum proiectiones à luce effectas imitetur, cuius hic prima principia iactamus.

PRIN-

PRINCIPIVM.

IBi vniuſcuiuſque rei proiectio eſt, vbi lineæ proiectrices à puncto proiectionis obuenientes, & margines rei lambentes in planum incidunt.

Sic CD eſt proiectio lineę AB, quia lineę CI, & DI proiectrices extrema B, & A lambentes in planum CD incidunt, & ibi eius ſitum determinant reſpectu puncti A, & B in fig. pr. I. ſeq.

DEFINITIO I.

PVnctum proiectionis dicitur, ad quod omnes lineæ extrema rei proyciendæ lambentes concurrunt.

DEFINITIO II.

LIneæ verò proiectrices dicuntur illæ, quæ ab hoc puncto diſcedentes, extremaque rei proyciendæ lambentes in planum cadunt.

Taleſque ſunt IC, & ID.

DEFINITIO III.

PLanum Stereographum eſt illud, quod diuidens ſphæram bifariam omnes lineas proiectrices terminat.

Poterat quidem planum Stereographum ſupponi ſphæræ, ſed cum ſtereographia inſtituta ſit ad nobis exhibendas celeſtium circulorum vmbras, & nos ſimus in centro, planaque, quæ apud nos ſunt, aut per centrum tranſeunt, aut ei proxima ſunt inſenſibiliter reſpectu immenſitatis ſphęrarum, hinc eſt, quòd planum ſtereographum per centrum agatur, & in eo circulus maximus ſphæræ reperiatur.

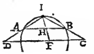
THEOR. I. PROP. I.

Linea plano Stereographo parallela in lineam maiorem proicitur, ſed partibus proportionalibus correſpondentem.

SIt linea in ſphæra AB, & à puncto I deſcendant lineæ proiectrices CI, & ID, quæ intercipiant lineam proiectam CFD in plano Stereographo exiſtentem.

Dico I hanc eſſe maiorem primigenia AB.

Patet. Quia eſt AB ad CD ob parallelismum linearum, vt BI ad CI. Sed CI eſt longior quam BI: Ergo etiam CD erit maior, quàm AB ex propoſ. 12. lib. 5. Elem.

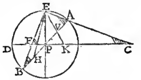


Probatur ſecunda pars. Nam ducta IF. Dico, quòd vt partes lineæ primigeniæ AH ad HB, ita ſe habebit, DF ad FC, quod probauimus propoſ. 4. Elem. In Coroll. 2.

THEOR. II. PROP. II.

Linea obliquata plano Stereographo in lineam proicitur maiorem.

*PRobatur. Nam Triangula CEF, & ABE ſunt æquangula: ſiquidem in triangulis FPE, & EBA nigri apud E, & B anguli ęquantur ob radios ſubtenſos ęquales, angulus totus AEB apud E, & FPE apud P recti, & ideo æquales, quamobrem etiam reliqui A, & F. In triangulo ergo FEC habemus angulum F nigrum æqualem angulo A nigro trianguli BEA, angulus verò AEB rectus cõmunis, reliquus ergo C æquatur angulo B ex 17 l. I. El. Cùm ergo triãgula ſint æquiangula erunt ſimilia, & latus EF trianguli FEC ſit maius latere EA trianguli BEA erit etiam baſis FC lineæ proiecta maior quam primigenia BA.



COROLLARIVM.

HInc dignoſcitur, quo pacto, ne dum diameter, ſed etiam ſingulæ eius partes in planum ſtereographum proiciantur: ſufficit enim dato angulo inclinationis APC deducere lineas proiectrices à centro E radioſo per partes A, V, P, H ipſius in ipſum planum. Nam ipſę ſuis extremitatibus notabunt partes C, K, P, in CF plano proiectas.

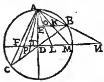
Sic, ſi dentur proiectæ partes ad partes primitiuas reuocare poteris lineas proiectrices deducendo ad centrum ipſarum.

THEOR. III. PROPOS. III.

* *Omnes Stereographicæ lineæ cuiuſcumque partes augentur muſicâ proportione.*

LOquimur de lineis. Ne dum ab aliquo puncto circuli per æquales partes diametri ductis: ſed quibuſcumque in qualibet diſtantia, & qualibet lineâ ductis; dummodo per illius partes æquales à puncto dato trahantur.

* Sit A punctum datum, & in lineâ BC partes ęquales quęcunque, & per eas ductæ AP & AT, & cæt. Dico eas eſſe in proportione muſicâ, & DF eſſe ad DT, vt differentia PF ad differentiam TP.



* Probatur ex prop. I I. tract. 10. de progr. Nam DF incidit in triangula baſium æqualium quæ, ſunt partes in linea CD. Ergo incidentes FD partes FD, PD, & TD decreſcent in proportione muſicâ. Sic dicas de partibus ND, & DM, & LD. Nam BE parallela

ND

ND incidit in triangula baſium æqualium lineę OB. Ergo in proportione Harmonicâ BE erit ad OE, vt differentia BK ad KO differentiam. Sed ob parallelas EB, & DN ex 4. lib. 6. vt eſt ND ad LD, ſic EB ad EO, & vt EB ad EO, ſic eſt BK ad KO, vt autem BK ad KO, ſic MN ad ML: Ergo ea 16. lib 5. Item: vt ND ad LD; ſic differentia NM ad differentiam ML.

EXPENSIO II.

De proiectura circuli.

POteſt duobus modis proici circulus, vel in ordine ad ſphæram proiciendam, de qua tē multa apud Aguilonium reperies, vel in ordine ad quemcumque circulum proiciendum; de proiectione prima hic agemus de alia expenſ. ſequenti.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Circulus perpendicularis in rectam proicitur lineam indefinitam.

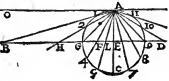
PRobatur. Nam, quòd ſit linea, iam id demonſtrauimus de omni proiectura perpendiculari. Sed quod ſit linea nullis concluſa terminis ita oſtenditur vtendo ſchemate prop. ſeq.

Sit centrum proiectionis A, & debeat deduci à puncto A linea proiectrix, & tangat extremum marginem circuli AGC 9 ad hoc, vt totum circulū exprimat, aut cum proiectrice AC faciet angulum rectum, aut minus recto. Si faciet minus recto, vt AB ex prop. 18. lib. 3. ſecabit ipſum circulum, & pars circuli AI, vel AII extra remanebit: Debebit itaque ipſi AC eſſe perpendicularem, & contingere circulum in A, vt AO; Ergo erit parallela plano orthographo. Quare numquam illud ſecabit. Ergo linea expreſſiua circuli in plano orthographo numquàm à linea proiectrice terminabitur, cum ei parallela ſit. Erit ergo indefinita.

PROBL. I. PROPOS. V.

Perpendicularem proiecturam circuli, & partium eius in plano tranſcribere.

DVcto plano DG tranſeūte per cētrum E circuli proiciendi AOC 9, & ſituato puncto proiectionis A, vtlibet; ſed conſuetè ad extremum lineæ CA plano orthographo DB perpendicularis, diuidatur in 12. partes V. g. tranſeantque per ſingulas lineę proiectrices à puncto A. V. g. AB per partis primæ extremum 1; ſic AH per extremam partis 2. & ſic de cæteris. Partes namque HB, & GH, & GF, & cæt. erunt in plano partes circuli perpendicularis ipſi plano proiectæ.



Probatur. Nam quoad ipſius circuli proiecturam iam ex præced. propoſ. viſum eſt eſſe lineam indefinitam EB.

Quoad verò partes proiectas oſtenditur. Quoniam lineis rem proiciendam extrema ſtringentibus decernitur; Tales autem ſunt partes proiectæ HB, & HG, & cæt. Siquidem lineæ proiectrices eas determinantes tranſeunt per extrema partium circuli 1. 2. AI, & 2. 3, & cęt. in quas diſpeſcitur.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Circuli partes æquales in partes inæquales proiciuntur, quarum illæ maiores, quæ ad perpendicularem magis accedunt.

DIco in partibus proiectis EL, & LF eſſe maiorem LF; quàm EL; quia magis a perpendiculari EA abſcedat.

Probatur; Quia anguli, vtpote æqualibus peripherijs inſiſtentes CA5. & 5 A 4. ſunt æquales, erit angulus CA 4 diuiſus in duas partes; Quarerè ex propoſ. 3. Eucl. vt eſt AF ad EA, ita erit LF ad LE: Sed AF eſt maior, quam AE, vtpote baſis angulo recto ſubtenſa: Ergo etiam FL maior erit, quam LE, & ita de cæteris.

THEOR. III. PROP. VII.

* *Tres partes proiectæ circuli in lineam, quæ æquali numero partium interpoſitarum diſtant à quadrante proiecto ducunt proportionem Geometricam continuam, & diameter ſemper eſt media proportionalis.*

SIt quadrans proiectum in EB linea. Dico AO EF ad EG, ita eſſe vt EG ad EH.

* Probatur ex prop. 7. de angulis Tr 19. Nam EG æquatur EA; anguli verò FAG, & GAH ſunt equales cum æqualibus peripherijs inſtantur. Ergo ita erit EF ad AG, vt EG ad EH, & eadem ratione EL erit ad EG, vt EG ad EB, Quare diameter EG erit ſemper media proportionalis.

COROLLARIVM.

*HInc patet omnia rectangula EL, & EB, ſicut, & EF, & EH, & ſic de alijs eſſe æqualia; quoniam æquantur quadrato EG, quod EO ſit ex propoſ. 19. lib. 6. Elem. intereas ſemper eadem media proportionalis.

THEOR. IV. PROPOS. VIII.

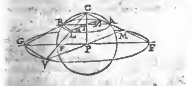
Circulus parallelus plano Stereographo proiectus eſt circulus maior: centrumq; in eadem proiectrice linea, cùm vero centro eſt; Partes quoque maiores quidem; ſed proportionales.

SIt in ſphęra ACA, circulus ALB parallelus Stereographo plano EG. Dico hunc circulum in

circu-

circulum maiorem FVG profundi.

Quod patet ex dictis in Conicis; cum enim omnes lineæ à puncto proiectionis lambentes circuli circumferẽtiam conum conſtituant ex iiſdem, clarum eſt, quòd, ſi productæ alio plano parallelo, vt eſt Stereographum ſecentur in eo circulum deſcripturas. Coni enim, cuius baſis circulus ex propoſ.2. Tract.24. omnis ſectio parallela baſi circulus eſt.



Dico 2. Centrum circuli proiecti P cum centro circuli proiciendi I in eandem lineam PC proiectricem incidere. Quot patet ex prop.3.tract.25. Cor. Nã ſolus conus ſcalenus habet duos axes hic verò conus rectus eſt, vnde habebit vnicum axem: axis autem ex def. per centra tranſit baſium.

Probatur tertia pars, quod partes circuli proiecti ſint quoque proportionales primitiuo.

Cum planum ſtereographum ponatur parallelum, plano circuli primitiui, ſi GCV planum illa ſecet ſectiones BL, & GV erunt parallelæ ex prop.16. tract.22. Quare erit, vt CL ad LB; ita CV ad VG in triangulo CVG. Proptereaque permutando erit, vt CL ad CV, ſic LB ad VG. Sed CL ad CV, ſic eſt IL ad PV: Ergo vt diameter IL ad diametrum PV, ſic LB ſubtenſa ad VG ſubtenſam: quare etiam arcus eas ſubtendes toti circumſerentiæ erunt proportionales ex propoſ 39 lib.6. Elem.

Patet verò eſſe maiores, quia CL eſt ad BL, vt CV ad VG, ſed maior eſt CV, quàm VG: ergo ex 14.lib.5. etiam GV ſubtenſa, quàm BL: Quare etiam maior erit ex propoſ.6.lib.36 peripheria GV, quam BL.

COROLLARIVM.

Hinc facilè patebit modus, quò circulus parallelus plano ſtereographo imprimatur.

Nam ex prædictis Theor. 1. ex penſ.6. ſufficiet inueniſſe diametri ipſius longitudinem, & inde centrum patebit, ſi diuidatur bifariam.

Partes quoque ſingulæ proicientur, ſi circulus proiectus in tot partes æquales diuidatur, in quot primigenius diuiſus eſt. Aut eodem centro deſcripto circulo primitiuo, per ſingulas eius partes ad ambitum proiecti radij tranſeant; qui in circulo proiecto notent primigenij ſingulas partes.

THEOR. V. PROPOS. IX.

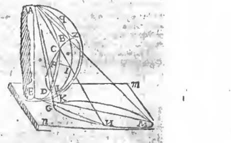
Circulus plano Stereographo obliquus proicitur in circulum maiorem; ſed cuius centrum cum centro primitiui in eadem linea proiectrice non ſit.

Iam ſupra dictum eſt Tract. præc. propoſ.2. quòd ſi planum ſecet ſubcontrariè conum; cuius baſis circulus ſit; etiam ſectio ipſa circulus erit.

Sit itaque circulus in ſphæra quicumque ZBCDL & lineæ proiectrices eius peripheriam vndique lambentes, vt eſt SA, & CA, & LA, & DA, & cęt. conueniant in A centro proiectionis. Dico, quòd ſi continuentur vſque ad planum Stereographum m n, cui SA perpendicularis eſt: quod planum ſecabit ſuperficiem conicam, quam integrant, ſubcontrariè, & ideò quod peripheria MNGK erit circuli ex propoſ.2. tract.25.

Probatur. Illa enim eſt ſectio ſubcontraria, cum planum ſecans cum ſuperficie coni facit angulos æquales angulis, quos facit cùm eadem ſuperficie, baſis primitiua coni: ſed planum MN facit cum ſuperficie protenſa coni, eoſdem angulos, quos facit circulus planus ZBDL baſis, cuius vertex A, ergo ſecat ſubcontrariè.

Ad id autem probandum elligantur duo puncta quæcumque. Erit enim par ratio de iſtis, & de omnibus alijs V. g. C, & D in circulo ſphæræ, & à vertice A per D agatur linea vſque ad planum in G, & ſit AG deſcripta ſuper planum circuli ACDE, ideoque ſiat de puncto C ab A vertice agendo lineam AC deſcriptam ſuper ſemicirculum ACDE, & productum vſque dum tangat planum m n in N. Ita quod concipiatur ſuperficies plana ſemicirculi ACDE prolungata, & peruenire vſque ad N, & imprimere ſuæ ſectionis veſtigium in plano lineam NE. Tranſibitque per G, cum ſit ADG recta in eodem ſemicirculi extenſi ACDE plano. Ducaſque in eodem plano CD rectam communis ſectio plani circuli ZCL minoris baſis coni, & ſemicirculi ACDE.



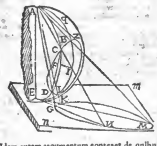
Probandum eſt itaque DG plano baſis extenſam eoſdem angulos facere cum lineis coni NCA, & ADG, ac cum iiſdem facit NG linea plani ſtereographi.

Angulus itaque CAE apud A cum ſit angulus ad circumferentiam inſiſtit arcui CFDE: ſic angulus apud D nimirum CDA pariter ad circumferentiam in D ſobſternitur reliquo arcui CA. Quapropter erit anguli apud A complementum vſque ad ſemicirculum ECA, cumque anguli ad circumferentiam ſint ſubdupli angulorum ad centrum, ideò ſemicirculus ECA. vt eorum menſura centralis quadrans erit: nam dimidium arcus EDC eſſet menſura anguli ęqualis ad centrum, & dimidium arcus CA eſſet anguli ad centrum menſura æqualis reliquo angulo apud D. Ideoque ſimul angulus CAE, & CDA æquant angulum quadrantis. Nempe rectum, & CDA eſt complementum alterius CAE.

Sed huius quoque anguli CAE eſt complementum angulus N rectilineus. Quoniam angulus NEA rectus eſt ex hypotheſi in triangulo NAE.

Ergo

Ergo reliqui anguli erunt æquales vni recto, cùm omnes trianguli anguli ex propoſ.17.lib.1. Elem. tantùm duobus rectis æquales ſint: Quare eiuſdem anguli CAB erit angulus N complementum, vt COA. Ergo erit æqualis angulo CDA. Quoniã verò angulus CAO in triangulo CAD deſeruit etiam triangulo NAG, & angulus N oſtenſus eſt æqualis angulo CDA; reliquus quoque ACO erit æqualis reliquo NGA ex 17. lib.1. Cor.2.



Idem autem argumentum conteſes de quibuſcumque alijs angulis. Quare ſectio plani ſtereographi erit ſubcontraria: vnde MNGK circulus erit.

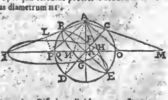
Probatur ſecunda pars. Quoniam ſubcontraria ſectione circuli non ſe interſecant per centra ex Coroll. propoſ.2. Tract.25. nempe eorum ſectio per centra vtriuſque non tranſit. Vnde linea ab A tranſiens per centrum I non tranſibit per centrum circuli proiecti NMGK.

PROBL. II. PROPOS. X.

Circulum obliquum in planum ſtereographicè proijcere, poloſque eius, & centrum aſsignare.

INuenienda priùs eſt pars circuli centro A remotiſſima, parſque propinquiſſima, ſi non ſit cognita. Id verò fiet ducendo per puncta C, & D polos circuli dati circulum maximum CABDE. Namq; ex prop.22. 3. partis ſpher. is circulus arcum BA habebit, qui inter omnes, qui ad circumferentiam obliqui circuli FBGD duci poſſunt breuiſſimus erit, & ACE, qui erit maximus, & deſignabit diſtantiam maximam in E, & minimam in B à centro proiectionis A.

Tranſeant itaque per inuenta puncta E, & B lineæ proiectrices AE, & AB, & dabunt M, & I puncta, per quæ circulus proiectus debet incedere, & eius diametrum MI.



Secundo. Biſariam diuidatur MI, & centrum in P circuli proiecti obtinebimus.

Tertio. Tranſeant proiectrices per polos C, & D, & polos in plano proiectos cõſequemur H, & N. Itaq; ſeorſim circulus OQ ipſius ſphæræ deſcribatur; ſẽper enim in omni proiectione hic circulus præſupponitur; cùm ſit ſectio ipſius ſphæræ cum plano ſtereographo, eo quia planum ſtereographum ex definitione ſecet ſphæram biſariam. Sitque t n 2 m; aſſumaturq; diſtãtia O M, & ſit 1 3. deinde diſtantia PH, & ſit 4 2, centro itaque 2 interuallo 2 3 deſcribatur circulus 3 5; eritque circulus proiectus. Deinde OM ab 1 in 7, & diſtantia NH, & tranſferatur ab 3 in 6. eruntque poli 7. & 6. circuli proiecti 35, vt vides in fig.pr.12.h.

* Poteſt etiam reperiri centrum circuli independenter à lineis AH, & AE circuli proiectricibus ſi fiat angulus trianguli BAK ad A alteri angulo trianguli LAP ducendo AP ad A, æqualis. Nam P erit centrum circuli: Quia enim angulus E trianguli AEK æqualis eſt angulo ad A eiuſdem trianguli ob æqualitatem laterum EK, & KA, & eſt etiam æqualis angulo I, quòd ſit ſectio ſubalterna, vt pr.2. & 9. h ſi fiat alius angulus LAP ad A, erunt duo anguli quoque æquales I, & A in triangulo API; Quare etiam latera ſubtenſa erunt æqualia AP, & PI.

Sed ob ſimilitudinem triangulorum ſubcontrariorum etiam triangulum AKE eſt ſimile triangulo AHP. Siquidem angulus apud E, trianguli EAB eſt æqualis angulo apud H trianguli ſubalterni HAI, ex 2. vel 9.h. angulus verò KAB addito communi PAK vtriſque æqualibus HAK, & PAI angulis eſt æqualis angulo HAP: ſed triangulum AKE eſt Iſoſcelium ob radios æquales: ergo etiam tale erit triangulum APH. Vnde crus AP erit æquale cruri PH, & cruri PI, vt ſupra oſtenſum eſt, hæ itaque portiones erunt, æquales HP, & IP, ideoque P centrum erit.

* Idem quoque conſequi poteris, ſi diuiſa biſariam AI in L ducas perpendicularem LP, quæ ſecet planum ſtereographum in P, vt patet ob API æquicrurum triangulum.

PROBL. III. PROPOS. XI.

Partes circuli obliqui in planum Stereographum proijcere.

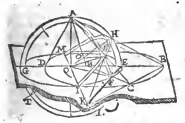
MVltis modis hoc Problema poteſt in opus deduci nos quatuor ſeligemus, ad quos alij ferè reducuntur: Primus ope polorum; Secundus ope ſecantium: Tertius ope chordarum: Quartus ope ſinuum.

THEOR. VI. PROPOS. XII.

Quæ à centro poli circuli proiecti diſcedit, & per partem aliquam circuli ſectionis ſphæræ tranſit, ea in partem proiectam circuli proiecti incidit.

SIt ſectio ſphæræ ETGM, & circulus proiectus EC IN. Poluſque in eo proiectus N. Dico quod CN tranſiens per EP partem circuli ſectionis ſphæræ æqualẽ parti HV circuli obliqui HVI proiciendi cadit in idem punctum C, ac linea proiectria AC.

Iam oſtẽſum eſt tr.23.pr.16.p.3. circulũ minorem



rem AVP tranſeuntem per polum ſuperum circuli ſectionis ſphęrę A, & alium polū I, circuli obliqui, HVI, & ſectione AL proicientem polum A in N, detruncare ab vtroque circumferētias ęquales HV, & EF: ſi ergo ſuperficies huius circuli extendantur vſque ad C, & ſit ANC ſuperq; eſt à puncto A centro proiectionis ſimul, poluſque circuli ſectionis EIG extendatur linea proiectrix recta tranſiens per V perueniet in C, & ſecabit NC, quæ eſt ſectio eiuſdem ſuperficiei extenſę circuli AVL cū plano BD proiecto; pars ergo BC, quę à linea proiectrice tranſeunte per V decernitur, illa etiam determinatur per CN, quæ tranſit per F, & truncat partem EF, à circulo ſectionis æqualem parti HV circuli obliqui proiciendi.



Dato itaque circulo ſectionis 2 I; & circulo proiecto 3 5, & cognita parte circuli, quæ V. g. ſit duodecima circuli proiciendi, dato quoque polo 6. Ducatur à polo 6. per 8. ſextam partem recta 6. 8. Et hæc terminabit 5 9 partem duodecimam circuli primitiui exprimentem.

THEOR VII. PROP. XIII.

Linea in circulo ſectionis à diametri extremo perpendiculari ſectionis ducta ad ſectionem per datam partem dat in ſectione punctum, per quod, & extremum diametri eiuſdem proiecti alia ducta partem à prima abſciſam exprimit.

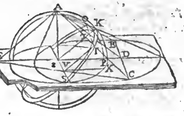
SEcundi modi fundamentum hoc eſt in eadem fig. quę ſuperiori modo, Sit ſuperficies BAC, quæ ſecet circulum obliquum in HV, & extendatur in BC; hęc imprimet ſectionem BC, quæ erit chorda ſubtendens arcum exprimētem arcum HV, vtpote, quòd proiectricibus AA, & AC per extrema arcus primitiui H, & V tranſeuntibus determinetur, itaque planum circuli obliqui HVI, & HV ſectio eius extendatur, donec occurrat cū plano ABC plano orthographò. Sectioque HK eius cum plano primitiui circuli MVI occurret tandem, cum angulus OHV nō ſit rectus ſectioni HK ſicubi V. g. in K. Et etiam ſectio CB ob angulum acutum HBC cōcurret cum HK; cùm ergo concurſus iſte ſit plani BAC, & etiā plani primitiui HVI; atq; inſuper plani orthographi BEG, ergo erit aliquod punctum ſectionis KM; quæ erat plani orthographi, & primitiui. Sed etiam eſt plani proiectoris BAK; erit igitur punctum K in quod orthographum, & primitiuum, & proiectorium concurrent. Verùm etiam EF ſubtenſa arcui EF æquali arcui HV concurret in K. Ergo æquo pacto, ac linea ſecans HV monſtrabit punctum K. Quod autē EF in punctum K concurrat; patet; quia angulus ad Q. tum trianguli HQK, tum trianguli EQK recti ſunt: anguli autem ad E, & H ſunt æquales; quia inſunt peripherijs circulorum æqualibus FIG, & VIT. Ergo triangula ęqualia, & crus KQ eiuſdem longitudinis, & ideo EF baſis concurret ad punctum K. Vnde, cùm EF ſecans circulum ſphæræ, & abſcindens arcum æqualem arcui HV obliqui HVI, indicet idem punctum K, in quo debet concurrere BC ſubtendens eiuſdem HV proiecturam, poterimus eius vice vti ad inueniendum punctum K.

Sit itaque circulus ſphæræ 1, 2, & pars in eo 2 P comprehendens ex 24. partibus, in quibus diuiſus eſt earum 5. Ducatur 2 P per P vſque ad interſectionem m n productam in u: Si igitur 5 u ducatur; hęc ſubtendet arcum 5 9 q, qui repreſentat arcum 2 P ęqualem circuli inclinati ex pręc. arcui fundamento. Sic ducta 2 b ſignabit punctum c, per quod 5 d ducta determinabit arcum 3 d proiectū.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

A puncto, in quod parallela plano proijciendo à puncto proiectionis cadit recta per ſinus extremum circuli ſectionis ducta, dat in proiecto circulo partes proiectas.

FVndamentum tertij modi eſt, ſi in obliquo circulo ducto ſinu IV, & proiectrice AC, quæ tranſeat per I, per has duas lineas agatur pla-



num CIVSA, quod ſecet planum orthographum in linea

a linea CVZ, nam quę hoc planum incidet in planum AB linea expreſſum, parallelum plano circuli proiciendi KIS, & conſequenter incidet in punctum a. Siquidem ſi planum AB ponatur parallelum plano circuli primitiui KIS, etiam ſectiones plani CAB erunt parallelæ ex prop. 15. Tract. 22. de interſect. cumque IV ſit parallela KZ etiam eidem erit parallela AB.

Si autem ſit arcus FK æqualis arcui KI, etiam ſinus XV, & TV æqualiũ reſiduorũ IZ, KS erunt ęquales, & ideo idem ſinus verſus VS erit: quare ſinus verſus SV circuli ſectionis FXS exhibebit punctum idem a, per quod tranſit AC.

Sit ergo, vt priùs, circulus ſectionis I 2, & proiectus 3 5, & c punctum O, quod parallela plano proiciendo OA, vt in fig. prop. 10 h. à centro proiectionis A deducta in planũ imprimit, & ducatur à parte f; circuli ſectionis ad diametrũ m n normalis, quę cadet in l. Ab c itaq; puncto per l ducatur e g, & hæc determinabit arcũ 5 g, & repreſentantẽ arcũ f 2, & arcũ 3 r repreſẽtãtẽ eũdẽ f 2 ad eã partem, qua partes ſunt minores in circulo proiecto.

THEOR. IX. PROPOS. XV.

Si per puncta proiecta primigenij circuli, quibus chordæ diametrum ſecans perpendiculares ducantur, hæ à circulo proiecto partes abſcindent proiectas, eruntque chordæ proiectæ.

QVarti modi fundamentum eſt. In figura pt. 14. Ducatur in circulo proiciendo chorda IO perpendicularis diametro; hæc ſecabit diametrum in T. Tranſeat ergo ſuperficies, ſeu lineæ BA, & CA, & eam proiciant in CB: Sectio CB terminabit in punctis C, & B, in qua lineæ proiectrices arcuũ KI, & KO terminant, ideo CB eoſdem arcus in circulo proiecto deſſignabit, tranſibitque per punctum D, quod cum ſuperficies BAC tranſeat per T erit punctum T proiectũ, eritque orthogonalis diametro DZ, ſicut IO orthogonalis eſt ipſi diametro KZ circuli primitiui, cùm tota ſuperficies CBA ſit ei diametro, & plano circuli FKA orthogonalis.

Si itaque ex propoſ. 2. h. puncta quibus chordæ diametrum primitiui circuli ſecant, proiciantur, cum ipſo circulo, & ſit illorum aliquod punctum s, ducaturque t g; hęc ſignabit arcum 5 g circuli proiecti exprimentem arcũ circuli primitiui.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Partes proiecti circuli, quo propinquiores perpendiculari à centro proiectionis prouenienti, eò minores ſunt.

SInt iuxta ſecundum modum partes in circulo proiectæ ABON, quæ in circulo originario, ſeu etiam ſectionis, cum in vtroque, vt oſtenſum eſt, æqualitate conſentiant, ſint EF, FO, GO, HG omnes inuicem ęquales. Dico, quod iſtæ partes inuicem æquales proiectæ, efficiuntur inuicem inęquales, & quod minor eſt illa, quæ puncto V, quod imprimit perpendicularis V propiùs accedit.

Probatur. Ducta punctata HK parallela ipſi LO, maior eſt proportio OH ad HV, quam KH ad HV (vt dicam) quare etiam eſt maior, quàm OL ad LV, cum punctata ſit parallela, ipſi LO, & ideo eadem ſit proportio HK ad HV, quę LO ad LV: ſed proportio OH ad HV eſt eadem, quæ OI, ad IV ob angulos æquales ad H ex prop. 3. lib. 6. Elem. Ergo maior erit proportio OI ad IV, quàm OL ad LV. Vnde, & ex propoſ. 6. Tract. 19 maior erit angulus OLI, quàm ILV, & ſic oſtendes de alijs.



Quod autem HO habeat maiorem rationem ad HV, quàm HK ad HV ipſum patet ex 8. lib. 5. Nam eſt maior HO ob angulum maiorem externum HIO, quem ſubtendit, quàm HE, quæ ſubtendit angulum internum minorem HVK minor eſt autem angulus internus externo ex pr. 17. Cor. 1. l. 1. Elem.

COROLLARIVM I.

HInc eſt manifeſtum partes circuli, quæ in maxima medietate ſunt LDC eſſe maiores partibus primitiui circuli: ſicut totus arcus eſt maior, at verò, quæ ſunt in altera medietate minores illis, quæ in circulo primitiuo ſunt; quia etiam totus ille arcus eſt minor, & cum tot ſint partes in medietate proiecta, quæ minor eſt medietate primitiua, quot ſunt in ipſa, hac medietate neceſſariò erunt omnes minores, & hoc ſufficiat ad rem per ſe claram confirmandam, licet alioquin non proſùs ratio conuincat.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque, illum eſſe majorem radium in circulo proiecto, qui per vtraque centra tranſit, tum circuli primitiui, tum circuli proiecti, reliquos verò eſſe maiores, qui propinquiores ſunt centro circuli proiecti. Ratio eſt, quia radij ducuntur à centro proiecto, qui non coincidit cum centro circuli proiecti, vt docuimus. Vnde cum hoc punctum ſit extra centrum, euenit, vt docet Euc. lib. 3. Elem. propoſ. 15. maximum eſſe, qui per centrum tranſit, reliquos verò eò eſſe maiores, quò centro propinquiores.

EXPENSIO III.

De proiectura ſuperficiei cuiuslibet independenter à ſphæra.

PArtes alicuius lineæ proiectæ eam proportionem muſicam dicunt, quam oſtendimus propoſ. 3. & ita proiciuntur, vt prop. 2. Coroll. h. Poſſunt autem lineæ proiectæ eſſe maiores primigenijs, ſeu minores prout intercipitur planum, in quo ſunt inter punctum proiectionis, & planum, proiectionem recipiens V. g. in fig. prop. 3. TF eſt minor, quam FC, quia linea TF proiecta inter primigeniam TB, & punctum A interponitur, at HD proiecta maior, quam BE primigenia, quia

hæc

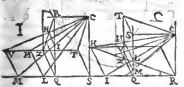
hęc interponitur inter No, & A, & quæ dicuntur de lineis eadem intelligenda ſunt quoque de ſuperficiebus, vnde duplex genus proiectionis poteſt deduci, alterum dicetur rectum, cùm interponitur planū in quod ſit proiectio inter planum originarium, & proiectionis centrum; alterum inuerſum, cum planum originarium interponitur inter centrum proiectionis, & planum proiectionem recipiens.

THEOR. I. PROP. XVI.

Omnes lineæ, quæ ſunt perpendiculares plano Stereographo, ſeu in proiectione recta, ſeu inuerſa proiectæ in punctum collimant à plano originario æquè remotum, ac centrum proiectionis; lineæ verò parallelæ plano Stereographo in parallelas originario tranſeunt.

PRæſupponendum eſt planum Stereographum, ideſt proiectionem recipiens eſſe plano originario ex inſtituto hominum rectangulum, ideoque etiam id præſupponimus.

Itaque ſit punctum, ſeu centrum proiectionis C ſit planum originarium STVM, in quo ſcilicet eſt figura proicienda LMNV. Planum recipiens proiectionem ſit QHR, cui perpendicularis linea proicienda VN. Dico primò, quòd iſta linea NV proiecta imprimit lineam ZH, quæ in punctum R producta terminat, quod punctum æquè remotum eſt à ſtereographo plano HRQ, in quod ſit ꝓiectio eadem diſtantia perpendiculari, qua remouetur punctum C centrum proiectionis.



Probatur. Nam quia NV ex theſi eſt normalis plano ſtereographo HRQ, erit etiam normalis eius ſectioni QZ: & ſi plano ſtereographo HRQ ducatur planum CST parallelum per centrum C, erit quoque NV perpendicularis eius ſectioni TS. Quare ſi intelligatur ſuperficies proiciens NVC extenſa vſque ad T, ita vt ſint eius ſectiones CT, & RZ, erit quoque prędicta TNV ſectio ſuperficiei proiectricis perpendicularis ſectionibus RZ, & CT, vtpote in planis CTS, & RZQ iiſdem exiſtentibus ex def. 2. tract. 22. Quare CTS, & ZRQ erunt anguli inclinationis planorum ex prop. 4. Cor. 2. tract. 22. & ideo anguli æquales ex prop. 18. tract. 22.

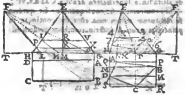
Tranſeat ergo per C planū CSM normale vtriq; plano CTS, & STVM; Sectiones itaque CS, & ST rectum angulū continebunt. Quoniā ex 16. tract. 22. ſectio ST duorum planorum CTS, & TVMS erit ad rectos ãgulos plano CSM, & ideo ſectioni CS, & SM ex def. 2. tr. 22. in plano CSM exiſtenti. Sed QZ eſt parallela lineę ST ex effect. ergo etiam perpendicularis plano CSM ex 8. tract. 22. & ideo ſectioni SQ, & RQ ex def. 2. tract. 22. Sunt ergo ęquiangula triangula CTS, & QRZ, vtpote, quòd ſint rectangula, & angulos CTS & RZQ æquales obtineant. Sed etiam crura TS, & ZQ ſunt æqualia: Siquidem lineæ TZ, & SQ parallelæ ſunt, vtpote oſtenſæ normales ſectioni QZ, ideoque ex 33. lib. 1. Elem. æquabuntur inuicem crura parallela QZ, & ST. Cum ergo in triangulis æquiangulis ex 4. lib. 6. ſit ST ad SC, vt QZ ad QR, & TS & QZ ſint equales, SC, & QR æquabuntur ex 14. l. 5. Quamobrem ſectio RZ plani proicientis CHV terminabit in R, quod habet eandem eleuationem à plano primigenio SVT, ac punctum C menſuratam per rectas CS, & RQ æquales, & normales: hoc autem punctum R vocabitur centrum proiectum.

Probatur ſecunda pars, quæ eſt, quòd lineæ parallelæ plano ſtereographo, vt eſt LN in parallelas plano primigenio STVM tranſeant. Quoniā enim linea ꝓicienda LN, vel NV eſt parallela plano HRQ erit etiam parallela cõmuni planorũ ſectioni ex 4. tract. 22. Coroll. 3. quæ eſt QZ, cùmque QZ ſit perpendicularis plano SCQR perpendiculari planis CTS, & QRH, etiam ipſa eidem plano normalis erit: ideo planũ HIC per illam ductũ ex 15. tract. 22. plano CSRQ erit ad rectos angulos; quare, & eorum communis ſectio HI eidem plano ex 16. tr. 22. ad rectos angulos erit: Propterea que HI, & QZ ex 7. tract. 22. erunt parallelæ; ideoque, & plano STVM parallela erit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Superficiem rectangulam proijcere.

POteſt hæc ſuperficies proicienda obtinere aliquod latus parallelum plano, in quo facienda eſt proiectio; vel nullum parallelum.



Sit ergo primus caſus, in quo ſit parallelogrammo ABCD proiciendum. Determinetur centrum proiectionis F, & centrum proiectum E, & ab F centrum proiectum ab H, & G extremis lineæ GH, quæ intercipitur inter latera proicienda AB, & CD ducantur rectæ. Aſſumpta autem diſtantia HO transferatur ab H in L, & ducatur FL, quæ ſecabit EH in P. Ducetur que parallela PX ſectioni HG. Rurſus aſſumpta diſtantia HG transferatur ab H in N, & ducatur FN, quæ ſecabit HE in I. Itaque ſi per I ducatur parallela IV ſectioni HG, illa claudet rectangulum PIVX iam proiectum.

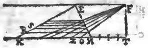
Id autem oſtendetur, nam poſito, quod HO ſit ſectio planorũ primigenij, & orthographi, qualis in fig. 1 præced. eſt ZQ. Ducentur perpendiculares FT, & EM, & HT erit diſtantia duorũ planorũ, quę in fig. præced. propoſ. ſunt QRZ, & SCT V. g. erunt lineæ CS, & RQ à centris primigenio C, & proiecto R deſcendentes. Igitur HO erit interuallum diſtantiæ, quā linea proicienda diſtat à linea ſectionis V. g. in præced. fig. 1. interuallum QM. Vnde ſicuti ibi I eſt punctum M proiectum, ſic hic

R. erit punctũ proiectum. Sed I punctũ ex pr. 10. par. 3. tract. 16. diſtat eodem interuallo, ac R à linea HO: quia trianguli HIN, & HLO ob baſes æquales HN, HO eandem altitudinem poſſident. Ergo ducta parallela per I habebit eandem diſtantiam, ac per R ab HN, linea ſectionis planorum primigenij, & orthographi. Ergo IV erit CB linea proiecta, cum vt oſtendimus debeat eſſe parallela lineæ ſectionis HO. Sic dicas de linea PX, quę erit linea DA proiecta. Latera verò DC, & AB exprimentur per lineas PI, & XV: quia tendunt ad centrum E proiectum, vt oſtenſum eſt præcedenti propoſ. part. 2.

Si verò ſit data ſuperficies ABCD irregularis, vel nullum latus habens ſectioni GH parallelum per A ducatur latus parallelum PQ, & per A latus AV, & normale TC per C. Item ſectioni perpendicularia latera PR per R, & SQ per D, & parallelas MB, & DH ab vno quoque angulo, quas omnes parallelas, & normales proicies; normales, quidem in OA, & TA, & cęt. tendentes ad centrũ; parallelas verò in 3 4, & 7 0 & 1 6, & cęt. & puncta X, Z, & I, O, & cęt. repreſentabunt interſectiones D, A, B, C, in quibus etiam anguli figuræ BACD terminant in ſuis decuſſationibus. Igitur per puncta XOZI rectæ ductæ facient XOZA planum proiectum, cuius primigenium eſt ABCD.

COROLLARIVM.

*EX ſupradictis adiſces propoſ. 2. tract. 16 p. 3. quod ſi NO, & OZ ſint æquales, & ſic ſucceſſiuè, etiam diſtantię, & interualla proiecta futura eſſe harmonicè proportionalia; nempe ER eſſe ad ES, vt AR ad DS differentię, & ex propoſ. 3. eiuſdem ſi NO erit pars aliqua V. g. $\frac{1}{6}$ lineę NX lineæ ES erit $\frac{1}{4}$ RE $\frac{1}{5}$ DS $\frac{1}{6}$, & cęt. in infinitam. Vnde altitudines ſuperficierũ erunt R X ad R S, vt $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ ſibi inuicem, & ſic conſequenter. Et quidem ſi inſtitutum meum non eſſet me continere in principijs rerum, & doctrinarum; hanc quidem mi-



rabilem progreſſionem proſpectiuæ praxibus ſubigerem, & quàm benè ſcenicis deſeruiat, oſtenderem: ſed id eſt alius voluminis, ſi Deus dederit.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis circulus, ſeu Ellipſis proiecta in planum, nec parallelum, nec baſi ſubcontrarium in Ellipſim transformatur.

PRobatur. Eſt ſectio coni à ſtereographo plano ad angulos rectos baſi coni inſiſtenti, ſeu etiam ad quemcumque angulum. Sed omnis ſectio coni Ellipſis eſt, ſi planum non ſit parallelum baſi, vel ſubcontrarium, vt ſupra oſtendimus, ergo etiam hæc ſectio ſtereographa Ellipſis erit; Quod autem circulus proiectus, vel Ellipſis ſit ſectio coni, id eſt fiat in plano conum ſecante. Patet ex definitione ſtereographiæ factæ à ſuperficie coni ea planum primigenium ambiente.

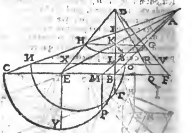
COROLLARIVM.

HInc patet centrum Ellipſis proiectæ non habere idem centrum cum centro circuli, vel Ellipſis primigeniæ: niſi accedat, quod ſit parallelum planum ſtereographum plano proiciendo, vt conſtat ex Coroll. 1. propoſ. 2. tract. præced. Nec vnquam circulum repreſentare, etiam ſi circulus ſit primigenius, niſi ſit, aut planum proiectionis parallelum ipſi, aut ſubcontrarium.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Quemcumque ſeu Circulum, ſeu Ellipſim plano Stereographo transſcribere, eorumq; partes repreſentare.

CVm circulus, ſeu Ellipſis proiecta, Ellipſis ſit, poteſt eodem modo deſcribi quò ſupra diximus Ellipſes deſcribi poſſe in tract. 24. Conic. Expenſ. 23. & propoſ. 8. & 9. & 10. huius, quæ verò repoſcuntur ad deſcriptionem ex cognitione coni ſtereographi, & conus ipſe à diſtantia data à plano, in qua fig. primigenia reperitur, facilè obtinetur, & à dato, aut axe, aut diametro aliquo ipſius primigeniæ figurę. Sed libet hic modum ordinarium oſtendere, quo vtuntur artifices.



* Sit conus ABC, & ſectio eius quęcumque BI, quæ producatur vſque ad eandem altitudinem coni ABC in D: Sit verò ſemibaſis coni ſemicirculus BYC, in quo applicatæ EY, & MP, quarum puncta extrema ſunt exprimenda in Ellipſi, cuius axis BI. Ducatur ab B, & ab applicationum punctis ad verticem A lineę AE, & AM, & per L, & K, quibus punctis diametrum BI ſecant, ducantur parallelæ ON, & OH vſque ad crura trianguli conici per axem AC, & AB: menſuretur verò BE ſemidiameter in F, & per F, & D ducatur FD; quæ tranſibit per G, & ED, quæ tranſibit per H ob triangula FGN, & EKH, & ABC æqualis altitudinis ex propoſ. 10. tractat. 16. part 2. Nam conueniunt in H, & G, per quæ tranſit OH. Poſtea menſurata QE æquali EY alteri applicatæ, ducatur ad D linea QD, quæ in R ſecet ON productam in V. Et dico RL, & VK eſſe applicatas in Ellipſi, cuius diameter, ſeu axis BI.

Probatur in triangulo CKB, ita eſt OC ad LO, vt KB ad LB. In triangulo autem ECB ita eſt EH ad HD, vt KI ad LI: quare poterimus componere proportiones, & rectangula conſtituere proportionalia, vt vides in hoc ſpecimine.

HK	vt	KI	&	KG	vt	KB
ad		ad		ad		ad
LN		IL		LO		LB

Ergo compoſitum, vt compoſitum.

HK	&	KG	KI	&	BK
ad		ad	ad		ad
LN	&	LO	IL	&	BL

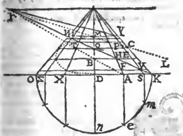
Sed GK, & KH rectangulum eſt æquale quadrato applicatæ diametro à puncto K ſcilicet KS ſicut OL, & LN rectangulũ applicatę diametro NO ad angulos rectos, quæ eſt LT; ergo, vt HK, & IK rectangulum ad rectangulum IL, & LN. Sic quadratum KS ad quadratum LT: Sed KO æquatur rectæ KS, & LR rectæ LT. Ergo KO, & LR erunt applicatæ, vtpote quod ſit GK quadratum ad quadratum ex BL, vt IK, & KB rectangulum ad IL, & LN rectangulum ex 6. tr. 24. Quare remanet oſtendendum, quod OH ſit ęqualis KS, & LR æquetur ipſi TL.

Id verò oſtenditur. Nam, vt ON diameter ad BC diametrum, ex prop. 44. lib. 6. Elem. ita eſt ſinus LT ad ſinum ſimilis arcus MP. Eſt enim ex Coroll. 2. prop. 4. lib. 6. OL ad LN, vt OM ad MC, ideo OL erit quoque ad mediam proportionalem LT, vt BM ad ſuam mediam proportionalem MP. Ideoque etiam *permutando* OL erit ad BM, vt LT ad MP: quare etiam ON erit ad BC, vt TL ad MP, ſed etiam RL ſe habet ex 2. Coroll. prop. 4. lib. 6. ad QR æqualem ipſi MP, vt VX æqualis ON ad æqualem VX ipſi BC ex conſtructione. Ergo LT, & LR æquales erunt ex 7. l. 5. quia æqualibus QR, & MP eandem dicunt proportionem ON, ad BC.

Eodem modo probabis de linea SK, quod ſit æqualis lineæ KO; quare KO, & LR erunt applicatæ.

COROLLARIVM I.

Hinc elucet quomodo alia, & alia puncta poterimus reperire, donec tot ſint, quæ ſufficiant ad rectè trahendam Ellipſim vt vides in figura hic appoſita.



Imo ex prop. 10. Tract. 16. de prog. armonicis part. 2. cum omnia triangula ſint eiuſdem altitudinis V. g. KHA, & ABD loco trianguli ABD deſeruiet triangulum KHA, & loco trianguli AND poterit deſeruire triangulum KNO: Vnde vnica diagonalis KN ſufficiet ad omnium triangulorum altitudinem exhibendam; quæ ſit eadem, ac ea, quæ in DM ſucceſſiuè inueniretur, itaq; puncta D, F, B, C, P, & cęt. vſque ad M erunt in Ellipſi præbentibus ſucceſſiuis altitudinibus triangulis KVS, KHA, & KQR. KTK, KIZ. & tandem KNO, quæ altitudines deberent reperiri in perpendiculari DM. Et idem fiet ſuper TN, ducta YI ſi placeat aliam Ellipſim delineare.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam facilè aliquis quemlibet figuram circulo inſcriptam delineabit, vt patet ſi puncta e, applicatarum AE V. g. intelligantur pro angulis alicuius figuræ circulo inſcriptæ, ſiquidem etiam applicata AS ſuo extremo S in Ellipſi angulum figuræ rectilineæ exprimet, & ſic de alijs.

COROLLARIVM III.

Hinc etiam patet: quomodo quęlibet figura, etiam ſi non poſſit circulo inſcribi, proiciatur, quia ſaltem poterunt pluribus circulis illius anguli circumſcribi, quorum puncta extrema ſi proiciantur, erunt quidem in plurium Ellipſium ambitu; ſed tamen coniuncta figuram irregularem proiectam referent.

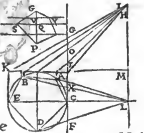
COROLLARIVM IV.

Hinc quoque patet quomodo partes alicuius circuli proicientur. Nam in fig Coroll. FD, & FE, & EC, & cęt. exprimunt partes circuli n e, & e m, & mK, & patet etiam quomodo partes circuli primigenij ęquales; in Ellipſi tamen proiecta eius vicaria non ſint æquales.

PROBL. III. PROPOS. XX.

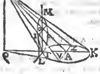
Circulum, ſeu figuram rectilineam in Ellipſim proiectam transfundere Stereographicè.

Sitque iſte circulus, ſeu figura proicienda orthographicè. Detur verò altitudo centri proiectionis MH, & ſectio plani ſtereographi ſit FG; & diſtantia à perpendiculari MH, quæ ſit GH, & L ſit punctum H proiectum, id eſt in quod ab H demiſſa perpendicularis caderet. A ſingulis punctis in peripheria ſignatis C, A, B, E, D perpendiculares ducantur, ad EA ab iiſque rectæ in centrum H conueniant, rurſuſque à punctis C, A, B, E, D, rectæ in L conſpirent, deinde ducta ſeorſim PQ in G, à puncto P ſingula interualla ex linea FG deſumpta transferantur, vt IO tranſlatum eſt in PQ, & OG in QG, perque ſingula puncta perpendiculares ad PG, ducantur, vt QS, & VY; quarum longitudines è C ſumantur in vtramque partem ex FF ſectione, quę ſcilicet correſpondent in iiſdem punctis V. g. CF applicabitur QS, quia à puncto D, tum DL, tum OK tandem deriuant, & poſtremò per extrema puncta CVS P, & cęt. ducemus ſinuem, & erit Ellipſis, vel rectas, & erit figura rectilinea proiecta in Ellipſi inſcripta.



Ratio

* Ratio huius operationis eſt, quia PO eſt diameter, at VY, & SQ ſunt applicatæ. Ergo per extrema earum puncta tranſibit Ellipſis. Quod vt capias inſpice fig. hic appoſitam, in quâ circulus baſis coni ſtereographi KTR. eſt KZTV, trianguli autem per axem KRT ducatur planum normale ſtereographum MILT: item triangulo per axem KRT ducatur planum normale ZVR, itaque TK erit diameter circuli, ſicut TM erit Ellipſis; quia cùm plana MZTV, & ZRV ſint normalia triangulo per axem ART; etiā cōmunes illorū ſectiones AV, & OI ad rectos angulos erunt ex prop.16. tract.22. & ideo ex def.2. tr.22. ſectionibus TK, & MT; vnde iſtæ ſectiones diametri erunt, & OI, AV applicatæ, hæc quidem applicata primigenia, & OI applicata proiecta & punctum O erit illud, cui applicatio facienda eſt. Itaque ſectio AR plani ZVR, & trianguli per axem

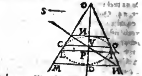


KRT erit illa, quæ decernet altitudinem TO, ideſt in præc. fig. OI. Hoc itaque triangulum AVR proiciatur orthographicè, planumque VRQ normale plano KTV imprimet ſectionē VQ diſcedentē ab V puncto, & terminantē in punctum Q. quod imprimit RQ ſectio planorū plano KTV normaliū proiectoris VRQ, & triāguli per axem KTR producti in Q. Quare ſi IO applicata proiciatur quoq; ipſa proicietur in ſibi parallelam LT. Siquidem ſuperficies proiectrix eadem ex prop.8. h.p.1. ac ſuperficies MILT, quod ſit normalis plano KVLQ recipiens proiectionem, faciet ſectionem TL ex 16. Tract.22. plano KTR normalem, vtpote à planis normalibus effectā AVQ, & MILT plano RKQ. Vnde ex 7. tr.22. parallelæ erunt, & ideo ex pr.8. h. par.1. æquales. Itaque cum in triangulo per axem KTR in ſectione TM obtineamus punctum O applicationum ad axem TM, vt in orthographia AVQ longitudines applicatarum, nempe TL, vel in præc. fig. IO, & ex poterimus Ellipſim proiectam delineare.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Dato diametro Ellipſis proiectæ, & diametro proiecto circuli, vel Ellipſis primigeniæ, reperire diametrum alterum coniungatum.

SIt ductus diameter Ellipſis proiectæ ND, & diameter proiectus QC, & oporteat reperire diametrū ellipſis alterū cōiugatū IL. Rectangulo NVD fiat æquale quadratum S ex 14. lib.2. Deinde fiat, vt latus quadrati S ad latus PN dimidij diametri; ita applicata VC ad aliud, & prodibit PL ex propoſ.15 lib.6. & dico IPL duplam LP alteram eſſe diametrum ellipſis coniugatam.



Probatur. Illa eſt diameter coniugata, quæ cum poſſit deſeruire pro applicata per centrū quoque tranſit, vt colligitur ex propoſ.32. tract.24. Sed PL talis conditionis eſt. Ergo erit diameter coniugata.

Probatur. Nam vt latus quadrati S ad latus quadrati NP ſemidiametri, ita fecimus VC ad PL, & ideo ex 26. lib.6. vt quadratū S, ideſt rectangulum æquale NV, & VD ad quadratum, ſeu rectangulum NP, & PD, ita quadratum VC ad quadratum PL. Ergo PL erit applicata, ſicut PI æqualis. Sed etiam tranſit per centrum P, cum ſit ND datus diameter diuiſus bifariam. Ergo erit diameter Ellipſis, quo habito poterimus duobus diametris datis omnibus modis tract.24. aſſignatis Ellipſes proiectas deſcribere: Vnde ſi habeas tantùm vnicum diametrum ellipſis proiectæ, ſeu parallelum, vt hic plano ſtereographo, ſeu obliquum, quæ ex dictis prop.17. huius venari poteris ellipſim proiectam circuli expreſſiuam delineabis faciliter reliquis datis.

TRAC-

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRIÆ PARS PRIMA.

De Trianguli plani cruribus dimetiendis.

TRigonometria pars eſt Mathematicæ adeo neceſſaria, vt ſine illa vix alterum pedem in huius ſcientiæ progreſſu mouere quis poſſit. Duplex eſt autem; altera, quæ in menſuratione triangulorum planorum rectilineorum occupatur: altera, quæ ſphærica triangula etiam menſuris ſubigere conatur: in hac 1. parte de triangulis rectilineis agemus.

EXPENSIO I.

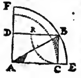
De triangulorum rectorum menſuratione per ſinus, vel tangentes.

IN eo conſiſtit trigonometria, vt exibitis duobus angulis, vel lateribus, vel angulo, & latere, ceterorum, tum angulorum, tum laterum cognoſcamus menſuras; & quidem ſi agitur de lateribus tantùm, id independenter à Tabulis poteſt operi demandari ex ijs, quæ ſecundo libr. Elem. dicta ſunt prop. 11. at cum latus datur, & angulus ex quibus, vel angulus, vel latus aliquod perquiritur; vſus tabularum eſt neceſſarius. Hic autem omnimodam ſolutionem triangulorum docere animus fert, illā verò, quę ſolummodò laterum eſt, planimetriæ reſeruabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

In omni triangulo rectangulo, ſi baſis eſt radius; etiam duo crura ſunt ſinus arcus, & ſinus complementi illius arcus.

SIt triangulum rectangulum ABC. Statuamuſque baſim AB eſſe radium alicuius circuli. Dico, quòd duo crura AC, & CB ſint, vel ſinus CB, vel complementum DB.



Probatur. Quoniam baſis AB ponitur radius alicuius circuli, ille circulus, vt FBE circumſcribatur cētro A, & ab A parallela AF ducatur cruri CB. Etenim quia CB eſt parallela radio AF, ſinus erit: Quapropter DB erit ſinus complementi: Sed AC, vtpote, quòd ſit inter parallelas eſt ei æqualis; Ergo AC crus eſt quoque complementum. Quòd autem FBE arcus ſit quadrans patet; quia angulus ACB ponitur rectus: Ergo & angulus CAD rectus erit ob parallelismum linearum CB, & AD ex propoſ. 30. lib. 1. Elem.

Poteſt etiā oſtendi pr. 17 l. 1. Cor. ex eo, quod in rectāgulo triangulo anguli reliqui nigri ſint ęquales vni recto, vnde alter alterius complementum erit, & ideo crura ſubtendentia ſinus arcuum inuicem erunt arcus, & complementum.

THEOR. II. PROPOS. II.

In omni triangulo, rectangulo ſi crus quodcumque, vt radius ſumatur; crus quidem alterum erit tangens; baſis verò ſecans.

PRobatur. Nam ducto arcu punctato altero crurum pro radio deſeruiente V. g. AC, crus CB tangens erit circuli punctati, & AB ſecans ex prop. 20. lib. 3. Sic ſumpto arcu CB pro radio ducto quadrante punctato CR, crus AC tangens erit, & AB ſecans. Ergo ſi crus pro radio aſſumatur alterum crurum vices tangentis obit, & baſis pro ſecante deſeruiet.

COROLLARIVM.

HInc colligas, quod vt radius diuiſus in 10000000. eſt ad ſinum in partes æquales illic diuiſum in tabulis repertū in proportione, ſic baſis in qualibet alias partes diuiſa erit ad crus in eaſdem partes diſtributum, quis partes ſinuum explicant proportionem ſinus totius ad quemlibet ſinum: Quare poſſumus datis duobus tabularum numeris, & altero numero, cui quæratur

eiuſdem

eiuſdem rationis quartus, id per regulam proportionum exeerpere, & ſic dicas de tangentibus reſpectu ſinus totius. Vnde ſequentia problemata prodeunt ad ſolutionem rectangulorum deſeruientia.

PROBL. I. PROPOS. III.

Data baſi, & angulo adiacente, latus oppoſitum angulo dato reperire.

SIt data baſis AB 30. pedum, angulus verò adiacens niger A ſit notus Gr. 15. & eius ſinus primis tantùm notis ad ſiniſtram expreſſus (id enim in iſtis ſufficit) ſit 258. & ſinus totus 1000. Quia ergo habemus proportionẽ expreſſã baſis ad ſinum CB anguli; ideo dices ſi 1000. baſis partes dant 30. partes in ipſa, quid 258. partes cruris dabunt ex ijs 30. baſis. Multiplicatus itaque vltimus cum medio, & genitus per primum diuiſus exhibebit pedes 7. $\frac{7}{1}$ $\frac{4}{0}$ $\frac{4}{0}$ $\frac{0}{0}$ pro latere quæſito BC. Et aduerte, quòd non aſſumimus totum ſinum, tùm quia in Trigonometria practica id non eſt neceſſarium, tum ob maiorem perſpicuitatem exempli, cum minor numerus à Tyronibus faciliùs capi poſſit. Relinqui autem ſemper poſſunt quatuor figuræ ad dextram.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Data baſi, & angulo adiacente quærere latus adiacens angulo dato.

SIt data baſis AB 30. pedum, & angulus A G.15. niger, & quæratur latus adiacens AC. Accipiatur eius complementum Arcus G.75. cuius ſinus 965. Poſtea veteris regula dicendo. Si 1000. baſis partes dant 30. quid 965? & exhibebunt pedes 28 $\frac{9}{1}$ $\frac{5}{0}$ $\frac{0}{0}$, id eſt $\frac{19}{20}$.

PROBL. III. PROPOS. V.

Dato angulo adiacente baſi, vel oppoſito cruri alicui reperire angulum dato oppoſitum.

OFferatur angulus A 25. Grad. Quia duo anguli in rectangulo æquiualent vni recto ex Coroll 9. prop.17. lib.1. ſi ſubducatur angulus A ab angulo recto baſi oppoſito 90. G. remanet angulus B niger 65. G.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Data baſi, & crure: quærere angulum, cui crus opponitur.

SIt data baſis pedum 30. AB, & latus alterum BC pedum 25. volo agnoſcere angulum A. Dices itaque.

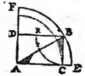
Si 30. dant 10000000. vtendo toto ſinu ſi placet, quid 25?

Dabuntque partes 8333333. Quære itaque in tabulis ſinum hunc, quem non inuenies quidem. Sed proximè minorem 8332431. Gr.56. m. 26. qui aſſumetur pro angulo quæſito, in menſuris rerum materialium tractandis.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Data baſi, ac crure inuenire angulum, cui illud crus adhæret.

SIt data baſis AB 42. pedum, & crus adiacens AC 39. & volo agnoſcere angulum adiacentem nigrum A. Hoc itaque efficiam, quærendo priùs ſinum anguli B, vt in præced. dicendo.



Si 42. dant 10000000. quid 39? Et dabit ſinum 9285714. quem requires in tabulis, & proximè minorem ſinum conſequeris 9284859. qui eſt ſinus Gr.68. m.12. Cum ergo angulus B ſit G.68. m.12. ex probl.5. inuenies alterum adiacentem expetitum ſubtrahendo Gr.68. m.12. à Gr.90. vt efficiatur angulus adiacens requiſitus A Gr.21. m. 48.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Data baſi, & crure reperire crus alterum.

SIt data baſis AB 53. pedum, crus CB 43. & reſpondeat quis erus AC.

Primo inueſtigabis ſinum anguli A cruri dato oppoſiti ex prop.3. h. dicendo.

Si baſis 53. dat ſinum totum 10000000. quid crus pedum 43. & reperies proximum ſinum 8113207. nempe Gr.54. m.13. & ſinus eius complementi Gr.36. m.47. erit 5987907.

Dices itaque rurſus ſi 8113207. ſinus dat pedes 43. quid ſinus complementi 5987907? Et regula proportionum offert pedes 31. & $\frac{7}{8}$ ferè pro crure quæſito.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Dato crure, & angulo adiacente, quærere baſim.

SIt datum crus 59. AC, & angulus ei adiacens A niger 27. Gr. exquiraturque baſis AB.

Primo inueniendus eſt angulus oppoſitus B ex 6. prop. huius, qui eſt 63. Gr. & eius complementum; aſſumendusque eſt ſinus ipſius p.8910065.

Itaque regula proportionis exquires; ſi 8910065. dant pedes 59; quid 10000000. ſinus totus? & exhibebit pedes 66 $\frac{1}{5}$ ferè, quę erit baſis.

PROBL.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Dato crure, & angulo cruri oppoſito reperire baſim.

SIt angulus datus A Gr.30. & crus oppoſitum BC pedum 15. & ſit inuenienda baſis AB.

Sinus Gr.30. eſt 5000000. Dices itaque adhibendo proportionis regulam. Si 5000000. dant pedes 15. quid ſinus totus 10000000? & prouenient pedes 30. pro baſi.

PROBL. IX. PROPOS. XI.

Dato crure, & angulo cruri oppoſito quærere latus alterum.

SIt datus angulus A G.32. cuius ſinus 5299142. & euius complementum eſt 2058. & ſinus 8480481. Crus verò oppoſitum angulo dato ſit pedum 20. Dices itaque adhibendo regulam auream. Si ſinus 5299142. dat pedes 20. quid 8480481? exhibebitque operatio pedes 32. & aliquid ampliùs pro crure altero.

At per tangentes id efficies faciliùs ob ſinum totum, qui primo loco venit, & ita erit regula proportionum ordinanda, ſi ſinus totus 10000000. dat pedes 20. quid tangens complementi Gr.58. dati, quæ eſt 16003347? & exerent pedes 32. & [illegible]. Quòd ſi detur angulus adiacens, potes tamen accipere angulum oppoſitum. cum alter alterius ſit complementum ex Cor.9. propoſ.28. lib.2.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Datis cruribus duobus angulos reperire oppoſitos.

SIt datum crus AC 32. pedum, quod ſtatues loco ſinus totius, & aliud CB erit tangens oppoſiti anguli A, quod ſit pedum 25. Dices ergo regula aurea, ſi crus pedum 32. dat 10000000. quid 25? & dabit tangentem 7812500. quæ proximè eſt tangens Gr.38. Subduces itaque hunc angulum inuentum à Gr.90. & reſiduum erit alter angulus B Gr.52. oppoſitus cruri AC, nam ex Coroll.9. propoſ.17. lib.1. Elem. alter angulus eſt complementum alterius.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Datis duobus cruribus quærere baſim.

HÆc propoſitio executioni demandatur dependenter ab antecedenti, nam datis cruribus priùs inueniemus angulum ex quo iuxta prop.9. & 10. reperiemus baſim dato crure, & angulo acquiſito, vel oppoſito cruri, vel adiacente.

Hæc autem omnia problemata à duobus propoſitionibus primis euidentiam deſumunt. Omne enim crus in triangulo rectangulo poteſt eſſe, aut tangens, ſinus, aut ſecans, hinc eſt quod poſſit diuidi, aut cogitari, vt diuiſum in eas partes, in quas quilibet ſinus diuiſus eſt, ſeu tangens, ſeu ſecans, quæ ſunt æquales illis, in quas ſinus totus diuiſus animaduertitur. Quare ſi habeam diuiſum crus aliquod in alias partes V. g. in pedes poſſum deuenire in cognitionem alterius cruris, in pedes diuiſi.

Cum enim partes ſinus AB ſint æquales partibus ſinus BC, & pedes item cruris AB ſint æquales pedibus cruris BC; ſit, vt partes ſinus AB ad partes ſinus BD ſint in eadē ꝓportione, ac partes cruris eiuſdē AB ad partes cruris BC. Quapropter permutando ita erunt partes ſinus AB ad pedes cruris eiuſdem AB, vt partes ſinus BC ad pedes eiuſdem cruris BC, vnde datis tribus partibus AB, & eiuſdem pedibus, & partibus BC deueniemus in cognitionem pedum BC eiuſdem.

PROBL. XII. PROPOS. XIV.

Sinus in tabulis non repertos emendare.

QVoniam aliquando, imo ferè ſemper ſinus, qui ex calculo exeunt, non ſunt ijdem præcisè, qui in tabulis reperiuntur; hinc oportet regulam aſſignare, ob quam, quis in cognitionem proximioris ſinus, quàm fieri poſſit, deueniat.

Sit datus ſinus 8333333. qui non reperitur in tabulis; ſed proximè minor 8332431. Gr.56. m.26. & maior proximè 8334039 Gr.56. m 27. Subducatur minor à dato 8333333. & reſiduum erit 902. Item idem minor ſubducatur à maiori reperto 8334039. reſiduum erit 1608. Dices itaque regula proportionum, ſi 1608. dant 60. quot ſecunda dabunt partes 902? & exeret numerus ſecundorum 33. Itaque ſinus ille datus 8333333. erit Gr.56. m.26. ſec. 33.

Ratio petitur ex Cor.1. pr.15 et. 20. de ſin. Vbi ſinum vnius Grad. vix à linea recta differre oſtendimus, & tantò minùs arcus vnius minuti: vnde aſſumimus vnicum minutum, vt lineam rectam, & ideo datum arcum, vt lineā rectam vnius ſecundi, nempe pro ipſa portione ſinus ſubtenſa vſurpamus, tanquam notam in partibus arcuum. & in partibus ſinus totius ea ratione propoſ. 13. huius & minorem ſubtēſam perquirimus, vt innoteſcat in partibus arcus, à quo ſenſibiliter non differt.

PROBL. XIII. PROPOS. XV.

Arcuum in tabulis non repertorum ſinus cognitos proximè exhibere.

QVis ſinus in tabulis, vt plurimùm vſq; ad minuta tantū calculata ſunt, & aliquādo diligentior calculus expoſcit, vt etiam ſecundorum ſinus obtineatur. Inde eſt, quòd ex antec. prop. ratione poſſimus etiam ſinum reperire: Nam ſit datus arcus Gr.56. m.26. ſec.33; Et differentia inter ſinum Gr.56. m.27. ſit 1608. Dices itaque regula proportionū; ſi ſec.60 quibus differt arcus minor à maiore dant par. 1608. quid m.33.? & exhibebit operatio partes 884. quæ additæ ſinui minori 8332431. facient ſinum 8333315. parùm differentem à ſuperiori.

EXPENSIO II.

De triangulorum rectangulorum menſuratione adhibitis logarithmis.

OPortet priùs noſcere, quomodo ipſi logarithmi cuiuſlibet dati numeri ex tabulis logarithmicis eruantur, antequam ipſorum logarithmorum ſinubus annexorum calculum doceamus.

Si quis commodè vult vti logarithmis oportet numeros exibitos eſſe maiores, vel tribus ſaltem, vel quatuor notis expreſſos. Alioquin, ſi duabus tantùm notis exprimantur, ſuperfluum erit ad logarithmos recurrere, cùm facilis ſe ſe offerat calculus ſine ipſis, & minùs præciſè inoenti logarithmi, minùs quoque calculum præciſum dabunt.

Si verò numerus ſit maior 7. figuris ſc. quàm quòd ij, qui in tabulis, ſinus exarati ſunt illi per 10. aut 100. Sunt diuidendi abiectis duabus figuris ad dextram, vel tribus; vt ad eundem numerum redigantur, & tandem illo numero quærendus eſt ſinus in tabulis, vel tangens, qui illi prorſus conueniat, vel ſaltem ab eo parum differat, & illius ſinus logarithmus erit, etiam logarithmus numeri dati.

Sit datus numerus 394. augeatur quatuor zifris & ſit 3940000. & reperiemus ſimilimum ſinum 3942093. cuius logarithmus eſt 9308731. qui quæritur, Item ſit datus numerus 43976552(94. maior, quàm, qui in tabulis reperiri ſolet, abijciātur duæ figuræ extremæ 94. & quæratur reliquo 439-7652 ſinus ſimilimus 4395780, cuius logarithmus eſt, qui quæritur 8217124.

Regulæ quidem traduntur à Nepero, & alijs, quibus logarithmi non præciſi ad præciſos redigantur: ſed iſtæ, iam ob additiones plures laborioſæ eſſe incipiunt; Vnde iam logarithmi inſtituti ad leuamen laboris, effecti grauioris operis, vſu ſuo non minuere laborem, ſed augere videntur, & propterea à nobis prætermittuntur, maximè quia ad Geodeſias ordinarias præciſio adeo exquiſita, ſcrupuloſaque ſuperflua ſit.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

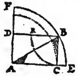
In rectangulo logarithmus cruris æquatur logarithmo anguli oppoſiti, & logarithmo Hypotenuſæ.

PRobatur. Nam baſis AB rectanguli ABC deſeruit pro radio, & crus BC pro ſinu anguli oppoſiti, ex prop. 1. huius. Vnde radius 10000000. partes ſe habebunt ad quaſcumque menſuras baſis V. g. pedes, vt BC ſinus anguli oppoſiti in iiſdem partibus ſinus totius expreſſus ad pedes BC cruris ex prop. 13. oſtenſione: Sed in quatuor proportionalibus logarithmus mediorum æquatur logarithmo extremorum. Quadere logarith. ſinus totius erit logarith. primi proportionalis, ſecundi erit logarith. ſinus totius, vt pedibus conſtantis tertij verò logarith. ſinus B anguli oppoſiti, quartus ignotus; itaque aggregatum mediorum logarithmorum ſecundi, & tertij proportionalis æquabitur logarithmo quarti, & primi ſ. ſinus totius, ſed primi logarithmus ponitur in tabulis 0. Ergo proportionalis quarti logarithmus. Cum additio zifræ illum non augeat, æquabitur logarithmorum mediorum proportionalium ſc. ſinus anguli, & pedum datorum baſis, ſeu ſinus totius, vt in pedibus cogniti: vnde ille logarith. erit logarith. cruris BC in pedibus noti.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

In rectangulo logarithmus cruris eſt æqualis aggregato ex logarithmo tangentis oppoſitæ, & logarithmo reliqui cruris.

QVoniam ſi crus BC ſtatuatur pro radio alterum crus AC eſt tangens, ideo crus, vt radius ad ſe, vt notum in alijs partibus, quæ ſine V. g. pedes eſt, vt crus velut tangens ad ſe, vt notum quoad eaſdem partes ſ. pedes ex oſtenſ. propoſ. 13.



Cumque in quatuor proportionalibus aggregatum mediorum æquetur aggregato extremorum logaritmus tangentis AC, & logarithmus pedum cruris alterius CB aggregati erunt æquales aggregato logarithmico ſinus totius CB, & pedum cruris AC. Sed logarithmus ſinus totius eſt 0 Ergo logarithmus pedum cruris AC erit aggregatum logarithmorum cruris AC, vt tangentis, & CB, vt pedibus menſorati cruris.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Hypothenuſa cruris, & angulo, quem crus ſubtendit, duobus quibuſlibet datis tertium reperire.

DEtur baſis AB pedum 30. ideſt vnciarum 360. & additis quatuor zifris 3600000. & angulus A Gr. 15. & quæratur crus. Sinus 2588190 G. 15. cuius logarithmus eſt 13516855. Sinus verò ſimillimus baſi 3600000. eſt 3602682. logarithmuſque 10209063. Vniantur ſimul iſti duo logarithmi, vt vides.

13516855
10209063
———
23725918

Quæraturque hic logarithmos 23725918. & ei ſimilliſimus 23725832 inuenietur, qui dabit ſinum 932395. aufer itaque quatuor figuras iuxta quatuor zifras, quas baſi addidiſti ab ipſo ſinu, & erunt vnciæ 93. ideſt pedes 7. & [illegible], vel $\frac{1}{4}$, vt proximè inuenimus propoſ. 3. Pro crure quæſito.

Aliod quoque exemplum erit. Si detur baſis AB vnciarum 360. Angulus verò A Gr. 15 & quæratur crus adiacens AC. Accipe ſinus complementi

mentaliogarithmum, nempe Gr.75. cuius logarithmus eſt 301544. Addeque logarithmo ſinus baſis quatuor ſifris adauctæ ſupra inuentæ 10209063. & fiet logarithmus 10510607. qui quæſitus in tabulis non inuenitur quidem; ſed ei ſimillimus 10519669, qui dat ſinum 3493899. abiectis itaque quatuor figuris, quia quatuor zifras addidimus baſis ſinui, prodibunt 34.& 9. vnciæ, ideſt 89. pedes —, vt proximè inuenimus propoſ.4.pro crure.

Tertio pro caſu, quo ſinus totus venit tertio loco. Sit data baſis 360 vnciarum, cruſq; 300. vnciarum ſc. 25.pedum. Auge vtrumque 4.ſifris, vt ſint baſis quidem 3600000. at cruris 3000000. & deinde reperi ei ſimillimos ſinus baſis quidem, vt ſupra, cuius logarithmus eſt 10209063. at verò cruris ſinus 3001510. cuius logarit. eſt 12034696. Auferatur itaque ab hoc logarithmo logarithmus baſis, & remanebit 1825633, qui quæſitus in tabulis inuenietur ei ſimillimus 1824299 qui eſt Gr. 56. m. 26. vt reperimus pr.6.pro angulo quæſito.

Patet autem ex prob. præced. Nam ſinus totus, crus ſinus anguli oppoſiti, & baſis ſunt quatuor proportionalis, quorum quodlibet 4. loco poteſt venire; ſed de ſinu toto numquam quæritur, tria ergo reliqua duo dantur, & tertium ſemper quæritur: Si ergo ſinus totus veniat primo loco tunc aggregandi logarithmi ſunt, vt fiat logarit. exoptatus, vt primo, & ſecundo exemplo; ſi verò ſecundo loco veniat; tunc logarithmus minor ſubducendus eſt à maiore, & reſiduum eſt logarithmus, qui deſiderabatur, vt tertio exemplo. Quoniam tunc cùm alter mediorum proportionalium ſit logarith. o. nempe ſinus totus, alter erit æqualis ſe ſolum extremorum logarithmo, quare ſi ab eo auferatur logarithmus primus relinquetur logarithmus quartus quæſiti proportionalis.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis crure quocumque, & angulo alteri eorum oppoſito duobus quibuſcumque tertium reperire.

DEtur crus BC pedum 25. ideſt vnciarum 300. & crus aliud AC pedum 32. ideſt vnciarum 384. & quæratur angulus A oppoſitus primo crufi BC. Itaque ſinui 3000000. quatuor zifris aucto, reperiatur ſinus propinquiſſimus in tabulis 3001510 & aſſumatur eius logarithmus 1203 696. deinde ſinus aucti quatuor ſifris 3840000. ſinus propinquiſſimus inuentus ſit 3840267. cuius logarithmus 9570427. & quia in regula proportionum ſinus totus caderet ſecundo loco, ſubducatur minor à maiore, & reſiduabitur logarithmus 2464269 tangentis. Quære ergo in tabulis hunc tangentis logorithmum, & inuenies 2468434. tangentis Gr 38. eſſe ei ſimillimum. Quare arcum Gr.38. aſſumes pro menſura anguli quæſiti, vt prop.12.

Alterum exemplum erit. Detur crus BC oppoſitum pedum 20.& angulus A ei oppoſitus A G.32. & quæratur crus adiacens, cuius complementum eſt Gr.58. Reijcies itaque 20. pedes in vncias 240. & additis quatuor zifris, vt fit 2400000. inuenies ſinum ei ſimillimum 2402280. cuius logarithmus eſt 14261662. Deinde inuenies tangentis differentialem anguli 58.deffectiuam 4708126. eo quod ſit complementi ex Cor.prop.26.Tract.21 quā ſubduces à ſinus illius logarithmo 14261662. & reſiduum erit logarithmus 9559536. cui logarithmus ſimillimus quæſitus in tabulis eſt 9556451. cuius ſinus eſt 3845638. abiectis itaque quatuor figuris iuxta 4. zifris adiectas erit crus alterum vnciarum 384. nimirum pedum 32. vt ſupra propoſ. 11. Vbi debes notare, quod tangentis logorithmus licet iuxta regulam eſſet addendus iuxta tam Coroll. prop. 26. Tract. 21. ſubducendus eſt, eò quòd conſideratus, vt complementi maioris, quam Gr. 45. ſit defectiuus.

At ſi quæratur crus oppoſitum, & detur AC pedum 32. ideſt vnciarum 384. & B angulus Gr.58. oppoſitus, cuius complementum eſt angulus 32. cuius ſinus 2599192 differentialiſque 4702126; at verò cruris AC vnciarum cum addiris zifris 3840000. eſt ſimillimus ſinus 3840267. cuius logarithmus 9570427. Addantur itaque ſimul hic logarithmus, & differentialis ex Coroll. prop. 26. tract. 21. de logarith. eritque ſumma 14272553. qui quæſitus in tabulis non inuenietur: ſed ei omninò ſimilis 14261662. qui dat ſinum 2402280. cruris quæſiti, ideſt vncias 240 reiectis quatuor figuris ob quatuor ziſras additas; quæ ſunt pedes 20. vt propoſ. 18. h.

EXPENSIO III.

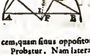
De triangulorum obliquangulorum reſolutione.

OBliquangulorum reſolutio, & mēſuratio paruum difficilior; Vocamus autem crura duo latera angulum maiorem ſtipantia, & illum angulum verticalem, ſicut latus, quod ei opponitur à nobis dicitur baſis.

THEOR. I. PROPOS. XX.

In omni triangulo crura inter ſe eam rationem poſſident, quam ſinus oppoſitorum angulorum.

SIt triangulum quodcumque, ſed vt nobis videtur obliquangulum ACB, circùm quod ex doc. prop. 5 lib. 4. Elem. circumſcribatur circulus ACGB: Ducanturque rectæ à centro F ad medietates crurum I, E, D, & Dico, quod crura eam proportionem poſſident ad inuicem, quam ſinus oppoſitorum angulorum.



Probatur. Nam latera, vt vides ſunt Chordæ, quarum medietates ſinus ſunt; ſed vt totum ſe habet ad totum ita medietas ad medietatem ex prop. 18. lib. 5. Ergo ſi crus eſt, reſpectu alterius vt chorda AC ad chordam CB, erit etiam, vt ſinus CD ad ſinum CE.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

In omni triangulo ſicut medietas ſummæ ſinuum duorum laterum ad differentiæ eorum medietatem; ſic & tangens medietatis ſummæ angulorum oppoſitorum ad medietatis eorum differentiæ tangentem.

SIt triangulum ACB, cuius duo anguli A, & B ſcilicet arcus eos menſurantes ſuper arcum PNM in altera figura menſurentur, ita quod arcus OP ſit menſura anguli A, & arcus OM ſit menſura anguli B, & arcus O Z ſit ſemidifferentia eorum, cuius tangens eſt ON, ſicut medietatis ſummæ tangens eſt QO.

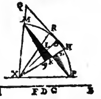
Rurſus latera AC, & AB in vnã ſummã redigantur menſurando ea ſuper rectam AB, cuius medietas AD maiuſque crus ſit AC, & minus CB ſemidifferentiaq; inter ea ſit DC cum tota ſit FC. Dico



itaque, quòd ſicut eſt dimidia ſumma AD crurum ad dimidiam differentiam eorum DC, vel FD; Sic eſt tangens OQ dimidiatæ ſummæ angulorum ad dimidiatę eorum differentię tangentem ON.

Primò itaque ſciendum ducta ad baſim in quocumque triangulo perpendiculari ſegmenta eſſe tangentes ex prop 20. lib.3. Elem. vt patet in triangulo XQN, in quo centrum X diameter XO; cuius Z O, & O M arcus N tangentes ſunt, vtpote eis orthogonales ON, & OQ.

Secundò ex anteced. latera triangulorum eſſe, vt ſinus ad ſinum, & ideo AC crus in linea AB eſſe ad crus CB, vt ſinus MK anguli MXK, cui ex hypotheſi opponitur crus AC ad ſinum P Z anguli PXK, cui opponitur crus CB ducta itaque MP.



Probatur propoſ. Triangula nigra ſunt ęquiangula ex prop.17. lib.1. Coroll. cum anguli apud Y, & apud Z. ex def. ſinus ſint recti, & anguli apud K ad verticem æquales: Vnde MX eſt ad KP baſes, vt crura YM ad Z P, & ideo ex dictis, vt AC ad CB; Ergo *componendo* MK cum KP erit ad KP, vt AC cum CB ad CB, & ex prop.18. lib.5. Elem. medietas ML priorũ erit ad KP, vt medietas AD poſteriorem ad CB: Quare *diuidendo* ML erit ad reſiduum LK ex KP, vt AD ad reſiduum DF, vel DC ex CB. Quamobrem medietas AD erit ad ſemidifferentiam DC, ſeu DF, vt LM ad XL; ſed ML ad XL eſt vt QO ad ON, ob paralleliſmum linearum QN, & MK in triangulo QXN. Ergo, vt AD ſemiaggregatum crurum ad eorum ſemidifferentiam FD, Sic tangens OQ ſemiaggregati angulorum ad tangentem ON ſemidifferentiæ eorum.

COROLLARIVM.

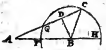
HInc eſt, quod etiam vt totum aggregatum ad totam differentiam crurum, ſic ex prop.18. tangens ſemiaggregati crurum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

In omnibus triangulis inæqualium laterum; ſi facto centro in angulo verticali ducatur circulus ad interuallum minimi cruris. Segmentum cruris ad ſegmentum baſis extra circulum remanentis eſt, vt baſis ipſa ad aggregatum crurum.

SIt triangulum ſcalenum ACB, cuius baſis AC anguluſque verticalis B, & in B fiat centrum, interualloque BC minimo crure circulus deſcribatur FCH. Dico, quod AF ſegmentum cruris erit ad AG ſegmentum baſis; vt AC ad aggregatum AB, & & BC, ſcilicet AH.

Probatur. Nam prop 36. lib.3 Elem. rectangula, quę fiunt ex ſegmentis extra circulum remanentibus, & totis ſecantibus ab vno puncto demiſſis omnia ſunt æqualia, & ideo AC, & AG rectangulum æquabitur rectangulo AF, & AH. At ex propoſ. 10. lib.6. rectangula æqualia habent latera reciprocè proportionalia. Ergo ita erit latus AF rectanguli ex AF, & AH ad latus AG rectanguli ex AG, & AC, vt latus AC ipſius rectanguli ad latus AH rectãguli prioris, quod eſt aggregatum cruris AB, & BC, cum BH, vtpote radius ſit ei BC ęqualis.



PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Datis angulis, & crure inuenire aliud, aut baſim.

IStud prob. fundatur in 20. propoſ. Quoniam enim ſunt latera inuicem, vt ſinus oppoſitorum angulorum, ſi primo loco ponatur ſinus anguli oppoſiti, ſecundo crus cognitum, tertio ſinus anguli oppoſiti lateri quæſito, inueniemus crus, vel baſim quæſitam.

Pro exemplo detur angulus A in fig. p. 20. cognitus 25. G. cuius ſinus eſt 4226183. & crus oppoſitũ CB 35. pedũ, angulus quoq; alter acutus B cognitus ſit 20. Gr. cuius ſinus eſt 3420201. Dices itaq; ſi ſinus CB anguli A 4226183. dat pedes 35. quid dabit 3420201. ſinus DC anguli B, & adhibita regula proportionum exhibebit 28. & $\frac{1}{3}$ ferè.

Quod ſi velis reperire baſim, idem prorſus efficies, ſed ſi ſit angulus obtuſus, cùm ſit maior quadrante habebis pro arcu arcum ipſum reliquorum angulorum ſimul aggregatorum ſc. arcuum ACB, & eorum ſinus AL, vel LB pro ſinu cruris ſumendus eſt.

PROBL.

PRORL. II. PROPOS. XXIV.

Duobus lateribus, & angulo datis uni eorum oppoſito inuenire angulum cruri cognito oppoſitum, & etiam angulum reliquum.

HÆc propoſitio ab eadem propoſ.20 naſcitur, vnde exemplo ſolo patebit. In fig. prop. 20. Sint data duo latera BC 40. pedum, & AC 25. & angulus huic oppoſitus a Gr.18. Sicut itaque crus 25. pedum ſe habet ad ſinum DC anguli B, pae. 3090170. ita pedes 40. ad ſinum CB anguli A & dabit 4944272. quam non reperies, ſed propinquiſſimum 4944476. Gr 29. m.22. quem vel pro vero recipies angulo A, vel rectificabis ex dictis prop. 24. huius.

PROB. III. PROPOS. XXV.

Duobus lateribus, & angulo verticali contento datis angulos alios reperire.

ISta propoſ. fundatur in prop.21. Detur itaque angulus Gr.27. eiuſque 40. AB, & aliud 34. pedum, quæ illum claudant, quorum ſumma eſt 74. medietas 37. differentia verò 6. Cumque habeamus angulum Gr.27. & omnes cuiuſcumque trianguli anguli duobus rectis ſint æquales ex Coroll. prop.17. lib.1. nempe Gr.180. hinc ablatis Gr.27. à 180 habebimus aggregatum cæterorum Gr.153. quæritur itaque differentia.

Medietas ſummæ angulorum eſt Gr 75. m 30. cuius tangens eſt par. 4165 2974 medietas laterum 37. medietas differentiæ eorum eſt 3. Dices itaque regula proportionali ſi 37. pedes medietas crurum exhibet ſemidifferentiam eorum 3. quid medietatis angulorum tangens 4165 2974? & offeret tangentem 3377268. reperieſque tangentem proximam 3378331. Gr.18. m.40. qui arcus deducendus eſt à ſemiſumma angulorum Gr.76. m.30. & habebimus angulum minorem Gr.57. m.50. Addendusque iterum, & obtinebimus angulum maiorem Gr.95 m.10.

Poteris etiam accipere differentiam totam laterum, & totā ſummā ipſorū ex Cor. pr.21. quia ita eſt totum ad totum, vt dimidium ad dimidium.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Triangulum ſcalenum ad duo triangula rectangula reducere datis cruribus, & baſi.

SIt reducendum triangulum ACB ad duos rectos ADB, & DCB datis cruribus, hoc fit ope prop. 22. huius adhibita eius prop. fig.

Primo reperienda eſt portio CG per regulam auream, quæ diuiſa bifariam, vtpote chorda dabit ſinum CD, cui incidit perpendiculariter DA ex def. ſin. & ex prop. 13. lib.3. Elem. ſic autem fit, detur baſis AC 9. Aggregatur priùs BC 4. & AB 7. & erit 11. pedum linea AH. Auferatur, deinde 4. à 7. nempe BC, vel AF ab AB, & erit reſiduum AF pedum 3. Dices itaque ſi 9. dant 11. quid 3? & enaſcetur ſegmentum baſis AG pedum 3 $\frac{6}{9}$, id eſt 3. & $\frac{2}{3}$. Quare reliquū erit GC 5 $\frac{2}{9}$, cuius medietas DG, vel DC erit 2 $\frac{5}{9}$, & addito DG ipſi AG prodibit crus AD 6 $\frac{2}{9}$, eruntque duo triangula rectangula in cruribus duobus nota ABD, & DBC.

PROBL. V. PROP. XXVII.

Trianguli ſcaleni datis cruribus angulos reperire.

QVoniam iam nouimus ex antec. in duo triangula rectangula ſcalenum commutare, de quibus cognoſcemus crus AD & 6 $\frac{2}{9}$, & DC pedum 2 $\frac{5}{9}$, ſicut baſim BA 7. pedum, & BC 4. & agentes de rectangulis diximus, ita eſſe baſim ad crus, vt ſinus totus ad ſinum anguli oppoſiti.
Si fiat per auream regulam, vt 7 ad 6 $\frac{2}{9}$, vel vt 21 ad 19. ita radius 10000000. ad aliud? dabit 9042857. ſinum, cui proximus eſt ſinus 9042048. Gr.64. & m.43. proximè anguli ABD, quem ſubtrahes à 90. & habebis angulum DAB Gr.25. m.17. Ita ages in triangulo DBC, conſequeris enim baſim BC pedum 3. & DC pedum 2 $\frac{5}{9}$, id eſt obtines proportionem, quæ eſt 18. ad 16. Dices itaque ſi 18. dant 16. quid 10000000? & ab operatione reſultabit 8888880. cui reperies proximū ſinum 8888829. Gr.62. m.44 anguli DBC, quem ſubduces à 90 & reſiduus angulus erit DCB Gr. 64. m.43. ſi verò vnias angulos ad B repertos Gr. 64 m.42. & 52. m.44. obtinebis angulum totum Gr.127. m.27.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Data baſi, & crure in iſoſcelibus triangulis angulos reperire.

QVoniam ex propoſ.19. lib.1. Elem perpendicularis CF in triangulo iſoſcele DFE facit angulos ad C rectos, & æquales, & totum triangulum album toti nigro æquatur, ſi detur crus, & dimidiata baſis, poterimus ex præcedenti quærere angulum oppoſitum nigrum F, & ideo lucrabimur



quoque angulum E nigrum, qui æquantur angulis albo F, & albo D. Quare, ſi coniungantur anguli albus, & niger ad F habebimus totum angulum ſeminigrum F. Vnde omnes anguli trianguli æquicruris in palàm prodentur.

EXPENSIO IV.

De obliquangulorum dimenſione per logarithmos.

NOn minus euadit facilis logarithmica operatio in obliquangulis triangulis, quàm in rectangulis, innititurque tota in præcedentibus tribus obliquangulorum Theorematibus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo aggregatum ex logarithmis anguli cuiuſuis, & cruris eum ambientis æquatur aggregato crurum, & angulorum eis oppoſitorum.

QVoniam ex 20. propoſ. omnium crurum ad ſinus oppoſitorum angulorum eadem eſt ratio, & hinc genitus ex crure oppoſito, & ſinu ambiente æquatur producto per multiplicationem alterius ſinus oppoſiti, & cruris ambientis, & ideo productum diuiſum per ſinum alterum, vel per crus dat alterum crus, ſeu angulum ignotum; ita etiam ex pr. 5. tract. 21. aggregatum logarithmorũ cruris, & ſinus aggregato alterius ſinus, & cruris logarithmico æquatur. Vnde ſubducto alterum ab altero, logarithmus eius, quod quæritur prodire neceſſe eſt; ſic in triãgulo ACBD fig. p. 80 logarit. AC cruris oppoſiti, & logarithmus CB ſinus ambientis æquatur logarithmico aggregato ſinus DC, & cruris CB. Vnde ſi ab aggregato logarithmico AC, & CB auferatur logarithmus, vel DC ſinus prodibit crus CB logarithmicum, vel CB cruris logarithmus, & proferetur logarithmus ſinus DC.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

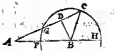
In obliquangulis logarithmus aggregati crurum ſubductus à ſumma logarithmi differentiæ crurum, & differentials ſemiaggregati ſuorum oppoſitorum angulorum relinquit differentialem ſemidifferentiæ eorumdem angulorum.

HÆc propoſ. fundatur in propoſ. 21. Coroll. Nam quia ita eſt ſumma crurum ad differentiam eorum, vt tangens ſemiaggregati angulorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum. Etiam logarithmus tangentis ſemiaggregati angulorum, & logarithmus differentiæ crurum, nempe mediorum terminorum æquabuntur logarithmo tangentis ſemidifferentiæ angulorum, & aggregato logarithmi crurum nempe terminorum extremorum iuxta propoſ. 5. Tract. 21.

THEOR. III. PROP. XXXI.

In obliquangulis ſumma logarithmorum aggregati crurum, & differentiæ eorum eſt æqualis ſummæ logarithmorum baſium veræ, & alternæ.

HÆc propoſ. Initur propoſ. 22. huius, appellamus autem baſim alternam ſegmentum baſis veræ, quod extra circulum remanet, vt AG: Quoniam verò eſt AF differentia crurum ad AG baſim alternam, vt AC baſis vera ad AH aggregatum crurum, ideo logarithmi quoque mediorum AG baſis alternæ, & AC baſis veræ æquabuntur logarithmo differentiæ AF, & aggregati AH ex 5. prop.



tract. 21. Vnde ſi ab aggregato AF, & AH logarithmico auferatur logarithmus baſis AC, eueniet logarithmus alternæ baſis AG.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Ex duobus angulis, quibuſcumque datæ ſpeciei, & ſuis cruribus, ſi tria dantur quartum quodcumque reperiemus.

DEtur angulus A Gr. 25. & logarithmus eius 8612856. & crus oppoſitum CB 35. pedum, Ideſt vnciarũ 420. additis 4. zifris erunt 4200000. cuius proximus logarithmus eſt 8667192. Angulus autem alter B Gr. 20. cuius logarithmus 10728858. Qui iunctus logarithmo cruris CB dabit aggregatum 19398044. à quo deducto logarithmus alterius anguli A Gr. 25. remanebit logarithmus 10785188. cui in tabulis valdè ſimilis eſt 10784974. cuius ſinus eſt 3401060. nempe abiectis 4. figuris dextris vnciarum 340. vel pedum 28 $\frac{4}{12}$.

Quod ſi datis duobus cruribus, & angulo velis alium angulum reperire eodem modo rem perficies.

Patet autem operatio ex prop. 28.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis cruribus, & angulo comprehenſo alios angulos patefacere.

DEtur angulus comprehenſus Gr. 27. crus AB pedum 40. ideſt vnciarum 480. & aliud pedum 34. ideſt vnciarum 408. Summa crurum erit 888. differentia 72. vnciæ, medietas verò ſummæ 153. reliquorum angulorum eſt 76. m. 30.

Aggregati crurum 888. additis quatuor zifris, vt fit ſinus 8880000. logarithmus proximus eſt 1188406. Ideſt ſinus proximi minoris 8979491. Differentiæ eorumdem 720000. quatuor item zifris auctæ, Ideſt ſinus ſimilis 720777. logarithmus proximus eſt 26300094. At differentialis, ſeu logarithmus tangentia ſemiaggregati angulorum Gr. 76. m. 30. logarithmus eſt 14267876. Deme itaque hunc logarithmum à logarithmo differentiæ crurum; quia differentialis eſt deffectiua, cùm eius arcus excedat Gr. 45. vnde vice additionis ſubductione vtendum eſt ex propoſ. 26. tract. 21. & remanebit 10843812. ideſt differentialis, & logarithmus tangentis Gr. 18. m. 40. quaſi m. 41. Itaque ſi addas Gr. 18. m. 40. ſemiaggregato crurum erit maior angulus 95. m. 10. ſi demas conſequeris angulum minorem Gr. 57. m. 50.

Patet propoſ. ex propoſ. 29. ibi enim probatur aggregatum logarithmorum differentiæ crurum,

&

& tangentis ſemiaggregati angulorum æquari ſummæ logarithmi aggregati crurum, & logarithmi tangentis ſemidifferentiæ angulorum.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIV.

Obliquangulum datorum crurum ad duo rectangula reducere.

Sit baſis 49. pedum, & latus 4. & aliud latus 7. Addatur logarithmus aggregati crurum pedum 11. vel venciarum 132. differentiæ eorumdem pedum 3 vel venciarum 36. additis quatuor ziferis vt ſit 1320000. Itaque huius num. in tabulis ſinus proximus eſt 1319681. cuius logarithmus eſt 2023-0110. & ideo ſubſtituendus pro ipſo ſummæ crurū logarith. Item differentiæ 360000. ſinus proximus eſt in tabulis 360623. & ideo eius logarith. eiuſdem differentiæ 33225056. Coniunge igitur iſtos duos logarithmos ſimul, & erunt 53455176. Poſtea baſis pedum 9. ideſt venciarum 108 quatuor ziferis, auctę, vt ſit 1080000. reperies ſinum ſimillimum in tabulis 1079994. cuius logarithmus eſt 2225-6290. Hunc itaque logarithmum à ſumma 5345-5176. ſubducito, & erit logarithmus 3118886. qui dabit ſinum 442006. à quo abiectis quatuor ziferis reſtabunt venciæ 44. ideſt pedes 3. & $\frac{8}{12}$, pro ſegmento baſis alterœ. Cętera autem exequeris, vt propoſ. 26.

Patet hæc praxis ex propoſ. 30. cùm ibi probatum ſit aggregatis crurum logarithmum, & differentiæ eorumdem in vnam ſummam redactum æquari ſummam logarithmorum baſis veræ, & alternæ. Quare ſubducto logarithmo baſis veræ remanebit logarithmus baſis alternæ.

Habitis autem duobus rectangulis, anguli eorum reperientur per logarithmos, vt Expenſ. 2. docuimus.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRICI PARS II.

De Triangulis Sphæricis ſoluendis.

Triangulorum ſphæricorum doctrina aſtronomiæ, & aſtrologiæ baſis eſt, nulluſq; ſine ipſa in illis proficere, aut aliquid ritè cognoſcere poteſt: ſed ſicut præcipuæ vtilitatis referta eſt, ſic non minima difficultas in demonſtrationibus penitùs percipiendis dignoſcitur: vnde multi de hac cognitione haurienda diffiſi ſolis praxibus potiùs incubuere. Nos, vt tam præcipua Mathematicæ pars etiam imaginationibus minùs viuacibus pateret clariùs, quàm fieri potuit, tum verbis, tum figuris cum difficultate decertauimus.

EXPENSIO I.

De rectangulis ſphæricis ſoluendis.

Soluere triangula ſphærica eſt ex datis aliquibus partibus alias manifeſtare, in quo negotio ritè peragendo videnda ſunt ea, quę diximus prop. 14. & 18. & Coroll. tract. 23. part. 2. vbi euitare fallacias, & amphibologias docemus; ne pro latere, aut angulo quæſito, alium inueniamus, & loco quæſiti adhibeamus, & vt ſecuriùs id fiat, ſatiùs erit vti ſemper triangulo, cuius duo anguli ad baſim ſint quadrante minores, & tales erunt ex cit. Coroll. ſi, & arcus, cruraque ſubtenſa ſint quadrante minora, non verò ſi vnus ſit acutus, alter obtuſus angulus, aut crus vnum quadrante minus, alterum verò maius. Quomodo verò poſſimus ſemper vti triangolo duos angulos acutos habente infrà docebimus, cum de ſubſtitutione.

Aduerte autem, baſis in iſtis triangulis ſibi nomen vſurpare crus angulo recto oppoſitum, crurum verò arcus, qui obliquis ſubtenduntur, angulus verò adiacens vocatur, qui adhæret cruri, quod efficitur à baſi, & altero crure.

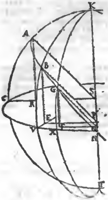
THEOR. I. PROP. I.

Triangula ſphærica duobus circulis inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipſorum perpendiculari habent ſinum cruris ad ſinum baſis in eadem proportione.

Sint duo circuli inuicem inclinati ABN, & CVN, & alij circuli perpēdiculares, vt KCT, KBVZ, & KGXT alteri ipſorum, vt circulo CVN deſcendant, & cōpleant triāgula ſphærica rectāgula ACN VBN, & XGN. Dico, quod ita eſt ad ſinum FQ cruris GX ſinus GO baſis GN, vt ad ſinum BS cruris BV ſinus BP baſis BN, & ad ſinum RA radius AS.

Pro-

Probatur: Sinus totus SA, & BP, & GO ſunt paralleli, ita ſinus RB, EB, & FG ſunt paralleli. Ergo triangula RAS, & BEP, & FGD ſunt æquiangula, cum parallelis claudã-tur. Quare ex propoſ. 4. lib. 6. Elem. ita eſt AS ad AR, vt BP ad BE, & GO ad GF.



Quod autẽ ſinus EB, & FG, & RA ſit paralleli patet (& deſeculat pro vniuerſali oſtenſione in alijs) nã debẽt eſſe ex def. ſinus perpẽdiculares radijs V. g. AR ſinus radio CS, vel ſinus EB ei, qui tranſiret ab V per B in S, & cæt. quibus omnibus, vtpote in eodem plano poſitis perpendicularis eſt SK ſectio planorum circulorum perpendicularium communis ex propoſ. 16. tract. 23. de interſect. Cum ergo ſinguli ſinus AR, & EB, & GF ſint perpendiculares radijs: quibus, & perpendicularis eſt SK, & in eodem plano, vt SK ſinguli ſint; Ergo ipſi SK ſunt paralleli: quare ex prop. 9. tract. 33. etiam inter ſe.

Idem oſtendetur de ſinubus baſium AS, & BP, & GO cum ex def. ſinus ſint omnes perpendiculares ſinui toti NS, & in eodem plano ſint circuli ABN, quare omnes erunt paralleli.

COROLLARIVM.

OBſerua autem, quod AR menſurat angulum ANC. Quoniam KAT ductus eſt polo N; vnde circuli inclinati inuicem BBN, & CVN tranſeunt per polum N, quadere etiam circulus KAT per polos illorum tranſibit ex 15. tract. 21. part. 1. & hac ratione ex prop. 14. eiuſdem tract. erit KAT vtrique perpendicularis, ideoque arcus AC ex def. 6. tract. 21. part. 1. angulum ANC menſurabit, & AR erit ſinus illius anguli ſe. arcus AC. Quamobrem erit ſinus totus AS ad ſinum anguli AR, vt ſinus baſis BP ad ſinum cruris BE illi oppoſiti.

THEOR. II. PROPOS. II.

Triangula ſphærica duobus circulis inuicem inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipſorum perpendiculari habent ſinum anguli recti, ideſt ſinum totum ad ſinum baſis, vt ſinus anguli obliqui ad ſinum cruris.

QVoniam eadem figura vtendo AS ſinus totus eſt ad AR ſinum anguli, vt baſis BP ad ſinum BE cruris; erit etiam *permutando* ſinus totus AS ad ſinum baſis BP, vt ſinus anguli AR ad ſinum cruris BE.

PROBL. I. PROPOS. III.

Dato radio, ſinu anguli, & ſinu baſis latus oppoſitum angulo dato inuenire in rectangulis triangulis.

QVoniam ex anteced. 1. & 2. propoſ. AS eſt ad AR, vt PB ad BE; ideo ſi detur AS ſinus totus AR ſinus anguli PB ſinus baſis per regulam auream explicabitur ſinus BE cruris BV, qui debebit eſſe ſpecie cõformis dato angulo. Exẽplũ erit. Sit baſis data Gr. 50 cuius ſinus 7660445 angulus Gr. 30. m. 30. Sinus verò 5075384. & ſinus totus. Dicaturque, ſi ſinus totus dat ſinum anguli Gr. 30. m. 30. par. 5075384. quid ſinus baſis 7660445. & prodibit ſinus cruris angulo dato oppoſiti par. 3887969. Gr. 22. m. 52. & paulò magis. Debet autem hoc crus conformari ſpecie angulo oppoſito dato ex prop. 28. tract. 23. Cor. 5.

COROLLARIVM.

HInc educes poſſe alias comparationes fieri, ſed paulò in opere laborioſiores, quæ ſunt.

Dato ſinu baſis BP, & ſinu cruris BE, & ſinu toto AS reperire ſinum AR anguli oppoſiti N cruri dato BE.

Sic etiam dato CNA anguli ſinu RA, & ſinu toto AS, & ſinu cruris EB reperies baſim BP: ſed hæ operationes ob diuiſionem, quæ debet fieri cum ſinus totus 2. loco inueniatur, ſunt paulò operoſiores, & in his debet aliqua reliquarum partium cognoſci quadrante minor. V. g. quod crus BV, minus quadrante, vel angulus VBN ſit acutus.

THEOR. III. PROPOS. IV.

In omni triangulo ſphærico rectangulo proportio ſinus anguli recti ad ſinum anguli non recti, eſt vt ſinus complementi cruris reliquum angulum ſubtendentis ad ſinum complementi ipſius anguli reliqui.

SIt triangulum OBA factum ex duobus circulis inclinatis HOAZ, & LBAK, claudatque alterum latus arcus deſcendens circuli VGBX perpendicularis ſuper circulum LBAK.

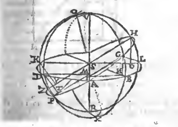
Sitque GN ſinus cruris OB, & GI ſinus baſis GA, ſicut HO ſinus arcus LH menſurantis angulum A. Numeratis autem à puncto G 90. Gr. & in O facto polo ducatur arcus QPX perpendicularis circulo HAZ, & circulo VOX ex Coroll. 1. propoſ. 13. Tr. 19. cum polus ſit in communi puncto. Quare GBX, & GAP erunt quadrantes ex prop. 13. eiuſdem Coroll. 2. Illud autem, quod in primis eſt oſtendendum BAD, & XPD eſſe quoque quadrantes.

Probatur autem. Nam VOX circulus ſecat XPQ circulum orthogonaliter, vt diximus, & bifariam cum ſint maximi; Ergo ex prop. 13. tract. 23. etiam per polos eius circulus QPX tranſibit. Pariter quoque LBAK circulus eundem VGX ſecat orthogonaliter ex dictis, & bifariam, cùm ſint maximi. Ergo ex prop. 13. cit. per polos eius circulus BAD tranſibit. Quapropter in eodem polo circuli VOX duo circuli LAK & XPQ conueniunt in D. Sed poli

ex

ex Coroll.3. prop. eit diſtant quadrante, à circulo, cuius ſunt poli. Ergo BAD, & XPD quadrantes ſunt cùm debeant diſtare ab X, & G punctis circuli VGX quadrante. Propterea AD erit complementum arcus B A, cruſque PD erit complementum arcus cruriſque BA, & PD erit complementum arcus XP, qui menſurat angulum o cum circulis XBG & GAP ex effectione ſit perpendicularis. Quadere MD erit ſinus arcus AD complementi cruris BA, & DT ſinus arcus DP complementi anguli G.

Dico itaque ſinum totum MS ad ſinum HO anguli obliqui A dicere eam proportionem, quam ſinus DM complementi cruris adiacentis AB dicit ad ſinum TD complementi reliqui anguli G.



Probatur autem ex præhabitis: Nam propoſ.1. oſtendimus, quod ſit, vt SK ad KT, ſic MD ad TD quod deſcendat ſuper alterum inclinatorum HGAP perpendicularis circulus XPQ. Sed S X æquatur SM, cùm ſit ſinus totus, & KT æquatur ſinui HO, cùm ſint ſinus angulorum æqualiũ ex prop.3. par. 2. tract.13. cum ſint ad verticem A, & ideo arcus RL, & XK eos menſurantes erunt æquales: quare etiam ſinus HO, & KT ſubtenſi erunt æquales. Quadere ex 7. lib.5. erit SM ad HO ſinus totus ad ſinum anguli HAL non recti, vt MD ſinus complementi AD cruris BA ad TD ſinum complementi anguli reliqui G.

PROBL. II. PROPOS. V.

Dato radio ſinu anguli, & ſinu complementi cruris angulo dato adiacentis inuenire angulum reliquum.

QVoniam radius eſt ad ſinum anguli OH, vt ad ſinum TD complemẽti anguli reliqui G ſinus MD complementi cruris, ideoque. Si ſtatuatur 1. loco radius, 2. ſinus anguli A, ſc. HL arcus 3. ſinus complementi cruris adiacentis BA inuenietur ſinus DT complementi anguli reliqui, nempe arcus PD, qui ablatus à Gr.90. relinquet arcum exoptatum PX menſuram anguli G.

Exemplum. Sit arcus Gr.39. m.25. anguli A; cuius ſinus 6349553. Crus AB Gr.47. m.30. cuius complementum ſit arcus Gr.42. m.30. & eius ſinus 6755902. qui multiplicabitur cum ſinu anguli A, & proferet diuiſus per ſinum totum. Sinum 4289695. DT Gr.25. m.24. & paulò magis, qui arcus deductus à Gr.90. exibebit arcum XP Gr.64. m.36. Dabent verò iſti arcus dati anguli, & cruris eſſe quadrante minores ad hoc, vt cruris, accipiamus complementum ex prop.28. tract.12.

Quòd, & obſeruandum eſt in reliquis praxibus, quando complementa interueniunt pro arcubus accipienda.

COROLLARIVM.

HInc quoque inuenies dato primò cruris BA complementi ſinu MD, ſecundò anguli G complemento, cuius ſinus DT, & radio, inuenies inquam ſinum anguli A dato cruri adiacentis.

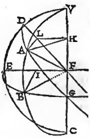
Sicut dato 1. ſinu HO anguli adiacentis cruri BA, & 2. Radio, & 3. anguli reliqui G cruri dato oppoſiti complementi ſinu DT, inuenies complementi AD cruris BA ſinum MD; ſed paulò maiori labore ob Radium, qui 2. loco incidit, & hic etiam aduertere oportet ad ſpeciem, nam crus, quòd expromitur debet ſpecie reſpondere angulo dato, vt ſint ambo quadrante minores.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

In omni triangulo ſphærico rectangulo ſinus quadrantis ad ſinum complementi cruris eam obtinet proportionem, quam ſinus complementi reliqui cruris ad ſinum complementi baſis.

SIt ſphæra, in qua ſit triangulum ABG ex circulis inclinatis inuicem DAG, & BBG, claudatque alterum latus arcus perpendicularis VABC. Eritque FB ſinus totus, & SAV quadrans, & VA arcus complens crus BA vſque ad quadrantem VB, & ſinus eius AH parallelus ſinui toti SF in ſuperficie circuli VABC deſcriptus. Arcus verò BBcomplentis crus BG ſinus BI in plano circuli ABG. Sicut etiam arcus DA baſim AG complentis ſinus AL in planitie circuli DAG deſcriptus.

Dico itaque, quòd ſicut ſe habet ſinus totus FB ad ſinum BI complementi cruris, ita in proportione aſſimilatur ſinus AH complementi reliqui cruris ad ſinum AL complementi baſis.



Probatur ex 1. propoſ. h. Nam VABC, VDBC sũt circuli inclinati inuicem, & arcus BS circuli BBG menſurat angulum inclinationis ad V cùm polus eius ſit in V. Vnde SV, & VB ſunt quadrantes. Alius autem circulus DAG perpendiculariter ſuper alterum ipſorum, nempe ſuper VBC deſcendit à puncto G, quòd eius polus in circuli VEC circumferentia exiſtat. Quare ex prop.1. hic verificatur, eritque FB ad BI, vt AH ad LA, eo quod ſint parallelæ lineæ AL, & BI, vtpote ſinus perpendiculares ſemidiametris DF, & BF, & etiam BF, & AH eo quòd ſint perpendiculares, vtpote ſinus radia FV. Cum ergo lineę ſint parallelæ erunt triangula æquiangula ALH, & IBF, & ideo latera erunt proportionalia, & erit FB ad BI, vt AH ad AL.

PROBL. III. PROPOS. VII.

Dato radio, & ſinu complementi cruris, & complementi cruris alterius baſim inuenire.

QVoniam eſt radius SF ad BI ſinum complementi cruris BG, vt AH ſinus complementi alterius cruris BA ad ſinũ AL complementi baſis: adhibendo regulam proportionum ex radio, & ex ijs ſinubus datis complementorum crurum prodibit ſinus complementi baſis.

Exemplum. Sit datum crus Gr.42. cuius complementum G.48. & ſinus 7431448. complementi huius, & alterum crus Gr.33.m.15. cuius complementum Gr.56. m.45. & eius ſinus 8457278. Multiplicentur ſimul, & productum per radium diuidatur, prodibitque ſinus complementi baſis 6284982. Gr.38. m.56. & paulò magis, erit autem minor quadrante baſis, ſi crura ſpecie concordauerint; ſi verò diſſentiant ſpecie, maior quadrante ex prop.18. Tract.23. Cor.4.

COROLLARIVM.

HInc etiam enaſcitur; quòd dato ſinu SI complementi cruris BG, & ſinu toto, & ſinu AL complementi baſis, inueniatur ſinus AH complementi cruris reliqui AB; Vel etiam dato AH ſinu cõplementi cruris BA, & ſinu cõplemẽti baſis AL, & radio BF, inueniatur ſinus SI complementi alterius cruris; Verùm cùm radius non veniat primo loco paulò operoſior eſt calculus.

EXPENSIO II.

De tangentibus.

QVoniam per ſolos ſinus trigonometria non eſt perfecta, cùm non omnes poſſint inquiri rectangulorum partes ſecundùm omnia data, per quæ inquiſitio placeat ordiri, & etiam quędam per ſolos ſinus laborioſiùs acquirantur, ideo, ve illorum defectibus ſuccurrant, tangentes adinuentæ ſunt, & ſecantes. Sed priùs de tangentibus in hac expenſione tractabimus, cum ipſæ cum ſinubos ad ſoluendos omnes caſus trigonometriæ ſufficere poſſint. Sed præterea, quæ diximus prop. 24. & 25. Tract.20. hic etiam aliæ pręuię propoſitiones ſtatuendæ ſunt.

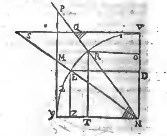
THEOR. I. PROPOS. VIII.

Si ſint duo arcus, ita erit tangens primi ad tangentem complementi poſterioris, vt tangens poſterioris ad tangentem complementi prioris.

SInt duo arcus primus RV, & ET ſecundus. Dico quòd ſicut tangens prioris QV eſt ad tangentem complementi poſterioris VS, ſic tangens poſtremi YM ad tangentem complementi prioris YP.

Probatur. Tangens QV eſt ad radium, vt radius ad tangentem YP complementi ex prop.25. Tract.20. Et tangens YM arcus poſterioris refertur quoque ad radium, vt radius ad SV tangentem ſui complementi: vnde etiam erit *inuertendo* Radius ad YM, vt SV ad radium: quamobrem diſpoſitis ritè terminis eſt proportio perturbata.

Vt QV ad Rad. Et vt Rad. ad YM,
Ita SV ad Rad. ſic Rad. ad YP.



Quare ex *æquo* ex def.18. Tr 9. erit quoq; VQ ad YM tangentes arcuum, vt SV ad YP tangentes complementorum, ſc. prioris, & poſterioris, & *permutando* VQ ad SV, vt YM ad YP, nempe tangens primi QV ad tangentem complementi ſecundi SV, vt YM tangens huius ad YP tangentem complementi prioris.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Si ſit arcus, cuius radius referatur ad ſinum ſuum, ſicut tangens alicuius ſecundi refertur ad tangentem alterius tertij. Sic quoque refertur tangens complementi huius tertij ad tangentem complementi illius ſecundi, vt radius primi ad ſuum ſinum ſe habebat.

PRobatur ex propoſ.16. lib.5. Nam eidem proportioni tertiæ arcuum tangentis VQ ad YM ſunt duæ proportiones eædem radij RN V. g. ad ſinum OR arcus alicuius ea Theſi, & ea præc. contextu YP ad VS, quare erit etiam eadem proportio RN ad RO, quam YP ad SV.

THEOR. III. PROPOS. X.

In triangulo ſphærico rectangulo ſinus cruris eſt ad tangentem alterius cruris reliqui, vt radius eſt ad tangentem anguli reliquo cruri oppoſiti.

SInt duo circuli inclinati AFG, & EFH, & hinc circulus normalis TOL deſcendat, claudatque triangulum IDF. Dico quòd DC ſinus cruris DF eſt ad DO tangentem alterius cruris DI ſecundi, vt EN radius eſt ad EB ſinum anguli IFD.

Probatur. Nam tangentes EB, & OD, vtpote perpẽdiculares ex 20. lib.3. Elem. radijs DN, & EN, & ideo parallelæ radio NT erunt perpendiculares EFH plano, cui radius NT perpendicularis eſt, quare inuicem quoque erunt



Per-

parallelę,& inſuper DO erit perpendicularis, ſinui DC parallelæ radio AN. Quapropter triangula ENS, & ODC erunt æquiangula, tanquam parallelis conſtantia ex 4. lib.6. Elem. & ideo DC erit ad DO, vt radius EN ad ES tangetem anguli IPD.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato radio, & ſinu cruris adiacentis angulo, & tangente ipſius anguli; cruris oppoſiti tangentem reperiré dato angulo ſpecie conformem.

QVoniam diximus DC ſinum cruris eſſe ad DO tangentem cruris alterius, vt radius ad tangentē ES anguli F erit etiam *permutādo* DC ſinus ad EN radium, vt DO tangens cruris ad ES tangentem anguli, & *inuertendo* radius AN erit ad DC ſinum, vt tangens SE anguli F ad tangentem DO cruris oppoſiti DI. Quare dato radio primo loco; deinde ſinu cruris, poſtea tangente anguli adiacentis, prodibit tangens cruris oppoſiti conformis ſpetie dato angulo ex Cor.5.prop.28.Trac.23.

Exemplum. Sit crus Gr.29. m.20. cuius ſinus 4898897. Anguli adiacentis tangens Gr.21.m.45. quæ eſt 3989506. Multiplicentur ſimul, & numerus genitus diuiſus per radium proferet tangentem 1954461; quæ eſt Gr.11. m.3. & paulò magis. anguli oppoſiti.

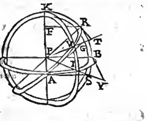
COROLLARIVM.

HInc etiam; Dato primò tangente ES anguli F, ſecundò radio EN; tertiò tangente cruris oppoſiti angulo dato poterit inueniri crus adiacēs, vt præced. patet. Sicut etiam dato ſinu DC cruris, & data tangente alterius cruris DO, & radio angulus F oppoſitus alteri crurum extrahi poterit: ſed paulò laborioſiùs, quæ tamen inuenta datis debent eſſe eſſe ſpetie conformia ex prop.28. Tr.23. Cor. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

In triangulo ſphærico rectangulo radius eſt in proportione ad ſinum complementi anguli non recti, vt tangens baſis ad tangentem cruris dicto angulo adhærentis.

SIt ſinus RF complementi arcus AR anguli A; Tangens autem cruris AI ſit AS, at baſis AV tangens ſit AG. Ex præced. radius PB ad ſinum FR



adiacentis cruris angulo R dicit eam proportionem, quam tangens AT anguli A ad tangentem RT oppoſiti cruris. Verùm ex 8. huius, ſicut eſt BT ad RT; ita eſt complementi poſterioris arcus tangens AG ad tangentem SA complementi arcus prioris: Ergo etiam ex prop.16. lib.5. Elem. Radius BP erit ad ſinum RF complementi KR arcus RS anguli A, vt AG tangens baſis VA ad SA tangentem cruris IA angulo A adhærentis triang. AIV.

PROBL. II. PROPOS. XIII.

Dato radio, & ſinu complementi anguli, & tangente baſis inuenire crus adiacens angulo dato.

FAciliter id fit ex præced. per regulam auream. Nam cum ſit radius ad ſinum complementi anguli, vt tangens baſis ad tangentem cruris. Sinus complementi āguli multiplicetur cum tangente baſis, & diuidatur per radium, prodibit tangens cruris quæſiti adiacentis.

Exemplū. Sit arcus āguli G.33.m.20.cuius cōplementū G.56. m.40. & eius ſinus 8354878. Sit verò baſis Gr.42 cuius tangens 9004040. Multiplicentur ſimul, & genitus numerus per radium diuiſus dabit tangentem 7522765. Gr.36. m.57. & paulò magis. Hoc autem crus debet eſſe ſpetie conforme angulo dato ad vitandas fallacias prop.28. Coroll.5. Tract.23.p.2.

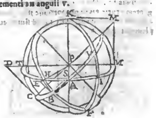
COROLLARIVM.

HInc etiam poſſet data tangente anguli AS, & radio, & tangente AG baſis extrudi ſinus RF complementi anguli A cruri dato adiacentis. Verùm operoſiùs.

THEOR. V. PROP. XIV.

In rectangulo ſphærico radius eſt ad tangentem anguli in eadem proportione, quam obtinet ſinus complementi baſis ad tangentem complementi alterius anguli.

SIt triangulum IAV, & baſis VA complementum ſit AS, menſura verò anguli V ſit arcus F A deſcriptus polo V, cuius complementum, vt oſtendi prop.5. huius eſt arcus AH. Dico, quod radius PC eſt ad tangentem NM anguli A, quam ſinus SS complementi baſis poſſidet ad tangentem BE complementi BH anguli V.



Pr. Ex pr.10.h.ita eſt PC radius ad CD tāgentē anguli HAB, vt ſinus cruris adiacentis SS ad tangentē BE cruris oppoſiti AH; Sed hoc crus SH eſt cōplemētū anguli V, & CD æquatur tangenti MN, cū ſint tangētes æqualiū angulorū ad verticē A ex 3. tr.23.p.2. Ergo radius erit ad tangentē NM anguli A trianguli

 IVA,

ſVA, vt ſinus IB complementi baſis ad tangentem RR complementi alterius anguli V.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Dato radio, & tangente anguli, & ſinu complementi baſis, tangentem compl. alterius anguli reperire.

QVoniam ex præced. radius eſt ad tangentem anguli, vt ſinus complementi baſis ad complementi reliqui anguli tangẽtem, adhibita regula proportionum poſtulatam exhibebit tangentem.

Exemplũ. Detur radius, & anguli G 45. m. 19. tãgẽs 10111153. & baſis G. 62. m. 55. cõpl. G. 27. m. 5 ſinus ſit 5113589. qui numeri inuicem multiplicati exhibebũt 5170428 pro tãgẽte quæſita cõpl. anguli alterius G. 27. m. 20. Vnde ãgulus erit G. 62. m. 40. qui debet eſſe minor quadrãte, quòd data ãgulus, & baſis eſſe debeant quadrante minora, at ſi baſis ſit maior quadrante angulus eſſet obtuſus ex eit. propoſ. 28. Tr. 23. Cor. 2. p. 2.

COROLLARIVM.

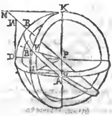
POſſent etiam alio pacto ordinari termini ſtatuto primo loco CD, vel MN tãgente anguli oppoſiti, 2. loco radio, 3. loco anguli alterius complemẽti tãgente, & prodiret ſinus IB compl. baſis.

Vel 1 ſinus IB cõplementi, 2. tangens complementi anguli, 3. radius, generaret anguli tang. CD, vel NM. Sed faciliùs hæc quæſita alio pacto venabimur. Debent autem data eſſe quadrante minora ob vſum complementorum ex propoſ. 4. Tract. 27. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Trianguli ſphærici rectanguli radius ad tangentem cruris eadem proportione potitur, quã tangens complementi baſis ad ſinum complementi anguli adiacentis.

IN triangulo KRV, cuius angulus rectus R; baſis verò VK; tangens verò IB eius complementi IV, & crus ſit KR, cuius tangens KM, & tangens eius complementi DN. Arcus, qui angulum K menſurat ſit DI, cuius complementum ſit IA, & eius ſinus IO. Dico, quod Radius KP eſt ad tangentem cruris KM in proportione illa, quam habet tangens complementi baſis IB ad ſinum IO complementi anguli K.



Probatur ex propoſ. 10: Sinus IO, eſt ad tangentem IB, vt radius DP ad tãgentem DN anguli A. Quare inuertendo DN tangens erit ad radium, vt IB tangens ad IO ſinum ex prop. autem 25. Tr. 20. vt DN refertur ad DP, ita PP radius ad MK tangentem complementi eiuſdem arcus. Quapropter vt DP ad MK, ſic proportione correſpondebit IV ad IO tangentem. Radius itaque eſt ad AM cruris RK in rectangulo RKV, vt tangens IB complementi IV baſis VK, ad ſinum IO arcus IA complentis arcum DI menſuram anguli K.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato Radio, & tangente cruris adiacentis, & tangente complementi baſis ſinum complementi anguli dato cruri adiacentis inuenire.

QVoniam tangenti MK radius eſt proportione refertur, quã tangens complementi baſis IB ad ſinum complementi anguli IO adhibita regula proportionum ex tribus primis datis deſideratum ſinum IO exhibebit, vt exemplum docet.

Exemplum. Sit crus G. 27. m 32. cuius tangens eſt 5213067. Baſis verò compl. ſit G. 49. m. 1[illegible], cuius tangens 11571494. Multiplicenturque ſimul, & productum per radium diuidatur, abiectis 7. ziffris ad dextram, vt moris eſt, & prodibit ſinus 6032297. qui eſt Gr 37. m. 6. & paulò magis, qui ſubductus à Gr. 90. efficietur angulus exoptatus Gr. 42. m. 54. Obſeruaque quòd ea, quæ dantur ſint ſpecie cognita quadrante minora ob vſum complementorum; vnde, & angulus, qui eruitur debet eſſe acutus ex prop. 28. tract. 23. Cor. 3.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Radius eſt ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris dicto angulo oppoſiti ad ſinum cruris adiacentis.

SIt triangulum AVI in præced. fig. Deturque angulus A, cuius tangens eſt DN; complementi verò eius anguli tangens eſt KM; crus autem oppoſitum eſt IV, cuius tangens IB; ſinus verò lateris adiacentis AI eſt IO. Dico itaque, quod radius PK eſt ad MK, vt IB ad IO.

Probatur DN eſt ad DP, vt IB ad IO inuertendo propoſ. 10. huius; ſed vt tangens DN ad radium DP, ita ex propoſ. 25. tract. 20. eſt radius PK ad tangentem MK compl. Ergo vt radius PK ad tangentem MK complementi KR anguli A; ſic tangens IB cruris oppoſiti ad ſinum cruris adiacentis IO.

PROBL. V. PROP. XIX.

Dato radio, & tangente complementi anguli, & tangente complementi cruris, ſinum cruris adiacentis angulo dato inueſtigare.

QVoniam hæc quatuor ſunt proportionalia radius, ad tangentem complementi anguli. Sicut tangens cruris oppoſiti ad ſinum cruris adiacentis; ideo regula proportionum inſtitutum complebit.

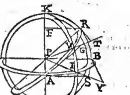
Exem-

Eaemplum. Sit datus angulus Gr.62. m.28. cuius complementum eſt Gr.27. m.32. Tangenſque eius 5213067. crus verò Gr.18. m.26. cuius tangens eſt 3333020. multiplicati itaque iſti numeri ſimul, & diuiſi per radium dabunt ſinum 1737585. exoptatum; qui eſt Gr.10. & paulò amplius; Opus autem erit obſeruare, vt ſpecie ſit crus, quòd eruitur, & conforme datis, ex prop.18. tract.23. p.2. coroll. 5. & 6. quæ ſumenda erunt quadrante minora.

THEOR. VIII. PROP. XX.

Radius eſt ad ſinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris adiacentis ei ad tangentem complementi baſis in ſpharico rectangulo.

IN præced. fig. prop.12. huius detur triangulum ſphericum rectangulum AIV, & angulus RAB, cuius complementum RK, & ſinus eius RF. Baſis ſit AV, cuius complementum VR, & eius tangens TR, crus ſit AI, cuius complementũ IB, & tangens ipſius BY. Dico, *quòd* PB *radius eſt ad* RF *ſinum complementi anguli*, vt tangens BY complementi cruris eſt ad tangentem TR complementi baſis.



Probatur; Nam, vt oſtendi propoſ.10. huius, vt BP ad BY, ſic FR eſt ad TR; Ergo *permutando* radius BP erit ad FR ſinum, vt BY tangens ad TR tangentem; ſed FR eſt ſinus complementi RK arcus RB anguli A, at BY complementi BI cruris IA tangens, & TR complementi RV baſis AV tangens. Ergo patet propoſitum.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Dato Radio, & ſinu complementi anguli, & tangente complementi cruris, & ſpetie cruris, aut anguli reliqui inuenire tangentem complementi baſis, & inde baſim.

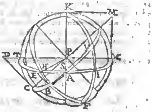
IVxta præced. propoſ. cum hæc propoſita ſint proportionalia regula proportionum ex poſtulata largietur.

Exemplum. Sit datus angulus 13. Gr. cuius complementum eſt Gr.77. & eius ſinus 9743700. Et crus 37. Gr. cuius complementum eſt Gr.53. eiuſque tangens 13270448. qui numeri ſimul ducti, & per ſinum totum diuiſi dabunt tangentem 12930326. Gr.52. m.17. qui Gr. ſubducti à 90. exhibebunt arcum exoptatum baſis Gr.37. m. 43. Si autem data cognita quantitate ſpetie conſonent baſis erit quadrante minor, ſi diſſonent maior ex Cor.4. prop.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXII.

Radius eſt ad tangentem complementi anguli obliqui in rectangulo ſphærico, vt tangens complementi reliqui obliqui ad ſinum complementi baſis.

TRiangulum datum ſit AVI in fig. prop.14. h. tangens verò complementi anguli A, ſeu arcus eum menſurantis, ſit KM: Complementi verò baſis ſit AS, & ſinus SE, & alterius anguli V, quẽ arcus FB menſurat ſit complementum SH, tangens BE. Dico igitur, quòd radius PK ea proportione refertur ad ME, qua BE ad ES.



Probatur. Nam ex 10. h. ita eſt SB ad BE, vt PC ad CD: Ergo *inuertendo*, vt EB ad BS ſic dicent CD ad CP, ſed ob radii nec non, & tangentis æqualitatem, vt CD ad CP radium, ita eſt NM ad NP: At vt NM ad NP, ſic ex propoſ.25. tract.20. eſt radius PE ad ME. Ergo vt eſt radius PE ad MK tangentem complementi anguli A, ſic eſt BE tangens complementi anguli reliqui ad ES ſinum complementi baſis.

PROBL. VII. PROPOS. XXIII.

Dato ſinu toto, & tangente complementi anguli, & tangente complementi alterius anguli inuenire tangentem complementi baſis.

PAtet operatio ex præced. quia cum data, & quæſita tangens baſis ſint proportionalia, inuenietur per regulam proportionum.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.36. cuius complementum eſt Gr.44. & tangens 9656888. Alterius verò anguli Gr.48. ſit complementum 32. & tangens ſit 6248693. qui numeri multiplicati ſimul exhibebunt pro tangente complementi baſis numerum, qui diuiſus per ſinum totum erit 603-4891. Gr.31. m.6. ferè, qui ſubducti à 90. Gr. erunt Gr.58. m.54. baſis. Debent autem ſumi anguli quadrante minores ob vſum complementorum: vnde, & baſis erit quadrante minor ex prop.28. par.2. tract.23. Cor.4.

THEOR.

THEOR. X. PROP. XXIV.

Radius eſt ad ſinum cruris, vt tangens complementi alterius cruris ad tangentem complementi anguli oppoſiti.

DEtur triangulum KRV in fig. propoſ. 12. & duo eius crura KR, & RV, quæ ambiant angulum rectum R, ſinus autem cruris KR ſit FR; tangens verò RV cruris ſit RT, & eius cõplemẽti AV ſit AG, at arcus angulum K menſurantis tangens ſit BY, & complementi ſit AS: Dico igitur, quod ſicuti PA radius eſt ad FR ſinum cruris, ita AO tangens complementi cruris eſt ad AS tang. complementi anguli K oppoſiti.

Probatur. Nam ex prop. 10. huius, ita eſt ſinus FR ad RT tangentem, vt PA radius ad tangentem BY; Ideoque *permutando* FR erit ad PA, vt RT ad BY, & *inuertendo* PB radius erit ad FR ſinum, vt BY tangens ad RT tangentem: ſed vt BY tangens ad RT tangentem ſic ex propoſ. 8 huius tangens AG complementi arcus ſecũdi VR eſt ad SA tangentem complemẽti primi AI: Ergo ſicut eſt radius PA ad ſinum FR, ita tangens AG complementi cruris ad tangentem AS complementi anguli K.

PROBL. VIII. PROPOS. XXV.

Radio dato, & ſinu cruris, & tangente complementi cruris alterius tangentem complementi anguli obliqui inuenire.

IAm ex præc. patet, quòd cum hæc ſint quatuor proportionalia datis tribus vltimum regula aurea inuenire poſſimus, vnde.

Exemplum erit. Sit arcus Gr. 37 m. 15. cuius ſinus ſit 6052940. & arcus alter, qui crura rectanguli conficiant Gr. 23. m. 47. cuius complementi Gr. 66. m. 13. tangens eſt 22690909. Multiplicentur ſimul, & radio genitum diuidatur, & generabunt 13734671. qui numerus erit tangens Gr. 53. m. 56. ferè complementi anguli quæſiti. Vnde arcus Gr. 36. m 4 erit angulus quæſitus.

Porrò in omnibus iſtis obſeruanda eſt regula generalis, vt ſi quando dantur crura quadrante maiora, vel baſis, aut angulus aſſumatur vicarium eius triangulum reſiduum, vt infra docebimus. Et cum vtimur triangulo vicario: ſimul corollaria prop. 28. tract. 13. part. 2. vbi docemus quænam crura quoſnam requirant angulos, vel quinam anguli crura ſibi conuenientia repoſcant, ſunt obſeruanda

EXPENSIO III.

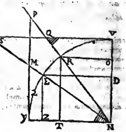
De ſecantibus.

QVamuis per ſolos ſinus, & tangentes omnis trigonometria rectangulorum abſoluta eſſet; quia tamen in tribus caſibus, qui prop. 6. ſolui poſſunt. Sinus totus primo loco non venit, ideo tum ad abundantiam doctrinæ, tum etiam, vt in eis facilior calculus eueniat, etiam ſecantium tabulæ conditæ fuerunt; ſed antequam ad problemata, quę rectangulorũ docent ſolutionẽ, deueniamus; quædam ſecantium inter ſe, vel ad ſinus exponendę ſunt habitudines.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Duorum arcuum, ſinus complementi primi ad ſecantem ſecundi eſt, vt ſinus complementi poſterioris ad ſecantem arcus prioris.

SInt duo arcus, primus VR, & EY ſecundus in fig. pr. 8. & eorum ſinus complementorum RT, & ED, ſecanteſque NQ, & NM, Dico, quòd ita eſt TR ſinus complementi primi ad ſecantem ſecundi NM, veluti proportione reſpondet ſinus complementi ſecundi AD ad ſecantem primi NQ.



Probatur. Ita eſt TR ſinus, ſeu ON ad radium NR, vt radius NV, ſiue idem NR eſt ſecantem NQ, & vt eſt BD, ſeu NZ ſinus complementi ad radium AN, ita radius NT ad ſecantem NM ex pr. 26. tr. 20. & ideo NM erit *inuertendo* ad radium, vt rad. ad AD. Quare eſt proportio perturbata, vt in diſpoſitis terminis potes videre.

vt RT eſt ad R. At vt R. ad ED.
Ita NM eſt ad R. ſic R. ad QN.

Vnde ex *æquo* arguere poterimus ita eſſe RT ad ED, vt NM ad NQ, & ideo *permutando* ita erit RT ſinus complementi prioris arcus ad NM ſecantem arcus poſterioris, vt AD ſinus complementi arcus poſterioris ad NQ ſecantem arcus prioris.

COROLLARIVM I.

HInc deducitur eſſe quoque *inuertendo* ſecantem prioris arcus NQ ad complementi ſinũ ſecundi AD, vt ſecans arcus poſterioris MN ad ſinum complementi arcus prioris RT.

Rurſuſque quòd vt ſinus TR primi arcus YR ad ſecantẽ NM cõplementi ſecundi AV, ſic ſinus ED arcus BV huius ad ſecantẽ NQ complementi arcus prioris RY mutatis tantùm arcuũ denominationibus, vt ſinus dicatur arcus, qui erat complementi, & ſecans complementi, quæ arcus ſecans erat.

COROLLARIVM II.

IDeoque erit etiam *permutando* ſinus primi ad ſinum poſtremi, vt ſecans complementi poſterioris ad ſecantem prioris complementi, vel etiam ſinus complementi prioris ad ſinum complementi poſterioris, vt ſecans poſterioris arcus ad ſecantem prioris.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si ſit arcus, cuius ſin us ea ad radium proportione feratur, quâ ſinus complementi alius ſecundi ad ſin um complementi alterius tertij; ſecans quoque tertij ad ſecatem ſecundi eam habebit proportionem, quam ſinus primi arcus ad radium conſequitur.

PRobatur. Quoniam ex prop.16. lib.5. Elem. quæ eidem ratiooi ſoot eędem rationes,& inter ſe tales ſont. Ponitor verò id io ipſa propoſ. nam ex theſi ſioꝰs primi arcus pooitur ad radium & ſecans poſterioris alius tertij ad ſecãtem ſecondi, vt ſioos complemeoti ſecundi ad ſinum complementi tertij. Quapropter etiam inter ſe ſimili proportione gaudebunt ſecans tertij ad ſecantem ſecundi, quæ Sinus primi ad Radium.

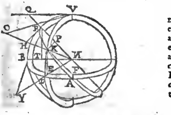
COROLLARIVM.

IDem quoque erit ſi ſinus ſint arcuum,& ſecantes complementorum, vt per ſe patet.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Vt Radius refertur ad ſinum baſis, ſic ſe habet ſecans complementi cruris oppoſiti ad ſecantem anguli.

SIt triaogulum ſphæricum rectangulum AKD, cuius baſis AA, & eios ſinos FA, ad qoem ex dictis de ſioubus prop.1. h. eaodem proportiooem gerit ſious totus NR, qoam ſioos RT aoguli A ad ſinum croris AA, ſecans verò complementi KV arcus, nempe cruris DK eſt NO. Secaos verò complementi VR arcus RA meoſuræ aoguli A eſt NQ. Dico itaque, qoòd ſicut eſt ſinus totus NR ad ſinum baſis FA, ita ſe habet ſecaos NO ad NQ ſecantem complem. anguli.



Probatur. Nam ſinos TR tamquam primi arcus eſt ad ſinum cruris EK tamquam ſecuodi arcus, vt radius NR eſt ad ſinom baſis FA: ſed ea propoſ.26. huius, vt ſious primi arcos ad ſinum ſecundi arcus, nempe RT ad KE, ſic aſſimilatur in proportione ſecans NO cõplementi VK ſecoodi arcus AD ſecanti NQ complementi primi arcus BR; Ergo ex 16. vt radius NR ad FK ſinum baſis, ita ſecans NO cruris complementi KV ad ſecantem NQ anguli A complementi RV.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Dato Radio, ſinu baſis, & ſecante complementi cruris inuenire ſecantem complementi anguli oppoſiti.

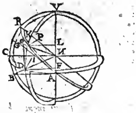
QVooiam data, & quæſitum ſunt ex præced. quatuor proportionalia poterit ad quærendum quartum adhiberi regula proportionum, vnde ſtabit.

Eaemplum: Sit datom triangulum rectangulom, cuius baſis Gr.43. & ſioos eius 6819984. crus verò ſit Gr.37.& complementum Gr.53. cuius ſecans eſt 16616401. Ducantur ſimul, & productus diuiſus per ſinum totum erit ſecans 11332358. Gr.28. m.4 pauloauctior complementi anguli, qui gr. ſubducti à 90. dant Gr.61. m.56. Debet verò angulus conformari ſpetie dato cruri ex prop.28. tract.23. Coroll.5.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Radius eſt ad ſinum complementi cruris, vt ſecans baſis ad ſecantem reliqui cruris.

IN triangulo rectangulo AKD ſit ſious LK complementi KV cruris DK,& PA ſious complementi KR baſis AK, cuius ſecans eſt GN, & ſinus ID complementi DC reliqui cruris DA, cuius ſecans eſt NS: Dico, quòd radius ND eſt ad ſinum FD, vt ſecaos NG baſis ad ſecantem reliqui cruris NS.



Dictum eſt ſupra prop.5. huios, vt ND rad. ad DI, ſic LK eſſe ad AP: Ergo *permutando* ND radius erit ad ſiuum LK complementi cruris, vt ID ſinus arcus DC prioris ad PK arcus AR poſterioris. Sed ex prop.26. huius, vt ID ad PA, ita eſt NG ſecans arcus AA complemeotis KR poſterioris ad NS ſecantem arcus AD complementi arcus prioris DC: Ergo ex 16. lib.5. vt radius ND eſt ad ſinum LK complemeoti cruris, ſic ſecans NO baſis, ad ſecantem NS reliqui cruris.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Radio, & ſinus cruris, & ſecante baſis inuenire ſecantem reliqui cruris.

PAtet prob. ea præc. qua oſtendimos quatuor propoſita eſſe proportionalis, vnde per regolam auream quęſiti cruris ſioum cognoſcemos.

Exemplum. Sit crus Gr.39. m.18. cuius complemeotum Gr.50. m.42. & ſinus 7738402. Sit

qooque

quoque baſis Gr.44.m.36.cuius ſecans 14044451. quam cum numero ſinus multiplicabis, & diuides per radium, & exhibebit ſecantem 10868145 Gr. 23. m.4. ſed paulò minus reliqui cruris; obſerua verò Cor.2. & 3. prop.28. tract.23.

THEOR. V. PROPOS. XXXII.

Radius eſt ad ſecantem cruris, vt ſecans alterius ad ſecantem baſis.

TRiangulum in præc. fig. ſit AKD, ſecans baſis NO, ſecans cruris NO, ſecans alterius cruris NB. Dico itaque, quòd ea proportio militat radij NO ad ſecantem ON, quæ ſecantis NB ad ſecantem GN.

Probatur LK ſinus complementi cruris eſt ad radium ND, vt radius ND ad ſecantem NO ex prop. 26. Tract.20. qui ſunt in eadem ſuperficie circuli VKO: Sed vt eſt ſinus LK ad radium ND, ita eſt ſinus PK arcus KR primi complementi ad ID ſinum DC poſtremi complementi, & ideo ex præc. prop. 26.h. vt NB ſecans poſtremi arcus ad NC ſecantem primi arcus. Ergo, vt radius ND ad ſecantem NO, ita eſt ſecans NB ad ſecantem NG.

PROBL. III. PROPOS. XXXIII.

Dato radio, & ſecante cruris, & ſecante alterius cruris inuenire ſecantem baſis.

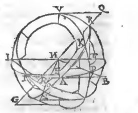
HOc regula aurea operi committitur, vt ex præc. patet ob proportionem quatuor terminorum in theſi propoſitorum.

Exemplum. Sit crus Gr.28. m.7. cuius ſecans 11337999. cuiuſque aliud G.87. m.18. cuius ſecans ſit 212294614. quę multiplicata per exhibitam ſecantem alterius cruris, & poſtea diuiſa per radium expromet ſecantem 240699612. Gr.87. m.37. & paulò minùs, erit itaque baſis minor quadrante: quia crura in hoc caſu ſpecie concordant, at ſi ſpecie diſſonent, baſis erit maior quadrante ex Cor. 4. prop.28. tract.23.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Radius eſt ad ſinum anguli obliqui, vt ſecans alterius ad ſecantem cruris oppoſiti.

SIt angulus A obliquus trianguli AKO, cuius ſinus RT, ſinus verò totus RN, ſecans NZ anguli K reliqui; ſecans verò cruris oppoſiti NB.



Dico, quòd radius RN, ita proportione correſpondet ad ſinum TR anguli A, vt ſecans NZ anguli K reliqui ad ſecantem NB cruris oppoſiti angulo K.

Probatur. Dictum eſt de ſinubus propoſ.4.h. ſinum FI complementi lateris AD, ita eſſe in proportione ad cõplementi ſinũ IO, ſicut radius NL, ſeu NR ad ſinũ LH, ſeu æqualẽ RT anguli A: ſed vt ſinus complementorum ſunt inuicem, ſic ſecantes arcuum inuersè in eadem proportione ſunt: quare ſecans NZ anguli K ita erit ad ſecantem NB cruris oppoſiti AD, vt ſinus FI cõplementi cruris ad ſinum IO complementi anguli ex 26. prop. h. 6. Cor. 2. & ideo erit ex 16. lib.5. vt radius NR ad ſinum TR, ſic ſecans NZ ad ſecantem NB.

PROBL. IV. PROPOS. XXXV.

Dato radio, & ſinu anguli, & ſecante alterius anguli, ſecantem cruris inuenire huius alterius anguli oppoſiti.

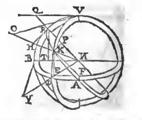
PAtet id regula aurea poſſe operi demandari; cum habeamus ex præced. quatuor proportionalia, quorum tria dantur, quartum inquiritur.

Detur angulus 37. Gr. & alter angulus Gr.58. ſinus primi ſit 6018150. ſecans ſecundi ſit 18870800. qui numeri ſimul multiplicati, abiectiſque ob diuiſionem ſinus totius 7. figuris dextris proferet ſecantem 11356730, quæ eſt G.28. m.17. proximè cruris oppoſiti, quod debet eſſe concors in ſpecie angulo oppoſito ex Coroll.2. propoſ.28. tract.23.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVI.

Radius eſt ad ſinum anguli, vt ſecans complementi cruris ei oppoſiti ad ſecantem complementi baſis.

TOtus ſinus ſit NR; ſinus autem anguli A ſit RT, & ſecans complementi KA baſis KA ſit NH, at ſecans NO tandem complementi VK cruris OK. Dico, quòd ea proportione refertur ſinus totus NR ad ſinum RT anguli A: quà ſecans NO complementi cruris ad ſecantem NH complementi baſis.



Probatur: Nam ſimilem proportionem dicit ſinus NR totus ad ſinum RT anguli, quam ſinus FK baſis ad ſinum EK cruris anguli A oppoſiti, ex pr.1. Cor. de ſinubus; ſed hanc quoque proportionem dicunt ſecantes complementorum, & vt eſt ſinus primus baſis KF ad ſinum ſecundum cruris KE ita eſt ſecans NO complementi VK huius ad ſecantem NH complementi EK primi arcus AK. Quapropter ex 16. lib.5. ita quoque radius NR erit ad ad ſinum RT anguli A, vt ſecans complementi cruris NO ad ſecantem complementi baſis NH; quòd tertiæ proportioni FK ad EK conſentiant.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXVII.

Dato Radio, & ſinu anguli, & ſecante complementi cruris ei oppoſiti, baſis complementi ſecantem inuenire, ſi tamen reliquum crus, ſeu reliquus angulus ſpetie notus ſit.

QVoniam ex anteced. exhibita ſunt quatuor proportionalia, ideo regula aurea ad inquirendum quartum eſt adhibenda, & ſic erit.

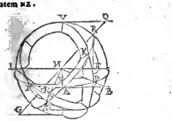
Exemplum. Sit angulus Gr. 50. cuius ſinus 7660445. Arcus cruris 45. m.48. cuius complementum Gr.48. m.52. & ſecans 15003020. qui numeri multiplicati inuicem, & per radium diuiſi dant 114980. Gr.29. m.35. proximè, qui ſubducti à Gr.90. dant Gr.60. & m.29. pro baſi.

Aduerte autem, quod ſi anguli, vel crura vnum quidem notum quantitate alterum ſpetie concordauerint, baſis erit quadrante minor, ſi non concordauerint maior ex Coroll. 3. & 4. propoſ.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Radius eſt ad ſecantem cruris, vt ſecans complementi anguli adiacentis ad ſecantem anguli oppoſiti.

IN Schemate prop.34 ſit triangulum XAD, & ei ſinus totus NR, ſecans NQ complementi anguli A erit; at ſecans cruris angulo A adiacentis ſit NB; ſecans verò anguli K ſit NZ. Dico itaque, quòd NR radius eſt ad ſecantem NB, vt ſecans NQ eſt ad ſecantem NZ.



Probatur ex 4. huius, vt NL radius eſt ad ſinum LH æqualem ſinui RT anguli A; ſic IF complementi cruris ſinus eſt ad IO ſinum complementi alterius anguli K: Ergo *permutando*, vt LN ad IF, ſic LH ad IO; & *inuertendo*, vt IF ad LN, ſic IO ad HL: ſed vt IF ſinus complementi ad LN radium, ſic eſt radius ad illius arcus ſecantem; quæ eſt NB cruris ex Tract. 20. propoſ.26. Ergo, vt eſt radius NL ad ſecantem NB cruris, ſic eſt ſinus IO complementi vnius anguli K ad ſinũ HL, vel RT alterius A: ſed vt ſinus IO ad HL, ſic eſt ſecans NQ cõplementi huius HL, vel æqualem RT ad ſecantem complementi prioris NZ, qui eſt arcus anguli K ex Cor.2. prop.26. Ergo ex 56. lib.5. vt radius NR ad ſecantem NB cruris, ſic ſecans NQ complementi A anguli ad ſecantem NZ anguli K.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIX.

Dato radio, & ſecante cruris, & ſecante complementi anguli adiacentis ſecantem anguli oppoſiti reperire.

QVoniam propoſita ſunt quatuor proportionalia ex prædict. propoſ. regula proportionum, quartum, quod expoſcitur, inuenietur.

Exemplum detur crus Gr.25. cuius ſecans ſit 11033783. & angulus Gr.32. m.55. cuius complementum eſt Gr.57. m.5. & ſecans 18402017. multiplicentur ſimul, prodibitque numerus, qui per radium diuiſus reſtabit 20304386. quæ eſt proximè ſecans Gr.60. m.29. angulus ipſe, qui deſideratur, qui debet eſſe ſpetie conformis dato cruri ex propoſ.28. Cor. 6. Tr.33.

THEOR IX. PROP. XL.

Radius eſt ad ſinum complementi cruris, vt ſecans anguli obliqui oppoſiti ad ſecantem complementi anguli obliqui alterius, qui cruri adiacet.

RAdius NL in præc. fig. ſinus cõplementi cruris AD, triãguli XAD rectãguli eſt IF ſecans anguli K eſt NZ; & ſecans NQ cõplementi VB anguli obliqui alterius A. Dico itaque, quòd radius NL eſt ad IF ſinum complementi cruris, vt ſecans NZ anguli oppoſiti ad ſecantem NQ anguli adiacentis.

Probatur. Nam iam dictum eſt prop.4. ſinum NL eſſe ad LH, ſeu RT ſinum anguli A, vt IF ſinus complementi cruris AD ad ſinum IO complementi anguli X. Ideo *permutando* NL erit ad IF, vt LH ad IO: ſed vt ſinus LH anguli A ad IO ſinum; ſic ſecans huius complementi NZ, qui eſt arcus anguli K ad ſecantem prioris complementi NG, ſeu æqualem NQ. Ergo, vt eſt radius NL ad IF ſinum complementi cruris; ſic eſt NZ ſecans arcus anguli oppoſiti ad ſecantem NQ complementi alterius anguli adhærentis cruri AD.

PROBL. VII. PROPOS. XLI.

Dato radio ſinu complementi cruris, & ſecante anguli obliqui oppoſiti ſecantem complementi anguli cruri adiacentis reperire.

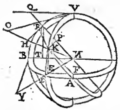
REgula proportionum habet in hac operatione locum, cum in antecedenti propoſ. oſtenſa ſint tria data, & quartum quæſitum proportionalia.

Exemplum. Sit crus 19. Grad. cuius complementum Gr.71. & ſinus eius 9455186. Anguli Gr.32. m.4. verò ſecans ſit 11800371. qui numeri ſimul multiplicati, & per radium diuiſi dabunt numerum 11157470. Gr.26. m.20. ferè, qui, vtpote complementum ſubductus à Gr.90. relinquit Gr. 63. m.40. anguli. Debet autem cognoſci ſpetie crus alterum ex dictis prop.28. tract.23. Cor.4. vt angulus inuentus ei conformetur.

THEOR. X. PROPOS. XLII.

Radius eſt ad ſecantem complementi baſis, vt ſecans complementi anguli oppoſiti ad ſecantem complementi cruris angulo oppoſiti.

RAdius eſt NH, baſis AX in triangulo AXD, cuius cōplementi ſinus ZP, ſecans verò eius cōplementi NH; compl. anguli A eſt VR, cuius ſecans eſt NQ: crus verò DK, cuius compl. KV ſecans eſt NO. Dico itaq; quòd ita refertur radius ad NH ſecantē complementi baſis, vt NQ ſecans complementi anguli A ad ſecantem NO complementi VK cruris DK.



Probatur. Quoniam ex dictis propoſ. 6. huius Ita eſt baſis FK ad ſinum EX, vt NR radius ad RT ſinum A anguli, & ideo *permutando:* Ita erit FK ad radium NR, vt ſinus E K ad ſinum TR, ſed vt FK ſinus baſis refertur ad radium, ita radius ipſe refertur ad ſecantem NH complementi baſis ex pr. 26. tract. 20. cum ſint in eodem plano EKA: Similiter vt EK ſinus cruris refertur ad TR ſinum anguli; ſic NQ ſecans complementi huius poſterioris ad ſecantem NO complementi illius prioris ex Coroll. prop. 26. h. Ergo ex prop. 16. lib. 5; vt NR radius eſt ad ſecantem complementi baſis NH, ſic NQ ſecans complementi anguli ad NO ſecantem complementi cruris.

PROBL. VIII. PROPOS. XLIII.

Dato radio, & ſecante complementi baſis, & ſecante complementi anguli reperire ſecantem complementi cruris oppoſiti.

ID operi demadator regula aorea cum tria exhibeantur proportionalia, & quartus quæratur, debet autem angulus repertus conformari ſpecie angulo oppoſito, vt ex prop. 18. tract. 23. Cor. 5. patet.

COROLLARIVM.

AB iſtis omnibus propoſitionibus eruitur modus, quò ſemper primo loco radium ponas, vt infra declarabimus.

EXPENSIO IV.

Regulæ facillimæ, & breuiſſimæ pro rectangulis adhibendæ præcipuè in logarithmis.

REgulæ quædam breues, & vniuerſales remanent tradendæ; licet non adeo faciles in geometricis operationibus, eo quod ſinus primo loco, non ſemper veniat; ſed æquè faciles in logarithmicis, ideoque pro logarithmis à Nepero ſpecialiter inuentæ, quarum fundamenta quatuor propoſ. exponemus quamuis ipſe non explicet.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

In triangulis ſphæricis rectangulis habentibus crura, ſeu cruribus oppoſitos angulos ſigillatim quadrante minores, vt ſinus totus ad ſinum complementi oppoſitæ extremæ remotæ, ſic ſinus complementi alterius remotæ extremæ oppoſitæ ad ſinum intermediæ;

NOn vſurpamus hic complementa in propria ſignificatione, ſed eo modo, quò declarabimus. Sciendum eſt itaque, quòd præciſo angulo recto, & poſthabito in triangulo ſunt quinque partes, quæ ad modum pentagoni ſunt diſponendæ, nempe baſis duo anguli, & duo crura angulos ſubtendentia, quas numeris prænotamus 1. 2. 3. 4. 5. tamquam alicuius pentagoni lateribus, vt poſſimus intelligere quænam partes oppoſitæ extremæ, quænam adhærentes, vel circumpoſitæ, quęque intermediæ partes appellentur. Pro angulis verò, & baſi eorum complementa debent vſurpari.

In hac ergo figura tribus complementis duorum angulorum, & baſis, & duobus cruribus conſtante. Partes adhærentes ſunt, quæ datæ intermediæ immediatè ſuccedunt V. g. in triangulo ABC. Poſita baſis AC complementa pro parte media adhęrentes ſunt partes complementa angulorum A, & C, ſic poſito crure 4. partes adhęrentes ſunt, poſthabito angulo B recto, crus 3, & complementum anguli 5. At verò remotę complementi 1 baſis eſſent crura 3, & 4. & lateris pro parte intermedia vſurpati partes remotæ eſſent AC baſis complementa, & anguli A. Complementa verò horum complementorum ſunt ſinus ipſi arcuum. Ita, quod complementa de angulis, & baſi dicta intelligantur pro arcubus angulorum, & baſis: at quando dicitur ſinus baſis, vel angulorum intelligatur de cōplementis. Verū de cruribus, ſicut ipſa in propria ſignificatione ſumuntur, ſic, & complementa.

Dicit itaque propoſitio ſinum totum ad ſinum complementi alterius extremæ oppoſitæ, ſic ſinus complementi alterius extremę oppoſitæ ad ſinum intermediæ. Hoc verò Theor. probatur inductione numerando omnes caſus, qui poſſunt accidere, qui ex dictis de ſinibus oſtenduntur: Sunt autem expreſſi.

atre

Rad. E	3 mæ datæ		Media quæſita	
0		4	1	Caſus primus.
0	4	3	1	
0	5	4	2	Caſus ſecundus.
0	4	5	2	
0	2	3	5	
0	3	2	5	
0	1	5	3	Caſus tertius.
0	5	1	3	
0	1	2	4	
0	2	1	4	

Caſus primus. Cum itaque duo latera dantur 3. & 4 & quæritur baſis. Dico, quod ſinus totus ad partes extremas, nempe ad complementa crurum V. g. ex 6. oropoſ. huius tract. ſe habet, vt alterum eorum V. g. complementum 4. ſe habet ad ſinum baſis, nempe ad ſinum eius complementi, quod pro baſi vſurpatur, quia in ea fig. ita eſt BF ad AH, vt 2I ad AL, nimirum 0. ad 3. vt 4. ad 1. & *permutando* 0. ad 4. vt 3. ad 1. Vnde duo primi caſus ſunt oſtenſi.

Caſus ſecundus. Cum crus, & angulus datur, & quæritur angulus alter. Dico eodem módo ſinum totum eſſe ad ſinum complementi extremæ remotæ V. g. 5. vt ſinus complementi alterius extremæ remotæ V. g. 4. ad ſinum intermediæ alterius anguli 2. nempe ad eius complementi ſinum pro angulo vſurpati. Nam ex propoſ. 4. vt in illa figura, ita eſt ſinus totus SH ad ſinum anguli OH, nempe complementum complementi HV pro angulo ipſo vſurpatum, vt ſinus complementi lateris Aa, quod eſt MD ad ſinum DT, qui ſinus eſt complementi pro angulo ipſo vſurpati, nimirum o ad 5. vt 4. ad 2. & ſic quatuor caſus ſecundi generis remanent ſoluti, nam etiam *permutando* erit aH ad MD, nempe 0. ad 4. vt HO ad DT, nimirum 5. ad 2. Et ſic dicas de altero angulo dato 2. latere altero dato 3. & angulo quæſito 5. quòd ita ſit 0. ad 2. vt 3. ad 5. & *permutando*, quòd ſit 0. ad 3. vt 2. ad 5.

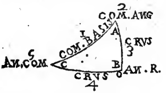
Caſus tertius. Cum baſis, & angulus datur, & crus quæritur. Dico rurſus, quòd ſit ſinus totus 0. ad ſinum complementi extremæ, remotæ V. g. 1, vt ſinus alterius extremæ remotæ 5. complementi ad ſinum intermediæ 3.

Quod probatur ex 1. prop. Nam vt in illa figura ſinus totus SA eſt ad ſinum baſis BP, nempe complementum ſui complementi pro ipſa baſi vſurpati; vt ſinus AR anguli N, nimirum complementi arcus AK pro arcu ipſius anguli ſumpti ad ſinum aa ipſius lateris, nempe erit, vt 0. ad 1. ſic 5. ad 3. vel *permutando*, ſic erit 0. ad 5. vt 1. ad 3. Et pro alio angulo, ſi detur, idem argumentum valebit, & erit 0. ad 1. vt 2. ad 4. & *permutando* 0. ad 2. vt 1. ad 4. Propterea quatuor caſus vltimi remanent oſtenſi. Vnde propoſitio tota remanet oſtenſa ſecundùm omnes caſus.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

In triangulis ſphæricis rectangulis habentibus crura, ſeu cruribus oppoſitos angulos ſigillatim quadrante minores, vt ſinus complementi cuiuſlibet extremæ remotæ ad ſinum intermediæ, ſic radius eſt ad ſinum complementi reliquæ extremæ remotæ.

HÆc propoſitio eodem modo intelligitur, & præcedens, & eodem modo oſtenditur ex dictis ſingulis caſibus enumeratis.



Data Extr. Medis R. quæſita extrema.

3	1	0	4	Caſus primus.
4	2	0	5	Caſus ſecundus.
3	5	0	4	
5	3	0	1	Caſus tertius.
2	4	0	1	

Prob. primus caſus ex prop. 6. ſinuum. Nam cum ex ea ſit proportio, vt citauimus 0. ad 3. vt 4 ad 1. Erit etiam, *permutando* 0. ad 4. vt 3. ad 1. & etiam 3. ad 1. vt 0. ad 4. debet autem intermedia occupare ſecundum locum iuxta tenorem propoſitionis; vnde non dabitur caſus, quod ſit 1 ad 3. vt 0. ad 4.

Probatur quoque ſecundus caſus ex propoſ. 4. ſupra citata; quia enim eſt 0. ad 4. vt 5. ad 2. erit etiam *permutando* 0. ad 5. vt 4. ad 2. Vnde etiam erit 4. ad 2. vt 0. ad 5. Quod & intelligitur de altera ſimili partium combinatione 3. ad 5. vt 0. ad 2. Porrò non poterit eſſe, vt in præcedenti caſu dictum eſt 2. ad 4. neque 5. ad 3. quòd intermediæ 2. & 5. debeant eſſe ſecundo loco.

Probatur quoque tertius caſus. Quia enim ex 1. prop. h. iuxta dicta in pr. præc. 3. caſu 0. ad 1. vt 5. ad 3. erit etiam 5. ad 3. vt 0. ad 1. & ſimiliter 2. ad 4. vt 0. ad 1.

Intelliguntur autem ſinus arcuum eſſe complementorum, vbi ipſa complementa in figura vſurpatur, & eſſe vera complementa, vbi arcus ipſi ſumuntur: Sic erit ſinus complementi anguli 5. ipſe ſinus anguli 5. quia complementum pro ipſo anguli arcu in figura vſurpatur; at ſinus cruris 3. erit ſinus propriè dictus ipſius cruris; quia non complementum; ſed ipſum crus in figura ſumitur, & ſic dicas de alijs.

THEOR. III. PROP. XLVI.

In triangulis ſphæricis rectangulis habentibus crura, ſeu cruribus oppoſitos angulos ſigillatim quadrante minores, vt radius ad tangentem extremæ proximæ; ſic tangens reliquæ extremæ proximæ ad ſinum intermediæ.

HÆc propoſitio probatur per enumerationem caſuum, vt præcedens; ſed ex principijs poſitis Expenſ.2. de tangentibus.

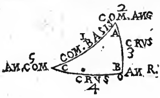
R. Extremæ datæ Intermedia quæſita.

o	2	4	3	
o	4	2	3	
o	5	3	4	Caſus primus.
o	3	5	4	
o	4	1	5	
o	1	4	5	Caſus ſecundus.
o	3	1	2	
o	1	3	2	
o	5	2	2	
o	2	5	1	Caſus tertius.

Probatur autẽ primus caſus ex prop.10 tangentium, cùm angulus, & crus datur, & quæritur aliud crus. Nam vt illius propoſ. ſchemate apparet. Ita eſt radius EN ad tangentem E B, vt CD ſinus ad OD tangentem: nimirum, vt O ad tang. complementi anguli 2. ſic tangens cruris 4. ad ſinum cruris 3. Vnde etiam *permutando*, ita erit Radius o. ad 4. ſic 2. ad 3. Et ſi detur alius angulus 5. & crus 3. eadem ratio erit, & reſpondebit proportione o. ad 5. vt 3. ad 4. & *permutando* o. ad 3. vt 5. ad 4.

Secundus caſus cum datur baſis, & crus, & quæritur angulus. Probatur quoque ex propoſ. 16. vt eſt radius PK ad tangentem KM cruris KM in triangulo RKV, Ita eſt tangens IB complementi arcus vt baſis VK ad OI ſinum complementi arcus ID anguli K. Itaque eſt vt PK ad KM, nempe o. ad 4. ita eſt IB ad OI, nempe 1. ad 5. Quare *permutando* quoque erit o. ab 1. vt 4. ad 5. & ſi detur latus 3. erit quoque o. ad 3. vt 1. ad 2. & *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2.

Tertius caſus. Probatur quoque ex propoſ.22. cum dantur duo anguli, & quæritur baſis. Nam radius eſt ad tangentem complementi anguli V.g. in eo ſchemate KP radius ad KM tangentem, vt BE tang. ad ſinum BS, ideſt complementi anguli V tangens ad ſinum complementi baſis AV, ideo o. erit ad 5. vt 2. ad 1. & *permutando* o. erit ad 2. vt 5. ad 1.



THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

In triangulis ſphæricis rectangulis habentibus crura, ſeu cruribus oppoſitos angulos ſigillatim quadrante minores, vt tangens extremæ proximæ ad ſinum intermediæ, ita radius ad tangentem reliquæ extremæ proximæ.

PRobatur ex dictis prius enumeratis caſibus prop. præced.

Extremæ datæ. R. Intermedia quæſita.

2	5	o	4	
3	2	o	1	Caſus primus.
1	2	o	3	
4	5	o	1	Caſus ſecundus.
2	3	o	4	
5	4	o	3	Caſus tertius.
3	4	o	2	
3	4	o	5	Caſus quartus.
5	1	o	2	
2	1	o	5	Caſus quintus.

Probantur autem ſinguli caſus, & Primus cùm datur baſis, & angulus, & quæritur latus. Quia ex ſecundo caſu propoſ. anteced. eſt o. ad 4. ita eſt 1. ad 5. Ergo erit, vt 1. ad 5. ita o. ad 4. Et quia eſt o. ad 3. vt 1. ad 2. erit etiam *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2. Ideoque etiam 3. ad 2. vt o. ad 1.

Secundus verò caſus eſt cum datur angulus, & latus, & quæritur baſis. Quòd ex eodem ſecundo caſu præced. propoſ. oſtenditur. Siquidem ibi eſt o. ad 3. vt 1. ad 2. Quare erit etiam 1. ad 2. vt o. ad 3. Eademque ratione oſtendetur; quia eſt o. ad 4. vt 1. ad 5. quod *permutando* ſit o. ad 1. vt 4. ad 5. & ideo 4. ad 5. vt o. ad 1.

Tertius caſus eſt ex primo caſu præced. propoſ. oſtenditur. Nam ibi dictum eſt ita eſſe o. ad 4. vt 2. ad 3. Quare etiam erit 2. ad 3. vt o. ad 4. Et quia ibi eſt o. ad 3. vt 5. ad 4. Ergo 5. ad 4. vt o. ad 3. nempe crure, & angulo crus aliud habetur.

Quartus caſus. Et quia ex eadem propoſ. præc. caſu eſt o. ad 2. vt 4. ad 3. Erit etiam 3. ad 4. vt o. ad 2. Et eadem ratione 3. ad 4. vt o. ad 5. quòd in præced. primo caſu oſtenſum ſit eſſe o. ad 5. vt 3. ad 4. Ideſt duobus cruribus obtinetur angulus.

Quintus probatur ex 3. caſu præced. propoſ. quia enim eſt o. ad 5. vt 2. ad 1. Erit etiam 2. ad 1. vt o. ad 5. Et quia eſt è contra o. ad 2. vt 5. ad 1. erit etiam 5. ad 1. vt o. ad 2. nempe dato angulo, & baſi crus inuenietur. Vnde omnes caſus remanent oſtenſi.

COROLLARIVM.

EX præcedentibus itaque propoſitionibus colliguntur iſtæ quatuor praxes, quibus omnes caſus ſoluuntur, tum Geometricè, tum Logarithmicè.

1. Arithmeticè.

AD inueniendam partem intermediam datis partibus oppoſitis, & remotis. Multiplica

inuicem

inuicem complementorum ſinus remotarum extremarum partium, & diuide per ſinum totum, & prodibit ſinus intermediæ.

Sed aduertendum eſt, quod vbi ponitur *latus* ibi complementum intelligitur propriè ſumptum, vbi verò complementū ponitur in fig. impropriè ſumitur in prop. pro complemento ipſius cōplementi; nempe pro ſinu ipſo baſis, ſeu anguli.

Logarithmicè:

ADditi inuicem complementorum eodem ſenſu ſumptorum logarithmi faciunt logarithmum intermediæ ſubducto o. vel 1. pro diuerſitate tabularum.

2. Arithmeticè:

AD inueniendam extremam aliquam remotam data altera parte extrema remota, & intermedia. Multiplica ſinum intermedium cum ſinu toto, & diuide per extremum remotum ſinum complementi, & prodibit ſinus complementi reliquæ extremæ, quæ complementa debent intelligi, vt explicatum eſt.

Logarithmicè:

SVbducito logarithmum complementi extremę remotæ partis eodem ſenſu intellecti à logarithmo arcus intermediæ, & prodibit alterius extremæ remotæ logarithmus complementi, & hoc iuxta logarithmos Neperi: iuxta vero alios addendus eſt prius logarithmus ſinus totius logarithmo intermediæ, & deinde ſubductio inſtituenda, vt priùs.

3. Arithmeticè:

AD inueniendam intermediam partem datis extremis partibus proximis Tangentes proximarum partium, ſi in ſchemate ſint notata *compl.* complementorum ipſorum, ſi ſint notata *latera*, ipſorum laterum inuicem multiplicentur, & diuidantur per ſinum totum, & prodibit ſinus intermediæ: nempe ſinus illius partis, prout in ſchemate notata eſt ſinus lateris, vel ſinus complementi anguli, vel baſis.

Logarithmicè:

LOgarithmi tangentium ſimul addantur partium viciniarum, & ſubducatur o. ſecundùm tabulas Neperi; at 1. ſecundùm alias, & prodibit logarithmus intermediæ, & qui debet intelligi ſenſu ſupra explicato.

4. Arithmeticè:

AD inueniendum extremam partem viciniam data altera vicina, & intermedia. Multiplicetur ſimul ſinus intermediæ, vt ſupra intellectæ cum ſinum toto, & diuidatur per tangentem alterius extremæ vicinæ datæ, & prodibit tangens extremæ proximæ quæſitæ.

Logarithmicè:

A Sinus logarithmo intermediæ datæ eodem modo intellecto addito priùs o, ſeu logarithmo ſinus totius ſecundùm diuerſitatem tabularum ſubducatur logarithmus tangentis vicinæ partis cognitæ, & prodibit logarithmus tangentis alterius partis vicinæ.

Aduerte, quod Caualierius iſtas regulas affert propoſ. 33. ſed mutillatas, nec plenè explicatas.

EXPENSIO VI.

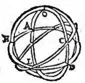
De ſubſtitutione figurarum, & laterum.

QVia Cum præcipit propoſ. vſum complementorum, ſi detur triangulum, cuius partes, pro quibus complementa ſumenda ſunt, ſint quadrante maiores ad calculum ineundum ſubſtituere aliquando triangulum alteri, latuſque alteri, prout res poſtulabit, oportet, & etiam commodiùs eſt, ſi calculus ſit obſcurus aliquando ob angulorum magnitudinem, vel parum ſecurus ob exilitatem; ideoque cognoſcere opus eſt tali caſu, & quomodo ſubſtitutio ineunda ſit.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Dato triangulo obtuſo pro illo acutum aſſumere.

VT ſecuriùs, & intelligibiliùs opus trigonometricum exequatur, operę pretium eſt dato triangulo omnibus angulis obtuſis, aut etiam duobus conſtante, illud in triangulum ſaltem duos acutos habens conuertere, quòd enim ſinus quadrantis ſint; hinc eſt quòd ſi latera ſint longiora quadrante, vt talia ſinus non habeant, nec tangentes, & per conſequens, nec ſecantes, nec complementa, & ideo reddatur calculus obſcurus, dùm debent aſſumi ſinus alterius quadrantis pro dati trianguli, cuius latera omnia quadrantē ſuperant, calculatione: Ideo ſatiùs erit datorum laterum complementa in obliquangulis, quæ claudunt angulum adiacentem, ſeu verticalem ſumere; illius enim trianguli lateribus inuentis, vel angulis ſtatim triāgulum datum ſecundùm omnes ſuas partes dignoſcitur.



Prob. Nam ſit triangulum ſcalenum, vel Iſoſcelles, AOCHL, anguliq; omnes obtuſi apud A apud L, & apud C. Si aſſumas complementa lateris ad ſemicirculū AOC V. g. & AHL, quæ ſunt LD, & DC habebis angulos ad L, & C acutos eadem baſi manente LC. Si ergo datis lateribus LHA, & AOC, & ideo complementis, & angulo eodem & æquali angulo D verticali quęratur baſis LC: ſoluto triangulo LDC inuenta erit, cùm ſit eadem. Si quærātur anguli ad baſim inuenientur acuti LCD, & CLD, vnde ablati à duobus rectis reſtituent obtuſos.

Quodſi angulus verticalis A notus non ſit, ſed angulus CLH adiacens lateri AHL, & notum ſit latus oppoſitum COA auferatur arcus AHL adiacens à ſemicirculo, ſicut & OAC, & remanebit CD, & LD, cum quo, & anguli CLH reſiduo CLD perficies operationē, & reperies V. g. angulū DCL, cuius cōplementū ad ſemicirculū notum erit, OCL obtuſus trianguli dati, Poteris etiā reperire baſim, quæ erit crus adiacens angulo CLD in triangulo CLD, & adiacens quoque in triangulo CLA. Poteris quo-

que

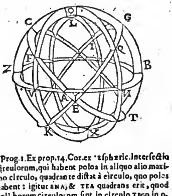
que inuenire angulum D verticalem qui ęquabitur angulo A trianguli ACL, & eodem modo ages crure V.g. AHL, & duobus angulis HLC, & OCL datis.

Si dentur tria crura maioribus à ſemicirculo deductis AHL, & GOA habebis DL, & DC complementa cum baſi LC iam nota. Quod ſi dentur tres anguli maioribus V. g. L, & C in triangulo ALC à duobus rectis detractis habebis DLC, & DCL cõplemẽta ad duos rectos acuta, cũ oppoſito apud D in triãgulo CLD. Vnde oppoſita latera DL, & DC prædictis angulis DLC, & LCD perquires, & erunt complementa laterum LHA, & COA ad ſemicirculũ.

THEOR. I. PROPOS. XLIX.

Trianguli anguli in latera, & in angulos latera permutari poſſunt complemento, maioris anguli pro latere ſumpto.

SIt triangulum GOQ, & anguli O menſura ſit arcus SN deſcriptus polo O; menſura anguli G ſit arcus CFAE; menſura verò anguli Q ſit arcus IL. Dico, *quod iſti arcus* SN, *&* IL *conſtituunt triangulũ, quod pro tertio latere obtinet* cõplementũ arcus GE ad ſemicirculum menſurantis angulum maiorem G, quod complementum eſt TE. Hoc autem triangulum eſt AFV; quod habet latus AV æquale arcui SN, VF æquale arcui LI, & AF æquale arcui ET complemento arcus EC, quod ſic probatur.



Prog. 1. Ex prop. 14. Cor. ex 1. ſphæric. Interſectio circulorum, qui habent polos in aliquo alio maximo circulo, quadrante diſtat à circulo, quo polos habent: igitur SNA, & TEA quadrans erit, quod poli horum circulorum ſint in circulo TEGO in O, & G, & interſectio eorum in A exiſtet; ſic quia ſuos polos habent in Q, & G circuli ILFV, & CFAT; eorum interſectio F à circulo prædicto GQ EK quadrante diſtabit: vnde ILF erit quadrans, & EAF quadrans erit.

Pr. 2. Item quia in circulo OQ polos babet CFET in Q, & SNAV in O eorum interſectio V diſtabit quadrante, & NAV quadrans erit, & LFV quadrans.

Pr. 3. Aufer itaq; NA cõmunis, à SNA, & NAV quadrantibus, & ideo æqualibus remanebunt SN menſura ãguli O, & AV æquales; ſic aufer à quadrãtibus ILF, & LFV cõponentes arcum ILFV erit LF æqualis IL menſurę anguli Q. Tandem quia arcus CFAE ſubtendit angulum maiorem G oſtendam iuxta tenorem propoſitionis ET complemento eſſe æquale AF tertium crus trianguli AFV: Siquidem TA quadrans, & EAF oſtẽſus eſt quadrans pr. 1. aufer itaq; EA communis, & remanebit AF ęqualis ipſi TE complemento, cui ET adde CF; & EA, & erunt tres arcus æquales toti CFAE menſure anguli O.

Probatur ſecunda pars, quòd anguli in latera queant commutari.

Progreſſ. 1. Circulus CAT in O ex prop. 1 polos habet, ergo circuli ZOB, OEX in ipſo CAT polos habebunt ex prop. 15. tract. 21. ſphęric. 1. p. vnde ex ipſius Cor. COG, & GQE quadrans erit: Sic quia ZAB in O polos habet, etiam ONX, & ZOB in ZAB circulo in communi puncto A circulorum ZOB, & CAT polos habebit. Vnde XCO, & OQN ex Cor. citat. quadrantes erunt, & CZ menſura anguli A. Quia ergo ZCO, & COG oſtenſi ſunt quadrantes, ablato cõmuni arcu CO arcus ZC menſura anguli A æquabitur lateri OG.

Progreſſ. 2. Circulus quoque OFK polo Q ductus eſt, ergo in ipſo ONX circuli, & GEK polos habebunt. Quare interſectio Q à circulo OFK diſtabit quadrante, & KEQ, & XNQ, & LCQ quadrantes erunt, ſed iam GQE oſtenſus eſt quadrans, & nunc KEQ quadrans demoſtratur; ablato ergo communi arcu EQ remanent arcus KE, & GQ æquales, & quia GEX oſtenſus eſt in circulo CET, & OFK polos obtinere, ideo habebit in communi eorum puncto F, vnde, vtpote ductus polo F arcus XE menſurabit angulum F, qui æquatur lateri GQ ex 1. p. par.

Progr. 3. Circulus quoque ONX in circulo OFK, & circulo ZVAB oſtenſus eſt habere polos, ergo obtinebit eos in communi eorum puncto V, ideoque anguli V arcus LOQN menſura erit. Verùm OQN p. 1. oſtenſus eſt quadrãs, talis quoq; eſt arcus XNQ, vt progr. 2. ablato ergo communi arcu QN remanebunt æquales OQ, & NX, eſt autem NX vſque ad ſemicirculum LONX menſurę anguli V arcus LOQN complementum: quare arcus angulorum F, & A in latera OG, & GQ ſunt mutata, ſicut angulus FVA in latus æquale complemento NX.

PROBL. III. PROPOS. L.

Datis lateribus reperire angulos, & datis angulis latera inuenire.

QVoniam laborioſa eſt operatio illa, qua datis lateribus anguli reperiuntur, multiſque praxibus impedita; ideo hæc fortè erit facilior; hoc autem fit angulos in latera cõmutando. Nam ex 1 par. pr. antec. dato triangulo GQO, cuius latus QO, ſit G 80. QR G. 70. & QG G 60. Igitur ex prec. trianguli AFV angulus F erit, cuius menſura EX, erit 70. angulus A cuius menſura CZ erit 60. & menſura anguli V; nempe arcus NOL erit 100. ex notis itaque angulis trianguli AFV reperiemus latera, quæ erunt anguli prioris propoſiti trianguli GQO, nempe AV erit æquale O anguli menſuræ NS, & VF anguli Q menſuræ IL, & tandem complementum CFAE lateris FA, vel æqualis ET erit menſura anguli G.

Sic ex ſecunda parte pręced. propoſ. Si dentur anguli GQO, nempe arcus SN, at anguli OQG arcus IL, & complementum ad duos rectos anguli G conſtituetur triangulum AFV; cuius reperies angulos EX, & erit latus prioris GQ, & CZ, & erit latus GO, & complementum anguli V ad duos rectos, nempe NX, & erit QO.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Sinus loco primam ſedem occupante ſubſtituere radium, qui ſecundoloco reperiatur in regula proportionum.

ADmodum facilis eſt diuiſio, cum debemus diuidere numerum per radium; quia tot numeri ad dexteram abiicienti, quot ziſræ in radio inueniuntur V. g. ſi diuidamus 646789 per 100. diuiſus erit numerus, ſi excludantur duo numeri extremi dextri 89.& 6467. erit quotiens, fractioque erit $\frac{89}{100}$. Ideo prouidendum ſemper eſt, vt facilitatis gratia ſinus totus, ſeu radius primum locum ſibi aſſumat.

Loco igitur ſinua pone radium primo loco, ſed ſecundum occupet ſecans complementi arcua.

Probatur. Quia vt ſinus alicuius arcus reſpicit proportione radium; ſic radius reſpicit ſecantem complementi arcus, vt dictum eſt propoſ.26. tract. 20.

Quod ſi ſit ſinus complementi arcus, ſeu anguli in primo loco, & radius in ſecundo Vice complementi radius in primo loco exiſtat, ſed loco ſecundo ſecans dicti arcus exiſtat; Ratio eſt, quia ita eſt ſinus complementi arcus ad ſinum totum; vt ſinus totus eſt ad ſecantem ipſius arcus ex propoſ. 26. tract.20.

PROBL. V. PROP. LII.

Loco ſecantis alicuius arcus, ſeu complementi primum locum occupantis ponere radium.

LOco ſecantis primo loco radius collocetur ſecundo ſinus complementi ipſius arcus, ſeu ſi ſecans ſit complementi alicuius arcus; primo loco ponatur radius, ſecundo ſinus ipſius arcus, & cætera fiant, vt regula aurea præcipit. Ratio eſt fundata in citatis propoſ.26. tract.20.

PROB. VI. PROPOS. LIII.

Si tangens alicuius arcus, ſeu complementi primo loco reperiatur radium vice eius ponere.

POnatur radius primo loco, ſecundo tangens complementi ipſius arcus; Quod ſi ſit tangens complementi primo loco; ponatur radius; ſecundo verò tangens ipſius arcus.

Probatur ex propoſ.24. tract.20. Nam vt eſt tangens ad radium, ita radius ad complementi illius arcus tangentem, & viceuerſa, vt tangens complementi ad radium, ita radius ad tangentem alicuius arcus. Vnde cum ſit eadem proportio, alterum loco alterius ſubſtitui poteſt.

COROLLARIVM.

NE dum ob facilitatem anguli acuti aliquando obtuſis ſubſtituendi; ſed etiam ob ſecuritatem, & anguli ſemper illi ſperuendi, nec adhibendi, quantùm fieri poteſt, qui ſinua extremorum arcuum V. g. 1. aut m.30. & cæt. exhibent; nam ob angulorum, & laterum exilitatem, & breuitatem veram deinde quantitatem quæſiti lateris, & anguli non tribuunt, ſic ſi adhibenda ſint complementa nimis breuia V.g. complementi arcus 89. m.30. aut ſimile, & poſſit alia regula vti non adhibito complemento m 30. illius arcus 89. m.30. debea non vti, & cùm datur electio adhibẽda ſunt latera mediocra, quàm fieri poſſit, & anguli mediocres, & per illos exquirere, quod placet reliquorum.

EXPENSIO V.

De triangulis obliquangulis ad rectangula reducendis per tres operationes.

MOdus, quo triangula ſphærica obliquangula ſoluuntur transfundendo illa in duo rectangula operoſior, quidem; at captu facilior, nullaque prævia demoſtratione indiget: quare poſt rectangula ſoluta, cùm in illis propoſitionibus fundetur, ſubnectendus eſt.

PROBL. I. PROPOS. LIV.

Cognitis duobus trianguli obliquanguli cruribus, & angulo oppoſito, & altero ſpecie noto; angulum reliquum reliquo cruri cognito oppoſitum reperire.

SIt triangulum obliquangulum GAB, in quo ſit cognitũ crus AB, & crus AG, & angulus cruri AB oppoſitus G: docet propoſitio angulum a reliquo cruri oppoſitum reperire.

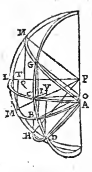
Quia ab angulo A ſuper latus GB poteſt cadere arcus perpendicularis AC, ſeu cadat intra, cum anguli ſpetie conueniunt, vt in propoſito triangulo BAB, ſeu extra, cum diſſentiunt, vt triangulo DAB, hæc inueniatur: Datis itaque angulis ſpecie concordibus ſinum CO arcus normalis AC primò inuenies.

Datur enim baſis AG, & angulus adiacens G: quare ex prop. 3. h. crus oppoſitum normale AC angulodato G inuenire poteris, quo obtento.

Dato crure AC, & baſi AB deinde ex 18. huius poteris inuenire angulùm oppoſitum dato cruri AC, & ideo arcui AGI qui eſt a quæſitus. Quod ſi anguli ſpecie diſſoneut, & cognitus ſit obtuſus V.g. ABD, aſſumatur eius complementum ABC, & inueniatur AC, quo obtento.

Data baſi AD, & arcu AC inuenies angulũ oppoſitũ apud D, & deinde reliqua ſi placuerit reperies V.g. ex 17.h. data AB baſi, & CA reperies angulum BAC, ſcilicet ſinum MT, & arcum ML, & dato AG, & AC reperies angulum CAG, ſcilicet ſinum QN, & hinc arcum NL, quæ inuenta copulabis, ſi anguli cogniti fuere ambo acuti, vel obtuſi, vt in triangulo GAB. Deduces minorem à maiori, ſi fuere ſpecie diuerſi, vt in triangulo DAB. Et idem ages ſi quæras baſim; nam inuenies duos ſinus G in triangulo GAC, & BT in triangulo BAC, cuius duo anguli ſpecie conformes, & arcus eorum vnies, & fiet baſis BG. At in triangulo DAB, in quo anguli

ſpecie



ſpecie difformes inuertia ſinubus DY, & BI arcus eorum BC minorem à DBC maiori ſubduces, & reſtabit DA, & ita totum triangulum notum erit: Cur autem in concordibus angulis vniendi arcus in diſcordibus ſubducēdi ratio eſt, quia perpendicularis in concordibus intra cadit, in diſcordibus extra ex propoſ.30.& 31. Tract. 23.

PROBL. II. PROPOS. LV.

Duobus angulis, & crure oppoſito datis inuenire crus oppoſitum alteri eorum.

SIt datū triangulū obliquangulū CAB in prec. fig. & anguli G, & B concordes ſpecie, & crus AG, & oporteat reperire crus AB oppoſitum angulo G.

Quoniam poſſumus deducere arcum perpendicularem intra triangulum cadentem, vt AC; is inueniatur.

Datur enim baſis AG, & angulus G, vnde ex cit. propoſ.3. huius inuenies crus oppoſitum AC perquirendo ſinum eius CO. Deinde dato arcu, crureque oppoſito AC, & angulo B inuenies baſim AB ex propoſ. 81. huius; habita verò baſi AG, & crure AC inueniēs reliqua, vt ſupra.

Detur deinde triangulum DAB, in quo anguli ſpetie diſſentiant, & ſit notū crus AB, & anguli, vt ADB, & ABD. Anguli complemento ABC, inueniatur arcus perpendicularis AC inueniendo ſinum OC, quo obtento crure AC perpendiculari, & angulo D inuenietur baſis AD ex cit. propoſ. 81.

PROBL. III. PROPOS. LVI.

Duobus cruribus, & angulo datis altero ſpetie noto, baſim inuenire.

DEtur triangulum AGB, in quo anguli ſpecie conſentiant G, & B: At G angulus ſit quoque notus quoad quantitatem ſicut, & crura AB, & GA deſidereturque baſis BG.

Quoniam datur AG baſis, & angulus G, inueniatur perpendicularis arcus AC demiſſus ſuper incognitam baſim ex 3. huius.

Deinde arcu perpendiculari AC, & baſi AG ex propoſ.30. inuenies crus, & arcum GC.

Poſtea arcu eodem inuento normali AC, & arcu dato AB inuenies arcum BC ex prop. cit. 30. & ſimul arcus inuentos BC, & CG copulabis, & fiet tota baſis, arcuſque BG.

Si verò anguli ſpecie diſſonent, vt in triangulo ADB pro obtuſo angulo ABD angulum complemēti CBA accipies, & inuenies arcum normalem AC, quo & baſi BA reperies ex cit. propoſ. BC, & rurſùs arcu AC, & baſi AD arcum DBC, à quo ſubducea baſim priùs inuentam BC, & habebis DB pro arcu reſiduo, & baſi quæſita.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Duobus angulis, & crure datis vni eorum oppoſito baſim interpoſitam angulis reperire.

DAto arcu GA, & anguli G, & BA noto ſpecié inueniatur, vt ſupra normalis arcus CA, vt propoſ.3.h. & deinde ſi anguli ſpecie conſentiant, vt in triangulo GAB. Dato crure AC, & angulo oppoſito G, inueniatur crus alterum GC adiacens angulo dato G ex 19. huius.

Sic dato crure normali AC, & angulo B, ex eadē inuenietur arcus BC, & ſimul vniātur CB, & GA. At ſi ſpecie diſcordēt vtendum eſt angulo vicario, & complemento ex eadem propoſ. V.g. in triangulo ADB dato crure AC, & angulo ABC inueniendus arcus BC; rurſùſque eodem crure normali dato, & angulo D inueniendus eſt arcus DBC, alterque minor ab altero ſubducendus, vt remaneat arcus, & baſis DB quæſita.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

Duobus cruribus, & angulo oppoſito vni eorum datis, & altero ſpecie noto angulum verticalem inuenire.

DEtur triangulum obliquangulum GAB, & angulus G, duoque crura quantitate nota AG, AB, anguluſq; B notus ſpecie, nempe alteri cōſonus Angulo G, & Crure GA crus normale AC reperiemus, vt ſupra. Deinde angulū CAB apud A ex pr.15. huius ſcilicet arcum NL. Deinde dato crure normali AC, & baſi BC inueniatur angulus BAC apud A ſcilicet arcus LM ex 17. huius. & anguli reperti BAC, & GAC, ideſt arcus NL, & LM ſimul vniantur, & fiet totus angulus BAG.

Quod, ſi anguli ſpecie diſſonent, vt in triangulo DAB; tunc reperiatur ex 15. huius angulus BAC ſcilicet arcus ML vtendo complemento ABC pro dato angulo obtuſo ABD, & rurſùs crure AC, & baſi AD, quæratur angulus DAC, ſcilicet arcus HML ex 17. huius, ſubducaturque alter ab altero, & fiet angulus quæſitus DAB, videlicet arcus HM. Quod ſi notus quantitate ſit acutus angulus eodem modo efficies, ac ſupra, & angulo D, & crure AD reperies normale crus AC. Deinde crure AC, & angulo D angulum DAC, ideſt arcum HML ex 15. h. & hinc crure normali AC, & baſi AB angulū CAB, ideſt arcū ML extrahes, atq; angulum BAC minorem ſubducea à maiori, prodibitque arcus HM exoptatus.

PROBL. VI. PROPOS. LIX.

Duobus angulis, & crure oppoſito datis angulum verticalem conquirere.

IN triangulo obliquangulo GAB, in quo anguli dati G, & B ſpecie conueniunt, & quantitate innoteſcunt, detur crus AG.

Itaque ex 3. huius dato crure AG, & angulo G inuenies crus normale oppoſitum AC. Poſtea ex propoſ. 15. inuenies angulum GAC, ideſt arcum NL

apud

àpud A data baſi AC, & angulo B.

Deinde dato angulo B, & crure oppoſito AC inuenies angulum alterum ex propoſ.41. BAC hoc eſt arcum ML, quos ſimul copulabis, nempe angulum CAG, & CAB, & efficies totum angulum GAB hoc eſt arcum NLM.

Quod ſi anguli ſpecie ſint abſoni, dati anguli B obtuſi cōplemento vtere, & crure BA dato, anguloque complente ABC inuenies AC ex 15. huius.

Rurſuſque crure AC normali, & angulo D in triangulo DAC inuenies angulum DAC hoc eſt arcum HML maiorem, à quo ſubduces angulum BAC, ideſt arcum ML, & reſiduus erit exoptatus angulus DAB. Inuenies autem angulum CAB ſe, arcum ML dato anguli ABD complemento ABC, & crure oppoſito AC ex prop.48. huius.

THEOR. VII. PROPOS. LX.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus comprehendentibus baſim, & angulos inuenire altero angulo ſpecie cognito.

COgnitus detur angulus B quantitate, & duo crura BA, & BO comprehendentia ſint quoq; nota, & alter angulus G notus ſpecie, nempe quòd ſit quoque, vt A acutus.

Dato itaque angulo B, & baſi AB inueniatur crus normale CA ex 3.prop.h. & ex 15.h. angulus BAC.

Deinde crure, & baſi AB, & angulo eodem B inueniatur arcus BC ex propoſ.13. huius, quem ſubduces à noto crure BO, & habebis crus CO.

Hoc itaque crure CG, & AC normalibus inuenies baſim AO ex prop.7.h. & angulū G, & CAG ex 15.h.

Quod ſi anguli ſpecie differant; Ex dato angulo DBA, & crure AO, quòd datus angulus ſit obtuſus DBA, vtere complemento ABC, & baſi AB, inuenies crus AC normale, quod extra cadit.

Deinde angulo B obtuſo & crure, ſeu baſi AB ſi detur obtuſus angulus inueniatur crus AC ex pr. 13.h. quod addes noto cruri BD, & efficies arcū DBC.

Quo arcu DBC, & AC normalibus inuenies baſim quæſitam AD ex 7.h. & angulum D.

Quod ſi angulus ſit D acutus angulo D, & baſi DA inuenietur arcus DBC, à quo ſubduces crus notum BD, & obtinebis crus BC.

Hoc itaque crure BC, & crure AC normalibus inuenies AB quæſitam baſim ex 7.h. & angulū BAC, quem ſubduces ab angulo recto, & fiet ang. ABD.

PROBL. VIII. PROPOS. LXI.

Dato crure interiacente, ſeu baſi, & duobus angulis ad baſim angulum verticalem reperire.

IN triangulo obliquangulo ABG detur baſis AG, & anguli vnti ſint G, & A. & perquiratur angulus B, cum anguli ſpecie concórdant. Itaque data baſi AG, & angulo G perquiremus crus normale AC. Deinde ijſdem datis angulum GAC ex prop.15.h. quem ſubducemus à toto angulo dato GAB, & reſtabit angulus BAC.

Hoc itaque angulo CAB, & crure AC perquiremus reliquum angulum ABC ex propoſ.5. huius, qui erit angulus verticalis quæſitus B oppoſitus baſi AG.

Quod ſi detur triangulum BAD, in quo anguli B, & A ſpecie diſſonant, & baſis detur BA. Complemēto anguli CBA, & baſi BA inueniatur crus normale AC ex 3.h. & ijſdē datis āgulū BAC ex 15.h. quē addes angulo acuto noto DAB, & efficies ang. DAC.

Hoc itaque angulo acuto DAC, & crure AC perquires alium angulum verticalem apud D ex prop. 5. huius.

PROBL. XI. PROP. LXII.

Dato crure interpoſito, & angulis adnexis reliqua crura perquirere.

EXponatur triangulum obliquangulum GAB, cuius nota baſis AG, & anguli ad baſim A, & G, & perquiratur aliquod crurum AB, vel BG.

Dato itaque angulo G, & baſi AG ex 3. huius perquiretur crus normale AC.

Deinde baſi AG, & angulo G crus normale GC adhærens angulo G ex prop 13. huius.

Poſtmodum angulum GAC ex propoſ.15. huius, quem ſubduces à toto noto GAB, & reſtabit angulus CAB, quo CAB, & crure inuento AC perquires reliquum crus oppoſitum BC ex 3. h. & crus adiacens AB ex 13. huius. Iunges tandem duo crura GC, & BC, & obtinebis GB, idem ages, ſi anguli dati ſint ſpecie diſſoni, ſed adhibita cautela ſubductionis vnius ab alio.

Itaq; omnes caſus obliquangulorum ſoluuntur per reductionem ad duo rectangula exceptis ſolùm duobus, nempe cùm dantur tres anguli, vel tres arcus. Nam per doctrinam pręcedentem iſti duo caſus ſolui nequeunt, cùm in rectangulo non detur, niſi vnica res, nempe vnicū crus, vel vnicus angulus, reliqua enim, quæ dantur non ſunt rectanguli, ſed obliquanguli cum in rectangulo reliqui anguli vnus ſit rectus, alter ſit ſemper aut maior, aut minor eo, qui datur in obliquangulo, & idem dices de cruribus V. g. in triangulo ABG crus BG, & AB eſt maius crure AC, vel crure GC, vel BC rectanguli. Sicut angulus CAB eſt maior angulo CAB, vel CAG, angulus verò B, vel G minor, quam rectus ad C. Vnde cum non niſi vnica pars rectanguli, tunc detur ex præcedentibus doctrinis, in quibus duæ ſemper partes rectangulorum ad ea ſoluenda requiruntur, menſuris ſubijci nullo modo queunt.

EXPENSIO VI.

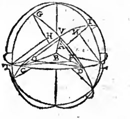
De obliquangulorum ſphæricorum ſolutione deducendo perpendicularem, ſed per duas operationes operi conſignata.

MOdi quos hìc tradimus ex parte quidem prædictis faciliores; Nam non niſi duas operationes adhibent; ex parte verò difficiliores, quòd in ſecunda operatione ſinus totus non adhibeatur; quare ne dum multiplicatione, ſed etiam diuiſione opus ſit; præcepta tamen omnes caſus ſoluunt, & totam trigonometriam obliquangulorum ſphæricorum amplectuntur.

THEOR. I. PROPOS. LXIII.

In omni triangulo ſphærico rectangulo ſinus angulorum eandem proportionem ſeruant ad ſinus crurum oppoſitorum.

SIt triangulum rectangulum VDC, & rectus angulus V, in quo anguli, ſiue æquales, ſeu inæquales D, & C ſinus toti LB, & BT, & BI, & BG, ſinus cruris VD ſit DA, ſinus verò cruris VC ſit AC, ſinus cruris DC, ſint CF, & DO. Sinus verò angulorum ſint TH, & LN, quòd diſtent ab angulis C, & D, quadrante ob ſinus BT, & BL totos cum duo arcus IG, & DT ex deſin. anguli præſupponantur quadrantes; ſicut etiam CL, & CI; vt enim arcus LI, & GT ſit angulorum menſura vtrique arcui perpendicularis eſſe debet. Vnde, & eorum poli debent eſſe in D, & C ex prop. 15 tract. 21. Coroll.



Probatur propoſ. arcus DT, & CL ſunt æquales, vtpote quadrantes, & DC arcus idẽ, vnde æquales erunt ſinus toti BL, & BT; necnon, & DO, & CF, vt eiuſdem arcus; Propterea que erit FC ad BT, & ON ad BL, vtpote æqualium eadem proportio: Verùm vt CF ad BT, ita eſt CA ad TH ex I. huius Cor. & vt DO ad BL, ſic eſt DA ad LN. Quare ex 16. l. 5. vt eſt CA ad HT ſic erit DA ad LN.

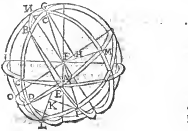
COROLLARIVM.

VNde colligitur quoque *permutando* ita eſſe ſinus CA ad ſinum AD crurum, vt angulorum ſinus HT ad LN.

THEOR. II. PROPOS. LXIV.

In omni triangulo obliquangulo quoque ſinus arcuum ad ſinus angulorum ſunt in eadem proportione.

SIt triangulum obliquangulum EBD, & ducatur perpendicularis arcus EC. Itaque ſinus anguli B in rectangulo triangulo ECB erit IK, & cruris normalis ſinus AC; ſinus verò baſis AB. Sic in triangulo rectangulo ECD ſinus anguli erit GH ſinus cruris oppoſiti normalis idem AC; ſinus verò baſis AD.



Igitur ex præced. vt eſt AB ſinus baſis ad FN ſinum totum, ſic AC ſinus cruris ad IK ſinum anguli B. Et pariter, vt DA ſinus baſis ad FO, ſeu FN ſinum totum, ſic AC cruris ſinus ad GH ſinum anguli D. Quare *inuertendo* FN erit ad DA, vt GH ad AC; Proportio itaque erit *perturbata*, vt vides.

Baſis AB ad FN Rad. & FN ad AD,

vt

vt GH ad crus AC ad IK angulum.

Vnde ex *æquo* AB erit ad AD, vt GH ad IK: & *permutando* AB erit ad GH, vt AD ad IK. Et idem ſequetur, etiam ſi perpendicularis extra cadat, vt potes conſiderare ſi cogites ED arcum eſſe ad eandem partem, quâ reperitur arcus EB.

PROBL. I. PROPOS. LXV.

Datis duobus cruribus, & angulo in obliquangulo ſphærico angulum reliquum oppoſitum reperire.

CVm ex præced. hæc tria data, & quartum quæſitum ſint proportionalia, datis tribus quartum regula trium reperire poſſumus, ponemuſque primo loco ſinum cruris dati AD, ſecundo anguli dati IK ſinum, tertio cruris alius dati ſinum AB, & prodibit ſinus GH anguli quæſiti D oppoſiti.

PROBL. II. PROPOS. LXVI.

Datis duobus angulis, & vno crure reliquum crus oppoſitum reperire.

EX 64. propoſ. huius data, & quæſitum ſunt quatuor proportionalia; Quamobrem Poſitis primo loco ſinu anguli dati GH; ſecundo cruris dati ſinu AE, tertio anguli dati ſinu IK regula aurea exprimet quartum quæſitum ſinum AD cruris oppoſiti ED.

THEOR. III. PROPOS. LXVII.

Si in triangulo obliquangulo ſphærico perpendicularis intus cadit, ſinus complementi anguli maioris apud baſim ad ſinum complementi alterius anguli minoris ad baſim eſt, vt ſinus anguli minoris ad ſinum maioris, in quos verticalis angulus diuiditur ab arcu normali.

TRiangulo ACB obliquangulo ſuper latus CB cadat perpendicularis arcus AD, & diuidat in duos arcus inæquales BD, & DC. Arcus verò EF. Sic complementum anguli C. At EG complementum anguli B; qui ponuntur ducti polo B, & C, vt oſtendimus propoſ. 4. Tract. h.

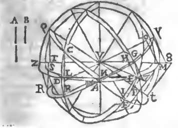
Dico itaque, quod EG complementi ſinus EH anguli B eſt ad ſinum EI complementi FB anguli C, vt ſinus RS anguli RAZ apud A ad ſinum QT alterius anguli ZAQ apud A, quos perpendicularis

intus

Digitized by Google

lntus cadens facit, dum angulum verticalem apud A in duo diuidit.

Probatur. Iam ex dictis propoſ. 1. h. EN ſinus complementi EA arcus normalis AD eſt ad radium MV, vt ſinus EH complementi anguli A eſt ad MO



ſinum anguli GAE, & ideo ZAR apud A, qui vtpote ad verticem æquantur, & ideo ſinui RS: Sic idem EN ſinus complementi arcus normalis AD, eſt ad ſinum totum VM, vt ſinus EI complementi anguli C ad ſinum MP anguli apud A æquali angulo ad verticem ZAQ, & ideo ſinui QT. Cum ergo ſint in eadem proportione, quæ eſt AN ad MV radium, tum EH ad RS tum EI ad TQ ex prop. 16. lib. 5. erit eadem proportio EH complementi anguli A ad RS ſinum anguli ZAR, vt EI minoris C complementi ſinus ad ſinum TQ anguli maioris ZAQ apud A. Quare *permutando* EH erit ad EI, vt RS ad TQ.

Idem quoque ſequitur etiam ſi perpendicularis extra cadat, vt quilibet cogitare poterit ſi imaginetur QAT arcum ad alteram partē eſſe arcus RAY.

THEOR. III. PROPOS. LXVIII.

Data ſumma duorum angulorum, & eorum proportione reperire caſū arcus normalis.

HVius problem. fundamentum latiùs ſupra explicauimus pr. 21. h. in triangulis planis obliquangulis, vbi probauimus. Quod ſic ſe habet ſumma duorum ſinuum ad eorum differentiā, ſicut tangens medietatis arcuum ad tangentem ſemidifferētię eorū. Quare etiā ſi adſit quęlibet alia proportio V. g. lineę A ad lineam B; quæ ſit, vt ſumma duorum laterum ad eorum differentiam ex 16. l. 5. erit etiam linea A ad lineam B, ſicut tāgens medietatis arcuum ad tangentem ſemidifferentię eorum.

Detur itaque quælibet linea V. g. EI in præſenti fig. quę ſit ad quamlibet aliam EH, vt QT ad RS ſinus. Erit itaque *diuidendo* EI ad differentiam quā differt ab EH, vt QT ad differentiam ſuam ab RS, & *inuertendo* quoque differentia EI ab EH ad EI, vt differentia QT ab RS ad ipſam QT.

Et quia ponitur EI ad EH: vt QT ad RS erit etiam *componendo* EI ad EI cum EH: vt QT ad QT cum RS. Quare ex *æquo* differentia, qua differt EI ab EH erit ad ſummam EI cum EH, vt differentia, qua differt QT ab RS ad ſummam QT, & RS.

Proptereaque *inuertendo* ſumma EI cum EH erit ad differentiam earum; vt ſumma ſinuum arcus QT & RS ad differentiam ipſorum. Sed vt ſumma ſinuum QT, & RS ad ipſorum differentiam, ita eſt tangens medietatis arcuū QZ, & RZ, ideſt arcus RQ ad tangentē ſemidifferentiæ eorū QZ, & RZ arcuum. Ergo ex 16. lib. 5. vt ſumma ſinuum EI, & EH complementorū ad ſemidifferentiam eorum, ita eſt tangens dimidij arcus QZ, & RZ, ſcilicet dimidiati arcus RQ ad tangentem ſemidifferentiæ ipſorum.

Primo itaque ſubducendus eſt ſinus EI ab EH, vt habeatur differentia. Poſtea EI, & EH in vnam ſummam ſunt redigendi, vt ſummam conſequamur. Hinc arcus datus QR in duo partiendus, & medietatis tangens ex tabulis excerpenda.

Adhibita poſtea regula trium. Dices ſi ſumma linearum, ſeu ſinuum proportionalium datorum dat differentiā eorū: quid dabit tangens ſemiſummæ angulorū, & prodibit tangens ſemidifferentiæ eorum. Hæc itaque tangens quæſita in tabulis exhibebit arcum, qui additus medietati arcus QR dabit angulum maiorem ZAQ, ſubductus relinquet minorem ZAR, & punctum Z erit illud, in quod arcus normalis AZ cadit,

THEOR. IV. PROPOS. LXIX.

Obliquanguli trianguli tribus angulis datis eius latera reperire.

PRimo ſecundùm præ. doct. angulorum C, & B datorum complementis EI, & EH, & ſemiſumma arcus QR anguli QAR inuenies ſingulos CAD, & BAD angulos, nimirum arcus QZ, & RS; ſiquidem ex propoſ. 67. ita eſt EH ad EI, vt SR ad TQ. Et ſi triangulum exhibitum habeat vnicum angulum obtuſum, ſumes pro angulis ad baſim duos acutos, quod ſi obtineat duos obtuſos, illos conſtitues pro angulis ad baſim ſemper ſpecie concordes. Vnde ſemper perpendicularis intra triangulum cadet. Quare in triangulo rectangulo C A D habentes duos angulos ad baſim notos, nempe angulum C, & CAD ex propoſ. 23. huius inueniemus baſim AC, & ex prop. 35. crus CD. Poſtea dato angulo B, & DAB ex propoſ. 23. baſim AB inuenies, & ex prop. 35. crus DB, addeſque cruri CD, quoniam anguli ſpecie concordes aſſumpti fuere, & obtinebis tria latera nota AC, CB, & BA.

PROBL. V. PROPOS. LXX.

Dato crure oppoſito, & duobus angulis, & altero ſpecie noto, angulum verticalem manifeſtare.

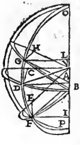
DEntur anguli B, & C, & crus oppoſitum CA ipſi B: Priùs itaque reperies angulum apud A in triangulo ACD dato pro baſi crure AC, & angulo acuto C ex prop. 15. h. ſcilicet QZ arcum.

Secundo, quia ex prop 67. ita eſt ſinus EI complementi anguli dati C ad ſinum PM, vel æqualem TQ, vt EH ad MO, vel æqualē SR ex dato EI complemento anguli C, & inuento ſinu TQ, & EH complemento anguli A reperiemus MO, ideſt SR, & ſi anguli ſpecie conſentiant, ſimul arcus addendi, quod ſi ſpecie differant, tunc pro angulo obtuſo eius complementum aſſumendum eſt, & inuenti anguli, ſeu arcus minor à maiori eſt ſubducendus.

THEOR. IV. PROPOS. LXXI.

Sinus ſecundi arcuum in obliquangulo triangulo, in quos à perpendiculari diuiditur baſis, ſunt inuicem, vt ſinus complementorum arcuum ipſis conterminalium.

SInt AG, & AF ſinus arcuū conterminaliū FA, & GA & GH, & FE eorum complementorum; arcus



verò, in quos diuiditur baſis FD, & DG, & ſinus complemẽtorum L G, & IF. Dico, *quod ita ſe habet* LG ad IF, vt GH ad FA.

Probatur ex prop. 6. h. Nam, vt eſt HG ad GL; ſic eſt CD ad radium VD ex propoſ. 6. huius; Item, vt FE ad FI; ſic CD ad radium DV. Quare ex propoſ. 16. lib. 5. GH erit ad OL, vt FA ad FI; cum eidem proportioni CD ad DV conſonent. Idem autem oſtendetur ſi perpendicularia extra cadat, vt ex te videre potes.

PROBL. VI. PROPOS. LXXII.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus illum claudentibus baſim inuenire.

OFferatur angulus G, & crus FG, & GF, alterq; angulus F ſpecie angulo G conſentiat.

Primo dato angulo G, & baſi GH reperies crus HD adiacens ex propoſ. 13. huius, quòd à dato crure GF ſubduces, & conſequeris DF.

Itaque primo ſinu LG complementi cruris reperti DG, ſecundo loco ſinu FI complementi DF reſidui cruris dati, & tertio ſinu ſecundo HO arcus conterminalis EG reperies ſinum EF complementi baſis BF quæſitæ angulo G verticali oppoſitæ. Hoc autem docuimus alio modo propoſ. 60. h. Quod ſi alter angulus ſpecie diuerſus ſit, vteris complemento, ſi angulus verticalis ſit obtuſus, arcumque inuentum minorem à maiori dato ſubduces, vel ſi ſit acutus ab arcu inuento maiori minorem datum pro inuento primo, quo, & cæt. vt priùs.

PROBL. VII. PROPOS. LXXIII.

Datis duobus cruribus, & angulo oppoſito, reperire baſim altero angulo ſpecie noto.

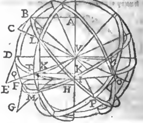
DOcuimus propoſ. 56. h. id alio modo. Dentur itaque duo crura GO, & AF, & angulus G, ſed F ſit tantùm ſpecie notus. Primo angulo G, & crure GA reperiemus crus GD ex 13. h.

Deinde fiat, vt HG complementi cruris GD ſinus ad FE ſinum cõplemẽti alius cruris BF; ſic ſinus LO complementi arcus inuenti GD ad IF ignoti arcus complementum, & duo inuenti arcus ſimul addantur GD, & DF, & fiet GF baſis, ſi anguli ſpecie concordent: quod ſi diſſonent alter ab altero ſubducatur, & reſiduum erit arcus quæſitus.

THEOR. V. PROP. LXXIV.

Tangentes ſecundæ laterum conterminalium arcui normalis ſunt inuicem in proportione, vt angulorum ſinus ſecundi, in quos triangulum à normali diuiditur.

TRiangulo LMT latera arcui TD conterminalia ſint TM, & TL; quorum complementorum tangentes ſunt BC, & FG: Arcus verò angulorum ſunt FD, & AD; quorum ſinus ſecundi AB, & HF. Dico itaque, quod vt ſe BC tangentes crurum ſecundæ; ſic AB ad HF ſinus ſecundi angulorum.



Probatur. Nam ex propoſ. 20. huius Radius VD eſt ad ſinum complementi anguli, nempe AB, vt tangens DE complementi cruris adiacentis IT ad tangentem BC complementi baſis. Vnde, & *conuertendo* BC erit ad DE, vt AB ſinus ad radiũ DV, ſed ex eadem propoſ. 20. in altero triangulo, vt DE ad FG, ſic VD radius ad ſinum HF. Ergo ex *æquo* BC erit ad FG, vt AB ad HF.

PROBL. VIII. PROPOS. LXXV.

Datis duobus cruribus; & angulo verticali angulos reliquos obtinere; ſi alius angulus tertius ſpecie ſit cognitus.

SInt data crura MI, & LT, & angulus T verticalis. Quia eſt CB tangens ſecunda ad FG tangentem ſecundam, vt BA ad FH ſinus complementorum angulorum datur itaque proportio BA complementi angulorum ad FH, in quos verticalis eſt diuiſus in tangentibus CB, & FG; datur quoq; ſumma anguli FTA eorundem angulorum, ideoque ex 48. h. ſi fiat, vt CB, & FG ſumma tangentium ſecundarum crurum ad ipſarum differentiam, ſic ſemiſummæ arcuũ DB, & DF tangens ad ipſorũ ſemidifferentiæ tãgentẽ reperies ſemidifferentiã arcuum DA, & FD, quam ſubtrahes, & conſequeris minorem arcum DF addes, & obtinebis maiorem BD arcus angulos at D, & DIF mẽſurantes. Vnde dato angulo BAD, & latere LT conſequeris angulum L, ſic dato angulo DIF, & latere MI conſequeris angulum M, ex 13. h. Quos vnies angulis ſpecie conſentientibus: ſubduces alterum ab alio, ſi ſpecie diſſonent.

PROBL. IX. PROPOS. LXXV.

Datis duobus angulis, & baſi exquirere angulum verticalem.

DEtur angulus L, & M, & baſis LM, & in animo ſit reperire angulum LTM. Ex complementorum angulorum tangentibus NO, & OP erit nota proportio MX ad XL ſinus ex 77. h. vnde reperietur MX, & XL ex prop. 68. h. deinde angulo M, & ſinu MX exquiretur angulus TXM ex prop. 5. h. rurſuſque angulo L, & LX, angulus TXL, & ſic totus angulus MTL notus erit, ſi ſimul iungantur, eo quod anguli ad baſim ſpecie conſonent, vel ſubducatur alter ab alio, ſi diſſoneat.

PROBL.

PROBL. IX. PROPOS. LXXVI.

Datis duobus cruribus, & angulo oppoſito angulum verticalem conſequi alio tertio angulo ſpecie noto.

DEtur crus LI, & MI, & angulus L oppoſitus cruri MI. Primo data baſi IL, & angulo L ex propoſ. 13. huius inuenietur angulus DIB.

Deinde fiet ex pr. 74. vt tangentes BC ad FG complementorum crurum, ſic AS ſinus complementi anguli reperti DIB ad aliud, & inuenietur FH ſinus complementi anguli alterius DIF, quos iunges ſi concordent anguli, ſubduces minorem à maiori ſi anguli ſpecie diſconueniant. Hoc autem etiam docuimus alio modo propoſ. 58.

THEOR. VI. PROP. LXXVII.

In obliquangulo triangulo ſinus ſegmentorum baſis à perpendiculo factorum in ea ſunt proportione; in qua tangentes complementorum angulorum ſegmentis adiacentium.

ANguli adiacentes ſegmentis TM, & LT à normali factis, ſint L, & M, & tangentes complementorum ipſorum PO, & NO. Dico, quòd, vt ſinus LX ad ſinum MX; ita ſit PO ad ON in proportione in præced. ſchemate.

Probatur ex 24. huius. Quoniam radius LV eſt ad ſinum LX cruris LT, vt tangens OR complementi alterius cruris IX ad tangentem OP complementi anguli ipſi cruri IX oppoſiti. Ergo *inuertendo* ſinus LX erit ad radium, vt tangens PO ad tangentem OR. Et ex eadem propoſ. vt radius eſt ad MX, ſic DE tangens ad ON tangentem: Ergo ex *æquo* vt ſinus LX ad XM ſinum, ita PO tangens ad NO tangentem complementorum, & ideo erit etiam PO ad LX *permutando*, vt NO ad MX.

PROBL. X. PROP. LXXVIII.

Dato crure, & angulis duobus baſim interiacentem angulis expromere.

DEtur angulus L, & M, & crus TL, & in animo ſit reperire crus, ſeu baſim ML.

Dato angulo L, & crure IL inuenies in primis crus LT ex propoſ. 13. huius.

Secundò ex præced. facies, vt OP tangens complementi anguli ad ſinum XL; ſic tangens alterius anguli ON ad MX; habebiſq; duos arcus LT, & MT; quos ſimul addes, ſi anguli dati ſint ſpeciei eiuſdem; ſubduces ſi diuerſi ſint diuerſæ ſpeciei: Hoc autem docuimus ſupra propoſ. 61. Quòd autem ſit PO ad LX, vt ON ad MR patet ex præced. Nam cum ſit PO ad ON, vt LX ad XM erit etiam *permutando* OP ad LX, vt ON ad MX.

PROBL. XI. PROPOS. LXXIX.

Datis duobus angulis, & baſi interiacente duo crura reperire.

QVoniam enim eſt ON ad OP, vt MX ad XL *inuertendo*: dentur verò baſis LM, & anguli L, & M in triangulo obliquangulo LIM, & conſequenter complementorum tangentes PO, & ON dabitur proportio, quam habet XL ad XM in duabus tangentibus PO, & ON, & dabitur ſumma arcus ML baſis ſcilicet interiacentis.

Vnde ex dictis ſupra propoſ. 68. exquires ſinus XL, & XM, & arcum TL, & TM; quo obtento.

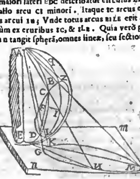
Secundo crure MT, & angulo M exquires baſim IM. ex propoſ. 21. huius, & rurſus dato crure LT, & L angulo ex eadem perquires crus, ſeu baſim IL: quod & fecimus ſupra propoſ. 61.

Si verò anguli ſint ſpecie differentes pro angulo obtuſo accipies eius complementum acutum ad ineundam operationem pro altero angulo, & eandem exequeris, vt priùs.

THEOR. VII. PROPOS. LXXX.

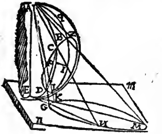
Dato in ſphæra triangulo obliquangulo, ſi polo in angulo verticali maiori cruri oppoſito, interuallo minimi cruris circulus minor deſcribatur, tangens dimidiæ baſis eſt ad tangentem dimidij aggregati crurum, vt tangens dimidiæ differentiæ crurum refertur ad tangantem eius portionis baſis, quæ extra circulum remanet.

SPhæra ſuper aliquod planum locata ſit, & punctum contactus ſit vertex B trianguli obliquanguli ICB ſphæra deſcripti, & polo I. qui opponit maiori lateri BDC deſcribatur circulus ZKCD: interuallo arcu CI minori. Itaque IC arcus erit æqualis arcui IK; Vnde totus arcus BILE erit aggregatùm ex cruribus IC, & ILB. Quia verò planum m n tangit ſphęrã, omnes lineæ, ſeu ſectiones



In eo delineatæ erunt tangentes ſphęræ. Ergo ſi planũ AQILE circuli productũ intelligatur, & ſecet planũ m n faciet ſectionẽ ME, & ducta per B linea AM efficietur ME tangens arcus BILE ſummę duorũ crurum. Rurſus, quia IC æquatur IL arcui LB erit crurum differentia, & ductâ lineâ AK per L linea KB differentiæ EL crurum erit tangens. Sic arcus COB eſt baſis, & producto plano circuli, ACOBA cuius portio eſt ſecabit planum m n in EN, & per C ductâ rectâ AN efficietur NB eius tangens; Quod verò baſis remanet extra circulum arcus DE vocatur

tur *baſis alternæ*, & ducta AG per D linea GE erit eius tangens.



Sunt autem tangentes non angulorum; ſed ſemiangulorum, eo quod oporteret, vt eſſent tangentes angulorum integrorum; quod prouenirent à centro, at quia anguli MAE; & NAE ſicut, & anguli KAE; & GAE ſunt ad peripheriam hinc ex propoſ.23. el.3 ſunt tang. non angulorum; ſed ſemiangulorum.

Per ea autem, quæ diximus de proiectione circuli obliqui in ſphæra prop.9. tract. 26. MNHC ſunt puncta in peripheria circuli proiecti exiſtentia, quòd ſit baſis radioſi coni ſcaleni; cuius baſis ſubcontraria eſt circulus ZACDL. Et hinc eſt, quòd illud idem, quòd ſupra pr.22. de triangulis planis oſtenſum eſt, hic verificetur, & ita ſit tangens EN ſemibaſis veræ ad tangentem ME ſemiaggregati crurum, vt tangens ſemidifferentiæ crurum KE eſt ad tangentem GE ſemiportionis baſeos extra circulum remanentis: Omnia autem eliguntur dimidiata, quia ſecantes illæ, vt AO, AN, AM, & AK, quę terminant tangentes non proueniunt à centro ſphæræ, vt diai, vnde arcus menſurantes angulos ducti radio AE apud A ſunt duplo minores, quàm ij qui in circumferentia ſphæræ ſunt, ſcilicet EDC, & ELB, & cæt.

PROBL. XII. PROPOS. LXXXI.

Datis tribus lateribus obliquanguli ſphærici, illud ad duo rectangula reducere.

DEntur trianguli ſphærici tria latera primùm 40. ſecundùm 35. tertiùm 60. Gr. Statuatur pro baſi crus maius, cuius medietas eſt 30. Gr. & tangens groſſioribus numeris tantum accepta eſt 577. reliqua verò duo latera in vnum aggregentur, & fient Gr.75. qui biſariam diuiſi erunt Gr. 37. m.30. quorum tangens eſt 767. Rurſus ſubducatur crus maius à minori, & Gr.5. pro differentia remanebunt, & pro ſemidifferentia Gr.2. m.30. cuius tangens par.43. Adhibeatur itaque regula proportionum, & ponatur primo loco tangens ſemibaſis EN par.577. ſecundo tangens ſemiaggregati crurum EM Par.767. tertio tangens differentiæ crurum EK par.43. & prodibit tangens 57. GE arcus DA Gr.3. m.16. ſemibaſis alternæ, qui duplicati, vt ſint Gr.6. m 32. & ablati à baſi Gr. 60. remanebunt Gr.53. m.28. pro baſi DC intra circulum remanente, cuius medietas DF erit Gr.26. m.44. In quam cadit arcus normalis IF, reliqua verò medietas addita baſi alternæ 6. m.32. dat reliquum arcum FDE Gr. 33. min.16.

Ratio huius rei eſt ex præced. Quia ita eſt tangens EN ad tangentem EM, vt tangens EA ad tangentem GE; Vnde datis tribus primis regula proportionum quarta inuenietur.

PROBL. XIII. PROPOS. LXXXII.

Datis tribus lateribus angulos quoſlibet reperire.

EX propoſ. anteced. id optimè fit. Nam cum iam conſequi fuerimus notitiā partiū baſis, in quas arcus normalis cadit crure ILE dato pro baſi, & crure EDF, iam reperto inuenies per propoſ.18. huius angulum E adiacentem cruri dato ILE.

Secundo inuenies ex eadem propoſ. dato crure IC, & FC angulum C adherentem cruri FC.

Tertio eodem dato crure IC, & CF inuenies partem anguli verticalis CIF ex prop.3. huius, & ex eadem dato crure FDE, & crure ILE pro baſi inuenies partem alteram anguli apud I, quos angulos ſimul addes, & conſequeris totum angulum CIL. Semper autem perpendicularis intus cadet, quia enim dantur tria latera poſſumus elligere duo, aut ſimul maiora quadrante, aut minora, quæ crura efficiant, vt tertium diſſonum crus ſit illud, in quod perpendicularis cadit.

Habes itaque in hac Expenſ. omnem doctrinam obliquangulorum penitùs explicatam, & omninò abſolutam. Cætera verò, quæ ab alijs ad abundantiam doctrinę traduntur omnes caſus non plenè adęquant ſine iſtis licet ingenioſiſſima ſint. Vnde huic libro, qui neceſſaria complecti intendit, & ſufficientia non omnia, propoſitiones prædictæ ſatis erunt.

TRAC-

TRACTATVS XXVIII.

De Progreſsionibus ſuperficierum.

TRanſactis tractatibus, quæ de lineis erant conſideratis, vt in corporibus, vel circa corpora deductis, nunc de corporum, ſuperficiebus agendū eſt. Et quia ſupra tractauimus de progreſsionibus in numeris, & in lineis, ratio poſtulat, vt eas propoſitiones, quæ veræ vniuerſales ſunt, oſtendamus ſimiliter de ſuperficiebus quoque verificari, & ſimul ſpecialia quædam de progreſs. Arithmetica ſuperficierum attingamus, quæ cubandis ſphæroidibus neceſſaria ſunt.

EXPENSIO I.

De ſerie proportionis Geometricæ ſuperficierū

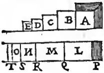
DVplex eſt ſeries ſuperficierum, quæ continuata in infinitum geometricè extendi poteſt; Alia eſt, quæ vnicam ſuperficiem conſtituit: alia quę diuerſas ſuperficies inuicem ſimiles componit, de hac pręcipuè hic propoſitiones tãgemus: quas exhibuit nobis Ambroſius à S. Vincentio ab ipſo ſingulari ingenio excogitatas.

THEOR. I. PROPOS. I.

Omnes propoſitiones, quas ſupra de lineis demonſtrauimus de ſuperficiebus geometricè continua progreſsione procedentibus verificantur.

SInt quadrata ſimilia, ſeu quodcumque aliud genus figurarum A, B, C, D, & cæt. proportione geometricâ continuâ procedentia; Dico de illis omnia illa verificari, quæ ſupra tract. 16. part. I. de lineis memorauimus.

Quod, vt oſtendatur fiant rectangula ęqualia illis figuris A, B, C, D, & cæt. ſed eiuſdem altitudinis ex pr. 43. vel 44. l. I. elem. quę ſint L, M, N, O, quæ inuicē eam proportionem obtinebūt, quam baſes ex prop. I. lib. 6. Elem. eritque L ad M, vt PQ ad QR, & ſic de alijs vnde



Probatur. Ita eſt figura A ad figuram B, vt rectangulum ipſi A æquale ad M rectangulum æquale figuræ B; ſed ex lib. 6. prop. I. vt rectangulum L ad M, ita eſt baſis PQ ad baſim QR: Ergo ex propoſ. 16. lib. 5. Elem. vt A ad B ita PQ ad QR, & ita dicas de alijs C, D, quæ ſe referent, vt baſes RS, & ST minoribus in infinitum. Cum ergo ſpatia ſucceſſiuè minora in proportione Geometrica conſeruent ſemper eandem proportionem, ac lineæ, ſeu baſes ſucceſſiuè minores, omnia ea, quæ de lineis dicta ſunt, etiam de ſpatijs ſimilibus verificari poterunt.

COROLLARIVM I.

OMnia ea, quæ dicuntur de lineis ſupra tract. 16. verificari ne dum de ſpatijs ſimilibus; ſed etiam diſſimilibus continuè proportionalibus, vt ſunt rectangula L, M, N, O. Sicut etiam non tantùm de ijs, quæ diuerſas ſimiles figuras conſtituunt; ſed de ijs, qui vnicam, quorum tamen ſingulę partes aſſignatæ decreſcant continuâ proportione geometrica. Tale eſt totum ſpatium LO, cuius ſingulæ partes L, & M, & N, & cæt. ſe referunt, vt baſes PQ, & QR, & RS.

COROLLARIVM II.

ELlicitur rurſus progreſſionem infinitam figurarum ſimilium A, B, C, D, & cæt. ſeu diſſimiliū L, M, N, O producere determinatam ſpatij quantitatem; ſi ſimul omnia ſpatia ſumantur; Nam etiam lineæ PQ, & QR, & RT determinatam longitudinem ſimul ſumptæ, licet in infinitum multiplicatæ, producunt ex prop. 15. part. I. tract. 16.

COROLLARIVM III.

DEducitur quoque omnia ſpatia antecedentia A, B, C, D eſſe ad omnia cō ſequentia B, C, D, E, & cæt. vt vnū antecedens A, ad ſuum conſequens B, & ſimiliter antecedentia L, M, N ad conſequentia M, N, O, eſſe, vt L ad M: Quia ex Cor. 2. pr. 16. Tract. 16. ſic ſunt lineæ PQ, & QR, & RS, & cæt. ad lineas QR, & RS, & ST, vt PQ ad QR.

Vnde

Vnde, & *permutando* A,B,C,D V.g. antecedentia omnia erunt ad A, vt conſequentia omnia B,C,D,E erunt ad B.

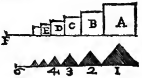
COROLLARIVM IV.

GNomonem nigrum nempe differentiam primi A à ſecundo termino B, & ipſum primum terminum totum A, & totam ſeriem terminorum infinitam eſſe in continua analogiâ eâdem. Sic & rectangulum nigrum differentiam primi L à ſecundo M, & ipſum primum L, & totam collectionem rectangulorum eſſe in continua proportione; quòd ex 3. Coroll. prop. 15. Ita lineæ ſe habeant.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si dentur duæ progreſſiones in eadem analogia procedentes planorum, ſeu quælibet figura vnius ſit ſimilis alterius figuræ correſpondenti, ſeu diſſimilis; dummodò ſingulæ vnius ſeriei inuicem ſimiles ſint, ſicut, & alterius: Ita ſe habebit tota planorum ſeries ad totam ſeriem, vt primum vnius ad primum planum alterius.

SInt ABCD, & 1,2,3,4 progreſſiones; quarum termini inuicem ſimiles ſint; licet diuerſi ab alterius ſeriei terminis V.g. illa ſint quadrata, hæc triangula, ſintque in eadem proportione V.g. A ad B, vt 1 ad 2, & B ad C, vt 2 ad 3, & ſic conſequenter, & termini earũ ſint F, & 6. Dico, *quod tota ſeries* ABC, & cæt. erit ad totam ſeriem 1 2 3, & cæt. vt primus terminus A, quadratum ad primum triangulum 1.

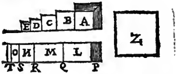


Probatur tota ſeries antecedentium AF, & cæt. eſt vt conſequentium ſeriem totã 1F, ſic A eſt ad 1; ſed vt A ad B ita eſt ex Hypotheſi triangulum 1 ad 2, & ſic ex Coroll. 3. huius omnia antecedentia, & ſeries tota 16. ad conſequentia 26. Ideoque ex 16. lib.5. antecedentia AF ad conſequentia FB erunt, vt antecedentia 16. & 26. conſequentia. Quare *conuertendo*, vt ſeries tota FA ad A primum terminum, ita 1.6. ſeries tota ad 1 primum terminum. Proptereaque *permutando*, vt AF ſeries ad 16. ſeriem, ſic A primus terminus ad 1 primum alterius ſeriei terminum.

PROBL. I. PROPOS. III.

Planitiem æqualem toti ſeriei Geometricæ continuæ ſuperficierum exhibere.

FIat, vt gnomon niger redactus in quadratum ex 45. lib.1. quadrati A, quâ differt à quadrato B, ſic quadratum totum maius A ad Z. Dico planitiem toti ſeriei AF æqualem eſſe.



Patet ex propoſ. 15. part.1. de progreſſ. vbi id probauimus de linea. Sed iam oſtendimus eas propoſitiones eſſe vniuerſales, & planitiebus conuenire. Ergo, ſi tertia proportionalis linea in ea proportione, quam habet differentia primæ lineæ à ſequenti ad ipſam primam lineam, hæc inquam tertia proportionalis totam ſeriem æquat linearum ſic etiã ſuperficies tertia proportionalis gnomoni nigro, & quadrato toti A æquabit totam ſeriem ſuperficierum.

Et eodem modo operaberis de rectangulo P nigro, nam ſi fiat, vt P ad totum L in quadratum tranſfuſa, ſic L in quadratũ redactum ad aliud inuenies Z æqualem progreſſioni LO rectangulorum.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ſi ſint aliæ ſpecies figurarum, quòd poſſit reperiri ſimilem figuram æqualem toti ſeriei, ſi differentiam in ſimilem figuram redigas ex prop.45.lib.6. & ex tertiam proportionalem inuenias, vt tract. ſequent.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Datis duobus planis ſimilibus, cuius baſes homologæ in continuum ſint poſitæ reperire illorum planorum terminum.

IN prop.ſeq. fig. ſint baſes planorum homologæ ſimilium AB, & BC indirectum poſitæ, & cupiat quis agnoſcere vltimum terminum, ad quem progreſſio ſimilium ſuperficierum eis baſibus inſidentium data perueniat.

Inueniatur ex prop 15. Tract.16.par.1. baſium AB, & BC progreſſionis vltimus terminus, qui ſit F. Dico F eſſe etiam vltimum terminum datorum planorũ, ad quem producta in infinitum eorum progreſſio peruentura ſit.

Probatur, quia cum baſes ſint tot, quot plana, & in eadem proportione duplicata. Siquidem ex prop.27.lib.6. plana ſimilia duplicatam habent baſium proportionem, vnde patet ſuis baſibus ad eum terminum æquali multiplicatione peruentura.

PROBL. III. PROPOS. V.

Datis duabus primis baſibus reperire planorum ſeriei infinitæ æqualem ſuperficiem.

DEntur baſes quadratorum AB, & BC, & ex propoſ.14.lib.6. reperiatur eis tertia proportionalis CD: duarum verò AB, & CD datarum reperiatur ſeriei infinitæ lineæ æqualis Q ex propoſ. 16. tract. 16. par. 1. Fiatque ſuper Q rectangulum AO æquale altitudini BT, & illud erit, quod poſtulatur, æquale toti ſeriei quadratorum.

Proba-

Probatur. Nam linea Q ex prop. 21. tract. 16. par. 1. cùm ſit æqualis toti ſeriei baſium imparium ex effectione obtinet duplicatam rationem, ad primam baſim AB eius, quam habet ſeries baſiũ AF ad primam baſim eãdem AB.



Propterea que ex 1. lib. 6. etiam rectangulum AO ex Q factum eiuſdem altitudinis ad primum quadratum AT duplicatam habebit proportionẽ, quòd ſit eadẽ, ac baſis ſuæ Q ad baſim AB quadrati AT, illius, quam habet ſeries baſium AF baſim AB. Sed ſeries quadratorum AF ad quadratum primum AT duplicatam obtinet proportionem ſeriei baſium ad primam baſim; ſiquidem ſingula ex prop. 21 lib 6. duplicatam baſium obtinẽt proportionẽ; quare ex 17 l 5. & omnia. Ergo eandem obtinent ad idem quadratum AT, quam rectangulum AO ex Q altitudinis AT, ad idem quadratum AT. Quare quadratorum ſeries infinita, & rectangulum prædictum AO ex Q erunt æqualia ex 9. lib. 5. cum eidem eadem dicant proportionem.

COROLLARIVM.

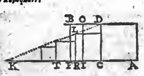
SI inter Q, & BT reperiatur media proportionalis quadratum ex ea erectum erit æquale rectangulo ſub Q & BT cõprehenſo ex 19. l. 6. Vnde erit quoq; æquale toti ſeriei infinitæ quadratorũ.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Dato quadrato, & eiuſdem altitudinis rectangulo, ſeriem infinitam exhibere, quæ & à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo ſit æqualis.

FIat ex prop. 15. lib 6. vt AF ad CF latus rectanguli, ſic CA ad CI aliam inueniendam, & ex I erigatur parallela ad FA, & ſit rectangulum CO I huic autem rectangulo fiat quadratum æquale CL.

Dico *ſeriem quadratorum* AD, *&* CL, *&c. toti rectangulo* AB, *æquari.*



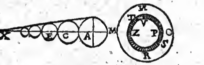
Probatur. Fecimus AF ad CF, vt CA ad CI. Ideoque cum ſit CA ſumptus, vt primus terminus ad CI, vt ſecundum velut AF totum cum primo ad CF reſiduum ex primo ex Coroll. 1. prop. 26. tract. 16. part. 1. AF erit æqualis toti baſium infinitæ ſeriei in ratione AC ad CI, procedentium.

Deinde quia quadratum CL æquatur rectangulo CO habebit eandem rationẽ ad illud quadratũ AD: Quare cum quadratum maximum AD ſit ad quadratum [illegible] vt AC baſis ad tertiam proportionalem RT, quia ſunt in duplicata proportione baſium; erit etiam talis proportio Quadrati eiuſdem maximi AD ad rectangulum CO ob eandem altitudinem, vt baſis AC ad CI baſim; ergo baſes CI, & RT ſunt æquales, quod eiſdem baſis AC eandẽ dicant proportionem quadrati AD ad quadratum CL, vel rectangulum æquale CO. Quæ cum ſit, vt fecimus AC ad CI, vt AF ad CF. & ideo (vt monuimus) AF æquetur ſeriei baſium infinitæ in ratione AC ad CI, æquabitur etiam toti ſeriei infinitæ baſium alternatum, & interruptarum in ratione AC ad RT quod CI, & RT ſint æquales. Quare ex anteced. rectangulum ex FA, & CD, nempe rectangulum AB, ſeriei infinitæ quadratorum AD ad CL, & cæt. erit æquale, cum ſit erectum ſuper AF æqualis ſeriei baſium alternarum AC, & RT, & altitudinis CD, vt docet prop. 5. h. quod eſt promiſſum.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Planorum ſeriem exhibere, quæ à dato ſegmento ſimili toti alicui planitiei incipiat, & ipſa ſeries ſit toti planitiei datæ æqualis.

SIt datus V. g. circulus OMN, à quo auferatur portio VZP ſimilis toti, & debeat conſtitui ſeries, quæ incipiat à circulo PVZ, & tota ſit æqualis planitiei toti ONM.



Si eſſet iam conſtituta ſeries iſta, & eſſet AX, ita eſſet ſeries XA ad ſeriem XC, vt circulus A ad C ex propoſ. 25. tract. 16. part. 1. Coroll 1. Fiat itaque vt circulus OMN totus ad annulum reſiduum OMN, VPZ ex prop. 26 lib. 6. vel etiã ex tr. 29. ſequenti, ſic PVZ circulus ad aliud RTS annulũ nigrũ. Cõſtituatur autẽ PVZ pro primo termino, & ſit A, & fiat planũ C æquale ãnulo RTS nigro ſimile ex 23. l. 6. circulo, & planitiei A, & ideo planitiei toti ONM, & producatur progreſſio vſque ad ſuum terminum X. Dico *ſeriem* AX *æqualem eſſe planitiei datæ* ONM.

Probatur. Nam ita eſt ex conſtructione tota planities OMN ad annulum ſuum ſeminigrum NRZP, vt PVZ circulus ad RTSZP annulum nigrum, & vt A ad C æquales ex effect. ſed vt A ad C; ita eſt AX ſeries ad CX ſeriem ex Cor. 3. p 1. h. Ergo, vt OMN planities ad ONMZP reſiduũ annulũ: ſic ſeries AX ad ſeriem CX: quare *conuertendo* erit AX tota ſeries ad reſiduum, eumpartemque ſeriei A primum terminum, vt OMN planities tota ad PVZ reſiduum ex annulo: Vnde *permutando* erit etiam AX ſeries ad OMN planitiem totam, vt terminus A ad PVZ reſiduum; ſed A, & PVZ ex effectione æquantur: Ergo etiam ſeries AX, & planities OMN tota æquabuntur ex prop. 1. lib. 6. Elem.

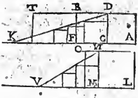
Fiet autem circulus C æqualis annulo nigro ex lib. 6. vt infra docebimus Tract. 30.

Digitized by Google

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Seriem à dato termino incipientem ; ſed alteri æqualem inſtituere.

Fiat rectangulum AB in altitudine CD æquale toti ſeriei AK ex propoſ.5. h. Sitque datum quadratum LN minus, quam rectangulum AB (alioquin propoſitio eſt impoſſibilis) cui addatur talis pars MO, vt totum LO ſit æquale prædicto rectangulo AB. Et ex propoſ.6. huius, fiat rectangulo LO ſeries æqualis LV, quæ à quadrato NL incipiat, & erit factum, quod expoſcitur.



Patet, quia ex conſtructione ſeries LV æquatur rectangulo LO, quod eſt æquale rectangulo AB, quod æquatur ſeriei AK; quapropter ſeries LA æquabitur ſeriei AK.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Seriem ſuperficierum alteri datam proportionem obtinentem ordinare, quæ incipiat à dato quadrato.

Sit data proportio 7. ad 4. Fiat autem rectangulum AB adhibendo ſchema preced. æquale progreſſioni KA ex h. prop.5. Deinde fiat, vt 7. ad 4. ita rectangulum AT ad rectangulum eiuſdem altitudinis AB.

Sit autem quadratum datum L minus, quàm rectangulum AT, & ei addatur tale parallelogrammum ex 35. lib.1. elem. MO, cum quo faciat planum æquale plano AT faciendo rectangulũ LO æqualis MN altitudinis æquale ipſi AT; deinde ipſi fiat ex prop.6. h. æqualis ſeries quadratorum LV, & erit factum, quod exigitur.

Patet ex conſtructione. Nam ſeries LV æquatur rectangulo LO, quod æquale eſt rectangulo AT; rectangulum verò TA ſe habet ad rectangulum AB; & ideo ad ſeriem AK ei rectangulo æqualem, vt 7. ad 4. Ergo etiam ſeries LV ad ſeriem AK ſe habebit, vt 7. ad 4.

EXPENSIO II.

De planorum progreſſione Muſica.

Viſa progreſſione Geometrica reſtat, & Muſicam planorum progreſſionem breuiter attingamus. Vnde ſit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Triangulum, ſeu parallelogrammum datum ita ſecare, vt partes proportionem muſicam ſeruent.

Sit triangulum ABC; quod oporteat ita ſecare, vt totum ABC planum ſit ad planum FCA, vt differentia plani HBC ad planam differentiam HCF.



Diuidatur latus AB ex 25.pr. tr.15. vel 1. tr.16. in partes muſicæ proportionales, ita vt ſit AB ad FA vt BH ad HF Geometricâ proportione reſpondentes, ducanturque rectæ HC, & CF, eritque factum. Nam ABC totum triangulum erit ad AFC, vt differentia BCH ad differentiam HCF, vel ſi ſit parallelogrammum ducantur normales ab F, & H ad baſim AB, & partes erunt harmonicè proportionales.

Probatur, vt refertur AB ad AF baſes, ſic refertur BH ad HF baſium differentiæ; ſed triangula, vtpote eiuſdem altitudinis ex 1. lib.6. eandem habet baſium rationem. Ergo eiuſdem rationis BH ad HF, quæ eſt eadem, quæ BA ad FA. Quare erit quoque triangulum BAC ad triangulum FCA in ea proportione, vt BHC ad HCF.

COROLLARIVM.

Hinc colligas de iſtis planis, omnes quoque propoſitiones, quas de lineis diximus verificari; cumque de iſtis nil ampliùs dicendum nobis ſit ad ipſa ſpatia, quę ab harmonicis lineis efficiuntur accedendum.

PROBL. II. PROPOS. XI.

Trapezia harmonicis lineis intercepta in harmonico triangulo habent eam proportionem, quæ trianguli ad triangulum, nempe proportionem duplicatam baſis ad baſim.

Sint lineæ harmonicæ BH, HF, BC, & HO, & FG in triangulo harmonico ABC, quæ faciant ſpatia BO, & HG. Dico ea ſpatia BO ad HG habere inuicem eam porportionem, quam trianguli ACB ad triangulum AGF, nempe proportione duplicatam BH ad HF.



Probatur. Triangu-

angulum ACB ad triangulum ſimile AGF ob æquales angulos, à parallelis effectos eſt in duplicata ratione lateris AB ad latus AF; Trapezium quoque BO ad trapezium HO duplicatam habet lateris BH ad latus HF rationem ob ſimilitudinem eorum cum angulis æqualibus cõſtent ob parallelas; ſed vt crus AB ad crus FA, ita eſt ob proportionem muſicam ex propoſ.1. tract.16. part.2. latus BH ad latus HF; ergo etiam ACB triangulum ad AGF triangulum erit, vt trapezium BO ad trapezium HO.

COROLLARIVM.

Hinc educitur omnes illas propoſitiones, quas poſuimus de lineis agentes in ſeriem harmonicam progredientes, etiam ſuperficiebus applicari debere, & veritatem eandem obtinere; quia earum omnium fundamentum eſt proportio Muſica, ſecundùm quam in ſeriem continuam Muſicè procedunt, vt facilè ex te ipſo poteris conſiderare abſque noua omnium earum propoſitionum repetitione.

EXPENSIO III.

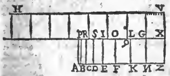
De progreſſione ſpatiorum Arithmetica.

HÆc Expenſio quadrandis Ellipticis ſpatijs & ſpirallbus, & cubandis Conoidibus maximè deſeruit; eſtque veluti fundamentum ad illas operationes præſtandas.

THEOR. I. PROPOS. XII.

* *Rectangula Arithmeticè decreſcentia, & eiuſdem altitudinis æquiualent medietati rectanguli, ex eorum integrorum ſumma conſtantis vno excluſo; dummodo partes ſecundùm quas decreſcunt, tot ſint quot ipſe.*

SInt rectangula ZG, & cætera vſque ad A, V.g. 8. & octaua ſui parte decreſcant alterũ reſpectu alterius. Dico, *quod omnia ſic diminuta ſimul æquiualent medietati ſummæ, quæ ex eis integris conſtatur, nimirum rectanguli* NG medietati excluſo GV vnico rectangulo, vt ſint 7.



Probatur. Nam primum NL remanſit tantùm, quantùm ablatum eſt ab vltimo AP, ſiquidem ſeptem partes in NL remanſere, ablata vna ſeptima, ibi in AP vna ſeptima relicta eſt; ceteræ ſeptem ablatæ. Ergo æquatur, quod remanet ei, quod ablatum eſt. Sic dicas de reſiduo OX, quod æquatur defectui AR; ſiquidem hinc ablatæ ſunt 6. partes, ibi ſex remanſere, & ſic de alijs, ergo defectus hinc, & reſidua inde æquabuntur: ſed ſi ſumantur ſimul augmenta, & defectus facient totum rectangulum. Ergo cum ſint ſeptem rectangula deficientia erunt ſimul defectus, & reſidua æqualia ſeptem rectangulis integris. Ablatis itaq; æqualibus defectibus, reſidua remanebunt dimidia ſeptem rectangulorum nempe dimidio HG excluſo primo GV, ſunt autem ſeptem deficientia, quia à primo nihil auſertur.

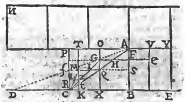
Id etiam diximus, cum ageremus de proportione Arith. ſummanda in Cor.prop.9. Tr.14. Siquidem oſtendimus numeros datos continua diminutione Arithmetica deficientes in vnam ſummam redactos efficere dimidium numeri ipſius maximi in ſe ducti conſurgentis, ipſo tamen maximo excluſo, vt videre in iſtis numeris. Namque maximus terminus eſt 10. qui multiplicatus in ſe facit 100. ſumma verò omnium eſt 45. nempe dimidium numeri quadrati ipſo maximo 10. excluſo, vt fiant 90. cuius dimidium eſt 45.

10	0
9	1
8	2
7	3
6	4
5	5
4	6
3	7
2	8
1	9
45	45

THEOR. II. PROPOS. XIII.

* *Rectangula prædicta iam arithmeticè deficientia; ſi adhuc ſecundùm aliud latus prædicto modo arithmeticè deficiant ſunt maiora ſuis reſiduis.*

SInt rectangula Arithmeticè iam diminuta AX vſque ad KP; quæ adhuc eodem prædicto modo diminuantur, & primò auferatur rectangulum, cuius baſis ſit AP partis vnius, OQ duarum, ZT trium prout ſupra fecimus; Dico hæc reſidua rectangula, ſeu quadrata ſimul ſumpta excedere partes omnes à ſe ablatas, nempe PO, & QT, & ZP;



Præaſſumptum. Et in primis notandum, quod omnis vnitas eſt ad latus alicuius quadrati, vt latus ipſum ad quadratum ſuum; quòd ex def.15. tract.8. ratione multiplicationis ſui, ita vnitas metitur radicem, ſeu latus; vt latus, ipſum quadratum; ſic 1. metitur 4. vt 4. metitur 16. Quare ſi à radice auferatur vnitas, & à quadrato dematur ipſa radix; ita quoque erit 1. ad 3. vt 4. ad 12. Nam ſi eſt 1. ad 4. vt 4. ad 16. erit etiam *diuidendo* 1. ad 3. vt 4. ad 12.

Quo poſito inſuper conſiderandum eſt, quòd BG eſt radix, ſeu latus BA ex hypotheſi minutum vnica vnitate, & BD duplum BC eſt radix ipſa in ſe multiplicata ex præc. ſed minuta ipſa radice BS. Nam diximus, quod omnia rectangula, ideſt AP arithmeticè decreſcentis æquant dimidum rectangulorum AN integrorum ſumptorum toties, quot

partes in ipſo latere BA ſunt, iuxta quas arithmeticè decreſcunt, ſi tamen dematur rectangulum ipſum maximum AI: ſed rectangula inuicem ſunt, cum ſint eiuſdem altitudinis, vt baſes, quare baſes quoque BC arithmeticè decreſcentes æquabunt dimidium BD radicem BE in 4. part. diuiſam, & per 4. ſcilicet in ſe, ductam; ſed diminutã ipſa radice EB.

Quare ex præced. præaſſ. ita erit AF vnitas ad FG latus minutum vnitate, vt AB ad BD radicem in ſe ductam toties, quod in ipſa ſunt partes ſed ablata ipſa radice EB; Vnde FA erit ad FG, vt AB ad BD: Quare, & FA vnitas erit ad dimidium radicis FH, vt AB radix ad BC dimidium ipſius AA ex 18. lib. 5.

Cum ergo FH ſit dimidium radicis vnitate diminutæ, & AFH triangulum æquale triangulo HGQ, ea altera vnitate QG, & dimidio HG effecto, erit trapezium BAQX æquale quadrato primo DG.

Vnde ſi etiam cætera trapezia QXTA, & cæt. eſſent æqualia ſuis quadratis XM, & alijs correſpondentibus, ſpatium occupatum à quadratis decreſcentibus eſſet æquale triangulo BAC, ex BC latere omnium diminutorum rectangulorum, & BA radice. Vnde rectangula ablata eis eſſent æqualia. Verùm hoc non eſt. Siquidem vnitas FA eſt ad radicem dimidiatam, & diminutam FH, vt radix ipſa tota AB ad BC; erit etiã ex 18. l. 5. dualitas AS ad SQ radicem diminutam; vt radix tota BA ad BC. Si verò dematur dualitas à maximâ radice fit radix ſequentis minoris quadrati XQ. Quare AC diagonalis tranſibit per Q. Vnde trapezium à diagonali efformatum in ſequenti quadrato minus erit, quam ipſum quadratum; ſiquidem XQ vnũ latus quadrati eſt idẽ, ac trapezij QTXA alterũ verò latus minus XT non poteſt æquari, & ſic dicas de reliquis, licet ſufficiat probaſſe de vno. Quare verùm erit, quod rectangula, ſeu quadrata decreſcentia, rurſùs Arithmeticâ diminutione, vt BG, & XM, & AR, maiora euadunt, quàm medietas BAC rectanguli BACP ex ſummâ omnium ſolâ primâ diminutione deficientium conflati.

COROLLARIVM.

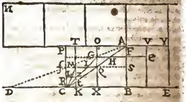
Hinc eſt, id quod oſtendimus de triangulis FHA, & HGQ, quod ſint æqualia, id etiam oſtendi de alijs, ſi XG aſſumatur tanquam latus maximi quadrati, vt ſumitur BA; quare ducta diagonali CG ſecabit QM, dimidiam in I, & triangulum QGI erit æquale triangulo IZM, & triangulum ZML triangulo RCL; & ita ſi ſint alia, ſiue quadrata, ſiue rectangula.

THEOR. III. PROP. XIV.

Summa rectangulorum, ſeu quadratorum duplici Arithmetico decremento minutorum eſt minor ſummâ ipſorum integrorum excluſo vno; ſeque habet ad eam minus in proportione, quam 1. ad 3.

Sint rectangula BG, & XM, & KR. deficientia Arithmaticè, nedum quòad latus BX, & alia, ſed etiam quoad latera BF eodem modo. Dico, *quòd eorum ſumma* BG, *&* XM, *&* KR, dicit ad AN integra quadrata per 3. multiplicata numerum partium ſucceſſiui deffectus minorem proportionem, quàm 1. ad 3.

Probatur. Quoniam ex præced. Coroll. omnia triangula, in quibus trapezia, vt GXKZ, & cæt. excedunt quadrata ſua, vt XM ſunt æqualia triangulis, quibus exceduntur, nimirum QGI triangulum triangulo IMZ, & alia alijs. Poſito itaque illo ſpatio triangulari vt IZM, & ZRC, in quo quadrata excedũt triangula QGC, & ZMC pro illis QGI, & ZML, in quibus exceduntur cũ ZTIQ, & LZTC ſit commu-



ne; ſpatium QGZT æquabitur ſpatio MTQ, & MCT ſpatio ZRCT: vnde omnia triangula GQC, MZC æqualia erũt exceſſibus quadratorũ extra diagonalẽ AC excedentium, & remanentium; nempe ſpatio QMI, & RCZT, quo ſuperant BAC triangulum; ſed hæc triangula QCG, & MZC ſunt æqualia dimidio rectangulorũ FG, & LM, vtpote eiuſdẽ altitudinis. Ergo etiã exceſſus quadratorũ QMI, & ZCR extra CAB, triangulis QGC, & MZC æqualia ſunt dimidio eorũdem rectangulorum FG, & RM. Si autem etiam BG quadratum primũ inter decreſcentia excluſo maximo exceſſu eodem excederet rectangulum FP, iam exceſſus omnium quadratorum ſuper medietatem BAC æquaretur dimidio rectangulorum FP, & FG, omnium inquam defectuum, & idem ſi eſſet triangulum APC partium 3. duæ cederent FP, FO, & MR rectangulis, at vna exceſſui quadratorũ. Quare quadrata BG, XM, & XR poſito toto rectangulo BACP partium 6. eſſent dimidium, & tertia pars alterius dimidij, nempe $\frac{4}{6}$, & rectangula reſidua FR, & FG, & RM $\frac{2}{6}$. Sed iam oſtenſum eſt quadratum GB primum deficiẽtium nullo pacto excedere BAC. Vnde ſũma quadratorũ BG, & XM, & AR deficit à $\frac{4}{6}$ dimidio rectangulo PF, ſiquidem ſi ſpatio æquali illi dimidio excederet BG quadratum diagonalem AC, iam æquaret $\frac{4}{6}$ totius BACP. Sed quantitas BACP eſt dimidium quadratorum AN ex h. propoſ. 12. Ergo quadratorum, (cùm BP ponatur 6.) AN rectangulum erit 12. & ideo BG, & XM, & XR ſumma erit ad AN 4. quadrata integra minùs quam 4 ad 12. ideſt minus, quã 1. ad 3. cum ſit ad PB, vt 4. ad 6.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si quadratis decreſcentibus, & quadratis quoq; non decreſcentibus addamus maximum quadratum, erit maior proportio omnium decreſcentium ad omnia non decreſcentia addito vtrobique maximo; quam 1. ad 3.

Si ſeries quadratorum, ſeu rectangulorum decreſcens in præced. ſchemate addito maximo BA, & BG, & XM, & XR, iterumque quadrata integra tot numero YN addito eis quoque maximo. Dico, quòd quadratorum prædictorum decreſcentium BA, & BG, & XM, & KL, Proportio ad YN quadrata

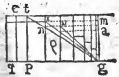
drata æqualia erit maior, quàm 1. ad 3.

Probatur. Ita eſt vnitas ad radicem, vt radix ipſa ad ſuum quadratum. Ergo æquabitur rectangulum ex vnica parte V. g. AF, & ex BD partibus tot, quot ſunt in quadrato BA partes, conſtante quadrato ipſi AB ex 17. Elem. lib. 6. Quare etiam dimidium EP rectanguli ex AD, & AF erit æquale dimidio BV rectanguli BA. Quod autem BD conſtet tot partibus, quot in BA ſunt quadrata patua patet ex hypotheſi, quia eſt radix ipſa BA toties accepta, quot in ipſa BA ſunt partes: Vnde ſi in BA ſunt 4. partes in BD erunt 16. quia in AB ſunt 16. partes productæ ex multiplicatione lateris BE in ſe quo poſito, Iam BF rectangulũ eſt ad AN, vt 3. ad 6. ex propoſ. 12. huius: addito autem quadrato, vt ſit YN, & quadratis decreſcentibus SV dimidium ipſius I erit adhuc VC ad YN; vt 3. ad 6. Ideoque cum quadrata decreſcentia BO, & XM, & KL ſint minus, quam 2. ad 6. ex præced. ad AN quadrata æqualia, ſi addamus eis duas tertias partes parallelogrammi NV erunt adhuc quadrata decreſcentia GE, XM, & KR cum $\frac{2}{3}$ ipſius VB ad YN quadrata non decreſcentia minus, quam 2. ad 6. & defectus erit ex præced. dimidium parallelogrammi FP: Si ergo addamus ZV dimidium quadrati ZA addimus plus, quam FP, vt in principio oſtendimus nimirum PE. Ergo addito toto quadrato EA quadratis decreſcentibus, cum addamus magis, quàm quod requirunt ad hoc, vt dicant proportionem 2. ad 6. vel 1. ad 3. habebunt ad quadrata non decreſcentia YN maiorem proportionẽ, quàm 2. ad 6. vel 1. ad 3. & excedent ferè rectangulo dimidio EP, & triente EV.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Quadrata decreſcentia, ſeu rectangula duplici decremento Arithmetico ſupra deſcripto; quò iuxta minutiores partes ſucceſſiuum eorum decrementum conſtituitur, eò magis accedunt ad proportionem 1. ad 3. reſpectu quadratorum non decreſcentium.

MVltiplicentur GE, XM, & KR rectangula præcedentia per diuiſionem ſubduplam, vt in fig. Q. Proportio quadratorum, ſeu rectangulorum ſemper creſcet ad quadrata non decreſcentia, & ſemper fiet magis proxima ad eam proportionem, quam habet 2. ad 3.



Probatur. Nam rectangulum m t erit minus, quàm FP in præced. fig. & ferè duplò minus, quam FP, ſiquidem etiam, ſi ſecundùm longitudinem accreſcat ei pars t I, ea certè non æquat longitudinem Im, vt ex dictis etiam colligi poteſt. Cum ergo hoc rectangulum ſit minùs, reliqua erunt maiora, vt patet. Nam loco ſequenti G F præced. fig. ſucced[...]t in hac duo rectangula nm, u a ſimul æqualis latitudinis, ac nQ; ſed quæ magis diſtent ob diuiſionem minutiorem, & ſubduplam à termino g erunt longiora, & ſic de cæt. Propterea que etiam triangula, vt n I g, dimidia rectangulorum erunt maiora triangulis QGC in præced. fig. ſi duo triangula illius vni huius ob baſim n I ſubduplo minorem ſumantur. Sed hæc ſunt æqualia incremento rectangulorum I vſque ad g ſupra dimidium tgp. Ergo etiam rectangula, ſeu quadrata, velut I p creſcunt magis vltra dimidium, quàm quadrata GE, & cæt. præced. fig. & magis ad $\frac{2}{6}$ accedunt.

Nec tamen vnquã perueniunt ad $\frac{2}{6}$, quia ſemper ad $\frac{2}{6}$ deficiet dimidium rectanguli t m; quare ad quadrata, ſeu rectangula q t ſeptem integra erunt proximè, vt 2. ad 6. ex propoſ. 13. huius, cùm ea integra ſint duplo maiora, quàm rectangulum g t. Quod ſi quadratis non decreſcentibus ſeptem, & iſtis decreſcentibus addas q t; eodem pacto, & eadem ratione erunt magis, quam $\frac{2}{6}$; ſed multo magis accedent ad $\frac{2}{6}$, quadratis præced. fig. EA, & & GB, & cæt. Nam tertia pars rectanguli e p erit minor, quàm tertia pars reſidua SV, & dimidium e p huius, quod æquatur rectangulo e m erit minus, quàm dimidium SV illius, quo dimidio, & qua tertia parte quadrata precedentia decreſcentia ſunt magis, quàm $\frac{2}{6}$ reſpectu non decreſcentium, vnde addito vtrinq; maximo q t rectãgula octo h. fig. minus diſcrepabunt à $\frac{2}{6}$, quam rectangula præced. fig. reſpectu octo rectangulorum integrorum quale vnum eſt t q.

THEOR. VI. PROPOS. XVII.

Series quadratorum, ſeu rectangulorum ſi infinita ſubdiuiſione in Arithmeticam ſeriem, quoad ambo latera diminuatur, æquatur duobus ſextis, quadratorum integrorum ſaltem quoad ſenſum.

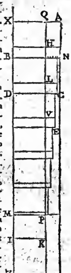
PRob. Nam quò numeroſior eſt ſubdiuiſio eò fit propinquior acceſſus ad $\frac{2}{6}$ rectanguli g e excluſo maximo rectãgulorum à minori proportione; Sic incluſo maximo fit acceſſus ad $\frac{2}{6}$ rectãguli gt à maiori ꝓportione: nec excluſo maximo accedendo ad $\frac{2}{6}$ poteſt excedere $\frac{2}{6}$, nec incluſo maximo ex præc. Ergo ſi diminutio fiat quoad vſquè fieri poteſt æquabit tota ſimul $\frac{2}{6}$. Patet conſequent. Nam non erit magis, quam $\frac{2}{6}$ alioquin poſſet adhuc fieri ſubdiuiſio à maiori proportione, per quam acceditur ad $\frac{2}{6}$, ſed nec erit minùs, quam $\frac{2}{6}$ integrorum rectangulorum eadem de cauſa; quia inquam poſſet fieri adhuc ſubdiuiſio, per quam accedimus ad $\frac{2}{6}$ à minori proportione: Ergo æquabit $\frac{2}{6}$ rectanguli t g. Et ideo totius rectanguli, quod componitur ex rectangulis integris eodem numero conſtantibus, quod eſt ex 12. huius duplum rectanguli ex deficientibus vnico decremento rectangulis compacti erit vt 4. ad 12. ideſt, vt 1. ad 3.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

* *Si rectangula Arithmetico decremento ſine ſine deficientia vſque ad vltimum ſui non deficiant; tunc rectangula defficientia ad illa minora, quæ integra perſeuerant proportionem æqualitatis; ad complementa verò proportionem ſubduplam, ad rectangula verò circa diametrum reſiduum ſubtriplam.*

SInt rectangula Arithmeticè deficientia AB, & BC, & DE: Quorum defectus perueniat vſque ad MK. Dico rectangula deficiētia omnia eſſe primo rectangulis XH, BL, DV, & cæt. æqualia. Dimidium verò complementorum AH, & HB quoad totam ſeriem: Tertiam vero partem rectangulorum HN circa reſiduum HN diametri XN exiſtentium non deficientium.



Probator. Quia rectangula XH, BL, DV integra perſeuerant. Ergo ſeries talium æqualium ſeriei æquè multiplicatę erit æqualis. Cnmplementa verò HB, & LO deficiunt pro medietate ſui, ſicut, & AH, & NL, & CV pro medietate ſui deficiunt, ex 12. h. ergo ſimul AH, & HB, & cæt. dimidio quoque deficient. Rectangula verò circa diametrum, quod duplici Arithmetico decremento deficiant ex 17. h. extenuabuntur ſucceſſiuè vſque ad $\frac{1}{3}$ omnium. Quarę omnia ſimul ad integra HN rectangula ęquè multiplicata ſe habebunt vt 1. ad 3. Itaq; rectangula deficientia Arithmetico decremento ſecundum vtrumque latus; ſed non vſque ad vltimum ſui; ſe habebunt ad integra, ad rectangula quidem XH, BL, DV, circa diametrum, vt 1. ad 1. ad cōplemēta verò BH, HA, vt 1. ad 2. ad reliqua verò rectangula circa diametrū HN, vt 1. ad 3.

THEOR. VIII. PROP. XIX.

* *Rectangula duplici Arithmetica decremento ſe extenuantia, & non ad vltimum ſui, ſunt ad rectangula integra, vt rectangulum ſub maximo, & minimo latere, & triente rectanguli differentiæ ad rectangulum primum.*

IN præced. fig. ijſdem poſitis. Dico rectangula Arithmetico decremento, & non vſque ad vltimum ſui deficientia AB, & BC, & DE eſſe ad integra pari numero conſtantia, vt rectangulum XQ ex maximo latere XB, & minimo XQ conſtante, & triente rectanguli HN, quod oritur à differentijs laterum, quæ inter maximum, & minimum reperiuntur.

Probatur. Nam XH æquat ipſum rectangulum XH non deficiens, at HB eſt medietas complementorū HB, AH, quod cōplemēta ſunt inuicem ęqualia ex 45. l. 1. Quamobrem ſi, & aſſumas $\frac{1}{3}$ quadrati, vel rectanguli HN circa diametrum, erit tota ſeries rectangulorum deficientium proportione Arithmetica ad ſeriem multiplicem rectangulorum non deficientium, vt rectangulum QB ſub latere XB maximi, & minimi XQ vna cum tertia parte rectanguli HN ad integrum XN, quia ſeries deficiens ad integra ſe habet quoque, vt 1. ad 1., & vt 1. ad 2. & tandem, vt 1. ad 3. ex 18. h.

COROLLARIVM.

HInc etiam educes: Totam ſeriem rectangulorum arithmeticè deficientium eſſe ęqualē rectangulo ex latere totā ſeriē integrā ſubtēdente XZ, & latere MP minimi rectanguli, vnà cum tertia parte rectanguli differentiæ crurum PO. Nam tota ſeries rectangulorum minorum non deficientium finit in PM; vnde rectangulum PX erit ęquale toti ſeriei minori rectangulorum non deficientium. Differentia itaque eſt inter ſeriem maiorum, & minorum non decreſcentem rectangulum PZ; quod eſt dimidium omnium complementorum; ſiquidem PZ æquat complementum PA, & ideo eſt dimidium omnium complementorū hinc, & inde deficientium cum ipſa ſint dimidium integrorum ex 18. h. Cum itaque AP æquet omnia rectangula minora At AP, vel PZ omnia cōplementa deficiētia dimidio ſui, etiam rectangulū PO, æquabit omnia quadrata reſidua circa diametrum, vt HN non deficientia.

Si ergo accipiatur rectangulum XR habebimus totam ſeriem rectangulorum minorum in rectangulo AP, & in reſiduo PZ dimidium omnium complementorum; ſi ergo inſuper aſſumamus tertiam partem PO rectanguli conſequemur omnia rectangula deficientia HN, LC, & VE, & cæt. Itaque tota ſeries rectangulorum deficientium ſine meta, ſed ad ſui vltimam diminutionem non peruenientium erit æqualis in ſua planitie rectangulo ſub rectanguli primi latere ZR, vel XQ & ſub latere omniū rectangulorū non deficientiū XZ, & tertia parte rectanguli differentiæ OR crurum ZR, & OZ, & differentiæ MZ laterum XM, & MZ. Si verò conſideres ea, vt deficientia quidem; ſed non quoad omnem poſſibilem extenuationem ſingulorum, tunc omnia rectāgula deficientia excluſo maximo erunt ęqualia rectangulo XR, & minus, quam tertiæ parti rectanguli PO; ſi verò includas maximum, erunt æqualia rectangulo XR, & magis, quam tertiæ parti rectanguli PO: Ratio eſt, quia excluſo AB rectangulū PR ęquat omnia minima nō deficientia: at PZ, omnia complementa pro medietate ſui deficientia; cætera verò quadrata deficientia quoad vtrumque latus excluſo HN ſunt minus, quam tertia pars omnium quadratorum eiuſdem numeri non deficientium, quam multitudinem æquat rectangulum PO, ſi verò addas maximum XN iam deficientia complementa in complemento AH ſunt maiora rectangulo XR, & quadrato HN, quod additum rectangulis LC, VE, & cæt. faciet magis, quam $\frac{1}{3}$ rectanguli PO.

TRACTATVS XXIX.

De Geodæſia Rectilineorum Planorum.

GEodæſia eſt pars Geometriæ admodum inſignis, & in vſibus humanis neceſſaria, quam apud Clauium lib. 6. Pediaſimus definit eſſe Partitionem areę inter diuerſas perſonas; Verùm in ſuo Lexico Hyeronimus Vitali eruditiſsimus deſcribit Geodęſiam eſſe corporum quoq; dimenſionem per ſenſibiles menſuras. Sed quidquid ſit de ſignificatione nominis: nos eam vſurpamus pro ea parte Geometriæ, quæ ſuperficies rectilineas conſiderat, ſiue eas transformando, ſiue partiendo, ſiue menſurando; ſiquidem, ſi altera harum conſiderationum alteri deſit, mancha euadit, & imperfecta.

EXPENSIO I.

De figurarum planarum rectilinearum transformatione in æquales ſuperficies.

SVperficies rectilineæ planæ facilem inuicem ſubeunt transformationem, & non multo labore, licet, vel angulis, vel lateribus, tum quantitate, tum numero diſcrepantes, ſeruata ſemper æquali capacitate in alias ſecedunt.

PROBL. I. PROPOS. I.

Aream cuiuſlibet trianguli in parallelogrammi aream transformare.

HOc efficitur ducendo perpendicularem ad baſim. Nam ſi ex dimidiata baſi CB, quæ eſt AB, & tota perpendiculari AD fiat rectangulum, vt eſt AF, hoc erit triangulo CDB æquale.

Probatur ex 41 prop. Elem. Nam ibi hoc docetur. Vnde non debemus repetere.

Id etiam operi mandatur diuidendo perpendicularem bifariam, & conſtituendo rectangulum BH, ex dimidiata perpendiculari, & tota baſi, hoc enim erit æquale triangulo CDB.



Probatur. Nam DGB triangulum ex 41 primi eſt æquale parallelogrammo IB ſuper dimidiatam baſim GD ad eandem altitudinem effecto; Sic eſt triangulum CGD æquale parallelogrammo GH; Ergo totum triangulum CDB toti parallelogrammo HB erit æquale.

COROLLARIVM.

HInc eſt aream ſimiliter parallelogrammi poſſe in triangulum transfundi, ſi ſuper duplam baſim ad eandem altitudinem triangulum fiat.

PROBL. II. PROPOS. II.

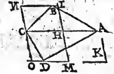
Aream cuiuſlibet trianguli, vel parallelogrammi in aream alterius trianguli, ſeu parallelogrammi transformare, quæ habeant angulum datum, & latus datum.

VIde propoſ. 43. lib. 1. Element.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato quadrilatero æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

HÆc operatio facilior eſt, quam ex Eucl. prop.



45. L. 1. Detur ABCO quadrilaterum, & ducatur diagonalis AC; detruocetur que biſariam in H, & ducatur MI faciens cum ipſa diagonali apud H angulum æqualem angulo K. & per verticem C ducatur parallela ON ipſi IM, ſicut, & diagonali à vertice D, & B parallelæ IN; & MO; eritque parallelogrammum IMNO æquale quadrilatero ABCO.

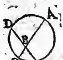
Probatur, Nam parallelogrammum HO eſt æquale triangulo ACD ex dictis in propoſ. 1. ſic & parallelogrammum HN eſt æquale triangulo ABC ex eadem propoſ. quod ſint inter eaſdem parallelas, & ideo ad eandem altitudinem, & ſuper dimidiatam baſim AC. Ergo & totum quadrilaterum ABCD toti parallelogrammo IMNO erit æquale.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Dato parallelogrammo ſupra datam rectam æquale parallegrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

SIt datum parallelogrammum rectãgulũ, quod cõtineatur rectis AB, & BC, dataque recta BD. Latera itaque parallelogrammi dati in vnam rectam redigantur, quæ ſit AC, & à puncto B trahatur recta data DB, faciens cum AB, quemcumque angulum: Triumque punctorum ADC reperiatur centrum ex prop. 11. lib 3. Elem. & fiat circulus per ea tranſiens ADC: deinde prolungetur DB in F, nam dico DB, & BF æquale rectangulum conſtituere ipſi ex BA, & BC conſtituto.

Probator ex propoſ. 35. lib. 3. Eucl. Nam ſi in



circulo duæ rectæ ſe mutuò ſecuerint, vt DF, & AC rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius AB, & BC æquale eſt rectangulo comprehenſu ſub ſegmentjs alterius qualia ſunt DB, & BF.

Si verò ex propoſ. 3. huic rectangulo conſtituamus æquale parallelogrammum in angulo dato habebimus id, quod propoſ. deſiderat.

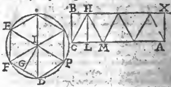
Idem quoque aſſequemur ſi tribus datis rectis ex 14. lib. 6. inueniatur quarta proportionalis, ita vt DB data ſit prima. Nam ex prop. 18. erit rectangulum ſub prima DB, & ſub quarta inueta æquale rectangulo ſub duabus medijs comprehenſo.

PROBL. V. PROPOS. V.

Aream cuiuſlibet figuræ regularis in æquale parallelogrammum redigere, ſeu etiam triangulum.

FIat parallelogrammum AB quod habeat AC æquale ambitui dimidio dati hexagoni V. g. cuius centrum I; aliud verò latus æquale perpendiculari IG in aliquod latus figuræ regularis cadente à centro I. Nam dico hoc parallelogrammum rectangulum æquale eſſe areæ hexagoni.

Probatur. Nam comprehendet tot triangula æqualia, quot habet figura regularis: Latus enim AC rectanguli, cum ſit dimidium ambitus POFB ſubſternet baſes tres, vt MC, vnde dimidia LC erit æqualis FG dimidię FD æqualis baſibus tribus FD, & cæt. linea vero LH perpendicularis eſt æqualis perpendiculari IG; Quare ex 1. h. triangulum LHC eſt æquale triangulo IGF: Horum verò triangulorum duodecim habet parallelogrammum, ſic duodecim hexagonũ. Vnde cũ conſtent æqualibus numero, areaq; triangulis erunt æqualia.



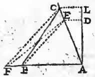
Si verò libeat habere triangulum æquale figurę datę dupletur baſis AC, & fiat æqualis toti ambitui, & ſuper eam fiat quodcumque triangulum contentum parallelis AC, & BX. Nam cùm hoc ex 1. propoſ. ſit æquale rectangulo AB, erit etiam æquale hexagono I.

PRORL. VI. PROPOS. VI.

Datum triangulum, vel parallelogrammum in aliud æquale, ſed vel maioris, vel minoris altitudinis transformare. Sicut & in aliud maioris, vel minoris baſis.

SIt triangulum ABC, & illud oporteat reducere ad minorem altitudinem AO, ducatur DE parallela AB, & ducatur EB ad angulum B, cui parallela à vertice C agatur CF, & deinde ducatur FE: Dico triangulum AEF altitudinis datę eſſe ęquale triangulo ACB.

* Prob. autem. Quia ECB triangulum ablatum



eſt æquale triangulo FEB, quod additur ipſi AEB, vtpote ſuper eandem baſim EB, & inter eaſdem parallelas EB, & CF. Vnde remanet adhuc æquale cum æquale ſit, quod additur ei, quod auffertur.

Eodem modo poterit augeri in altitudinem. Nam, ſi ponamus eſſe nobis exhibitum triangulum AEF, quod oportet in altitudinem AL ſubleuare producatur AB, & ducatur parallela baſi LC, & à puncto C, vbi ſecat latus AC ducatur ad F recta CF, cui à vertice dati trianguli E ducatur parallela EB, & vbi baſim ſecat in B, ducatur BC. Nam dico hoc triangulum BCA in altitudinem AL ſubleuatum eſſe æquale triangulo exhibito AEF.

Probatur, vt antecedens praxis. Nec aliter maiori baſi accommodabitur ſit enim triangulum ACB, cui ſit prolungãda baſis vſq; ad F, cõiungatur FC, & à pũcto C ducatur lineæ CF, & ei parallela EB, à puncto B, deinde ducatur EF. Nam triangulum AEF ſuper maiorem baſim AF eſt æquale triangulo ACB, vt ſupra oſtenſum eſt. Et eadem operatio erit de diminutione baſis. Eadem quoq; operatio erit de parallelogrammo, vt patet, cum ſit duplum trianguli.

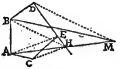
PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Dato rectilineo ad datum eius latus triangulum æquale conſtituere, ſeu parallelogrammum.

SIt datum rectilineum ABDEC, quod oporteat in triangulum transformare inſiſtens ſuper aſſignatum latus AB, è contra aſſignati lateris DE. Latus prolongetur ED in H, & ducta EA, ab angulo C, ducatur ei parallela CH. Deinde ducatur AH. Quoniam enim triangulum ECA eſt ſuper eandem baſim AE, & inter eaſdem parallelas CH, & AE erit æquale triangulo AHE, & ideo quinquãgulum erit transformatum in quadrangulum HABD neceſſarium ad operationem faciendam.

In quadrangulo, ergo HABD ducatur diagonalis HA, & prolungato latere AH, ab angulo D ducatur DM parallela diagonali prædictæ HA. & tandem ducatur MA, & erit factum triangulum AMB æquale, quinquãgulo ABCD ſuper latus AB, quod vergit contra latus DE.



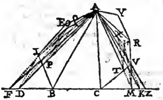
* probatur. Quia æquat quadrangulum HABD ſiquidem ſpatium HAB eſt, tum triangulo, tum quadrilatero commune. Triangulum verò reliquum HMA trianguli AMB eſt ęquale triangulo HBD reliquum quadranguli; cùm ſuper eandem baſim HB exiſtant, & in eandem baſi parallelam MD terminent.

Sed quadrilaterum HABD eſt æquale quinquãgulo ECABD, vt dictum eſt; Ergo etiam triangulum AMB erit eidem æquale, quod triangulum ex dictis poterit conuerti in parallelogrammum habens latus AB, vt patet.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Multilineum quodcumque in æquale triangulum, ſeu parallelogrammum ſuper datum latus inſiſtens transfundere.

*SIt multilaterum quodcumque AEIBCVY, datũq; latus BC, ſuper quod prolũgatum triangulũ, & parallelogrãmũ dato rectilineo æquale cõſtituere oporteat. E regione electo angulo A ducatur AB, & AC, & lateri AB ducatur parallela ID ab angulo I: Deinde coniungatur DA. Nam triangulum ADB ſuper eandẽ baſim AB, & in eandẽ parallelã ID terminans erit æquale triangulo AIB. Transferatur triangulum IBA ſuper rectam AD, & ſit omninò ei æquale, & ſimile triangulum AOP. Deinde maioris baſis DA fiat iuxta propoſ.6.h. conſeruando æqualitatem, & ſit AQD, & à vertice Q ducta ad AD parallela QF, ducatur AF. Nam ob paralleliſmum, & eandem baſim triangulum AFD erit triangulo AQD æquale, quod eſt triangulo POA, & conſequenter triangulo IBA, quare triangulo IBA erit æquale quoque AFD; quapropter portio multilateri AEIB eſt æqualis triangulo FAD, & DAB ſimul; ideſt toti FAB: Idem erit efficiendum de alia portione.



Nam ducta ad latus AC parallela VM ab angulo V, transformabitur triangulum AVC in triangulum ACM ducta AM. Deinde ſuper AM transferetur triangulum ARV, & erit ANT, quod extendetur ad occupandam totam baſim AM, & erit AXM. Deinde ab X angulo ducta XK parallela ad baſim AM, vbi ſecat in K ducatur AK, eritque triangulum AMK æquale triangulo AXM; quod æquatur triangulo ANT, & æquali, & ſimili triangulo ARV. Idem fiet de triangulo AYR transferetur enim ſuper baſim AK, faciendo ab A triangulum ei ſimile, & æquale. Deinde extendetur ad occupandam totam baſim AK: & tandem in triangulum AKZ transformabitur. Iamque habebimus triangulum FAZ æquale multilatero AEBCVY, quod omnia triangula, quibus componitur omnibus triangulis, in quibus multilaterum distributum eſt, ſint æqualia. Vnde iuxta regulas traditas poterit conuerti in ęquale parallelogrammum rectangulum.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Dato rectangulo æquale quadratum conſtituere.

HOc docuimus cum Euclid. propoſ.14. lib.2. cum rectilineum priùs in rectangulum. Deinde rectangulum in quadratum æquale transmutauimus.

Poteſt etiam fieri inueniẽdo inter duo latera rectanguli mediam proportionalem ex prop.13. lib.6. Nam quadratum huius mediæ eſt æquale rectangulo ab extremis contento ex propoſ.17. lib.6.

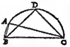
PROBL X. PROPOS. X.

Duobus quadratis inuicem inæqualibus ſimul ſumptis inuenire duo alia quadrata ſimul ſumpta æqualia, quæ etiam inuicem æquentur.

COnſtituatur rectangulum ex duobus lateribus quadratorum inuicem inæqualium, ita vt duo latera maioris alterum, alterum minoris angulum rectum claudant, vt AB, & AC. Deinde nectantur extrema puncta baſis BC: ſuper verò baſim BC cõſtituatur ãgulus rectus duobus cruribus æqualibus clauſus, quod fiet diuidẽdo BC bifariam

fariam, & facto ibi centro ducendo ſemi circulum BADC, & diuidendo biſariā in D, trahendoq; latera, & crura BD, & DC. Nam cum peripherias æquales BD, & DC ſubtendant erunt æqualia: angulus verò, vtpote in ſemicirculo erit rectus ex 31 lib 3.

Dico itaque quod quadrata laterum BD, & BC ſunt æqualia duobus quadratis ex lateribus BA, & AC, nam ſunt æqualia quadrato baſis BC ex propoſ. 2. lib. 11. ergo, & inter ſe erunt æqualia.

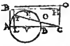


Poſſunt autem etiam inueniri inæqualia, vt per ſe patet, quod, & de rectangulis ſimilibus valet ex 31. lib. 6.

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Rectangulo dato alia rectangula reperire ei æqualia ſub diuerſa laterum quantitate.

SIt rectangulum comprehenſum duobus rectis AC, & BC, velitque aliquis aliud rectangulum paulò breuioris lateris efficere iuxta menſurā datā; hæc ſuper latus AC měſuretur, & ſit CL, & diuiſo biſariam ſegmento AB in V centro V ducatur circulus. Deinde centro C interuallo CI ducatur

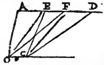


portio circuli LI, & vbi ſecat in L ducatur IC. Nam OC erit aliud latus, quod claudet rectangulum LO rectangulo CB æquale. Probatur ex Cor. 1. propoſ. 36. lib. 3. elem. hæ duo rectangula AH, ex AC, BC, & LO ex IC, CO eſſe æqualia, ſicut, & tangens circulum erit quadratum prędictis rectangulis æquale, ſi ex puncto C illum contingat.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Trapezia inter eaſdem parallelas conſtituta inter ſe ſunt æqualia, dummodo ſit æqualis altera alteri correſpondens eorum baſis.

SIt trapezium OACB, & trapezium OFCD quorum baſes AB, FD æquales ſint, & O B eadem, vel æqualia. Dico hæc trapezia eſſe æqualia.



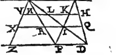
Probatur. Nam ex Cor. prop. 40. lib. 1. triangula habentia eandem baſim, & inter eaſdem parallelas inter ſe ſunt æqualia: quare triangula OFC, & OCE erunt ęqualia. Porrò triangula AEO, & FCD ob baſes æquales AE, & FD erunt æqualia. Ergo trapezia quoque æqualibus triangulis conſtantia erunt æqualia.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Triangula inter parallelas conſtituta, & baſi eadem, ſi ſecentur parallelis lineis ſegmenta ſunt æqualia.

TRiangula DAF & DOF ſint inter parallelas AO, & DF conſtituta ſuper eandem baſim DF, & ſecentur parallela aliqua, vt HN. Dico *illa ſegmenta eſſe æqualia.*

Probatur. Triangula DAF, & DFO ſunt æqualia ex propoſ. 40. lib. 1. Element. Proptereaque ablata communi parte DIF triangula DIA, & FIO remanebunt ęqualia. Quare erit OI ad ID, vt AI ad IF ex prop. 11. lib. 6. Ideoque erit quoque *componendo* IO ad OD, vt AI ad AF; ſed vt AI ad AF; ita ſe refert QI ad DF, & vt OI ad OD, ſic IR ad DF. Quare QI ad DF, & IR ad DF eandem dicent proportionem OI ad OD, vel AI ad AF. Et ideo, cùm eidem DF eandem dicant proportionem duæ QI, & IR erunt ex propoſ. 9. l. 5. æquales.



In triangulo autem AIO, vt LO ad OI, ſic AK ad KI. Eſt autem LO ad OI, ſic LN ad IR, & vt AK ad AI, ſic HK ad QI. Quare erit eadem proportio LN ad IR, quam HK ad QI: ſed QI, & IR oſtenſæ ſunt æquales; Ergo etiam HK, & LN ex 12. l. 5. Vnde patet, quod ſint ſuper ęquales baſes triangula HAK, & LON, ſcilicet HK, & LN: vnde erunt ęqualia, ſic triangula QAI, & ROI cū ſint ſuper æquales baſes IQ, IR, & inter parallelas erunt ęqualia. Vnde etiam reſidua trapezia IHKQ, & RLNQ erunt æqualia. Cùm ab æqualibus triangulis ſint æqualium triangulorum reſidua.

COROLLARIVM.

HInc obiter patet triangula æqualia altitudinis, atque trapezia: ne dum conſequi baſes æquales, ſed & omnes baſibus ductas parallelas eſſe inuicem æquales: dummodo ad eandem altitudinem ſint deductæ, quod etiam verificatur ne dum in triangulis eandem baſem habentibus; ſed, & ęqualem, vt per ſe patet.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Trapezia inter lineas proportionales conſtituta, & eiuſdem altitudinis ſe habent inuicem, vt baſes.

SInt in præced. fig. duo triangula æqualis altitudinis DAF, & DOZ, hęc ex 1. lib 6. ſe habebunt ad inuicem, vt baſes DF, ad DZ. Rurſus triangula QAI, & IOX ſe habent ad inuicem, vt baſes QI ad IX: nimirum DF ad DZ: Quaderè cum ſit totum DAF ad totum DOZ, vt ablatum QAI ab ablatum

tum IOX, etiam reliquum trapezium DQIB erit ad reliquum trapezium DIXZ, vt totum DAF ad totum DOZ, ſcilicet, vt baſis DF ad baſim DZ, vel vt QT ad IX.

EXPENSIO II.

De caſu perpendicularis, & ipſius quantitate.

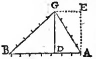
DOcuimus mediantibus tabulis quodlibet ex triangulis in duo triangula rectangula reducere in tr. 27. Trigonometriea, nunc ſine tabulis idem docere oportet, & primo, in quod punctum ſubiectum baſeos cadat perpendicularis, & deinde quantitatem ipſius perpendicularis, cùm id ſit neceſſarium ad areas planas menſurandas per numeros, & maximè triangulorum.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Caſum perpendicularis ex notis lateribus cùm cadit intra triangulum inuenire.

SIt triangulum AGB, in quo angulus G ſit maior vtrolibet apud A aut apud B, habeamuſque crura nota AB 7 planorum AG quinque & GB palmorum 6. Multiplicando ſingula latera in ſe fiant eorum quadrata, vt docuimus def. 1 Tract. 7. lib. 8. Eucl. nimirum lateris AB 49. cruris AG 25. & cruris GB 36. Adde deinde duo quadrata ſimul V. g. 25. & 49. fiet 74 ſubduc quadratum reſiduum 36. erunt poſt ſubtractionem 38. partire bifariam, & erunt 19. quem numerum partieris per numerum baſis 7. & dabunt 2. & $\frac{5}{7}$ nimirum diſtantiam AD ab A, & punctum D, in quod à vertice G cadit perpendicularis.

Probatur nam ex prop. 13. lib. 2. quadratum BG minus eſt quadratis rectarum AG, & AB rectangulo bis comprehenſo ſub BA, & AD, quod cum ita ſit ſunt vnita, ſimul quadrata cruris AG 25. & baſis AB 49. partium, & ſumma fuit 74. & ſubductum eſt quadratum rectæ GB 36. & reſiduum fuit 38. nimirum duo rectangula ſingula contenta ſub AB, & AD, vt ergo remaneat vnũ tantum rectangulum reſiduum 38. diuiſum eſt bifariam, & remanſit 19 & tandem, vt habeatur crus AD diuiſum eſt 19. per latus AB 7. partium, vnde reliquum latus remanſit, & ſegmentum, in quod cadit perpendicularis partium 2 & $\frac{5}{7}$.

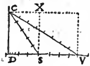


At ſi placeat reperire caſum BD. Simul BA 49. & AG 36. quadrata vnito, vt fiat ſumma 85. ſubducto altero quadrato 25. reſiduum erit 60. pro duobus rectangulis ſub AB, & BD contentis, diuiſoque eo numero bifariam erit 30. vnum rectangulum, quod diuiſum per crus AB 7. partium quotiens erit crus DB 4. partium, & $\frac{2}{7}$.

PROBL. II. PROP. XVI.

Caſum perpendicularis ex notis cruribus cùm cadit extra triangulum reperire.

SI ergo ſciamus perpendicularem extra triangulum cadere, eo quod in triangulo VSC angulus ad S ſit obtuſus, & V acutus, tunc vtemur propoſ. 12. lib 2. Elem. in qua demonſtratur cruris VC quadratum maius eſſe quadratis rectarum VS, & SC rectangulo bis comprehenſo ſub VS, & SC, ideo quadratum 25. cruris SC, & 16. quadratũ cruris VS in vnũ ſummam redigantur, ſubducaturque à quadrato cruris VC 64. & erunt reſiduus numerus 23. duo rectangula contenta ſub VS, & SD bifarientur, vt ſint vnicum tantùm rectangulum erit 11 $\frac{1}{2}$, quod diuiſum per latus VS 4. dabit 2. & $\frac{7}{8}$: pro latere SD.



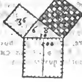
At ſi neſciamus; an cadat intra, vel extra, ſed ſolùm nouerimus VC crus maximum, & latus SV, & SC; ideoque quia quadratum cruris SC, minus eſt quadratis rectarum VS, & VC rectangulo bis comprehenſo ſub VS, & ſegmentum ab V vſque ad illud punctum, in quod cadit perpendicularis ex 13 l. 2. Eucl. nondum notum, ideo quadratum SC 25. ſubduco à ſumma quadratorum reliquorum VS, & VC quadratorum 80 & reſiduum erit 55. dun nimirum rectangula; diuidatur, itaque numerus 55. per medium, vt vnicum rectangulum 87. $\frac{1}{2}$, quod diuidatur per latus VS 4. & prodibit alterum latus notum VD partium 6. $\frac{1}{8}$.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Ex notis cruribus duobus rectanguli alterum crus inuenire.

QVoniam per deductionem perpendicularis diuiſimus triangulum quodlibet in duo rectangula, quorum habemus nota duo crura, vt in fig. anteced. VD, & VC, & poſſumus cognoſcere tertium crus, nempe perpendicularem CD.

Quia quadratum baſis ſubtenſæ angulo recto ex 12. lib. 2. æquale eſt quadratis laterum; multiplicabimus palmos baſis V. g. 10. palm. & fient 100. deinde lateris noti 8. palmorum & fiet 64. quibus deductis à quadrato baſis 100. erunt reſidua quadrata 36. à quibus extracta radix quadrata dabit 6. pro altero latere.



Sic ſi iam innotuerint ambo latera angulum rectum claudentia aliquo modo, & neſciamus baſim; eadem ratione poterimus inuenire, nam quia quadratum baſis angulo recto ſubtenſæ æquale eſt quadratis duobus laterum, ſi 6. multiplicetur in ſe,

 & ſiat

& fiat quadratū 36. & 8. & fiat quadratum 64. iuncta ſimul dabunt quadratum 100. palmorum à quo educta radix quadrata dabit 10. pro longitudine baſis angulo recto ſubtenſæ, vt vides.

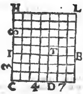
Si verò latera obtinerent numeros fractos, vt in præc. latus VD eſt 6. $\frac{7}{8}$ omnes tū huius, tum alterius lateris partes in eaſdē minutias proijci debēt, & ſic latus VC erit par. 64. & quadratū 4096. (nam quilibet palmus diuiſus ſupponitur in 8. partes cumque ſint palmi 8. dant 64. partes,) & latus VD erit partium octauarum 48. & addita minutia $\frac{7}{8}$ erit 55. & quadratum 4025. quo à priori deducto prodibit quadratum perpendicularis CD partium 3071. à quo educta radix quadrata dabit partes 32. $\frac{1}{5}$, & paulò ampliùs pro perpendiculari DC. Perpendicularis verò DG alterius trianguli eodem computo facto erit par. 4. & $\frac{5}{7}$.

EXPENSIO III.

De areis triangulorum, omniumque aliarum figurarum rectilinearum menſurandis.

Lines recta menſuratur, cùm tot rectas lineas continet æquales. Et non alia ratione ſuperficies menſuratur, cum continet tot minores ſuperficies inuicem æquales: ſed quia non omnes ſuperficies ſpatium implent, & ſuperficiem omninò occupant, vt circuli, ideo adhibenda fuit menſura, quæ ſuperficiem menſurandam multiplicata omninò poſſet occupare, & eam totam operire, ne quid extra menſuram remaneret. Hæc autem fuit rectangulum, quod multiplicatum poteſt omnes figuras rectangulas, rectilineas omninò tegere, & occupare. Quà de re alias figuras, vt menſurationi ſubijcerentur oportuit ad rectangulas reducere, quod hic agimus reducendo triangula ad rectangulas ſuperficies, vt certæ menſurationi numeris exprimibili ſubiaceant.

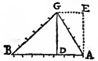
In confeſſis eſt autem rectanguli, cuius ſint nota latera, etiam areã ſtatim prodire, ex multiplicatione laterum inuicem; ſic ſi ſit notum latus HL eſſe 7. palmorum, & HC 8. palmorum ex multiplicatione mutua fit area 56. palmorum quadratorum, vt diximus l. 2. p. 3. Cor. & ſic ſi area ſit nota rectanguli 56. palmorum, & latus alterum 7 ſtatim innoteſcet per diuiſionē alterum latus, & ſic, ſi 56. diuidatur per 7. fiunt 8. palmi pro latere HC. In quadratis verò idem aſſequemur per extractionem radicis quadratæ; ſic, ſi à numero 25. educatur radix quadrata prodibit latus palmorum 5. quod & verificatur de partibus, vt ſi aſſumantur partes CI 3. & CD 4. laterum CH & HL, fiet area CT 12. palmorum quadratorum.



PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Aream cuiuſlibet trianguli inuenire, cùm perpendicularis intra triangulum cadit.

Supponimus hic omnia latera trianguli nota, vel quod mēſurari potuerint, vel quod ex doctrina ſinuum, ſecantium, atque tangentium potuerint inueniri, ideoque ex Expenſ. præced. notam quoque perpendicularem, & punctum, in quod cadit, & conſequenter redactum triangulum, vel ad vnum, vel ad duo triangula rectangula, & ideo quoq; notā eſſe altitudinē, eorū quam perpendicularis dimetitur, & quia ex propoſ. 40. lib. 1. parallelogrammum eiuſdem baſis, & eiuſdem altitudinis eſt duplum trianguli, ideo ex crure AD 2. & $\frac{1}{3}$,

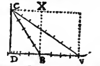


vel 19. partium, & perpendiculari DG 4. & $\frac{5}{7}$, vel 29. quæ crura angulum rectum ambiunt, fiat rectangulum AGDB 551. multiplicatione mutua quadratorum paruorum: nam medietas huius rectanguli 275 $\frac{1}{2}$ erit area AGD, idem fiat de alio rectangulo GDB; nam multiplicato latere DB part. 30. cum latere DG part. 29. prodibit rectangulum 870. cuius medietas erit 435. area trianguli DGB.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Aream triangulorum, cùm perpendicularis extra triangulum cadit inuenire.

Ex noto latere AD part. 6. & $\frac{7}{8}$, id eſt minutiarum 55. & perpendiculari CD 32 $\frac{1}{2}$ fit rectangulum VC mutua numerorum multiplicatione quadratis paruis conſtans 1787 $\frac{1}{2}$, quorum medietas erit triangulum VCD 893 $\frac{3}{4}$. Ruſus ex ſeg-



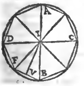
mento DB part. 23. & perpendiculari DC part. 32. $\frac{1}{2}$, fiat rectangulum DX part. 747. $\frac{1}{2}$, & medietas 373. $\frac{3}{4}$ erit triangulum BCD, quod auferendum eſt à triangulo VCD part. 893 $\frac{3}{4}$, & reſiduum erit area trianguli BVC part. 520.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Aream cuiuſcumque figuræ regularis inuenire.

Sit octogonum CADB, cuius latus BF iam notum ſit ex ijs, quæ de lineis circulo inſcriptis diximus,

mus, vel ex tabulis ſinuum 765. radiu IF 1000. partium præſuppoſitu. Itaque poterit diuidi, & reſolui tota figura in 8 triangula iſoſcela, & hæc in 16. triangula rectangula ducta perpendiculari VI ad mediũ FV lateris FF octogoni, eumq; habear notum eſſum perpendicularis, nempe ad medietatem lateris BF partes 382 ½, & erus IF 1000. inuenies ex prop. 17. perpẽdicularem VI partium 924. hincque efficies rectangulum 353430. cuius medietas erit 176715. triangulum IVF, & quia 16. triangula totam figuram complent, ideo ſi multiplices prædictum numerum per 16. totam aream octogoni obtinebis part. 1827440. Idemque efficies in omnibus alijs figuris regularibus, omnes enim in triangula æquicrura, & deinde in rectangula diſtribui poterunt, ex quorum notis areis tota area figuræ in palàm erit.

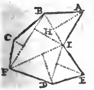


PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Aream figuræ rectilineæ irregularis non triangularis inuenire.

REſolues totam figuram in tot triangula, eaque in rectangula transformabis, rectangulorumque ſingularum exquires aream, quas deinde areas in vnam ſummam colliges, & illa erit area figuræ irregularis.

V. g. ſit data figura rectilinea irregularis ABCFDEI. Ductis lineis FI, & IF, & ID, deinde FF erit redacta figura in tot triangula, de quorum lateribus præſuppono cognitionem te habere, vel menſura, vel ex tabulis. De ſingulis itaque triangulis ex prop. 15. vel 16. h. caſum perpẽdicularis, vt HA & hinc ex pr. 18. vel 19. h. aream HSA, & ſic ages de area EIB, & de alijs, quas omnes areas, vt inueneris, in vnam ſummam rediges, totamque aream totius figuræ irregularis propoſitæ conſequeris.



PROBL. V. PROP. XXII.

Aream figuræ tum regularis rectilineæ, tum irregularis geometricæ inuenire.

ID exequeris, ſi eam redigas in quadratum æquale, nam illius quadrati area erit, & figuræ propoſitæ, vt autem id fiat, oſtendemus infra cum de figurarum transformatione agemus.

EXPENSIO IV.

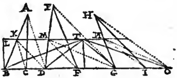
De augmento, & partitione trianguli.

DVplici modo quælibet fig. diuidi poteſt, vel ex pũcto in eius latere, vel in medio dato in triangula, vel per parallelas vni lateri dato, in trapezia, vel in quid ſimile, licet enim poſſit diuidi etiam ex puncto, extra dato, iſte tamen modus diuidendi conuenit triangulo, conuenit etiam parallelogrammo, ſed vniuerſalis non eſt. Figuræ autem diuidendæ, vel augendæ, vel ſunt multilateræ, vel ſunt triangula, vel ſunt parallelogramma, ſed vt à facilioribus exordiamus, incipiemus à triangulis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Triangulum datæ altitudinis ex multis triangulis diuerſæ altitudinis coagmentatum conſtruere.

SIt triangulum BAC, DEF, & GHI, quæ in triangulum altitudinis BL reducenda ſint. Ducta BI indefinita, & huic FL perpendiculari; triangulum BAC redigatur ad triangulum BKD datæ altitudinis ex prædictis de transform. fig. pr. 6. h. apud quem ſuper eandem lineã conſtituatur triangulum DEF, & redigatur in triangulum æquale eiuſdem altitudinis DMG, & à puncto G erigatur



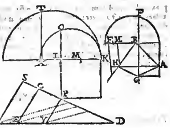
tertium triangulum GHI, & redigatur in triangulũ eiuſdem altitudinis GNO. Ductis deinde rectis BT, DT, TG, & TO erunt tria triangula tribus ob baſim eandẽ, & æqualẽ altitudinẽ, æqualia nempe BDT triangulo BKD, & ideo quoque triangulo æquali ex conſtruct. FAC: triangulũ DTG item eſt æquale triang. DMG, & ideo triangulo DEF: at triangulum GTO triangulo GNO, & conſequenter triangulo GHI. Habemus itaque triangulum BTO coagmentatum ex tribus BAC, DEF, & GHI.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Triangulo datam partem addere, vel auferre eadem figura manente.

SIt primo data pars, nempe area æqualis rhombo ABGH à triangulo, quod debet eſſe maius, CDE auferenda. Triangulo CED fiat æquale quadratum FK, priùs *conuertendo* in rectangulum; inde in quadratum ex propoſ. 14. lib. 2. Elem. idemque fiat de rhombo ABGH, & ſit quadratũ ex BF. Deinde

de duobus lateribus quadratorum KL, & BF inueniatur tertia proportionalis KN, quæ transferatur in latus KL, & ſit LM, interq; reſiduũ KM, & totũ latus KL media proportionalis inueniatur LO. Inueniaturque deinde rectis KL, & LO, & DA lateri trianguli quarta proportionalis DV, ita quòd ſit, vt KL ad LO, ita DE ad CV, & à puncto V ducatur parallela lateri CK. *Dico triangulo* CED *ablatum eſſe trapezium* EP *Rhombo* ABGH *æquale.*



Probatur triangulum DEC ad triangulum DVP duplicatam habet laterum rationem ex 19. ſexti, nempe lateris DE ad latus DV, quæ ex constructione eadẽ proportio eſt, quæ reperitur inter OL, & KL: At OL, KL, & KM ſunt cõtinuè proportionales ex eff ct. quare eadem quoq; proportione reſpiciet KL rectam KM, qua triangulum DCE alterum minus DPV. Et per *conuerſionem rationis*, ita erit quoque triangulum DEC ad Trapezium EP, quo ſuperat triangulum DPV, vt KL ad LM; quo ſuperat lineam KM. Fecimus autem LM tertiam proportionalem inter duo latera LK, & AF quadratorum. Vnde ita erit quadratum PK ad quadratum BF, vt KL ad LM; & ideo erit triangulum CEO ad trapezium EP, vt ſibi æquale PK ad quadratum AF, id eſt Rhombum ſibi æquale ABGH. Cum ergo triangulum ECD ad trapezium EP, & ad Rhombum AAGH, eandem habeant rationem ea 9. quinti, erunt inuicem æquales Rhombus, & Trapezium. Quare abſtulimus à triangulo DCE partem EP æqualem Rhombo BAHG, quod promiſimus.

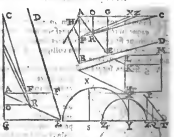
Si verò ſit addendum hoc idem fiet: niſi quod ZM ipſa media proportionalis inter latera quadratorum KL, & ZF adiungatur ipſi lateri maioris quadrati, vt ſit tota KX & inter hãc, & latus KL reperietur media proportionalis KT: deinde fiet, vt XT ad KX, ita ED ad aliud, & prodibit DR, proportionalis: Ducta verò RS parallela ad CE erit additum triangulo, trapezium RC, quòd cum ipſo integrat triangulum RSD eiuſdem rationis.

Probatur autem eadem ratione. Nam triangulum R O eſt ad triangulum CED in duplicata ratione baſis OR ad baſim OE: hæc autem proportio baſis ad baſim, eſt eadem ex conſtr. *inuert.* quæ lineæ XK ad mediam AT, quæ eſt duplicata eius, quam habet eadem KX ad latus quadrati KL (ſiquidem media proportionalis mediat XT) & ideo XX ad KL latus habet eandem proportionem duplicatam, vt habet triangulum ORS ad DCE triangulum. Quare poterimus vti *diuiſione rationis*, & dicere, quod triangulum CED erit ad trapezium SE, quo triangulum maius ſuperet minus, vt LK latus ad reſiduum LX, quo linea KX ſuperat LK. Hæc verò linea X, ſeu LM eſt AN tertia proportionalis laterũ KL, & BF, ita quòd ſit, vt KL, & BP, ita BF ad BN: Vnde & quadrata vicent eandem proportionem ex Cor. prop. 21. lib. 6 & ita erit quadratum KP ad quadratum ex BF, vt KL, & LX, & ideo, vt triangulum CKD æquale quadrato PX ad trapezium RC. Cum itaque ad trapezium RC, & ad quadratum ex BF Rhombo æquale eandem dicat proportionem triangulum CED ex 9. lib. 5. erunt æquales inuicem trapezium RC, & ex AF quadratum; & ideo etiam Rhombus BHAG Vnde Rhombo æqualis pars, triangulo addita eſt, quod eſt promiſſum.

PROBL. III. PROPOS. XXIV.

Triangulo, cui deficiat vertex, vel trapezio deſtinatam partem addere, vel auferre trahendo parallelam vni ex lateribus.

SIt triangulum ABC, vel Trapezium ABCD, cui parallelâ EG lateri BA ſit auferenda pars æqualis quadrato NM, quod ſit minus toto triangulo ABC. Ducatur CF parallela lateri BO, quæ faciat triangulum AFC: Deinde cruri AB, & lateri AE inueniatur tertia proportionalis HA, vt vides factum in triangulo BHA: Duabus verò AB, HA & lateri LN quadrati NM, inueniatur quarta proportionalis LK, ex quâ fiat rectangulum KM. Quod dico eſſe ad quadratum MN, vt triangulum AFC ad triangulum AACO: ſi eſſet perfectum.



Probatur. Nam ita eſt AACD triangulum imperfectum ad AFC triangulum, vt AA ad HA ex Cor. p. 21. l. 6. cùm ſit HA tertia proportionalis; vt autem AA ad AH; ita eſt NL ad LK ex effectione, & quia ſunt eiuſdem altitudinis, ex 1. lib. 6. Elem. ita eſt NM quadratum ad KM rectangulum, quòd, cùm ita ſit, ſi auferamus partem æqualem rectangulo KI à triangulo AFC ex documentis anteced. propoſitionis, quæ ſit OF ducta parallela RO lateri AA (inueniendo priùs quadratum ex ZT æquale rectangulo KM, & quadratum ea TP æquale triangulo AFC; & illis duobus lateribus inueniendo tertiã proportionalem TQ, & reſiduum ex QT lateris TP, & ipſum TP mediũ proportionalẽ XX, & tandem tribus TP, YK, & cruri CA quartam proportionalẽ CR.) Cum itaq; repertum ſit trapezium RO æquale rectangulo MK reperiatur illi trapezium ſimile, ſimiliterque poſitum, ad quod illud ſe habeat, vt rectangulum MK ad quadratum MN; quòd fiet ducta diagonali AR vſque ad a, & ducta EG ex E parallela RO, vel BA. Eritque AE trapezium pars ablata æqualis quadrato MN à triangulo imperfecto AFCD.

Probatur. Nam, cùm ſint inter parallelas conſequenter erunt ſimilia, ſimiliterque poſita, cùm & habeant latera proportionalia ex Coroll. prop. 23. lib. 6.

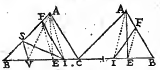
23. lib. 6. & ſit AF ad FR, vt AB ad BK. Quare erit trapezium AB ad trapezium OF, vt AB ad AH, Sed ex effectione AB ad AH eſt, vt ML ad LK, & ideo ex 1. lin. 6. elem. vt MN quadratum ad rectangulum KM. Sed Trapezium OF eſt æquale rectangulo MK ex effectione. Ergo & trapezium AB erit æquale quadrato MN ex 11. lib. 5.

Idem prorſus agēdum, ſi de additione ſermo ſit: niſi, quòd quadratum MN nō intereſt an ſit minus: ſed poteſt eſſe maius. Nam primò inuenitur tertia proportionalis AH duabus AB, & FA. Deinde tribus AB, AH, & LN, quarta LK, ſuper quam, & LM formatur rectangulum MK. Et deinde ex documentis propoſitionis antecedentis vbi agitur de additione, addatur trapezium AR habens RO parallelum latus lineæ AF (primò inueniendo quadratum YZ rectangulo MK æquale, & quadratum TP triangulo AFC. Deinde reperiendo lateribus eorum tertiam proportionalem QT; duabus verò QT, & PT ſimul, & ipſi PT mediam proportionalem XS, Poſtea tribus XS ſoli PT, & TQ tamquā vna, & CF, quartam proportionalem CR, à quo puncto ducta RO dabit trapezium OF quæſitum) ducta autē AR vſq; ad DE ab B puncto ducatur parallela EO cruri AF, & dabit trapezium AE æquale quadrato MN, vt AR ex effectione eſt æquale rectangulo MK.

PROBL. IV. PROPOS. XXV.

Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas ab vno puncto in eius latere dato diſcedentes.

SIt triangulum ABC, quòd oporteat diuidere ſecundùm proportionem datam V. g. in tres partes à puncto in eius latere dato. Diuidatur baſis BC in tres partes, & tertia pars ſit CE, vel ergo punctum datum cadit in E, ex qua diuidendum eſt triangulum, & ducta AE erit triangulum CAE, vel BAE, in dextro triangulo tertia pars, cùm ſit vt baſis ad baſim, ita triangulum ad triangulum ex 1. lib. 6. Vel cadit in I, vel hinc, vel inde extra E punctum, & ducatur IA: cui parallela ſiat FE; connectaturque IF. Dico trapezium CIAF in ſiniſtro, vel triangulum FIB in dextro triangulo eſſe tertiam partem trianguli BAC dati.



Probatur. Quia ſpatium BFE eſt commune. Triangulum verò FAE eſt æquale triangulo FEI, cùm ſit inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſim FE: Ideo communi ſpatio BFE additum eſt addendo triangulum EFI quantum ablatum eſt, auferendo triangulum FAE. Propter hoc erit adhuc æquale BAE, & BFI: Sed BAE eſt tertia pars totius trianguli, cum ſe habeat ad totum triangulum, vt baſis BE, quæ eſt tertia pars ad baſim BC. Ergo, & triangulum BFI erit totius trianguli tertia pars.

Idem dicendū eſt de ſiniſtro triangulo, vbi triāgulum CIA eſt commune, & triangulum IAE eſt æquale triangulo AIF. Vnde trapezium AICF erit æquale triangulo CAE. Quod ſi alia tertia pars deſideretur; ipſi AI ad V tertia parte ducatur parallela VS, & ab S ad I ducatur recta; eritque triangulum ISB æquale triangulo VAB, conſequenter tertia pars totius trianguli CAB ſiquidem BSV eſt ſpatium commune, & BAV, & SVI æqualia ob eandem baſim, & parallelas SV, AI.

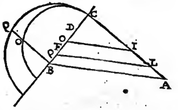
COROLLARIVM.

QVare deducitur, quòd ſi punctum I coniungatur cum vertice A, & lineæ connectenti IA ducantur parallelæ FE, & VS à partibus baſis CE, & EV, & VB & vbi ſecant latera angulum oppoſitum comprehendentia, ad ea puncta à puncto dato rectę ducantur, vt IS, IF, illæ diuident triangulum in tot partes, in quot baſis diuiſa eſt.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Triangulum in partes aſſignatas ſecare lineis vni lateri parallelis.

SIt triangulum ABC diuidendum in tres partes per parellelas vni lateri V. g. lateri AB.



Diuidatur alterum latus CB in tres partes, & inter quaſlibet, & totam V. g. inter CD, & CB inueniatur media proportionalis IO, & rurſus inter CF, & CB media proportionalis BQ, transferanturque à puncto C in latus CB, & ſint CO, & CQ; à punctiſque O, & Q parallelæ ad baſim AB ducantur. Nam illæ ſecabunt totum triangulum in tres partes ęquales.

Probatur. Nam ex Cor. prop. 21. lib. 6. elem. poligonum ad polygonum ſimile eſt in duplicata ratione laterum homologorum, & ideo erit, vt CB ad CD; ita triangulum CAB ad triangulum ICO; ſiquidem, & CB ad CD habet duplicatam rationem eius, quàm BC, ad CO ex effect. ſed CB habet proportionem ad CD, quam 3. ad 1. ex conſtructione. Quare CAB triangulum totum ad ICO triangulum ſe habebit, vt 3. ad 1. vnde triangulum ICO erit $\frac{1}{3}$ trianguli CAB.

Idem dicas de triangulo CLQ. Nam triangulum totum CAB ad CLQ duplicatam laterum CB ad CQ poſſidet rationem, quam quoque poſſidet CB ad CF; quare cum CB tota ſit ad CF vt 3. ad 2. Triangulum quoque ACB totum erit ad triangulum LCQ, vt 3, ad 2. & ideo LCQ erit $\frac{2}{3}$ trianguli CAB. Ablato ergo ICO, de quo oſtendimus eſſe tertam partem totius, reſiduum IOQL trapezium, erit tertia pars totius CAB.

EXPEN-

EXPENSIO V.

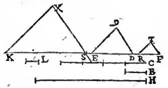
De quocumque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea data ſimilia.

TRiangula in diuerſas partes diduximus modo vniuerſaliùs eſt inſtituenda ſpeculatio, & ad omnes figuras planas extendenda, ad quam additum aperuit ipſa triangulorum multiplicata partitio.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Dato rectilineo conſtruere rectilineum ſimile, & ſimiliter poſitum maius, aut minus ſecundùm proportionem datam.

SIt rectilineum datum DQE, quòd debeat fieri quadruplo maius: ſed tali modo; vt ſimile ſit id quod componitur rectilineo præcedenti dato, & ſimiliter poſitum.



Sit lineæ C quadruplo maior, quam B: lateri verò DE rectilinei dati DQE inueniatur quarta proportionalis maior, vel minor, prout volumus augere, vel minuere, ita quod ſi augendum ſit, vt B eſt ad C, ita fiat DE, ad H. ſi minuere, vt C ad B, ita fiat DE ad L; deinde inter iſtas reperiantur mediæ proportionales KS, vel FR. Nam Triangulum SXK ex 23 lib. 6. conſtitutum ſuper SK ſimile ſimiliterque poſitum, vt EQD erit triangulum quadruplo maius, & FTR conſtitutum ſuper RF quadruplo minus.

Probatur. Quia ex Cor. pr. 21. l. 6. ita eſt triangulum ſuper KS ad triangulum ſuper DE, vt H ad DE; cum vtrobique ſit duplicata proportio. Sed H eſt ad DE ex effectione, vt C ad B, nempe quadrupla. Ergo & H ad DE quadrupla erit. Vnde triangulum ſuper SK ad triãgulum ſuper DE quadruplam quoque habebit proportionem.

Idem aſſerendum de triangulo ſuper RF, vt per ſe patet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

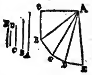
Datis pluribus rectilineis, ea in vnicum rectilineum conglobare:

SI rectilinea ſint diſſimilia, diuerſæque poſitionis, ea redigantur in ſimilia, ſimiliterque poſita triangula, quadrata, ſeu parallelogramma, vel ad quãcumq; aliam figuram eiuſdem rationis, ſed meliùs erit ad prædictas figuras facilitatis gratia.

Sint V. g. quinq; quadrata, quę ſuper latera A, B, C, D, E ſint cõſtituta, vel quinq; parallelogrãma, vel triãgula quorũ latera homologa ſint, ſintq; primi latera A, & B angulũ rectũ O claudẽtia, ſubtẽdaturq; baſis AB, iterumque ſuper baſim hanc BA erigatur ad rectos angulos C linea tertia à puncto B, & coniungatur baſi ſecundâ AC angulo recto B ſubtenſa. Sicque fiat rurſus de linea D erigendo eam perpendiculariter ſuper CA, & coniungendo baſi tertia DA, & tandem idem fiat de linea E.

Dico quadratum, ſeu parallelogrammum ex EA ſimile, ſimiliterque prædictis poſitum eſſe æquale omnibus alijs parallelogrammis ſimilibus poſitis ſimiliter, ſeu quadratis.

Probatur. Nam quoad quadrata ex 11. l. 2 elem. quoad parallelogrãma, ſeu alias figuras ex 31. lib. 6. rectilineum factum ex BA baſi eſt æquale duobus ſimilibus, & ſimiliter poſitis ex BO, & OA factis; huic vero ex AB, & ex BC eſt æquale rectilineum CA ſimiliter poſitum, &

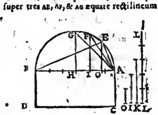


ſimile prædictis, huic autem CA, & alteri CD eſt æquale rectilineum ex AD, & tandem huic poſtremo, & rectilineo DE eſt æquale rectilineum EA ſimile, ſimiliterque poſitum. vnde rectilineum ex EA eſt æquale omnibus ſimilibus, & ſimiliter poſitis, ex E, D, C, B, A, ſiquidẽ ęquat rectilineum ex DA, quæ omnia comprehendit excepto rectilineó ex DE, & ipſum rectilineum ex DE.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

* *Vnicum rectilineum in plura rectilinea partiri, ſecundùm proportionem datam. manente eadem figura, & poſitione.*

SIt rectilineum ABCD, ex quo oporteat fieri plura V. g. tria rectilinea ſimilia, ſimiliterque poſita; ſed iuxta proportionem, quam habent K, I, & O lineæ, ita quòd vnum ſit $\frac{4}{9}$ aliud $\frac{3}{9}$ aliud $\frac{2}{9}$. totius rectanguli, & ſe excedant inuicem, vt lineę K, I, & O. Ex lineis K, & O componatur vnica linea L, diuidaturque ex 10. lib. 6. Elem. AB in eaſdem partes, ac L diuiſa eſt, & ſint HA ſimilis lineę K linea AI ſimilis lineę I, & AO ſimilis lineę O. Quo facto à diuiſionibus erigantur perpendiculares HG, & IF, & OE; & connectantur ſuper AB facto ſemicirculo pũcta, quibus ſecatur rectis AE, & AF, & AG. Dico rectilinea tria ſimilia, ſimiliterque poſita ſuper tres AE, AF, & AG æquare rectilineum ABCD.



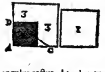
Probatur. Rectilineum ex AB ad illud ex EA

habes

habet duplicatam ſuorum laterum proportionem nempe AE, & EB, ſed hæc ob ſimilitudinem triangulorum eſt eadem, quæ AO, ad EO. Vnde habebunt rectangula ex BA ad EB duplicatam proportionem AO ad OB. Sed hæc eſt duplicata proportionis AO ad OB, cum ſint tres proportionales continuę AO, & OB, & OB ex propoſ. 16. lib. 6. Elem. Ergo AO ad OB erit eadem, ac rectilinei ſuper AE ad rectilineum ſuper EB. Ergo *componendo* ita erit AO ad AO, & OB, vt AE rectilineum ad duo rectilinea ſimul AE, & EB, quæ ſunt æqualia ex 32. lib. 6. Elem rectilineo ABCD, quamobrem, cum AO ſit ad AB; vt O ad L; nempe $\frac{1}{6}$ tale etiam erit rectilineum AE ad AD. Eadem ratio erit de rectilineo ſuper AF, & de rectilineo ſuper AG; ſed AO, & AF, & AH; ſimul æquant lineam AB. Ergo, & tria rectilinea ſimul ex AE, ex AF, & ex AG æquabunt totum rectilineum ACBD.

COROLLARIVM.

EX iſtis duabus propoſitionibus poſtremis eruitur, quomodo dato rectilineo addatur talis pars, quę libuerit, & tamen remaneat ſimile, ſimiliterque poſitum, vt priùs, aut dematur ipſi. Et ſi loquamur de additione detur quadratum I, & quadratum 2. nigrum oporteatque quadrato 2. addere tantum, quod æquiualeat quadrato I. Accipe menſuram lateris quadrati I, & productum vnum ex lateribus quadrati 2. nigri ſit æquale ipſi lateri quadrati I ab A vſque ad C, coniungeque DC nimirum ex duobus lateribus quadrati I, & quadrati 2. fiat



angulus rectus ad A, ducaturque baſis DC. Nam quadratum, cuius latus DC quale eſt 2.3.3. eſt ęquale, vt patet ex II. lib. 2. quadrato nigro 2. & I. quod idem erit de quocumque alio rectilineo ex prop. 32. l. 6. Si verò loquamur de ablatione, cum iam pr. 23. l. 6. notum ſit quomodo fiat rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum, quod æquale ſit datæ parti alterius parallelogrammi, quale eſt parallelogrammum ex AE $\frac{1}{6}$ parallelogrammi ABCD clarum eſt, quod parallelogrammum ex EB ſimile, ſimiliterque poſitum, quod cum ipſo ex AE eſt æquale ipſi ABCD, deficiet ab eo $\frac{1}{7}$ nempe parallelogrammo ex AE vt fig. pręc. prop.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Dato parallelogrammo diſſimili illud augere vel minuere addendo ei aliud parallelogrammum quodcumque:

SIt datum nigrum parallelogrammum CF, & aliud, cui addere oportet BE. Coniungantur eorum latera CA, & AB ad quemcumque angulum apud A, & producantur GF, & DB vſque dum conueniant in H, & per H, & A agatur HL, & terminet in CB lineam coniungentem latera CA, & AB, ipſi LH ducantur parallelæ CP, & BQ, & coniungantur P, & Q, & parallelogrammum PQ erit ęquale duobus CF, & BE nigris.

Probatur I. quod ſit parallelogrammum: Nam HA, & CP inter parallelas CA, & DH parallelæ ex 33. lib. I. erunt æquales, ſic BQ, & AH parallelæ inter parallelas AB, & DH æquales erunt. Ergo etiã inter ſe erunt æquales, & parallelæ ex 30. l. I. quare ex 34. lib. I. BP erit parallelogrammum. Quod verò ſit æquale parallelogrammis nigris, patet.

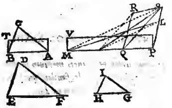


Nam ex 36. lib. I. LP, & CH parallelogramma ſuper eandem baſim CP, interque parallelas CP, & LH ſunt ęqualia, ſic nigrum CF, & CPAH parallelogramma ſuper baſim CA, & inter parallelas GH, & CA æquantur, ergo nigrum parallelogrammum CF, & PL tertio CPAH æqualia inuicem æquabuntur. Sic parallelogrammũ LQ æquale eſt tertio BAHQ ob baſim BQ eandem, & parallelas HL, & BQ, cui ęquatur ob baſim AB eandem, & parallelas AB, & DH nigrum BE: quare nigrum BE æquabitur ipſi LQ, vnde LP, & LQ, ideſt BP parallelogrammum ęquabitur duobus nigris CF, & BE.

PROB. VI. PROPOS. XXXI.

Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire ſimile, ſimiliterque poſitum, ſicut vnum ex datis.

SIt rectilineum OPQR, & rectilineum ACB, & illi OPQR inuenire oporteat planum tertium proportionale ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineum ACB. Redigatur trapezium OBQP in ęquale rectilineum, ſed ſimile, ſimiliterque poſitum



rectilineo ACB, quod ex prop. 27. lib. 6. Elem. fiet redigendo priùs in æquale ſibi triangulum, & poſtea hoc triangulum ad eandem altitudinem deprimendo ex prop. 6. huius. & tandem in parallelogrammum PV eiuſdem altitudinis, ac AT. Nam media proportionalis inter latera MV, & MP inuenta ex 16. lib. 6. erit illa, ſuper quam efficiendum eſt triangulum ſimile, ſimiliterq; poſitum, ac ACB ex 27. lib. 6. æquale trapezio ROPQ, quod triangulum erit DEF. Inueniatur itaque lateribus AB, & FE tertia proportionalis GH, & ſuper eam conſtituatur rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum, ac ACB ex 23. lib. 6. & erit tertium proportionale duobus rectilineis trapezio, & triangulo ſimile, ſimiliterque poſitum vni ex ipſis, nempe triangulo, & ita erit FED triangulum, vel PROQ ęquale trapezium

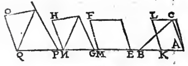
pezium ad ABC triangulum, vt idem ABC ad GHE ſimile ipſi ACE.

Probatur. Quia latera ſunt proportionalia, & ita eſt FE ad AB, vt AS ad GH, ergo ex 26. lib. 6. El. Ipſa quoque rectilinea erunt proportionalia cum ſint ſimilia, ſimiliterque poſita; ſed trapezium eſt æquale triangulo DFE. Ergo trapezium quoque eſt prædictis triangulis proportionale.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire, quod ſit ſimile, ſimiliterque poſitum, ſi places, vni ex datis rectilineis.

SInt data tria rectilinea, ABC triangulum, EB parallelogrammum, & GH trapezium, & oportest trapezio ſimile, ſimiliterque poſitum quartum proportionale inuenire, ita quod ſit vt triangulum ad parallelogrammum, ita trapezium ad aliud trapezium. Rectilineo ACA V.g. conſtruatur æquale rectilineum, ſed ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineū EF ex 27. l. 6., quod ſit AL. Deinde tribus lateribus AK, EM, & GN inueniatur quarta proportionalis PQ. ſuperquam conſtruatur trapezium ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineum GH ex propoſ. 23. lib. 6. Elem. Dico ita eſſe rectilineum AL, ſeu ACA ad rectilineum EF, vt GH ad PO.



Probatur ex eadem propoſ. 26. lib. 6. Elem. Nam ita ſunt rectilinea ſimilia, ſimiliterque poſita, vt ſunt latera inuicem. Quare cum AK ſit ad EM, vt GN ad PQ erit etiam AL rectilineum, vel æquale ACE ad EF, vt GH ad PO trapezia.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire ſimile, ſimiliterque poſitum, ac aliquod rectilineum ex datis.

SIt datum rectilineū HIG, & rectilineū QO ſuper latus QP; oporteatque reperire medium proportionale inter hæc duo rectilinea; ſed tale, vt ſit ſimile, ſimiliterque poſitum, ac rectilineum ſuper HG, vt in ſchemate propoſ. 31. h.

Redigatur QO in EDF ſimilem figurã, & ſimiliter poſitam, ac rectilinei dati ſuper HG; Sitque eius latus homologum ad GH latus FE; inter FE, & GH inueniatur ex 16. l. 6. media proportionalis BA, & ſuper BA conſtituatur rectilineum ſimile, ſimiliterque poſitum, ac illud poſitum ſuper HG latus ex 23. lib. 6. Elem. & hoc erit medium proportionale inter HIG rectilineum, & rectilineum QO ſuper QP.

Probatur ex laterum proportione ex 26. lib. 6. Elem. Nam cum ſit rectilinea ſimilia erunt ad inuicem, vt baſes; ſed baſis EF ex effectione eſt ad BA proportionata vt BA ad HG. Vnde & rectilineum ſuper FE, vel quod idem eſt, cum ei ſit æquale, rectilineum QO ad rectilineum ſuper BA erit in ea proportione, quâ ipſum met ſuper BA ad rectilineum ſuper HG conſtitutum.

COROLLARIVM.

ISTæ propoſitiones antecedentes intelliguntur etiam de circulis minuendis, & augendis in data proportione. Nam vt eſt polygonum ad polygonum in circulo inſcriptum, ita, & circuli, & vt diameter ad diametrum ita ex prop. 41. lib. 6. Elem. ſunt quoque inuicem circuli: quare ſi reperta proportionalis, vel tertia, vel media, vel quarta conſtituatur diameter circulorum, ipſi circuli iuxta datam proportionem augeſcent.

EXPENSIO VI.

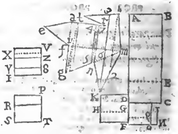
De rectilineo quocumque partiendo etiam in partes non ſimiles per parallelas vni lateri.

VIdimus de augmento, & partitione fig. in plures ſimiles figuras, modo de earum partitione; non quidem in plures figuras; ſed quaſi in eiuſdē plures partes ſtatuendo eas inuicē æquales, vel proportionales, ſed nec ſimiles, nec ſimiliter poſitæ, duplex autem eſt iſta deſignatio, vel per parallelas vni lateri, vel per diſcedentes lineas rectas ab vno puncto in dato latere.

PROBL. I. PROPOS. XXXIV.

Figuram rectilineam regularem in deſtinatas partes ſecare per parallelas dato lateri.

SIt figura irregularis rectilinea a e f g n l m h t, quæ debeat in quatuor partes V.g. partiri per parallelas lateri f g ex propoſ. 8. fiat rectangulum æquale, vel toti rectilineo, vel quod idem eſt ſingulis eius omnibus partibus, & triangulis, quod ſit ABCD, quod diuidatur in quatuor partes, & ſit quarta pars DS, quæ erit etiam quarta pars dati rectilinei; oportet itaque hanc quartam partem ſignare in ipſo rectilineo irregulari dato; ſed per parallelam lateri f g.



Tranſmutetur hæc quarta pars in quadratum KF, & vt incipiamus à parte dextra videndū eſt; an triãgulum a f e adæquet quartam partem traſmutando

tando in rectangulum ex propoſ.2. vel 7. huius, cuius latus ſit quadrati DF, quod erit FH: Quare non implet totum quadratum KF, & ideo nec triangulum f a e adæquat rectilinei irregularis quartam portionem.

Ex triangulo itaque m a g, cuius vertex non cognoſcitur ex documentis 23. prop.h. auferenda eſt pars æqualis rectangulo reſiduo DH: Trahendo parallelam lateri f a, vt fiat triangulum m f g; rectangulo verò DH æquale inueniatur quadratum DO. Inuenta autem tertia proportionalis lineis a g, & g f ſit N, & tribus g a, & N, & lateri FO quadrati OD quarta proportionalis ſit QO, ex qua rectangulũ QF fiat ad altitudinem OF, & ſequendo operationem ex 23. prop.h fiat trapezium æquale g u, & ducta g t, & ex puncto t parallela lateri f g. Dico trapezium g t cum triangulo e f x eſſe quartam partem totius rectilinei irregularis.

Probatur ex ipſa effectione ſuppoſita doctrina tradita in 23. propoſ. huius, nam t g ex effectione eſt trapezium æquale quadrato DO: quod æquat rectangulum DH, rectangulum verò FH eſt æquale ex effectione triangulo a f e; quæ duo rectangula integrant quadratum KF, quod eſt ex effect. æquale rectangulo DE, quod eſt quarta pars parallelogrammi magni AC æqualis rectilineo irregulari; vnde etiam FK rectangulum erit quarta pars figuræ irregularis, & conſequenter t g, & f e a erit quoque quarta pars figuræ irregularis.

Sit ſecundo ad ſiniſtram partem per lineam parallelam eidem lateri gf abſcindenda quoque quarta pars. Quia adeſt angulus ad h, videatur an parallela ducta ab eo angulo abſcindat quartam partem rectanguli AC, & conſequenter totius rectilinei irregularis, & facta operatione iuxta præſcripta propoſ. 22. vel 23 erit triangulum h m 2 æquale rectangulo PR, cuius latus eſt quadrati PS æquantis rectangulum ED quartam partem totius magni AC, ideoque m h 2 non æquat quartam partem: Ducemus itaque ab angulo K rectam K 3, & tranſmutato trapezio b 2 K 3 in rectangulũ RT iam æquat totum quadratum PS, & conſequenter totum rectangulum ED, ideſt quartam partem rectanguli AC, & conſequenter h 3 m K eſt quarta pars totius rectilinei irregularis.

Sed apud hanc partem alia quarta pars ſit locanda. Quia adeſt triangulum 3 r t, quod eadem linea ſecari nequit V.g. 45, cùm diſcontinuum ſit in eo ſitu, ideo placeat illud in hac etiam parte, quæ modo auferenda eſt, computare.

Redigetur itaque ad rectangulum VX in quadrato VT æquale quartæ parti ED rectanguli AC magni, & quia adeſt angulus n trahemus lineam n 7, vt videamus, an adæquet trapezium r 7 K n reliquum XZI in quadrato VI: quare triangulum K 6 n redigetur in parallelogrammum XZ, & deinde trapezium 7 6 in rectangulum ZY, quod totum quadratum non æquat, ideo triangulo r 6 n 7, cuius vertex ignoratur, addendum eſt ad lineam 7 n trapezium 7 4 n 5 æquale rectangulo reſiduo ex prop.23. huius; eritque figura 4 5 K 3 cum triangulo 3 r t quarta pars, & conſequenter reliquum trapezium 5 r, erit quoque quarta pars. Vnde rectilineum totum irregulare in quatuor æquales partes diuiſimus, vt patet.

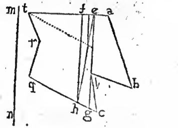
COROLLARIVM.

Hinc potes quoque ſi placet diuidere per lineas, quæ nulli lateri parallelæ ſint, ſed cuidam extra rectilineum, nam illa linea, quæ prima fortuitò trahitur ab aliquo angulo, vel alicui extra figuram parallela, poteſt conſtitui tamquam ſi eſſet latus figuræ, & videre, quid ipſa ea tota figura auferat, & cætera circa ipſam præſtare, vt ſi eſſet latus figuræ, vt quilibet ex ſe experimento comprehendet.

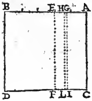
PROBL. II. PROPOS. XXXV.

Figuram irregularem rectilineam in proportionales partes ſecare per lineas parallelas lineæ extra figuram poſitæ.

Poteſt eodem modo in proportionales partes ſecari area quælibet, ac propoſ. anteced. V.g. ſi rectilinei AC vna quarta ſolum pars aſſumpta fuiſſet, & illa à rectilineo irregulari fuiſſet ablata, vt eſt n 3 K m, illa eſſet ad totum, vt 1. ad 4. Idem dicas de quibuſlibet alijs ſecundùm diuiſionem, in quam rectangulum BADC diuiſum fuiſſet.



Pro quo oſtendendo ſit fig. a b l c q r t, quæ diuidenda ſit parallelis ad m n in duas partes proportionales, ita vt vna nempe ſiniſtra ſe habeat alteri, vt 2. ad 3. conſtituatur rectangulum ABCD æquale dato rectilineo irregulari, & diuidatur eius baſis in 5. partes. Ex prima lib. 6. rectangulum ABCF erit $\frac{2}{5}$ reſpectu totius, & ad BDEF eo partem ſe habebit, vt 2. ad 3. ſicut baſis CF ad baſim FD ſe habet, vt 2. ad 3. Ad angulum itaque l ducatur linea parallela lineæ m n ſcilicet ad ſiniſtram partem, videaturque quid ex ABCF rectangulo abſumat trapezium b a e l, & triangulum l c g, faciendo rectangulũ AGCI ſuper datum latus AC æquale trapezio a b l e, & GHIL æquale triangulo l c g; Cum ergo iſta duo triangula ſit minora, quam $\frac{2}{5}$ totius rectanguli AD, ex 23. propoſ. huius trianguli g e t q, cuius ignoratur vertex ad latus e g auferenda eſt pars e g h f æqualis rectangulo HLEF, quæ complebit $\frac{2}{5}$ totius, & ad aliam partẽ ſe habebit vt 2. ad 3. per parallelã f h datæ m n. Nam f g h e eſt ex conſtructione æquale trapezium rectangulo HELF; reſidua verò AHCL ſunt æqualia ex conſtruct. Trapezio b a e l, & triangulo l c g. Quare totum ABCF rectangulum eſt æquale toti a f c h rectilineo ſicut

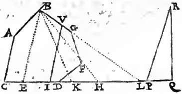


totum rectangulum AD eſt æquale dato irregulari rectilineo abqt; Cum ergo ſit A^ECF ÷ totius AD erit ah totius abqt ÷, & *diuidendo*, vt eſt rectangulum AECF ad rectangulum E^FBD ita erit aſch ad fh qe nempe, vt 2. ad 3.

PROBL. III. PROPOS. XXXVI.

A multilatero datam partem ſecare per parallelam dato lateri.

* A Dato ſexagono ABCDFO abſumenda ſit pars æqualis dato triangulo Q^PR, quod ſit, aut fiat eiuſdem altitudinis ſexagoni ex propoſ. 6. huius. Agatur ex angulo B recta BE dato lateri CA parallela, & fiat triangulum ^EBH ex dictis prop. 8. h. æquale reſiduo rectilineo ADFGB continuenturque latera CH, & AG, & concurrant in L. Deinde menſuretur baſis Q^P ab H, & ſit HK; & ducta HB erunt æqualia ex 1. Cor. p. 39. l. 1. triangula KBH, & PRQ & inter LE, & LK reperiatur media proportionalis IL; & ducatur IV parallela ipſi CA. Dico IFGV multilaterum eſſe æquale triangulo Q^PR.



Prob. Nam triangulum I VL eſt æquale triangulo KBL. Etenim triangulũ EBL eandem eis dicit proportionem. Dicũt namque proportionem EBL, IVL duplicatam lateris LA ex 21. lib. 6. ad latus LI, ſed ex effectione hæc eſt, quam EL habet ad LK; cùm ſit IL media proportionalis inter LA, & LK: ſed quam proportionem habet LE ad LA eam ex propoſ. 1. lib. 6. Elem. habet EBL ad KBL. Ergo idem triangulũ EBL eandem dicunt proportionem triangulis IVL, & ABL. Ergo ex 11. lib. 5. æqualia. Quamobrem æqualibus IVL, & ESL ablatis à triangulo EBL, remanebunt æquales KAB triangulum, & EBVI trapeziũ. Si ergo rurſus auferantur hæ portiones æquales triangulum EBK à triangulo EBH, & trapezium à rectilineo A^BDFG, quod triangulum EAH ex conſtructione æquat, remanebunt æqualia triangulum KBH, ideſt QRP, & pars aſſumpta VGFI.

EXPENSIO VII.

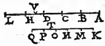
De figuris planis rectilineis in partes diſſimiles ſecandis à dato puncto in ipſis.

NOn minus vtilis hæc alia ſectio eſt arearum, quæ operi demandatur ſecando eas in deſtinatas partes à puncto aliquo, vel in ambitu, vel in meditullio dato, pro quo priùs hoc Lemma intelligendum eſt, vt fundamentum cęterarum propoſitionum: tale autem eſt.

LEMMA PROPOS. XXXVII.

Si magnitudo in quaſlibet partes ſecetur, & alia in totidem illis proportionales eadem ſerie, & accipiantur aliquæ partes prioris magnitudinis hæ ſimul comparatæ ad reſiduas ſimul habebunt eandem proportionem, quæ totidem poſterioris ſimul ad reliquas habent ſimul ſumptas, & eodem ordine.

SIt AL prima magnitudo in quinque partes diuiſa, & alia, etiam ſi ſit diuerſi generis KQ, pariter in quinque partes diuiſa prioris magnitudinis partibus eodem ordine proportionales, & accipiantur duæ ex prima AB, & BC, & duæ de ſecunda ſecundùm eundem ordinem KM, & MN. Dico, quod AC ad reliquas ſimul CL habebunt eandem rationem, quam KN ad reliquas NQ.



Progr. 1. Probatur. Nam ex hypotheſi, quam proportionem dicit AB ad BC eam dicit KM ad MN: Igitur *componendo* ea eſt proportio AB cum BC ad BC, quæ KM cum MN ad MN: Ex hypotheſi quoque vt eſt BC ad CD, ita eſt MN ad NO: quamobrem ex *æqualitate* erit AB cum BC ad C^D, vt KM cum MN ad NO in alia quantitate.

Prog. 2. Deinde cum ſit HL ad HD, vt Q^P ad PO; erit quoque *componendo* LH cum ^DH ad LH, vt QP cum PO ad Q^P: ſed ex hypotheſi *conuertendo*, vt HD ad DC, ita ^PO ad ON. Ergo ex *æqualitate*, vt DH cum HL reſpicit in proportione DC, ita Q^P cum ^PO reſpicit ON, & *cõponendo*, vt CL eſt ad CD ita NQ ad NO: & *inuertẽdo* CD ad CL, vt NO ad NQ, ſed reſpiciebat quoq; AC, CD, vt KN partem NO ex primo progr. Vnde erit AC ad CD, vt KN ad NO, & vt CD ad CL, ita NO ad NQ: vnde ex *æqualitate* ita erit AC duę ſimul ad CL reliquas ſimul, vt KN duæ ſimul alterius quantitatis ad NQ reliquas eiuſdem.

COROLLARIVM.

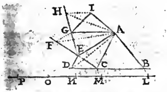
VNde ſi rurſus aliqua pars, vt DH ſecetur in prima quantitate V. g. in V, & in T ſecunda pars correſpondens O^P in ordine, etiam proportionaliter ſecetur in ſimiles portiones; totę quoque quantitates erunt ſectæ proportionaliter, & ita erit AV ad VL, vt AT ad TQ. Nam eadem probatio militat, cum ex hypotheſi, vt primo factæ ſint partes proportionales eodem ordine correſpondentes, quare, & correſpondenter erit AV ad LV, vt AT ad QT, vel etiam AV ad AL, vt KT ad KQ *componendo*.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XXXVIII.

Diuiſo rectilineo quolibet in triangula, rectas lineas eodem ordine, & proportione, qua triangula exiſtunt, præditas inuenire.

Sit figura diuiſa in triangula BAC, CAE, EAG, & AIG; oporteatque lineas inuenire, quæ inuicem habeant eam proportionem, quam triangula. Producatur BC in D, & ducatur ED parallela lateri AC: Deinde ducatur AD, eritque triangulum ACD æquale triangulo CAE: ſed eiuſdem altitudinis, ac BCA, cum deſinat in idem punctum A: Quare ex 1. lib. 6. erit BC ad CD, vt triangulum BCA ad triangulum CAD, vel ad æquale CAE, quas lineas transferemos pro primis inuentis in linea LP, quæ erunt LM, & MN. Idem faciemus triangulis CAE, & collaterali EAG: nam ducta GF ab angulo G parallela lateri AE, & CE in F, ductaque AF erit triangulum AEF æquale triangulo AGE, & eiuſdem altitudinis. Quare erit, vt triangulum ad triangulum, ita baſis CE ad baſim EF, quare lineis CE, EF, & MN inueniemus quartam proportionalem NO: quia ergo eſt CE ad EF, vt MN ad NO, erit etiam MN ad NO ex 16. lib. 5. vt CAE ad GAE.



Idem tandem faciemus de triangulis EAG, & AGI: eritque, vt triangulum AEG ad GAI, ita baſis EG ad baſim GH. Sit ergo etiam, vt baſis EG ad baſim GH, ita NO ad quartam OP; eritque tertia NO ad quartam OP, vt baſis EG ad baſim GH, & conſequenter, vt triangulum EAG ad AGI.

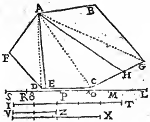
Verùm ſi aliqua figura adeo erit irregularis, vt nequeat in triangula diuidi ab vno puncto conuertantur ſingula triangula, in triangula æqualia, ſed eiuſdem altitudinis ex 8. prop. de conuer. figur. vel parallelogramma, & baſes erunt inuicem, vt triangula æqualis altitudinis, & conſequenter, vt triangula, in quæ figura irregularis diuiſa eſt, vtcumque.

PROBL. II. PROPOS. XXXIX.

Datum rectilineum in datas partes ſecare per rectas ab vno puncto in latere, vel in angulo diſcedentes, dummodo in triangula ab vno puncto diuidi poſſit.

Sit figura ABGCDF; quæ in triangula à dato puncto A diuiſa ſit; hanc in quaſlibet partes, vel proportiones, nempe quam habet V ad TI $\frac{2}{5}$, & X ad TI $\frac{4}{5}$, volumuſque proportionem V ad TI eſſe ad partem B.

Reperiatur ex propoſ. præcedenti linea LS, quarum partes habeant eandem proportionem ad inuicem, vt triangula, & eodem ordine, ita quod LM ſit ad MP, vt triangulum GBA ad triangulum GAC, & MP ſit ad PR, vt triangulum GAC ad CAD, & PR ſit ad RS, vt CAD ad DAF.



Tribus verò TI, & V datis, & LS repertę, inueniatur quarta proportionalis LO, ita quod vt TI ad V, ita ſit LS ad LO, quæ inter P, & M cadit.

Diuidatur deinde; quia linea MP correſpodet ex ordine baſi CG ea baſis GC ſecundùm proportionem MP ad MO, & ſit quarta proportionalis GH. Dico trapezium ABGH eſſe ad totam figuram irregularem ABGCDF, vt V ad TI, ideſt $\frac{2}{5}$.

Probatur ex Coroll. propoſ. 37. Nam ita eſt quantitas LO ad OS; vt eſt quantitas ABGH ad quantitatem reſiduam AHCDF: ſed illa LO ad OS, vt V ad TZ ex effect & *inuertendo*, nempe vt 2. ad 3. Ergo etiam figura ABPH erit ad reſiduum, vt 2. ad 3. & conſequenter ad totum erit vt 2. ad 5. & ABPH erit ad totum 2. ad 5. vt eſt V ad IT.

Placeat rurſus diuidere ea proportione, quam X habet ad TI, ita quod antecedens proportionis X ſit in figura irregulari verſus B.

Tribus eodem modo inueniatur quarta proportionalis, vt TI ad X; ita LS ad LO; & quia hęc diuiſio O cadit in tertiam PR correſpondentem tertiæ baſi CD; Tribus rurſus PR, & PO, & CD inueniatur quarta proportionalis CE. Nam ducta AE erit ABGCE ad totam figuram, vt X ad TI eadem ratione.

PROBL. III. PROPOS. XL.

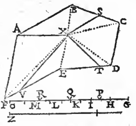
* *Figuram à dato in medio puncto in datas partes ſecare, dummodo ad angulos ab illo puncto rectæ duci poſſint.*

Sit in figura ABCDEF datum punctum X in medio vbicumque malueris, & ſit diuidenda fig. in quatuor partes ęquales (poſſet, & diuidi in proportionales, ſed in præcedenti proportionalem diuiſionem exemplo illuſtrauimus.)

Sit linea OO, cuius partes OH, & HI, & IK, & KL, & LM, & MO ſint eodem ordine proportionales ex prop. 38. vt triangula ABX, AXC, CXD, DXE, AXF, FXA, quæ diuidatur in quatuor partes in P, Q, R. Quia ergo prima diuiſio P cadit in ſecundam lineam erit latus BC ſecundi trianguli diuidendum, ita vt quemadmodum eſt HI ad HP, ita ſit BC ad BS ducta XS erit XABS quarta pars. Sic quia Q cadit in parte KL, quæ correſpondet baſi quarti trianguli fiet, vt KL ad KQ, ita baſis DE ad DT. Et

ducta

ducta XT erit SXT alia quarta pars, & ſic de parte R, quæ poſcit SF baſim correſpondentem diuiden- dam eſſe, vt LM ad LR in V, vt ſit alia quarta pars TXV,



Quod Probatur. Nam ita eſt ex Coroll. prop. 37. GP ad totam GO, vt XABS ad totum rectilineum; ſed GP eſt quarta pars totius GO. Ergo, & portio XABS erit quarta pars totius rectilinei.

Iterum, vt eſt GQ ad GO; ita eſt ABCTX ad totum rectilineum; ſed GQ eſt $\frac{2}{4}$ totius GO. Ergo etiam ABCTX erit $\frac{2}{4}$ totius rectilinei. Ablato ergo AXS, nempe $\frac{1}{4}$, vt oſtendi erit SXT $\frac{1}{4}$ totius, & ſic dicas de alijs; vt per ſe patet.

EXPENSIO VII.

De figuris per lineas, vtcumque ductas partiendis.

POſcit ordo, & ratio, vt quemadmodum ſuperficies per parallelas lineas, & etiam per lineas ab vno centro progredientes diuiſimus, ſic, & eas per lineas incertas, & vtcumque ductas partiri doceamus.

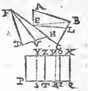
PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Rectilineum quodcumque partiri per lineas non parallelas, nec in vnum punctum conſpirantes.

SIt Rectilineum ABCDF, quod oporteat ſecare in tres partes lineis; quę nec ſint parallelę, nec ſint in vnum punctum coeuntes, vel quia id nequeat, aut quia non placeat.

Fiat rectangulum QO æquale areæ trianguli BAF, & OT æquale areæ trianguli BEC, & tandem, PZ æquale areæ trianguli CFD. Diuidatur deinde QP latus in tres partes in R, & S. Et quia prima pars finit in baſim IT parallelogrammi OT æqualis ſecundo triangulo BEC; ideo tribus ET, IR, & EC inueniatur quarta proportionalis EL, vt ſit IT ad IR, vt EC ad EL. Ducaturque FL. Dico BAFL eſſe tertiam partem totius rectilinei.

Probatur. Quoniam QO rectangulum eſt ęquale triangulo BAS ex effectione; rectangulum verò OR, quod complet tertiam partem totius parallelogrammi æqualis toti rectilineo eſt æquale triangulo EFL. Ergo BAF, cùm EFL eſt tertia pars rectilinei; cum æqualium ad æqualia eadem ſit proportio: Quod autem triangulum EFL ſit æquale rectangulo OR, ſ patet. Nam rectangulum OR eſt ad rectangulum OT, vt baſis IR ad baſim IT, & ita triangulum EFL ad triangulum FEC eſt vt baſis EL ad baſim EC: ſed hæc eadem ex effectione, quam baſis IR ad IT. Ergo rectangulum OR ad rectangulum OT habet eandem proportionem, quam EFL ad FEC, ſed FEC, & OT ſunt æqualia: Ergo etiam rectãgulũ OR ex 14. l. 5. & triangulum EFL erunt



æqualia. Eadem eſt probatio in trahenda linea FV; Siquidem ſecunda pars RS ex tribus finit in baſem TP, in S parallelogrammi æqualis triangulo HFO. Vnde baſis HO ſecanda eſt proportionaliter, vt TP ſecta eſt in S, & trahẽda FV, & FELCV ex dicta ratione erit FOVELC remanentis rectilinei $\frac{2}{3}$.

EXPENSIO VIII.

De planis è puncto extrinſeco partiendis.

SIcut plana ab vno puncto in eis electo in plures partes diſcepſimus, ſic à puncto foris electo diuidemus, licet id ſit minus neceſſariũ, & magis laborioſũ, & non ſemper in opus reducibile.

PROBL. I. PROPOS. XLII.

Datum Triangulum à dato extra ipſum puncto in datas partes ſecare.

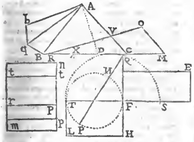
SIt propoſitum triangulum ABC $\frac{1}{3}$ trianguli BAC, in quo ex O puncto extra ipſum dato ſit auferenda data pars æqualis triangulo ACD.

Ex lateribus trianguli AC, & CO fiat rectangulum EF; lineę verò parallelę OM ex 45. lib. 1. Elem. applicetur rectangulum æquale ipſi EF rectangulo, & fiat FL rectangulum, cuius alterum latus inuentum ſit FT, menſoretur itaque à puncto C latus FT, & ſit CX; rectangulo autem CX, & MC, ideſt TF, & FS fiat æquale quadratum QF, & huic quadrato ex 37. lib. 3. æquale rectangulum ex NQ, & PQ, quod fit conſtituendo latus quadrati pro tangente, quæ tangat circulum, cuius diameter NP, vel XF æquet CX; ita enim rectangulum NQ, & PQ ex cit. propoſ. 37. lib. 3. Elem. ęquabit quadratum ex FQ, & ideo ipſi æquale rectangulum ex CX, & MC, vel TF, FS æqualibus; transferatur itaque NQ latus ab X in R, & ducatur à pũcto dato O linea OR, & Dico CAD æquari triangulo VCR, & ideo per lineam OR auferri tertia pars trianguli BAC, vt fuit promiſſũ.

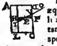
Probatur autem. Rectangulum ex CR, & XR, ideſt NQ, & PQ æqualibus æquatur quadrato tangentis FQ, ideoque rectangulo ex MC, & CX, ideoque latera ex 10. lib. 6. Eu. erunt reciprocè proportionalia, eritque CR ad MC, vt CX ad XR. Ideoque *componendo* erit CR cum MC, ideſt tota MR ad CR, vt CX cum XR, ideſt CR ad CX.

Verùm ob parallelas MO, & CV. erit ex 4. lib. 6. MO ad CV, vt MR ad CR, quæ ſunt in proportione, vt CR ad CX. Ideoque MO ex 16. lib. 5. erit ad CV, vt CR ad CX. Vnde ex 18. lib. 6. ſi ex extremis MO, & CX

& cx componatur rectangulum erit æquale rectangulo mediarum cv, & cr. At rectangulum ex mo, & cx ea eſfectione, idem, quod lf æquatur rectangulo ef, ea lateribus ca, & cd trianguli cad. Quarè etiam eidem ef æquabitur rectangulum cv, & cr, & propter hoc latera erunt reciprocè proportionalia ea 10. lib. 6. El. & cr erit ad ca, vt cd ad cv, angulus verò c eſt idem. Vnde ex 11. lib. 6. triangula cad, & cvr erunt æqualia.



Sit punctum datum o. Oporteatque rectangulum nabc in tres partes ſecare, diuidatur in tres partes, & ſit tertia pars la parallelogrammum, & reliquum lc duæ tertiæ partes erunt; diuidatur rurſus per rectam fh, eritque hc tertia pars; ſecetur itaque fh bifariam in e. & ducatur oi. Dico trapezium vlci eſſe tertiam partem.



Prob. Quia triangula nigra ſunt æqualia cum ſint rectangula, & anguli ad vertices e ſint æquales; quare tantùm additur in triangulo nigro apud v, quantum aufertur in triãgulo nigro apud h. Vnde figura ivhl erit æquale tertiæ parti cfhl.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

** Datum quodcunque rectilineum in partes deſtinatas per lineam à puncto extra ipſum ductam ſecare.*

Sit rectilineum abqr, quod diuidatur in triangulis, & fiat parallelogrammum m n æquale toti, & in eo parallelogramma ſingulis triangulis æqualis, vt in fig. propoſ. anteced.

Nimirum mp triangulo bqa ſicut pr ipſi aqr, & r n vltimo bac. Deinde diuide, quia punctum o eſt prope triangulum bac rectang. r n in partẽ, quam volts, vel quæ tibi data fuerit nt, & quia non occupat totam partem r n ideo auferri poterit à triangulo bac; quod ſi totam occupaſſet, vel maiorem: tunc triangula, in quæ diuiſa eſt figura, eſſent alio pacto ordinanda, & ducenda eſſent à vertice c, vel partim à c partim ab a, & illis rectangula æqualis facienda in rectangulo m n, & videndum eodem modo, an pars data ab vno ex ipſis ſubduci poſſet. Nam eo pacto, & poterit à triangulo ipſi parallelogrammo æquali ea pars auferri per lineam à puncto dato protractam.

Quod cum obtinueris. Tunc illud rectangulum t n in triangulum æquale dac parti in parallelogrammo ei correſpondenti facta V. g. in parallelogrammo r n conuertendum eſt: Et deinde ea omnia præſtanda, quæ dixi prop. penultima antecedenti, & erit diuiſum rectilineum datum in partem datam.

COROLLARIVM:

Poterit etiam, & aliquando diuidi in plures partes datas; ſed non ſemper; quia non omnia triangula, quæ in figura fient, poterunt habere aliquod latus puncto dato obuerſum vt ac ad quod linea duci poſſit: talia, quæ non ſecet latus alterius trianguli. Sed ipſa experientia docebit poſſibilitatem rei, de qua quæritur.

EXPENSIO IX.

De planiciebus Muſicis, & proiectis.

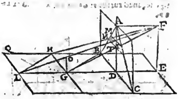
Planities proiectæ ſunt illæ, quæ naſcuntur à lineis proiectorijs latera figurarum proijciendarum lambentibus, vt deſcripſimus tract. 26. propoſ. 8. & quidem de illis, prout conus proiectorius directè in eas incidit, non agemus, vtpote quod de eis certum ſit eſſe in duplicata ratione ſuorum laterum, cùm vt ibi oſtendimus de eiſculo figuræ ſimiles, ſint itaque de eis agendũ cum radij proiectorij in planũ obliquè incidũt, & præcipuè hic de eorum proportionibus agere in animo eſt.

THEOR. I. PROP. XLV.

Spatiorum originalium altitudines ad proiectorum altitudines obtinent eam proportionem, quæ diſtantia remotior ad altitudinem centri, ſi primæ ſint; quod ſi ſecundæ etiam eam, quam diſtantia propinquior ad interceptam diſtantiam.

Sit ſpatium originale ghbd, cuius altitudo gd, diſtantia db à centri f perpendiculari altitudine bf; altitudo verò huius plani proijciatur, & ſit dt. Dico gd *altitudinem eſſe ad altitudinem* dt, *vt* gb *maior diſtantia, quam* db, *ad* bf *altitudinem centri.*

Patet ea 4. lib. 6. Nam ob paralleliſmum linearum, ita gd eſt ad dt, vt gb ad bf.



Deinde ſit altera altitudo lg, quę non ſit prima, & immediata, vt eſt gd. Dico quod proiecta in ti habet proportionem, ne dum, quę eſt lb ad bf; ſed inſuper, quæ gb diſtantia propinquior ad db interceptam; nempe compoſitam ex lb ad bf, & gb ad db, vt ſi db eſſet 3, gb 4. at bf 2. & lb 5. haberet lg ad ti proportionem, quam 20. ad 6. quæ

eſt

eſt compoſita ex 4. & 5. ad 2. & 3.

Probatur. Nam ducta CO paralleia ipſi DA, Erit LG ad GO, vt LE remotior diſtantia ad FE altitudinem centri, ſed GO eſt ad TI; vt GF ad TF, & GF eſt ad TF, vt GE propinquior diſtantia ad DE interceptam diſtantiam. Ergo LG erit ad TI, ne dum vt LE ad FE; ſed etiam, vt GE ad DE. Vnde LO ad TI erit compoſita proportio ex LE ad EF, & GE ad DE, & ſic dicas de alijs ſequentibus.

THEOR. II. PROPOS. XLVI.

Omnes latitudines planorum originaliũ ad omnes planorum proiectorum eam habent rationem, quam diſtantia à centro ad interceptam diſtantiam.

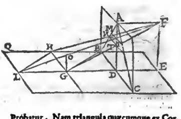
Latitudines originatias, vt GH eam dico obtinere *proportionem ad proiectas latitudines*, NT, quam diſtantia GE ad interceptam DE.

Probatur. Nam GH eſt ad NT, vt GF ad FT ex 4. lib. 6. elem. at vt GF ad FT; ſic eſt GE ad DE. Ergo vt GH ad NT, ſic GE ad DE, & idem aſſeras de latitudine LQ, quæ ſe habet ad MI, vt LE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XLVII.

Superficies generans parallelis contenta, quæ ſit diuiſa diagonali in duo triangula, alterum quidem triangulum originarium ad proiectum eam habet proportionem duplicatam, quam diſtantia tota ad interceptam, & quam diſtantia remotior ad altitudinem centri radioſi; Alterum autem habet proportionem ex diſtantia minori ad interceptam, & diſtantia remotiori ad altitudinem centri radioſi.

Detur ſuperficies QLHG diuiſa diagonali LH, quæ proijciatur, & proiecta ſit in NITM. Dico ſuperficiem LHG eſſe ad NIT primo, vt GE ad DE, ſecundò rurſus vt GE ad ED, & tertiò ex LE ad EF.



Probatur. Nam triangula quæcumque ex Cor. 2. prop. 22. lib. 6. ea habent proportionem, quę componitur ex altitudinibus, & baſibus: ſed baſis GH habet proportionem ad baſim NT, quam GE ad DE: rurſus altitudo LG habet proportionem ad TI altitudinẽ, vt LE ad EF, & GE ad DE ex 45. h. Ergo proportio trianguli LHG ad triangulum NIT conſequitur proportionẽ GE ad DE duplicatã, nempe diſtantię minoris ad interceptam diſtantiam, & inſuper diſtantiæ maioris ad altitudinem centri.

Probatur quoque de reliquo triangulo LQH ad triangulum NMI. Nam LQ latitudo, & baſis, collata ad MI baſim eſt, vt maior diſtantia LE ad interceptam diſtantiam DE: altitudo verò LG eſt ad altitudinem TI, vt LE ad EF, & inſuper, vt GE ad DE. Ergo triangulum NMI eſt in proportione compoſita altitudinum, & baſium nempe LE ad ED, & GE ad DE, & LE ad EF.

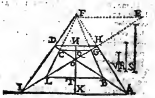
Aduerte tamen, quòd ſi ſit prima ſuperficies BHGD, & immediata, tunc habet proportionem triangulum originatium, quidem ADG ad triangulum GNT proiectũ, vt GE ad EF. Quoniam altitudo quidem DT talis eſt proportionis; baſis verò AD eadem. At triangulum HGB ad triangulum BNT proportortionem obtinet compoſitam ex proportione GE ad EF, & proportione GE ad DE. Ratio eſt quia altitudo quidem GD ad DT eam proportionem obtinet GE ad EF, at latitudo aliam proportionem GE ad DE.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Superficies muſicas augere, vel minuere ſecundum datam rationem.

Sit data ſuperficies BGCL augenda ſecundum datam rationem V ad R. Inueniatur itaque media proportionalis R, & trahatur diagonalis LG, producaturq; in E, nempe vſque ad parallelam FE baſi BL, & iterum prolungetur in I. Rurſusq; ducatur diagonalis DA, quæ ſe ſecent in O; fiat deinde vt V ad R, ſic LO ad IO, ducaturque ab I parallela AI baſi IB, & duæ AF, & IF ab I, & A ducantur ad centrum F, quæ ſecabunt diagonales AD in D, & IE in H, perque punctum D ducatur HD parallela baſi AI, & erit factum, quod imperatur. Nam BCLG planum eſt ad planum HDAI in proportione data V ad R.

Nam oſtendetur primo ADHI eſſe ſuperficiem muſicam, vel proiectam, quia ex propoſ. 11. tract. 16. crura trianguli AFI, & BFL ſunt ſecta proportionaliter parallelis AI, & HD muſicè ob lineam IE in ea obliquè incidentem.



Deinde baſis LB ad baſim AI eſt, vt V ad R. Nam ducta per O recta XN perpẽdiculari ad AI, linea LO eſt ad OI, vt OG ad OH in triangulis æquiangulis AOI, & ODH ob angulos ad verticem HOD, & AOI æquales, & angulos incidentis lineæ IE in parallelas HD, & GC, & BL, & AI, ſed LO ad IO eſt vt V ad R ex effectione: Ergo etiam OG ad OH: Cum itaque

itaque LO ſit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OO, vt OI ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, ideſt LG ad LO, vt OI cum OH ideſt IH ad OI; rurſuſque *permutando* LO erit ad HT, vt LO ad IO, ideſt vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, ſic eſt baſis BL ad AI in triangulis equiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LO ad HT, vt baſis BL ad baſim AI, ſcilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis ONO, & OQC, ita eſt ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & ſic OT erit ad OX, quia eſt in æquiangulis triangolis LOT, & INX, ſic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, ideſt QT ad OT, vt ON cũ OX, ideſt NX ad OX ſcilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compoſitam ex proportione baſium, & altitudinum ex propoſ. 23. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL eſt TQ, & trianguli AIO eſt XN; baſes verò ſunt BL, & AT. Ergo habebit proportionem compoſitam ex proportione eadem, quæ eſt baſium, & altitudinum: quare ex p. t. tract. 9. expenſ. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę baſis BL ad baſim AT, ſcilicet V ad R; proportio vero V ad S data eſt duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

* Idem dicendum de triangulis BGC, & AHO; ſiquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, baſis verò GC eſt ad baſim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; ſed iam oſtenſum eſt OG ad HO eam eſſe proportionem, quæ LO ad OI, ideſt ex effectione, quam V ad R. Ergo & baſis GC erit baſim HO, vt V ad R. Cùm itaque baſes, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum ſit compoſita ex altitudinibus, & baſibus, quę eſt eadem, erit duplicata eius, quæ eſt V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AO, HI fiat vt S ad R, ſic AO ad BO, quæ menſuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur: vt priùs, & compleatur ſpatium BGCL, eritque ſpatium muſicum AHDI ad ſpatium muſicum BGCL, vt B ad V eadem prorſùs ratione, quam ſupra aſſignauimus.

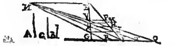
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè ſe diminui incipientes conſtituere.

SIt data proportio A ad B $\frac{2}{3}$; oporteatque conſtituere ſuperficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus ſit $\frac{2}{2}$, ſecundus ſit $\frac{2}{3}$, & reliqua progreſſio ſequatur, vt exigit progreſſus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & ſit C: fiatque, vel exhibitum ſit triangulum GFB, in quo harmonica proportio inſtituenda eſt, fiatque vt A ad C ſic CE ad BF, & ducatur parallela HI. Deinde ducatur diagonalis FI, vſque dum occurrat ductæ à centro parallelæ AN baſi FO in N, & diuiſa AG per medium in R; ducatur NR, & vbi ſecat in O, ducatur parallela LO. Dico ſpatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propoſ. 1. tract. 16. part. 2. GB eſt diuiſa harmonicè cum baſes FR, & RG ſint æquales; Vnde erit vt FB ad HB termini, ſic differentia FL ad LH; ſed vt FB ad HE termini, ſic eſt A ad C, eſt autem A ad C proportio duplicata eius, quæ eſt A ad B. Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ eſt FE ad HB terminos, & ideo, quę eſt trianguli FEG ad triangulum ſimile ex 36. l. 6. elem. HEI; ſed ex Tract. 18. de propoſ. 11. vt eſt triangulum FEG ad triangulum HEI, ſic eſt LG ſuperficies ſcalena ad HO ſuperficiem. Ergo vt eſt A ad B, ſic eſt LG ad HO, nempe, vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare ſi ſequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & TN à



partibus æqualibus QT, & TF partibus FR, & RO, ſucceſſiuè harmonicè à data proportione decreſcent termini, vt primus ſit $\frac{2}{2}$, tertius ſit $\frac{2}{4}$, quintus $\frac{2}{6}$, ſeptimus $\frac{2}{7}$, & ſic ſucceſſiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 18 de progr. prop. 11. etiam ſpatia triangularia harmonicè proportionaliter decreſcunt, vt ipſæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FB ad HB obtinent proportionem, quæ eſt vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{2}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum ſuperficies, quæ duplicatam baſium habēt proportionem, ita ſucceſſiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, ſucceſſiuè, vt prima ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{2}{2}$ ad $\frac{2}{3}$ ideſt $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{6}$ ex pr. 13 tract. 16. at termini ſcilicet triangula ſucceſſiuè ſe habebunt harmonicè vt $\frac{4}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{4}{9}$, & cæt. ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{4}{4}$ ad $\frac{4}{6}$ ſc. vt GBF ad HIE, at HO ad HI, vt $\frac{4}{5}$ ad $\frac{4}{7}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triāgulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{4}{6}$ ad $\frac{4}{8}$, ſcilicet, vt triangulum HAI ad triangulum PBY, vnde differentiæ non ſucceſſiuè ſe habebunt, niſi binæ, & binæ ſumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Iſoperimetris conſtituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam iſte tractatus neceſſarius eſt, cum aliquibus videri poſſit æquales figurarum ambitus æqualia quoque ſpatia continere, quòd verum non eſt, vt videbimus: Quia verò aliquando opus poteſt eſſe, quod aliquis requirat figuram eiuſdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præſtare.

DEFINITIO I.

ISoperimetræ figuræ ſunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

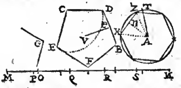
ARea cuiuslibet figuræ eſt eius ſecundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Iſoperimetram conſtituere dato alterius figuræ conſtituendæ angulo.

SIt ſexagonum A, cui figuram Iſoperimetram V. g. Peotagonum oporteat conſtituere.

Latera ſex ſexagoni ſuper lineam MN extendantur; quale vnum ex ipſis eſt MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, ſeu quod idem eſt laterum fig. conſtituendę, nempe



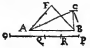
Pentagoni, vt eſt MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ fiat angulus C æqualis angulo pẽtagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g. RQ ad CE ſub eodem angulo interno G, & fiet Pẽtagonum dato Iſoperimetrum; vt patet ex ipſa conſtructione.

Eodemque modo quęlibet alia figura regularis alteri Iſoperimetra conſtituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo ſcaleno ſuper eandem baſim æquicrurum Iſoperimetrum triangulum conſtituere.

SIt datum triangulum ſcalenum ABC, cui æquicrurum ſit conſtituendum Iſoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & ſint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP ſuper baſim AB conſtituatur triangulum AFB. Nam illud erit iſoperimetrum alteri ACB.

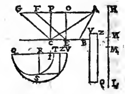


Probatur. Nam AC, & CB ſcaleni, ſicut AF, FB crura æquicrutis ſunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem: baſis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, ſimulq; Iſoperimetrum parallelogrammum ſit conſtituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & ſint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M ſicut, & baſis BC in E. Sumpto verò interuallo HM lineæ dimidio, centro E portio circuli ducatur, quæ ſecet parallelam AG in puncto F, ducaturque EF, & à C parallela EF lineę, quæ ſit CG. Dico parallelogrammum EFGC eſſe triangulo CBA Iſoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. 1. Quòd verò ſit Iſoperimetrum patet: Nam latera FG, & EC æqualia inuicem ob parallelismum ſunt ęqualia baſi BC. Nam EC eſt medietas. Vnde baſis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis: Latera verò EF, CG ſunt æqualia lateribus BA, & AC, quod ſunt ſimul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Iſoperimetrum conſtituere.

SIt rectangulum OC in prec. fig. ęquale parallelogrammo ECFG; ſed non iſoperimetrum, oporteatque ſeruata æqualitate in iſoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OP; media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. eſt rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quę ſint QI, & IV, tota QV ſecetur ex tr. 15. propoſ. 16. vt SB inter ſegmenta QZ, & ZV ſit media proportionalis; rectangulũq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam iſoperimetrum ſit parallelogrammu EG eidem dato.

Probatur. Quia latera ZV, & ZQ ſunt æqualia lineæ VQ, cui, & ſunt æqualia ex effectione latera EC, & CG: quare etiam reliqua reliquis.

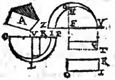
PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & iſoperimetrum rectangulum conſtituere, cùm fieri poteſt.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale ſit rectangulum FT, & linea PO ęqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in anteecedenti figura, media proportionalis inter rectãguli FT latera TF, & FZ, & ſit FG, quę ſi ſit æqualis dimidio PV lineę PO eſt ipsũ quadratũ ex FG, quod quæritur, ſi maior; vt hic, iam non poteſt ſecari PO in duo ſegmenta, inter quæ FG ſit media proportionalis: quis erectis normaliter

liter ſuper PO deberet contineri intra ſemicirculum PLO, cui medietas VO eſt ſemidiameter. Vnde LV, vel æqualis FG perpendicularis maior ſemidiametro eſſe nequit, non capiet in ſemicirculo OLP, quamobrem non poterit Problema exequi.



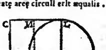
At ſi ſit minor, vt ſi eſſet datum A ſine triangulo nigro, cui æquale eſſet QP rectangulum, inter cuius latera media proportionalis eſſet FH; tunc FH eſſet minor medietate VI lineæ totius OI, quæ æqualis eſt dimidiato ambitui rectilinei dati A excluſo nigro triãgulo. Quare IO poſſet ex 16. Tr. 15. ita ſecari in R, vt inter ſegmenta IR, & RO inuenta FH eſſet media proportionalis. Quamobrẽ rectangulũ ſub ſegmentis RI, & RO clauſum eſſet æquale quadrato ex FH, & conſequenter rectilineo QP æquali ex 17. lib. 6. & tandem rectilineo A excluſo triangulo nigro.

Eſt autem Iſoperimetrum, quia RI, & RO medietas laterum ſunt æqualia lineæ OI, quæ eſt æqualis medietati laterum multilateri A excluſo triangulo nigro.

PROBL. VI. PROPOS. LV.

Rectangulum conſtituere æquale, & Iſoperimetrum ſemicirculo, vel eius partibus.

IAm docuimus ex quadratrice, vel per numeros lineam peripheriæ æqualem inuenire, vel quaſi æqualem, docebimus autem Tr. 30. rectangulũ ex ſemidiametro, & recta æquali ſemiperipheriæ eſſe æquale areæ circuli. Vnde medietas CA erit æqualis medietati FLB quarta pars quartæ parti, & ſexta ſextæ areæ circuli erit æqualis.



Hoc autem rectangulum A C æquale dimidiato circulo eſt Iſoperimetrum ipſi; ſiquidem duo latera AL, & CD ſunt æqualia diametro BF latera verò AD, & LC ſunt æqualia dimidio circumferentiæ, cùm vnum ex ipſis ſit medietas lineæ æqualis dimidiæ circumferentiæ BLF, & cõſequenter quartæ parti BL æqualia. Vnde & AD, CL erit æqualia circumferẽtiæ BLF; Sic dicas de medietate LI, & cæt. vt ex te met potes conſiderare.

EXPENSIO XI.

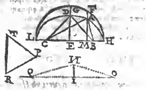
De proprietatibus figurarum Iſoperimetrarum.

FIguræ Iſoperimetræ id habent mirabile, quòd i. æquali ambitu cõcluſæ areas tamẽ inuicẽ continent inæquales, prout aut anguli, aut latera inæqualia ſunt; ideoque ad arearum dignoſcendas exactiùs proprietates, hæc cognitio haurienda eſt.

THEOR. I. PROPOS. LVI.

Triangula Iſoperimetra, quò latera magis ab æqualitate recedunt ambientia angulum verticalem, eo ſunt minora, & quò magis anguli ad baſim inuicem differunt.

SInt duo triangula iſoperimetra BAC, & BDC habentia eandem baſim BC: Dico primò, quòd BAC triangulũ erit minus triangulo BDC, quia latera ſunt inæqualia magis in BAC, quam in BDC,



Probatur. Quia triangula ſunt Iſoperimetra eadem HL menſurabit latus BA, & AC, & latus BD, & DC, quadere ex propoſ. tr. 24. pr. 25. de conicis B, & C puncta foci erunt, & vertices H, A, D, L erunt in Ellipſi. Verùm in Ellipſi applicata MA, & ideo normalis eſt minor applicata, & normali DE; ergo altitudo MA eſt minor in triangulo BAC eiuſdem baſis, ac trianguli BDC altitudo ED, quæ eſt maior; quare ex 1. lib. 6. Elem. Coroll. minus erit triangulum BAC, quam triangulum BDC. Quod verò altitudo MA ſit minor, quàm ED, quæ ſit maior.

Probatur. Quia ita eſt ex prop. 72. tract. 24. conic. In ſemicirculo HGL ſinus FM ad applicatam AM, eſt vt ſinus GE ad applicatam DE, ergo *permutando* FM ad EG erit, vt AM ad DE, quare ex 12. lib. 5. minor erit AM, quam DE; ſicut minor eſt ſinus MF, quam EG.

Probatur quoque ſecunda pars, quo latera oppoſita ſunt magis inæqualia, eo anguli ad baſim ſunt magis inæquales, quia maiori angulo maius latus ſubtenditur ex 19. lib. 1. Elem. Sed iam oſtenſum eſt, quod quo latera magis inæqualia ſunt, eò triãgula iſoperimetra eſſe minoris capacitatis. Ergo etiam quo magis anguli ad baſim ſunt inæquales; ideoque triangulum BAC erit minus triangulo BDC: quia anguli ABC, & ACB ſunt magis inæquales, quam anguli DBC, & DCB, quorum latera ſubtenſa minus inuicem inæquantur, quàm latera trianguli BAC, Quod, & confirmatur ſequenti propoſ.

COROLLARIVM.

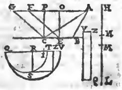
*Hinc eſt triãgulum Iſoſcellũ Iſoperimetrum illud eſſe minus, quod angulos ad baſim habet magis inæquales alicui tertio; Nam accõmodetur BC in Ellipſi, & ſit CA, & ducatur BA; Triãgulum itaque BAC erit minoris capacitatis; quàm triangulum iſoſcelles, & illi iſoperimetrum BDC: ſed B, & A ſunt æquales anguli inuicem ob æqualia crura CA, & CB, licet tertio minori C trianguli BAC maiorem proportionem dicant, & ideo magis ipſi inæquales, quam duo B, & C angulo D trianguli BDC. Ergo quò magis duo anguli trianguli iſoperimetri ſunt inæquales tertio, eò triangulum eſt minoris capacitatis.

Prob. etiam de angulis, ſi ſint acuti in iſoſcello triangulo, qui ſc. dicunt minorem proportionem ad angulum verticalem ſuum, quam anguli alterius, quòd ideo minorem aream comprehendant. Nam B A C iſoſcelles diuidatur in duo à vertice C linea normali, & partes componantur ſecundùm latus breuius, vt fecimus in triangulo ONQ, cuius partes ONI, & NQI ſunt trianguli BAC: Iſtud triangulum habebit angulos O, & Q ad baſim dicentes minorem proportionem ad angulum verticalem N quàm duo B, & C ad angulum D trianguli BDC: Et iam oſtenſũ eſt minus quo ad aream ipſo triangulo BDC. Vnde colliges etiam x'a. æquiãgulum iſoperimetrum triangulo BDC, eo eſſe maius, & omnibus triangulis ſibi iſoperimetris non habentibus angulos æquales, aut latera æqualia.

THEOR. II. PROPOS. LV.

Eadem proportione figuris in Iſoperimetris diminuuntur latera, qua & anguli.

Patet. Nã eadem pars eſt totius ambitus ſui latus pentagoni, quæ angulus pentagoni quatuor rectorum; ſicut enim OM eſt 5. pars ambi-



tus pentagoni MNEK 50. h. ſic angulus petagoni XAZ eſt quinta pars quatuor rectorum; Et ſicut angulus exagoni eſt ſexta pars quatuor rectorum angulorum; ſic & latus figuræ præcedenti iſoperimetræ PM eſt ſexta pars eiuſdem ambitus MN.

COROLLARIVM.

Hinc verò deducas, & partem, quã latus maius ſuperat minus, vt eſt OP, qua latus OM pentagoni ſuperat latus PM exagoni, habere eandem proportionem ad latus minus PM, quam angulus pentagoni ſuperat exagoni angulum ad ipſum angulum exagoni XAZ, namque vt patet 8. Tract. 14. prop. 5. eadem pars quinta eſt reſiduum OP lateris PM; quæ eſt OM totius ambitus MN. Siquidem ſi auferas quinque ſextas partes à quinque quintis reſidua erunt quinque, quæ complebunt partem ſextam: ideoque ſicut OM eſt quinta pars totius MN: ſic vnum reſiduum OP ex quinque remanentibus erit quinta pars vnius partis ſextæ, & idem valet de angulis ob eandem proportionem oſtenſam in præced. vnde ZAT erit quinta pars anguli XAZ, & idem dicas, ſi medietatem tum reſidui ZAT, tum anguli XAZ aſſumas, vel ſi medietatem OP reſidui acceipies, & medietatem lateris AP: eandem enim eſt proportio totius ad totum, quæ medietatis ad medietatem ex prop. 18. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. LVI.

In figuris Iſoperimetris perpendicularis ſuper vnum ex lateribus cadens, quò figura plures continet angulos, eò eſt maior.

*Sit latus hexagoni OD, & latus pentagoni AB iſoperimetri. Dico, quod perpẽdicularis CD eſt maior in exagono, quam CB in pẽtagono. Nã ſi eſſet eiuſdẽ lõgitudinis caderet in pũctũ B, & terminaret in punctum B latus exagoni iſoperimetri pentagono ad hoc, vt idem angulus ACO remaneret, quo differt angulus pentagoni ab exagoni angulo: ſed id eſſe non poteſt. Nam prop 3. Tract. 19. ſegmentum AI habet maiorem proportionem



ad IB; quàm angulus ACO ad angulũ OCD, ideſt eſt maior AI, quam quod poſſit eſſe quinta pars lateris IB ſicut ACO eſt quinta pars anguli OCD; Latus verò DO iſoperimetrũ ſuperatur à BA ex Cor. præc. vt angulus ſuperat angulum: Nempe 5. parte ipſius DO, quæ eſt AV, ideoque maius erit latus BV exagoni, quàm BI. Quare, cùm non capiat à B puncto vſque ad I, debebit capere inter puncta magis remota à centro, quam B, & I V. g. inter D, & O, vbi latera anguli OCD magis dilatata ſunt, & lineam longiorem OD, quam IB capere poſſunt. Vnde CD perpendicularis longior erit, quàm CB.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. LVII.

Figurarum Iſoperimetrarum ea capacior eſt, quæ plures angulos, & plura latera habet.

PRobatur vtendo ſchem. propoſ. 50. Ex dictis pr. 5. h. parallelogrammum factum ex dimidiato ambitu, & perpendiculari à centro ſuper vnum latus cadente eſt æquale areę ipſius figuræ regularis; Quare dato eodem ambitu, & perpendiculari eadem, idem erit parallelogrammum; at ſi ambitus ſit idem, at perpendicularis maior, erit quoque maius rectangulum, vtpote, quòd habeat latus maius: ſed rectangulum factum ex dimidiato ambitu figurarum iſoperimetrarum V, & A habet idem latus æquale dimidiato ambitui eiuſdem longitudinis pentagoni V, & pẽtagoni A; At aliud æquale perpendiculari VE exagoni maius, quam NA ſexagoni ex præced. & ideo maius rectangulum ſexagono æquale, quàm illud, quod eſt æquale pentagono, & conſequenter maior area ſexagoni A quàm pentagoni V.

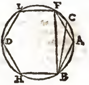
THEOR. V. PROPOS. LVIII.

Iſoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima eſt æquilatera, & æquiangula.

DEtur figura ABHDLF maxima inter ſibi iſoperimetras. Dico eam eſſe æquilateram, & æquiangulam.

Prob. primò, quòd ſit æquilatera. Nam ſi fieri poteſt, non ſit æquilatera; ſed latus BC ſit maius, quàm CF, ducatur BF, & ex pr. 1. h. fiat ſuper BF triangulũ BAF æquicrucũ, & iſoperimetrũ; Illud erit maius ex prop. 1. h. Exp. triangulo BCF; addito igitur cõmuni polygono BHDLF erit figura BAFB maior, quã CFDB cõtrà ꝓſuppoſitũ, quòd repugnat; Ergo figura maxima inter iſoperimetras ſibi, & numero eodem laterũ cõſtans erit etiam æquilatera.

Sic oſtendes ſi exhibeantur alia latera, & dicantur non æqualia inuicem, vt BH, & HD, nam æqualia laterum ſemper ſpatia erũt maiora capacitate, quibus ſi addas ſpatium reliquum, ſeu latera ſit numero diſparia, ſeu paria ſemper conficietur ſpatium maius cum triangulis ęquicruribus maioribus, quàm cum iis, quæ æqualia crura non poſſident.



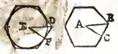
Prob. 2. para. Nam ſit aliqua figura BHLFA, in qua omnes anguli ſint æquales iſoperimetra alteri alicui CBHDLF, in qua ſit tantũ angulus C inæqualis angulo A ducta BF; quia angulus BCF eſt minor angulo BAF triangulũ verò BAF eſt iſoperimetrum triangulo BCF; cum in cęteris conſentiat, & figura figurę eadẽ ſit; anguli ad baſim erũt minores ex 17. I. a. in triangulo BCF, quàm in triangulo BAF: quare ex Cor. prop. 54. erit triangulum BAF maioris areæ, quàm triangulum BCF. Vnde addita communi area BHDLF, erit maior figura æquiangula ABHDLF, quàm non æquiangula CBHDLF.

THEOR. VI. PROPOS. LIX.

Circulus omnibus figuris ſibi Iſoperimetris rectilineis maior eſt, ſicut & quacumque Ellipſi ſibi iſoperimetra.

DAto circulo E, & data figura rectilinea iſoperimetra A. Dico, quòd maior eſt circulus, quam figura data. Circumſcribatur circulo figura ſimilis totidem laterum, & ad aliquod latus ducta perpendiculari EF, & ad angulum ED conſtituatur rectangulũ triangulũ FDE, & idem fiat in figura A; ſitque rectangulum triangulum, & illi ſimile ABC, vt patet, cùm figuræ ſint ſimiles, & ideo triangula ęquiangula.

Probatur nunc propoſitio; nam figura circumſcripta maior eſt circulo in ambitu ſuo, vt per ſe patet, ergo maior etiam eſt rectilineo iſoperimetro A; quare recta BA erit minor, quàm DE: Sed ob ſimilitudinem triangulorum ita eſt BA ad DE, vt CA ad FE, ergo minor erit CA, quàm FE. Ideoque rectangulum ſub ſemicircumferentia circuli, & ſub radio comprehenſum æquale ex dicendis prop. 3. tract. 30. areę circuli maius erit, quàm quod ſub ſemiambitu rectilineij A, & minori linea CA, quam EF, quod ex dictis propoſ. 4. huius eſt æquale areę rectilinei, ergo maior erit circulus E rectilineo A.



Probatur quoque de Ellipſi, nam Ellipſis non poteſt continere figuram ęquiangulam, quę ſit ei, quę in circulo inſcribitur iſoperimetra, & ęqualium numero laterum.

Quapropter omnia figura circulo inſcriptibilia erit maior, quam omnis figura ellipſi iſoperimetrę inſcriptibilis, cum ſit illa ęquiangula, hęc vero minimè, quapropter etiam circulus Ellipſi Iſoperimetra maior erit.

COROLLARIVM I.

HInc eſt circulum omnibus figuris ſibi Iſoperimetris maiorem eſſe, nam maior eſt omnibus, quę ſint ęquiangulę, & ęquilaterę rectilineę, quę, & omnibus aliis Iſoperimetris non ęquiangulis, vel non laterum ęqualium maiores ſunt. Sic, etiam maior eſt circulus omni ellipſi ſibi Iſoperimetra, ergo omnibus figuris ſibi iſoperimetris abſolutè maior eſt.

CO-

COROLLARIVM II.

SEcundò colligitur ſphęram quoque capaciorem eſſe omnibus corporibus ęqualis ſuperficiei tàm ſphęricis, quàm planis ſuperficiebus conſtantibus. Quandoquidem ſphęra componitur ex indefinitis circulis, aut ſaltem ex omni parte circuli trahi poſſunt. Cum ergo circuli omni figura plana iſoperimetra ſint capaciores, ſequitur quoquè, quod ſolidum circulis intextum, vt ſphęra eſt, omni figura ſolida capacior ſit. Hęc autem confirmatio ſatis eſt in re per ſe admodum clara, licet ſciam Theonem, & antiquos exactiùs, & magis mathematicè probare, ſed eorum oſtenſio dependet à menſura corporum ſolidorum, quam nondum hauſimus.

Digitized by Google

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

A omnia, quæ de Geodæſia plana conſiderauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior ſit contemplatio, & acrioris ingenij acumen expoſcat; neque omninò ſit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vſque adhuc recuſauerint, imò nec quidem in curuilineas diuerſi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

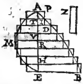
MVlti nedum apud veteres; ſed recentiores etiam, vt teſtatur Hyeronimus Vitalis ex noſtris in ſuo Lexico mathematico in circuli Tetragoniſmum ſc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryſo, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos autē Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cuſanus, deſudarūt. Sed ceteris ſublimius Ambroſius à S. Vincentio in inſigni opere, quod de Quadratura circuli inſcripſit totam penè ętatem conſumpſit. Sed licet multa conſequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen ſcopum aſſequutus nō eſt. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10 de quadratura circuli inſcripto) impugnat Vincentius Leutaudus pręter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciſcus Xauerius Ayſcon authorem propugnet. Id tamē libro Lugduni impreſſo anno 1663. nonę impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde ſatiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragoniſmum, & laborioſiſſimum, & adhuc ſub lite verſantem producęre.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, ſeu mixtilineæ poſſunt tot rectangula inſcribi, aut circumſcribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

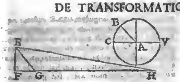
SIt data figura plana ABE, quę ſit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula poſſe, vel inſcribi, vel circumſcribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula ſuperficiei remanet, & intercipitur, ſit qualibet quantitate plana V. g. aſſignata Z minus.

Ducta AB hęc diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod ſit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter inſiſtente, vt BE, vel RM ſit minus quantitate Z data, & cętera omnia rectangula ſimul ſumpta relinquāt inter ſe, & figuram cui inſcribuntur, vel circumſcribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur. Relinquunt inſcripta paulò magis, quàm medietatē rectangulorum AI, & ID, & cęt. circūſcripta verò AI, & ID paulo minus ob lineam curuā, & globoſam (è contra de concaua eſſe aſſerandum) ſed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo ſpatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea concluſa inter curuam, & rectangula inſcripta, quod ſint minus quaſi ſub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam ſtipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem Z ſunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID ſtipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę ſint partes ipſius EB, & TA, & ID, & cæteræ ſint omnes æquales ex hypothe ipſi AH.

THEOR.



gulum eiuſdem altitudinis FAG ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib. 5. ita erit ſectoris planities ACB ad planũ circuli c BV, vt trianguli FAG ad planitiẽ trianguli EFH, & perturbando. Ita erit ACB ſector ad FAG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: ſed circulus, & triangulum in præced. oſtenſa ſunt æqualia: ergo etiam ſector ACB, & triangulum FEH æquabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea æquali dimidio arcui erit ex 39. æquale ſectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

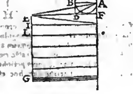
CVm ex oſtenſis propoſ. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum ſe habere vt 22. ad 7. quæ tamen verâ paulò maior eſt. Hinc ſi accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, ſeu planum 154. cuius medietas 77. ex propoſ. 40. lib. 1. Elem. erit æqualis triangulo rectangulo XVL; de quo iam oſtendimus prop. 4. areæ circuli æquale eſſe.

Si verò placeat aream rectanguli verã circuli planitie minorem inſenſibiliter. Accipies diametro veræ circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua poſito diametro partium 71. circumferentia erit 223. numerum in proportione tripla ſupet decupartiente ſeptuageſimas primas, ideſt comprehendet diametrum ter, & ferè ſeptimam ipſius partem deficiente tantùm $\frac{1}{71}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. quę biſariam diuiſa erit 7916 $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam conſequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiuſque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri reſpondere.



* Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAD. Prolongetur diameter FD in E, atque FE æqualis circumferentiæ præſuppnatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiuſdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod eſt quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem ita erit triangulum FAE ad triangulum FAD, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt baſis FE ad baſim FD ex 1. lib. 6. Elem. quæ eſt proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, æquale areæ circuli ex 3. h. ad FAD æquale quartæ parti quadrati CD proximè. vt 22 ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius eo erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. quę eſt eadem proportio, quæ 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter Partium 84. quadretur hic numerus, & fit 7056. Vtendo itaque regula aurea ſiat, vt 14. ad 11. ſic 7056. ad aliud, & exibit area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiæ ſe habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

PRobatur. Nam poſito FE part. 22 in figura prop. 6. antec. nempe æquali proximè circumferentiæ, & poſito diametro partium 7. ſi fiat quadratum EG FE circumferentia continebit ſex rectangula dupla AFE ex 3. lib 2. Elem. & inſuper rectangulum nigrum ex ſeptima parte conſectum: Nam 22. continet ter diametrum partium 7. & ideo ſexies ſemidiametrum partium $3\frac{1}{2}$, & addit inſuper ſeptimam partem diametri, nempe $\frac{2}{7}$ ſemidiametri: Quare rectangulum FI EG circumferentia FE, & ſemidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè æquale areæ circuli: Proptereaque quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & inſuper parallelogrammum nigrum, quod eſt ſeptima pars rectanguli VL ſub tota diametro EL, & tota circumferentia FE comprehenſi; at $\frac{2}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{4}{7}$ trianguli FAE: Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè æquale FAE eſſe partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor ſeptimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part. 88. Nam 7. duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. poſita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ 784. ad aliud, & adhibita regula proportionum elicietur numerus 5544. pro area circuli quæſiti.

MXOQ auferatur triangulum NXO, & addatur æquale triangulum MFN, ſpatium nigrum parallelogrāmo albo XD remanebit æquale. Sed rectangulum iſtud eſt factam ex dimidia circomferētia circuli medij ITI, & reſiduo AD ſemidiametri LD. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: ſed gnomon AMS æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum XD, quod fit ex peripheria ITI, & ſegmento AD æquabit annulum DEHAPB.

Quod autem gnomon AMS æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS ęquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo ſubductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo reſtabūt annulus DEHPBA, & gnomon AMS reſidua æqualia.

PROBL. IV. PROPOS. X.

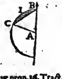
Data ſectoris peripheria, & cruribus, eius aream admenſire.

SIt, vt in pr. 4. ſector ABC, cuius AC crus notū ſit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum UFC, cuius crus FU ſit 25. pedum, & baſis 10 10. pedum erit ei æquale. Quaderè ſi mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250 & medietas ſumatur partium 125. hęc erit ſectoris arealis quæſita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito ſectore, & chorda cognoſcere aream ſegmenti circuli.

SIt ſegmentum circuli nigrum BIC, deturque chorda BC, & cognitus quoque ſector BACB;

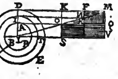


Debet prius per ea, quæ prop. 16. Tract. 29. triangulum BAC cognoſci. A ſectore itaque ſubductum triangulum CBA relinquet ſegmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & menſurare.

DEtur annulus DEHAPB planus, cuius notus ſit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inueniri poteſt: multiplicetur hic circulus per reſiduum ſemidiametri AD ſubducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelogrāma LM, LN, & LO æqualia ſingulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia ſemicircumferentijs erunt ſimilia, cūm ſit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad peripheriā cu pr. 39 l. 6. El. & ex 25 l. 6. ideo triangula circa diametrum cōſiſtentia ex prop. 35. lib. 1. Elem. MOS, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia: ſi autem ſpatio

COROLLARIVM.

HInc quoque agnoſces partem annuli dimetiri. Nam ſicut tota annuli media peripheria ITI cum reſiduo diametri AD multiplicata dat totum annulum; ſic pars IT peripheriæ eiuſdem medię cum eodem diametri reſiduo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

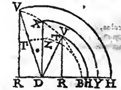
De Quadratione Circuli Geometrica.

FAciliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam deſcripſimus tract. 18. de flexis ex prop. 14. vnde ſit.

THEOR I. PROPOS. XIII.

Circuli areæ æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum conſtituere.

COrollario 1. propoſ. 19. tract. 18. cit. probauimus DU ſagittam ad DX radium eſſe, vt radius ad quadrantem XY, ſi in quadrante XY circuli propoſiti quadrandi deſcribamus quadratricem; obtinebimus quoque ſagittam DB illius. Quamobrem, ſi ſagittę inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit ęqualis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.



Quoniam autem vt oſtendimus prop. 2. h. area circuli eſt ǽqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripherię, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: ſi faciamus ex radio DB, & tertia proportionali inuenta, quę ęquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc eſſe ęquale areę

areę circuli, cuius quadrans DXY. Quod ſi ex dimidio prędictę lineę inuentę, quę æquat peripheriam conſtituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc ſit æquale triangulo prędictu, erit quoque æquale areę ipſius circuli, cum vt prędiximus prop. 23 tract. pręced. hoc modu triangulum in rectangulum ęquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop. 14. l. 2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum ſit æquale parallelogrammo conſequenter etiam circulo æquabitur.

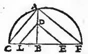
Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alius ſimiliter quadrabit. Quandoquidem ſi offeratur alius circulus ſimiliter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis iſtis tribus, nempe diametro circuli, & rectę ęquali eius circumferentię ea linea quadratrice iam nutæ, & diametro circuli propoſiti ex propoſ. 12. lib. 6. & inuenietur linea ęqualis peripherię circuli oblati; ſiquidem ex prop. 33. lib. 6. ita diameter eſt ad diametrum, vt peripheria cuiuſcumq; circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quarta proportiunali inuenta, & ſemidiametro circuli alterius propoſiti conſtituamus triangulum, hoc erit ęquale alterius circuli propoſiti areę, quod, & redigemus in rectangulum, & in quadratum ęquale, quę conſequenter ipſa quuque aream circuli exęquabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

Oportet priùs inueniſſe aliquod quadratum ęquale alicui circulo ex prop. pręced. cuius circuli radius notus ſit. Deinde inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei ęqualis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop. 12. lib. 6. & hęc erit diameter circuli ęqualis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AB, & diameter notus circuli ei ęqualis BC, & latus quadrati tranſmutandi BD. Ducta parallela DL. Linea DL erit diameter circuli traſmutandi, qui cõſequetur aream ęqualem quadrato ex BD.



Probatur. Nam ſit nuta BF ſemicircumferentię pręhabiti nuti circuli ęqualis, nempe tertis proportionatis duabus BC, & BA, talis enim prop. 13. huius oſtenſa eſt, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulu ęqualis ſit medium proportionale inter lineam ęqualẽ ſemicircumferentię eius, & radium, cum ſit æquale rectangulu ab illis extremis comprehenſo, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop. 13. l. 6. angulum rectum, cùm ſit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF ſemiperipheriã, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipſi AF quibus poſitis.

Probatur prop. Nam quia eſt ob ſimilitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BD, & vt BA ad BC ita DB ad BL; erit ex æquo eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43. l. 6. EB erit ęqualis circuli ſemicircũferentię, cuius ſemidiameter ſit BL. Sicut FB eſt ęqualis circuli ſemiperipherię, cuius radius BC. Et quia quadratum DB eſt ęquale rectangulo ex linea BE ęquali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit ęquale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL ęquali.

PROBL. II. PROPOS. XV.

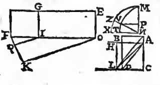
Dato ſectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus ſubtenſi ad circulum.

Quoniam ex propoſ. 4. huius. Rectangulum ſub linea dimidio arcui æquali, & ſub radio comprehenſum eſt æquale ſectori, ſi detur eius proportio ad circulum V.g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę ęqualis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum conſtituetur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit ęquale ſectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Dato rectangulo circulo æquale conſtituere eius ſectorem æqualem dato rectangulo minori.

Detur rectangulũ EF, æquale areę, circuli ſub FO ſemiperipheria, & ſub radio OB cõprehenſum, & rectangulum ACXD, eo minus, cui quęritur ſector ęqualis. Si non eſt eiuſdem altitudinis, ac BF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop. 6. part. 2. huius, & ſit CH. Menſuretur deinde eius latus CL in latere FI. & ducta OI, erit parallelogrammũ OF ęquale ipſi CH, & cõſequenter CB parallelogrammo. Deinde ea pr. 10. l. 6. Elem. ſecetur OK, vel FK diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & ſit eadem proportio FQ ad QK; Radio itaque FK ſeorſim fiat quadrans MNX in quo inſcribatur quadratria MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi BF, cum ſit quarta pars circuli æqualis.



Tranſlata itaque FQ in PN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV baſi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum ſectoris NXZ eſſe ęquale parallelogrammo ABCD.

Prob. Nam vt ſector NZX, eſt ad quadrantẽ MNX ita eſt arcus XZ ad quadrãtis ambitũ XZM ex 39. l. 6 vt autẽ arcus XZ ad AZM quadrantem, ſic portio NP ad radiũ NM ex 18. Tr. 18. & FQ ad QK, & FI ad FO, ex effect, & rectangulũ cũ ſit eiuſdẽ altitudinis ex 1

lib.6. FG ad FB: Igitur ex 16. lib.5. Elem. vt eſt ſector XZN ad quadrantem XNM, ita eſt rectangulum FG ad rectangulum FB; ſed quadruplum quadrantis XZM, & rectangulum FB ſunt æqualia. Ergo etiam ex prop.12. l.5. Elem. ſectoris NZX quadruplum, & rectangulum FG erunt æqualia.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Triangulum Lunulæ exhibere æquale.

FVit hic nixus, quò Hyppocrates Chyus ad quadrationem circuli peruenire putauit; fiat itaque circulus ACAD, & ducto diametro AB, & quadrati lateribus AC, & CB, alius circulus fiat radio CB, & relinquet in antecedenti circulo ACBD lunulam AIDB, quam dico eſſe æqualem triangulo ACB.

Probatur. Quoniam quadratum CB BB eſt duplum quadrati ex AB circulus quoque BABF erit duplus circuli ACBD ex prop.41 lib.6. & ex prop.39. ſemicirculus ſemicirculo, & quadrans quadrante duplus erit; Si ergo quadrans circuli minoris dupletur, & fiat ſemicirculus ADB, is erit æqualis quadranti ACB: Dempto igitur communi ſpatio nigro AIB inter vtroſq; intercepto, erit Lunula AIDB triangulo ACB æqualis.

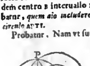


PROBL. V. PROPOS. XVIII.

Dato circulo annulum planum æqualem exhibere, cuius magnitudinis placeat. Et data annuli latitudine, & diametro circulum annulo æqualem facere.

SIt datus circulus APTI cuius centrum C, & dato ſemidiametro annuli deſcribendi EP, qui vt patet debet eſſe maior ſemidiametro PC dati circuli, à quo erigatur perpendicularis à centro C, quæ ſit radius CA, & centro P ad interuallum dati diametri EP deſcribatur arcus, qui ſecet AB in E; Ibiq; facto centro deſcribatur EP radio circulus, & eodem centro E interuallo EC alius circulus deſcribatur, *quem aio includere annulum* CHDIP *æqualem circulo* APTI.

Probatur. Nam vt ſunt quadrata ex diametris, ita circuli ex prop. 40. lib.6. Cum ergo ex 11. lib. 2. quadratum PE ſit æquale duobus quadratis ex CP, & CE etiam erit æqualis circulus ex EP duobus circulis ex CP & CE. Ergo etiam circulus PD erit æqualis duobus circulis ex PI diametro, & CH diametro, cùm ſint dupla circulorũ ſuper ſemidiametros CE, & CP, & circulos quoque PD duplus circuli ex PE ſemidiametro. Quare cum circulus ex PD, vt diametro æquet circulos ex IP, & CH diametris, ablato CH communi obtinebimus annulum CPHDI æqualem circulo APTI.



Quod ſi detur annulus CPTHD, & deſideres huic annulo adinuenire circulum æqualem primò ex propoſ.19.l.3. duces tangentem PCI interiori circulo CTH vſque dum ſecet extrinſecum PDI, quam bifariam diuides, & produces AB, factoque centro in puncto contactus C interuallo CP deſcribes circulum; eritque circulus æqualis annulo dato CPHD, vt patet ex præc. oſtenſione.

COROLLARIVM.

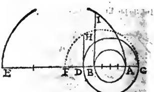
HInc diſces plurimos circulos in vnum aggregare; Siquidem ex preced. circolus PDI æquatur circulis API, & CTH. Vnde ſic eidem PID alium poteris aggregare; ſucceſſiuèque alios vſque dum placeat.

PROBL. XI. PROP. XIX.

Circulos proportionaliter augere, vel minuere.

EFficies quadratum ex prop. 28. Tract.29. V.g. duplum, vel triplum alterius, deſcribeſque circulos ſuper eorum latera, tamquam diametris, obtinebiſque circulos in data proportione tripla V.g. maiores. Sit circulus AB augendus, ita vt ad circulum maiorem ſe habeat vt 1. ad 3. Sic rectangulum ex AB, & BE triplo maius, quam quadratum AB, quod fit aſſumendo latus BE triplò maius, Nam cum ſint eiuſdem altitudinis ſe referent, vt baſes AB, & BE ex 1. lib.6. Deinde inter AB, & BE reperiatur media proportionalis BI, & quadratum ex BI æquabitur rectangulo AB, & BE triplo maiori, quam quadratum ex AB conſtituatur, ergo circulus ex IB, vel æquali CD, & erit intentum.

Si verò oporteat diminuere ſit circulus CD minuendus, diuidaturq; latus CD in tres partes, & ſic FD æqualis tertiæ parti, ita vt ſe habeat rectangulum ex CD, & FD tertia parte ad quadratum FD, vt 3. ad 1. interque totam diametrũ CD, & tertiam partem DF ſit media proportionalis DH, & circulus ex DH, tamquam diametro factus erit $\frac{1}{3}$ circuli ex CD



Patet, quia circuli ita ſe habent in proportione, vt ex diametris quadrata ex 39. lib.6. ideoque ſe habebunt ad inuicem, vt quadratum ex CD ad quadratum ex AB; ſed quadratum ex CD ad quadratum ex AB ſe habet, vt rectangulum AB, & BE ad quadratum AB ex conſtructione, nimirum, vt 3. ad 1. ergo etiam circuli ex 16. lib.6. ſe habebunt, vt 3. ad 1.

EXPEN-

EXPENSIO III.

De Ellipſium tum inuicem, tum in alias figuras tranſmutatione.

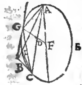
TRansformatio Ellipſium non minus vtilis: quam neceſſaria eſt, cum enim ipſiua vſus ſit apud homines communiſſimus ipſius quoque menſuratio multoties, ne dum opportuna erit, ſed & pernereſſaria: jureque ſuccedit circulo cùm ſit quoad figuram valdè ei proalma, & ferè in omnibus proprietatibus ſuis illum imitetur.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Triangulum maximum Ellipſi inſcribere:

SIt Elllpſis ACE, & eius ſegmentum CGA, ſitq; inſcribendum maximum triaogulum, quòd in eo inſcribi queat. Ex centro F per medium D lineę CA ducatur diameter GF, & complcatur triangulum CAG, quod erit maximum.

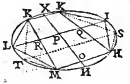
Probatur CD, & CA cum ex effectione ſint ęquales ſunt applicatę, & GF diameter def. 11. Tract. 24. quare ducta BG contingente in G, hæc erit parallela lineæ CA ex prop. 28. 5 Tr. 24 Si ergo CGA triangulum maximom non eſt, aſſignetur aliquod maius & ſit CIA; producaturque IA in B ad contingentem BG, & ducatur CB. Erit igitur triangulum CBA æquale triangulo CAn ea propoſ. 39. lib. 1. Coroll. Ergo C I A erit minus, quàm CAG, quod ponebatur æqoale. Ergo non dabitur triangulum maius, quàm CGA.



THEOR. I. PROPOS. XXI.

* *Omnia triangula, que ſuper baſes nectētes diametrum aliquem cum applicatis, vel applicatas ad idem punctum, nec non, & vertices in applicatis ſimiliter obtineant, inter ſe ſunt æqualia.*

SInt HK, & KM nectētes verticem diametri K, vel applicatarum KK cùm appiicatis OM, & OH ad idem punctum O, verticeſque earum ſint in applicatis PI, & PL ad idem punctum P. Dico hæc triangula HIK, & KLM eſſe æquaila.



Probatur. Nam PL, & PI applicatę ſunt ęquales; Quare ſubductis æqualibus QP, & PR, remanebunt baſes æquales IQ, & RL: Quare triangula in eundem verticem X, vel in parallelam aa deſinentia IQK, & RAL erunt ęqualia: Sic, & triangula IQH, & RML, vtpote inter parallelas HM, & IL. Vnde tota trlāgula HIK, & KLM erunt æqualia.

Quod autem QP, & PR ſint æquales, patet. Quia KK, & HM ſunt parallelę; & ideo cum HO, & OM ſint ęquales, & ax, & ax ex prop. 13. Cor. tract. 29. erunt etiam RP, & PQ ęquales, vel ſi in eundem verticem terminent ea prop. 4. Cor. 2. lib. 6.

COROLLARIVM.

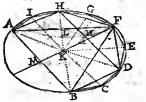
HInc euenit, quòd ſi triangulum, & taliter aſſignatis ſit maximum, vt ALM, quòd etiam aliud HIK erit maximum. Nam ſi non eſt, ſit punctatum triangulum maximom HSK, & ducatur ST parallela HM, & conſtituatur triangulum punctatum MKT, quod erit minus triangulo MLK: quod ponitur maximum: ſed hoc eſt æquale triangulo HIA ex præced. Ergo triangulum HIK maius erit punctato KMT: quare contra hypotheſim, & maius punctato HSK ipſi æquali ea prǽced. quod eſt abſurdum cum SHK ab aduerſarijs ſtatuatur maximum, quod in ſegmento HIK capere poſſit.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Segmenta Ellipſium, in quibus capiant maxima triangula æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

SInt duo ſegmenta FHA, & FDB Ellipſis AFEB in quibus capiant triangula maxima ęqualia FDB, & FHA. Dico ea eſſe æqualia.

* Probatur. Nam KH erit diameter, & LA, & LF applicatę, & baſes FH, & HA nectentes diametrum HA; quæ bifariam diametris, KI, & AG diuiſæ conſtituent trīāgula maxima: ideoq; ea præc. FGH, & HIA erunt ęqualia.



Sic ſi connectatur D, & H recta DH nectens erit parallela lineæ BA ex præced. quare HN, & ND erunt applicatæ. Vnde baſes DF, & FH nectentes diametrum KF, & applicatas DN, & NH diuiſæ bifariam diametris AO, & KB ſubſternent triangula maxima, & ex præc. æqualia HOE, & FAD. Sicque erūt quoq; æqualia triāgula BCD, & DEF; & ſic probabis ſi alia triāgula in reſidula rurſus inſcribas in infinitum.

Si ergo inſcribantur omnia triangula maxima in ſegmentis BDF, & FHA, quæ inſcriptibilia ſunt omne ſpatium occubabunt ſegmentorum ellipticorum FHA, & BDF; alioquin, ſi aliquid remaneret, non omnis triangulorum inſcriptibilis multitudo inſcripta fuiſſet; ſed omnia triangula inſcriptibilia remanent ſemper ęqualia; Ergo & ſpatium

omne,

Ratio eſt deducta à propoſ.71. Tract.24.Conic. Cum enim ſit CP ad EP, vel KR ad MR erit etiam eiuſdem altitudinis ſpatium CKPR ad ſpatium EP-MR, vt baſes, quæ ſunt eiuſdem proportionis, vt propoſ 13.tract. præced. nimirum vel CP, ad EP, vel KR ad MR, & ita dicas de omnibus alijs ſpatijs. Quare figura inſcripta in circulo ex prop.17.lib.5. Elem. ad figuram inſcriptam in Ellipſi eam obtinebit proportionem, quam diameter Ellipſis maior CD habet ad minorem AF. Siquidem cùm ſinguls ſpatia circularia ſingulis ellipticis ſint in eadem proportione, quam CP ad CA, quę eſt eadem, quę KR ad MR, & ſic de alijs lineis, quę omnes in eadem proportione ſunt, etiam omnia ſpatia ſimul compoſita circularia ad omnia ſpatia ſimul compoſita Elliptica in eadem proportione erunt, vt CP ad CE, vel etiam CD ad EF.

Deinde aduertendum eſt quoque, quia fecimus circulum ACBD, ſic habentē ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum EF; quod etiam circulo maiori ACBD inſcripta figura ſic habebit ad inſcriptā circulo minori HI, vt CD ad AF ex pr.26. 39. lib.6. Quare figura inſcripta Ellipſi, & figura Inſcripta circulo HI erunt ęquales ex prop. 7. l.5. vtpote, quod illis dicat eandem proportionem CD ad EF figura circulo maiori ECDA inſcripta.

Quo poſito oſtenditur propoſ. Spatium Ellipticum eſt ęquale areæ circuli HI, ſed circulus CADB, ita eſt ex affectione ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum Ellipſis EF. Ergo etiam ſpatium circuli maiori diametro deſcripti ACBD reſpiciet ſpatium Ellipticum, vt CD diameter, vel BA reſpicit minorem diametrum FE.

Probatur quòd ſpatium Ellipticum ſit æquale circulo HI. Nam ſi non eſt æquale erit, aut maius, aut minus; ſed neutrum dici poteſt. Ergo erit æquale. Nam ſi non eſt Ellipſis æqualis circulo HI: Sit circulus HI maior. Deſcribatur in circulo HI figura adeo multiplicatis lateribus, vt ſit maior ipſa Ellipſi; ſiquidem in circuli maiori, quàm Ellipſis, maior figura ipsā Ellipſi capere poterit. Similis autem figura circulo ADCB, & Ellipſi, vt docuimus, inſcribatur, & erit figura multilatera circuli maioris ACBD ad multilaterā Ellipſis in eadem proportione, vt ad multilateram circuli HI, & ideo æquales erūt circulo HI, ac Ellipſi figurę inſcriptę. Sed eſt maior figura circulo inſcripta ex aduerſarijs, ergo eſſet maior, ſimulque æqualis, quòd eſſe nequit.

Quod ſi aſſeratur circulus HI minor; quàm Ellipſis. Tunc in Ellipſi talis figura inſcribatur adeo multiplicatis lateribus, vt docuimus, vt ſit maior ipſo circulo HI; Nam cum ſit maior Ellipſis circulo HI adeo inſcriptæ fig. latera multiplicari poterunt, vt euadat circulo HI in aliquo maior, ſitq; alia tot numero laterū in circulo HI inſcripta. Sed, vt oſtēndi, figura circulo HI inſcripta eſt æqualis ipſi figuræ Ellipticæ, ergo figura in HI eſſet ęqualis, & vt volunt aduerſarij minor, quam figura Elliptica: quod eſſe nequit.

COROLLARIVM.

HInc educitur Ellipſim ABEF ad circulum CDAB conſequi eam proportionem, quam rectangulum ex CD, & AF lateribus ad quadratum CD. Ratio eſt, quod cum quadratum, & rectangulum ſint eiuſdem altitudinis CD ſe habebunt inuicem, vt baſes BF ad CD, quàm, & adipiſcitur Ellipſis ABFE, collata ad circulum ACBD.

THEOR. V. PROP. XXV.

Si circulus fiat ex diametro, qui ſit media proportionalis inter diametrum maiorem, & minorem Ellipticum, æqualis Ellipſi eſt.

PRobatur ex præced. Siquidem oſtendimus talem circulum, nec poſſe eſſe Ellipſi minorem, nec maiorem. Quare æqualem eſſe concluſimus. Et hinc iam habès modum quo circulum æqualem Ellipſi efficias; ſi inter CD, & EF mediam proportionalem inuenias HI, & ex eo circulum HI delinees.

THEOR. VI. PROPOS. XXVI.

Ellipſis quælibet ad circulum quemcumq; in proportione ea eſt, qua rectangulum ex diametris ad quadratum circuli dati.

SIt circulus V Ellipſis EAFB. Dictum eſt in Cor. Ellipſim EAFB ea proportione referri ad circulum maiori eius diametro deſcriptum AB; qua rectangulum ex eius diametris AB, & EF ad quadra-



tum AB; Sed circulus ex AB ad circulum V ea refertur proportione, qua quadratum AB ad quadratum XC ex propoſ.40. lib. 6. Elem. Ergo ex *æquo* Ellipſis EAFD eam retinet proportionem ad circulum V, quam rectangulum ex AB, & EF diametris ad quadratum CX.

THEOR. VII. PROPOS. XXVII.

Ellipſis quæcumque ad quamcumque Ellipſim eam conſequitur proportionem, quam rectangulum ex diametris primæ ad rectangulum ex diametris ſecundæ.

ELlipſis ABEF in fig. prop. anteced. eam adipiſcitur proportionem ad circulum V; quam rectangulum ex diametris AB, & EF ad quadratum XC ex pr.antec. Sic circulus V ad Ellipſi alteram Z eam dicit proportionem ob eandem propoſ. quam quadratum CX ad rectangulum ST. Ergo ex *æquo* Ellipſis ABEF ad Ellipſim Z eam dicit proportionem, quam rectangulum ex AB, & EF ad rectangulum ST.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc deduces quomodo Ellipſes æquales deſcribantur, aut iuxta datam proportionem. Nam ſufficit efficere rectangula, quæ inuicem datam proportionem conſequantur ex prop. 27. Tr. 39. præced. & ex illorum lateribus conſtituere duas Ellipſes, ex prop. 55. Tr. 24. quæ inuicem datam proportionem rectangulorum obſeruabunt.

COROLLARIVM II.

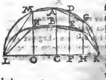
HInc quoque eſt, quod Ellipſis ſit ad Ellipſim, & ad circulum, vt triangulum ex diametris, vel ſemidiametris AHE Ellipſis AEBF præc. prop. 26. ad triangulum ex ijſdem IPZ in altera Ellipſi Z, vel ex radijs in circulo: Patet quoniam triangula dimidia ſunt rectangulorum ex ijſdem lateribus conſtantium: quare cum ſit totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Etiam triangulum erit in eadem proportione ad triangulum, vt rectangulum ad rectangulum, vel ad quadratum, & ideo, vt Ellipſis ad Ellipſim, vel ad circulum.

THEOR. VIII. PROP. XXVIII.

Segmentum circuli ſe habet ad totum circulum, vt ſegmentum Ellipſis ad totam Ellipſim, quæ ſint inter eaſdem parallelas concluſa.

SEgmentum aliquod Ellipticum exhibeatur CBIH, & aliud circulare ACGH inter parallelas AC, & OH. Dico, quod ſpatium ACGH eſt ad circulum LAK, vt ſpatium Ellipticum CBIH eſt ad totam Ellipſim LBK.

Probatur, vt eſt AC ad BC, ita eſt ſpatium ACGH Trapezij circulo inſcripti ad BCIH trapezium Ellipticum, & ita eſt ſpatium totum figuræ inſcriptæ circulo LMAGK ad figuram Ellipſi inſcriptam LNBIK, vt demonſtrauimus prop. huius 24. initio.



Diuidatur itaque trapezium circuli CAGH bifariam per eandem parallelam DF; diuidetur quoque trapezium BCIH, ducanturq; IE, & EB, necnon, & AD, & DG; eritque trapezium GHDF ad trapezium EFIH, vt DF ad EF, & vt AC ad CB, & ſic trapezium DACF erit ad trapezium BCEF veluti AC reſpicit BC, & ideo, vt figura LMAGK ad figuram Ellipticam: Quare etiam ſimul duo trapezia circularia ACDF, & DFGH erunt ad duo Elliptica BECF, & FEIH ex propoſ. 17. lib 5. vt figura circulo inſcripta ad figuram Ellipſi inſcriptam; Et ſic ſemper ſequetur, ſi diuidas in infinitum. Sit igitur facta in trapezio dato circuli ACGH omnis poſſibilis ſubdiuiſio, ſicut etiam in trapezio Elliptico; ambo ita diuiſa omne ſpatium, quod inter GA rectam, & curuam ADG, ſicut inter rectam BI, & ambitum BEI abſument: alioquin, ſi aliquid remaneret, omnis poſſibilis ſubdiuiſio facta nõ eſſet, cùm minor figura rectilinea capere poſſet in circulo, & Ellipſi ex cuius latere ductæ lineæ trapezium minus conſtituerent. Cùm ergo facta omni poſſibili trapeziorum ſubdiuiſione ſemper ſit omnis congeries trapeziorum in ACGH factorum ad omnem multitudinem trapeziorum in BCIH factorum, vt figura LMGK ad figuram LNIK; & figura LMGK ad figuram LNIK ſit vt circulus ad Ellipſim. Etiam trapezium circulo inſcriptum omni poſſibili ſubdiuiſione multiplicatum erit ad trapezium CBIH, & ideo ſegmentum circulare CAGH ad ſegmentum Ellipticum CBIH, cui ita ſubdiuiſa æquantur, erit, vt circulus ad Ellipſim. Quare permutando ſegmentum circulare CAGH erit ad totum circulum, vt ſegmentum Ellipticum CBIH ad totam Ellipſim.

COROLLARIVM.

HInc, ſi habes circulum in quotcumque partes æquales parallelis ſectum, obtinebis quoque ellipſim ex eius diametro, vt axi maiori factam in partes æquales ſimiliter ſectam ab ijſdem parallelis, verùm in circulo vſque adhoc inuenta via nõ eſt tales partes efficiendi.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

Datam Ellipſim in quaſcumque partes æquales, in quas circulus diuidi poſſit, per ſectores partiri.

SVpra docuimus ſubduplam diuiſionem, hic autem omnem eam, quæ circulo deſcribi poſſit. Sit itaque data ſemiellipſis ACDB, & oporteat eam in tres æquales ſectores partiri, vt ſemicirculus diuiſus eſt AQMB. Demittatur perpendicularis QO à circuli ſexta parte AQ, & ducatur CP. Dico ACP ſectorem eſſe ſextam partem Ellipſis, vnde ſi ducta TV tangente, & parallela AD facias aliam ſectorem æqualem erit CPD altera pars, & ſic de reliquis faciendo alios ſectores æquales ex prop. 21. huius.

Prob. ex 24. h. vt QO ad CO lineas, ſic QAO ſegmentum circuli ad ACO ſegmentum Ellipſis, & ita erit QOP in circulo triangulum ad triangulum COP in Ellipſi ob eandem altitudinem cum terminent in idem punctum P. Quare, ſi componantur, ita erit triangulum QOP cùm AQO ſegmento, ideſt ſector AQP in circulo ad triangulum COP cũ ſegmento ACO, ideſt ſectorem ACP in ſemiellipſi, vt QO ad CO: Sed vt QO ad CO, ita eſt ſemicirculus AQMB ad ſemiellipſim ACDB ex prop. 24. huius contextu. Erit itaque AQP ſector circuli ad ACP ſectorem Ellipticum, vt totus circulus ad Ellipſim: Quapropter *permutando* erit QAP ſector circuli ad circulum, vt ACP ſector Ellipticus ad Ellipſim: ſed ille ſector circuli eſt ſexta pars ipſius, & tertia eius dimidij: Ergo etiam ſector Ellipticus ſexta pars erit totius, & tertia eius dimidij. Quare ſi ducta tangente TV ducas ei parallelam AD, & facias ſegmentum AC æquale ſegmento CD ex huius 23. erunt etiã ACP ſector, & CPD inſiſtentes æqualibus ſegmentis æquales ex huius prop. 22. Proptereaque CPD erit altera totius ſexta pars, & ſic de reliquis.



CO

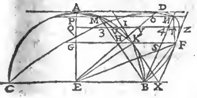
COROLLARIVM.

HInc noſces deſcribere figuras in Ellipſibus ſimiles illis; quæ ſunt in circulo, ſi ſint tales, quarum ſingula triangula ſe habeant in circulo ad totum circulum, vt ſingula triangula ellipticę figuræ ad totam ellipſim, etiam ſi ſint triangula quæcumque, & irrationalia. Quia, & tota figura circuli inſcripta erit ad totum circulum, vt figura Ellipſi inſcripta ad totam ellipſim. Nam ſi V.g. BMQO figurę circuli triangula BMP, & MQP, & QOP, erunt ad figuræ ellipticæ BDCO triangula BDP, & CPD, & PCO, vt OQ ad OC, vel æquales MN ad MD, ideſt, vt circulus ad Ellipſim; etiam tota figura circulo inſcripta ſe habebit ad figuram ellipticam, vt circulus ad Ellipſim: Proptereaque conuertendo ita erit figura in circulo ad totum circulum, vt figura ellipſis ad totam ellipſim.

PROBL. IV. PROPOS. XXX.

Super datam circuli diametrum deſcribere Ellipſim circulo æqualem, cuius data ſit ſemidiameter, & applicata æqualis radio.

SIt BACcirculus, cuius centrum E, & data ſemidiameter ellipſis maior ſemidiametro circuli ED: ducta tangente AD inter parallelas AD, & EC accommodetur ab E puncto data ED, & ductis parallelis, vt FG ſinguli ſinus, vt GK transferantur à ſemidiametro ellipſis ED ſuper eandem lineam, vt ſunt HF, ſingulaque puncta flexa molli ductu vniantur, & ſemiellipſis BFDGC erit conſtituta; quam iuxta eaſdem menſuras perficies. Dico itaque hanc ſemiellipſim ſemicirculo eſſe æqualem.



Nam, quod ſit ellipſis patet ex ijs, quę diximus propoſ.52. Cor. Tract. 24. Quod verò ſit ęqualis ſemicirculo.

Probatur. Nam ducta PN vſquequo interſecet circulum, & ellipſim in M, & N parallela ad diametrum ellipſis productum, erunt eius partes MP & NO diametro ED, & EA applicatę in P, & O, & ideo æquales cum omnes alias applicatas tales effecerimus ex conſtructione. Ducantur deinde ſubtenſę BM, & BN ab interſectionibus N, & M, & erit ſegmentū circuli MKB ellipſis NFB. In ſegmentis ergo circuli BKM maximū triang. inſcribatur BKM, & ab K vertice ducatur parallela FG, ſi nō ſit ducta, & in F erit vertex maximi trianguli ellipſis ſegmento BFN inſcripti, vt infra oſtendendum. Erunt itaque cùm ſint triangula maxima pluſquam dimidia ſuorum ſegmentorum. Sunt autem etiam æqualia, & triangulum BFN æquatur triangulo BKM, ſicut & trapezium BNOE trapezio MPBE, & ſemitriangulum maximum NDO ſemitriangulo maximo MAP, cum ſit dimidium maximorum: Et ſi in ſegmentis remanentibus rurſus alia triangula inſcribantur, & multiplicentur vſque dum multiplicari poſſunt, ſemper idem ſuccedet, & ſemper multiplicata maxima triangula in circulo æquabuntur ellipticis æquè in ſucceſſiuè remanenti quolibet ſegmento multiplicatis: ſed maxima triangula in circulo multiplicata, vſquedum multiplicari queunt, æquant circulum; alioquin ſi remaneret aliquod ſegmentum, non eſſent multiplicata omni multiplicatione poſſibili, & ſic dicas de ellipſi. Ergo cum omnia triangula circuli ęqualia circulo. æquentur omnibus triangulis ellipticis æqualibus ellipſi; Ellipſis, & circulus erunt æquales.

Itaque oſtendendum remanet primo triangulum BFN, & omne ſimiliter inſcriptum eſſe maximum. Hoc autem oſtenditur. Nam ducta per F linea XF parallela ipſi BN tangens erit, & ideo ex dictis 1. propoſ. huius BFN erit maximum triangulum. Quod autem XF ſit tangens ducta XK parallela ipſi MB, tangente circuli K ſic oſtenditur. Quoniam omne punctum, quod in ipſa aſſignetur extra ellipſim eſt, ergo non ſecabit eam; ſed continget in F, ergo tangens erit, quod ſi ita non eſt. Aſſignetur punctum Z V.g. quod dicatur eſſe intra ellipſim, & oſtēdetur de illo extra ellipſim reperiri. Ducta ZQ Trapezia NOBE, & MMP ſunt ęqualia ob ęquales baſes ex conſtr. NO, & MP, & eandem altitudinem ex propoſ.72. Tract. 24. Vnde, & ex prop. 13. tract. 19. pręc. SH, & HG æquabūtur ſient, & in ZQ partes 4. Y, & 3 Q. Sunt verò æquales ex conſtructione HF, & KG. Vnde, & reſidua FS, & HK erunt ęqualia. Quamobrem cum ſint inter parallelas, & parallelæ Z 4, & I 3. erunt æquales ex prop. 33. lib. 1. Elem. quæ additæ æqualibus, vt oſtendi 4 Y, & 3 4 remanebunt æquales ZY, & I Q. Sunt autem VQ, & TY ex conſtructione æquales, & QV eſt minor, quam IQ. Ergo etiam TV, quæ finit in ambitu elliptico in T eſt minor, quam YZ: Vnde punctum X remanebit extra ellipſim: quod cum poſſit demoſtrari de omni alio puncto excepto V in quo tangit, remanebit tota XZ extra ellipſis ambitum. Quamobrem ZX erit tangens, & ideo NFB maximum triangulum, quod in ſegmento NFB inſcribi poſſit ex prop. 1. h.

Deinde oſtendendum eſt triangula, ſeu trapezia Elliptica ęquari circularibus. Nam primo trapezium ENOB æquatur trapezio AMPE ex prop. 13. tract. præc. quòd ſint inter parallelas, & æqualium baſium. Triangulum quoque BFN in ellipſi ęquatur triangulo BKM in circulo; quod pars FSB ſit æqualis parti KBH, vtpote inter parallelas exiſtenti, & ſuper baſes æquales FS, & HK, vt ſupra oſtenſum eſt, & idem dicendum de triangulis HMK, & FSN; necnon, & de triangulis MAP, & NDO, & ſic de alijs, ſi inſcribantur. Verificatur itaque, quod omnia triangula in ellipſi ſint maxima, & ſint æqualia maximis, & inſcriptis in circulo, & ideo quòd in perpetuà minorum deſcriptione, tùm circuli, tùm ellipſis, cum triangula ſint ſemper æqualia, circulus ellipſi æqualis erit.

COROLLARIVM.

HInc potes nedum totam ellipſim alteri exhibere æqualem, ſeu circulo, ſeu ellipſi, ſed etiam ſingula eius ſegmenta, ita quod triangulum BFN ſit æquale triangulo BKM, cum in ipſis triangula, & in ſegmentis ſucceſſiuè remanentibus

ſemper æqualia inſcribi poſſint, vt ex demonſtratione patet: quinimò ſector quoq; BKE æquabitur ſectori BFE cum triangula BFE, & BKE ob æqualem baſim, & altitudinem ſint æqualia.

EXPENSIO VI.

De areis parabolarum quadrandis.

QVoniam aliquando ſuperficies ſpatijs parabolicis, vel ferè talibus continentur, vt exactus Geodeta poſſit talia ſpatia exactiſſimè menſurare, etiam quadrationem parabolæ noſcere debet, & eam in libitas partes diuidere.

PROBL. I. PROPOS. XXXI.

Data parabola terminata maximum inſcribere triangulum.

SIt parabola, ſeu ſegmentum eius LMO, cui oporteat inſcribere triangulum maximum. Subtendar itaque illum quelibet recta LO, quæ diuidatur bifariàm, & erigatur diameter QM, & coniungantur rectæ LM, & MO. Dicoque LMO eſſe maximum triangulum ſegmento parabolę ONML inſcriptum.

Probatur. Nam ſi triangulum LMO non eſt maximum, erit aliquod aliud V. g. LNO, de quo probn non eſſe maximum contra hypotheſim, ſiquidem ita ex Coroll. propoſ. 50. tract. 24. eſt LQO rectangulum ad LPO rectangulum, vt QM ad PN: ſed eſt maius rectangulum, LQO, quam LPO ex



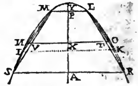
propoſ. 29 lib. 6. Quare etiam erit maior QM, quam PN. Vnde triangulum LMO erit maius triangulo LNO, ſiquidem ductis perpendicularibus MV, & NX, & ideo parallelis, cùm QM, & PN diametri ſint in parabola paralleli quoque ex propoſ. 27 tract. 24. triangula QMV, & PNX erunt æquiangula, vnde erit QM ad PN, vt normalis VM ad normalem XN; ſed maior oſtenſa eſt diameter QM, quàm NP. Ergo etiam maior VM; quam XN. Vnde eum triangulum LNO obtineat altitudinem minorem ex 1. lib. 6. Cor. erit minus.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

Omnia triangula, quæ in applicatis obtinent vertices ſuos in parabola, inter ſe ſunt æqualia.

SIt triangulum LOR, & MNS, quæ in applicatis LM, ON, & RS vertices M, N, S, & R, O, L habebūt. Dico ea eſſe in parabola SMLR æqualia.

Probatur. Ducto diametro XP, erunt XN, & OX æquales, & TX, & XV quoque ex prop. 13. Tract. 29. quia SM, & LR coniungunt æquales applicatas PM, & PL in æqualibus trapezijs RAELP, & APMS; ſicut etiam RA, & SA. Ablatis itaque æqualibus TX, & TV ab æqualibus OX, & XN, reliquæ erunt æquales OT, & VN; Quapropter triangula OTL, & VMN ex pr. 39. lib. 1. Cor. inter parallelas LM, & NO, & ſuper æquales baſes OT, & VN exiſtentia erunt



æqualia; necnon ob eandem rationem triangula OTR, & VNS; quare tota triangula ROL, & MNS erunt æqualia.

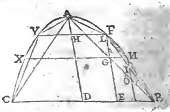
COROLLARIVM.

HInc educes, quòd ſi triangulum ORL ſit maximum, etiam aliud NMS futurum eſſe maximum. Quoniam, ſi aliud maximum poſſet conſtitui in ſegmento MNS, cuius vertex I; Tunc ducta ab I parallela IK, ſi conſtitueretur triangulum RKL eſſet æquale triangulo maximo MSA, & ideo maius triangulo SNM non maximo ex aduerſarijs: ſed MNS æquatur triangulo ROL. Ergo etiam triangulum, quod conſtitueretur RKL eſſet maius triangulo ROL. Ergo triangulum ROL contra Theſim maximum non eſſet, quod inſcriptum fuiſſet in ſegmento parabolico ROL.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Parabola eſt ſeſquitertia trianguli maximi in illa inſcripti.

SIt parabola BFAYC, & triangulum maximum in ipſa BAC. Dico parabolam ei eſſe ſeſquitertiam; nempe triangulum continere, & inſuper eius tertiam partem, vel eſſe ad illud, vt 4. ad 3. Ducatur itaque diameter AD; diuiſaque bifariam ſemibaſi BD in E ducatur AD diametro parallela EF vſque ad parabolam in F, & ducatur baſi parallela FH.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. de conicis Tr. 24. Quadratum BD eſt ad quadratum FH, vel ED, vt AD ad AH, ſed quadratum BD ex propoſ. 6. lib. 2. Cor. eſt quadruplum quadrati ED. Ergo etiam diameter AD quadruplus eſt portionis HA, & per *diuiſionem rationis* HD ipſius AH, vel EF æqualis ſeſquitertia. Linea verò EG ſubdupla eſt ipſius AD propter triangulorum ſimilitudinem, cùm EG ſit ad DA, vt BE ad BD, & ita quoque EG ad DA. Itaq; GE erit duplo maior ipſius GF æqualis ipſi AH: Siquidem EF eſt $\frac{3}{4}$ ipſius AD, & EG $\frac{2}{4}$.

Quamobrem triangulum quoque GBF erit duplum

plum trianguli BFG ex 1. lib.6. eandem verticem habentis in B; & ideo eandem altitudinem, & quia BA eſt dupla ipſius BG, vt dixi; ideo triangulum BFA erit trianguli BFG duplum, & ideo æquale triangulo BGE, ſed huic BGE eſt quadruplum triangulum BDA ex 21. lib.6. ſiquidem duplicatam habet baſim, & eſt ſimiliter poſitum, & ſimile: vnde illi habebit proportionem, quam 4. ad 1. nempe duplicatam, quam 2. ad 1. ideſt baſis DB ad baſim EB.

Deinde ſit parabolæ ſegmentum BFA. In eo GF parallela DA, ex BG æquali applicatæ AG puncto medio erecta, quæ erit diameter, & maximum triangulum in eo inſcriptum BFA, ex propoſ.1. h.

Diuidatur bifariam ſemibaſis BG in O, & ducatur parallela ON ipſi FG, & NL baſi BA. Et eodem prorſus argumẽto oſtendes ON eſſe ſeſquitertiã FG, eo q; ex 5. Tr.24 quadratũ BG quadruplũ quadrati BO, ſit ad NL quadratũ, vt GF ad FL, ideſt 4. ad 1. & hinc reſiduum GL ad LF, vt 3. ad 1. & ideo NO æqualem ipſi OL eſſe $\frac{3}{4}$ ipſius GF, & OI ipſius GL dimidiam, quod ei eandem dicat proportionem; quam BO ad BG; ideoque NI ipſius GF $\frac{2}{4}$, ideſt duplam reſiduæ IO $\frac{1}{4}$, quę ſublatis $\frac{2}{4}$ erit $\frac{1}{4}$, ideoque triangulum IOB duplo maius, quam BIN erit, quę ob eandem altitudinem a ſunt inuicem, vt baſes OI ad IN: ideoque addito æquali INF triangulum BIO æquabitur triangulo toti NBF; & ideo erit ſubquadruplus trianguli BFO, cum ſit ille BFO ſupra duplo maiorẽ baſim AF, & ideo, vt ſimilis, ſimiliterq; poſitus ex 21. lib.6. habeat proportionem duplicatam nempe BIO, vel æqualis BNF ſubquadruplus erit trianguli BFG, & ſic ſemper erit etiam, ſi diuidas in infinitum.

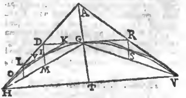
Si ergo inſcripta ſint in parabola BAC omnia triangula, quæ inſcribi poſſunt, illa multitudo æquabit totam parabolam alioquin ſi aliquid parabolę reſtaret, non eſſet inſcripta omnis inſcriptibilis multitudo, cùm adhuc inſcribendi ſpatium ſuppeteret, cùm itaque omnia triangula inſcriptibilia ſe habeant ſucceſſiuè, vt 1. ad 4. & ſit illimitata progreſſio hæc ſucceſſiua; ideo ex Cor.3. pr. 26. Tract. 16. part.1. differentia ſecundi termini BFA à primo BAD erit ad BAO, vt BAO ad totam collectionem terminorum, ſcilicet triangulorum in ſeriem continuam proportionalium æquantium ipſam parabolam: ſed oſtẽſum eſt BFA eſſe ad BAD, vt 1. ad 4. & ideo differentia erit 3. Quapropter, vt 3. ad 4. ita erit triangulum BAD primus terminus ad totam collectionem triangulorum inſcriptorum in ſeriem continuam proportionalium, ideſt ad parabolã BFDA; & ideo duplũ Trianguli BAC ad duplam parabolam BFAYC. Vel conuertendo parabola BFAYC erit ad triangulum BAC, vt 4. ad 3.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Si parabola contingentibus ſtringantur, & applicata terminetur, figura concaua, quæ reſtat, eſt ad triangulum exterius contingentium, vt 4. ad 3.

Sit Parabola VGH, & contingentibus VA, & AH, & ED ſtringatur, & applicata VH terminetur. Dico concauam figuram VAHO eſſe ad triangulum contingentium exterius RAD, vt 4. ad 3.

Probatur. Quia VA, & AH ſunt contingentes ex propoſ. 12. Tract. 24. GT æquabitur GA, & quia ED ponitur contingens erit parallela VH applicatæ ex 37. tr. 24. & ideo triang. RAD erit ſuper baſim OA ſubduplã baſi TA, vel AD ipſi AH, cumq; triangula TAH, & GAD ſint ſimilia, ſimiliterq; poſita ex prop. 22. lib.6. Elem. erunt inuicem in duplicata ratione laterum, & quia AD ſe habet ad AH, vt 1. ad 2. triangulum AGD erit ad triangulum ATH, vt 1. ad 4. nempe in proportione ſubquadrupla. Idem dicas de triangulo KOL, quia enim OD, & DH ſunt tangentes, & OH applicata, ab eius puncto medio M educta parallela MD ipſi TG in contactũ tangentiũ cõueniet in D, vt diameter ex 11. tr.24 & MD erit dupla IM, & KL, vtpote tangens erit parallela OH applicatę. & ideo erit KD dupla GD: quare BDL triangulum ſimile, ſimiliterque poſitum ſuper baſim KD ſubduplam baſi OD erit ſubquadruplum trianguli GDH, ſed triangulum GDH eſt æquale triangulo GHA ob æquales baſes AO, & DH, & verticem eundem G, ergo BLO triangulum eſt ad triangulum GAD, vt 1. ad 4. ſcilicet in propoſitione ſubquadrupla, & ſic in infinitum poteris ſequi circumſcribendo, qui ſemper erunt ad antecedentem vt 1. ad 4. Nam KOL triangulum eſt ad triangulum ADG dimidium trianguli circumſcripti RAD, vt 1. ad 4. ita triangulum VLO eſt ad dimidium IDL trianguli circumſcripti KOL, vt 1. ad 4. & ſic procedendo.



Ponatur itaque parabolę VGH concluſę tangentibus AH, & VH eſſe circumſcripta omnia triãgula, quæ circumſcribi poſſunt, omnia ſpatium AHIO tandem abſorbebunt; alioquin, ſi remaneret ſpatium aliquod omnia triangula circumſcriptibilia, non eſſent circumſcripta contra Theſim, cùm adhuc aliquod ſpatium inſcriptibile remaneret.

Verùm omnia illa in infinitum procedentia ſemper ſeruant eandem proportionem 1. ad 4. quã ſecundus reſpicit antecedentem, vel 4. ad 1 quã reſpicit primus terminus GAD ſecundum BDL; quare differentia minoris trianguli BDL, terminiq; ſecundi à primo GAD erit ad primum OAG, vt 3. ad 4. ſed vt differentia ſecundi termini à primo ad ipſum primum, ſic primus terminus GAD ad totam collectionem terminorum in infinitum procedentium in ſerie continua eiuſdem proportionis ex Coroll.3. prop.26. Tract. 16. de progr. Geom. Ergo GAD triangulum ad totam collectionem triangulorum circumſcriptibilium figuræ concauæ GAHIO, & ideo ad ipſam figuram concauã ei collectioni æqualem ſe habebit, vt 3. ad 4. & ideo duplum trianguli RAD ſe habebit ad duplum collectionis ſeriei triangulorum in infinitum procedentis, & ideo figurę cõcauæ VAHOV, vt 3. ad 4. vel è contra figura VAHG ad triangulum RAD, vt 4. ad 3

COROLLARIVM.

Hinc patet figuram concauam VAHG eſſe ad figuram conuexam VSGIH ſubduplam; Nam

figura concaua eſt ad triangulum RAD, vt 4. ad 3. ſic figura conuexa eſt ad inſcriptũ VGH triangulũ, vt 4. ad 3. ex 44.h. ideoque figura concaua YAHG ſic ſe habebit ad triangulũ RAD, vt conuexa VGIH ad triangulum VGH; ideoque *permutando* figura concaua ad conuexam ſe habebit, vt triangulum RAD ad triangulum VGH; ſed triangulum RAD eſt ſubduplum trianguli VGH ob ſubduplas altitudines ED, & GH reſpectu altitudinum TH, & TV ex Coroll. prop. 26. & æqualem baſim OA, & GT. Quare etiam figura concaua erit ad conuexam in ratione ſubdupla ſe. vt 1. ad 2.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV.

Parabolica ſegmenta, in quibus capiunt triangula maxima æqualia inuicem erunt æqualia.

SIt fig. propoſ. 32. h. præced. in qua parabola BFAYC, & ſint duo ſegmenta BFA, & AYC, in quibus capiat ex prop. 2. h. exp. triangula maxima, & æqualia. Dico ipſa ſegmenta eſſe ęqualia.

Prob BFA triangulum eſt æquale triangulo AYC, cùm ſint inter parallelas eorum vertices, ita triangula FNB, & YXC ob eandem rationem, & ſic continuè in infinitum, quare cum continua progreſſiu infinita triangulorum abſorbeat omne ſpatium ſegmentorum parabolicorum BFA, & AYC iuxta oſtenſa propoſ. 15. Tract. 16. part. 1. quod oſtenſum ſit prop. 23. bnina ſemper iuxta eandem proportionẽ procedere, quæ eſt 1. ad 4. etiam ſegmenta parabolica AFB, & AYC erunt æqualia, quod in eis omnia inſcriptibilia triangula ſint ęqualia.

PROBL. V. PROPOS. XXXVI.

Parabola ad parabolam, ſeu ſegmentum eius ad aliud ſegmentum obtinet eandem proportionem, quam triangulum maximum ad triangulum maximum, quæ in illis inſcripta ſunt.

SIt parabola ACB, vel ſegmentum, quam dico habere ad aliam parabulam, vel ſegmentum MLN eandem proportionem, quam triangulum ACB ad triangulum MLN, quæ maxima ſint.



Probatur. Nam Parabola ACB eſt ad triangulum ACB, vt 4. ad 3. Sic etiam parabola MLN ad triangulum MLN, vt 4. ad 3. Quadere parabolæ ad ſua triangula ſunt in eadem proportione, ideoq; *permutando* ACB parabola erit ad parabolam MLN, vt triangulum ACB ad triangulum MLN.

COROLLARIVM.

HInc, ſi duæ parabolæ habeant æquales baſes erunt inuicem, vt altitudines, & ſi obtineãt altitudines æquales erunt ad inuicem, vt baſes.

COROLLARIVM II.

HInc quoque colligitur; quomodò deſcribantur parabulæ æquales, vel iuxta datam proportionem. Nam factis triangulis ACB, & LMN, quæ datam proportionem conſequantur circa illa deſcribetur parabola iuxta dicta propoſ. 59. tract. 24. & quia ita eſt triangulum ad triangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum inter eaſdem baſes, & parallelas: hinc eſt; quòd factis duobus parallelogrammis iuxta datam proportionem, ſi ope illorum duæ parabolæ deſcribantur ex propoſ. 69. tract. 24. illæ erunt quoque in data proportione.

PROBL. II. PROPOS. XXXVII.

Datæ parabolæ æquale triangulum exhibere.

MOdus exhibendi triangulum Parabolę ęquale hic eſt, inſcribatur parabolæ AC triangulum maximũ AIC, & deinde in tres partes ſecetur baſis AC; nam ſi baſi AC addatur tertia para CD, & fiat AD, & ducatur ID hoc triangulum AID erit æquale parabolæ AIC.

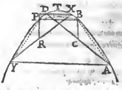


Prob. Parabola AIC eſt ad triangulum AIC, vt 4. ad 3. ſed triangulum AID eſt ad idem triangulum AIC, vt baſis AD ad AC baſim ex 1. l. 6. quę ex effectione eſt vt 4. ad 3. Ergo eſt in eadem proportione ad triangulũ AIC, ac parabola AIC ad idem triangulum AIC: quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æqualia triangulum AID, & parabola AIC, cùm eidem triangulo AIC eandem proportionem dicant.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

E parabolæ dato puncto auferre ſegmentum alteri æquale dato diametro eiuſdem.

DAta ſit parabola ATY, & ſegmentum in ea ABTD; diameterque BC, & oporteat aliud ſagmentum dato æquale reſecare, quod incipiat à puncto X. Iungatur punctũ X puncto D, & lineæ XD ducatur parallela AY, ducaturq; XY; nam ſegmẽtũ XPY erit, quod exoptatur æquale ſegmẽto ABD.



Probatur. Nam ducta BP erunt æqualia triangula ex prop. 32. huius ABD, & XPY cum habeant vertices in parallelis XD, & BP, & AY, triangulum

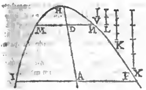
verò

verò ABD eſt maximum ex propoſ.11.huius. Ergo etiam triangulum XPY ex Cor. p.23. h. Quadere, cùm maxima ſint triangula ABD,& XPY,& æqualia; erunt quoque ſegmenta XPY, & ABD parabolæ æqualia ex prop.35. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIX.

A parabola eadem auferre ſegmentum dato proportionale.

SIt parabola, ſeu ſegmentum FHI, & oporteat ab ea reſecare aliud ſegmentum, quod ſe habeat, vt X ad V; Inter X,& V inueniantur duæ mediæ proportionales LK ex propoſ.3. Tract. 15. fiatque vt X ad L, ſic AH diameter ad HD, & ducatur parallela NM. Dico ſegmentum FHI eſſe ad ſegmentum NHM, vt X ad V.



Progr.1. Probatur ſegmentum FHI ad ſegmentum parabolicum NHM eſt in ratione triplicata FI ad NM,& proportionis FI ad NM duplicata,vt dicã eſt proportio AH ad HD;& AH ad HD,ſic facta eſt, vt X ad L,& X ad L ex effect. eſt duplicata proportio X ad K. Ergo FI ad NM eſt, vt X ad K. Verùm ſegmentorum parabolicorum, vt dixi FHI ad MHN triplicata eſt proportio FI ad NM; quæ eſt, vt X ad K; & X ad V triplicatam poſſidet proportionem illius, quæ eſt X ad K. Ergo ſegmentum parabolicum FHI ad NHM ſegmentum eſt vt X ad V.

Remanet oſtendendum proportionem parabolici ſegmenti FHI eſſe ad NHM in triplicata ratione FI ad NM.

Progr.2. Ex 36 h. parabola FHI ſe habet ad parabolam NHM, vt triangulum in maiori FHI inſcriptum ad triangulum in minori deſignatum NHM; ſed triangulorum proportio componitur ex proportione FI ad NM,& AH ad HD; ſed proportionis FI ad NM eſt duplicata ratio AH ad HD, quod ſit, vt quadratum FA ad ND, vel ex 6. lib. 2. quadruplum quadratum ex FI ad illud ex NM, ſic AH ad HD ex 5. Tr.24. ergo ex dupla proportione componitur AH ad HD,& ex ſimplici proportione quoq; FI ad NM. Ergo proportio ſegmenti parabolici FHI ad NHM eſt triplicata illius, quæ eſt FI ad NM.

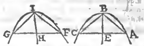
COROLLARIVM.

HInc eſt, quòd ſi illud item ſegmentum NHM alibi in eadem parabola efficere deſideres, poteris id facere ex propoſ.37. huius detruncando alibi in eadem parabola ſegmentum æquale ſegmento NHM. Nam erit illi ſegmentum FHI, vt X ad V, cùm ad æquales eadem ſit proportio.

PROBL. III. PROPOS. XL.

A Parabola data ſegmentum reſcindere, quod ſit æquale alterius parabolæ datæ ſegmento.

DEtur parabola ABC,& oporteat reſecare à parabola FIG ſegmentũ æquale; Accõmodetur in parabola FIG linea GF æqualis lineæ AC, & ducatur diameter HI ex 36.tr.24. Dico FIG eſſe æquale ſegmento ABC.

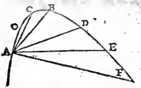


Probatur cum FH ſit dimidia FG æquabitur ipſi AE. Sed vt AE ad EB,ſic ob ſimilitudinem omnium parabolarum ex prop.51.tract. 24.eſt ex defin. ſimilitudinis ſectionum eſt FH ad HI, & permutanda AE ad FH, vt EB ad HI. Sed FH, & AE ſunt æquales; Ergo etiam tales erunt EB, & HI. Quare triangula ABC,& FIG erunt æqualia, vtpote æqualium altitudinum, & baſium; ſed etiam ſunt triangula maxima, quia ſunt ad diametros ex 31.h. ideoque vt triangulum ABC ad triangulum FIG ſibi æquale ſic erit ſegmentum parabolicum ABC ad parabolicum ſegmentum FIG, ergo 14.lib.5. erunt æqualia parabolica ſegmenta CBA, & FIG.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Segmenta à parabola datâ detruncare, quæ ſint in continua proportione.

SIt data proportio ſegmenti AOC ad ſegmentum ACB, & fiat ex propoſ. 14. lib. 6. vt ſubtenſa AC ad AB ſubtenſam, ſic AB ad aliud AD, & ſic ſucceſſiuè vt AB ad AD, ita AD ad AE, & cæt. Deinde lineæ inuentæ à puncto A accommodentur in parabola,& ducantur AD,AE,AF, & cæt. Nam dico ſegmenta ACB, & ABD, & ADE, & AEF, eſſe in continua proportione.



Probatur ex oſtenſione pr.39.progr.2. vbi oſtẽdimus ſegmenta ACB,& ACBD,& ABDE, & cæt. eſſe in triplicata proportione ſubtenſarum AB, & AD, & AE, & cæt. ſed illæ factæ ſunt continuæ proportionales. Ergo ex propoſ.1.tract.28. etiam ſegmenta parabolica erunt continuæ proportionalis.

PROBL.

PROBL. V. PROP. XLII.

Parabolæ aream ad quamcumque figuram reducere.

QVoniam vt prop.38 huius oſtendimus, quod parabola in triangulum æquale commutari poteſt: hinc enaſcitur, quòd ſi triangulum illud æquale parabolæ conuertatur ex pr.3.tr.29. in rectangulum, & hoc in quadratum, & deinde in circulum ex pr.14.tr.30. & tandem in Ellipſim ex prop.30.h. quòd etiam parabola omnes iſtas transformationes ſit ſubitura, cum ſit conſequenter æqualis Ellipſi, circulo, quadrato, & rectangulo, quę triangulo, in quod primo conuerſa eſt æquantur.

EXPENSIO VI.

De partitione Hyperbolæ.

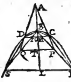
HYperbola vſque adhuc quadrationi ſubigi non potuit, & licet Ambroſius à S. Vincentio in id conetur, illius tamen quadratio adeo inuoluta eſt, vt omninò incomperta remaneat: Vnde ne inutiliter librum oneremus ſatiùs erit certam tantùm eius Geodęſiam proponere.

THEOR. II. PROPOS. XLIII.

In Hyperbola triangula ſegmentorum, quorum vertices in parallelis ſunt, & applicatis, æqualia inuicem ſunt.

SInt triangula RCB, & BDS, que ſint in ſegmentis hyperbolicis, & vertices eorum nectant parallelæ CD, RS, & vertices B, vel ſint in eodem puncto, vel aliqua V.g. BB prędictis RS, & CD parallela nectantur. Dico illa eſſe æqualia.



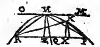


Prob. Cum RBL, & LBS ſint triangula ad eandem altitudinem ſuper baſes ęquales, ideſt applicatas RL & LS ex pr.13. tr.29. æquales erunt NO, & OI, ſed CO, & OD ſunt quoque applicatæ: Ergo erunt æquales; Ablatis itaque æqualibus NO, & OI reliquæ erunt æquales CN, & ID; Quamobrem triangula CAN, & IAD erunt æqualia, vtpotè ſuper baſis æquales, & inter parallelas; ſic triangula CNR, & IDS ob eandem rationem erunt ęqualia. Vnde etiam triangula ADS, & RCA ex illis partialibus conſtituta erunt æqualia.

PROBL. I. PROPOS. XLIV.

Datæ Hyperbolæ terminatæ maximum triangulum inſcribere.

IN Hyperbolæ PNR. ductis quacumque PR, & diuiſa bifariam in Q erigatur diameter QN ex propoſ. 30. Tract. 24. & ducatur contingens MO, quæ erit ex propoſ. 28. Tract. 24. de conicis parallela lineæ PR. Ducantur itaque à contactu N rectæ PN, & NR, & triangulum quod conſtituitur, PNR maximum erit.



Probatur facile. Quia, ſi aliquod triangulum aliud adſit in ſegmento Hyperbolico PNR, quod obtineat verticem alibi V. g. in punctum K non erit in parallela MO, cum MO tangat tantum in N; ergo inferius erit, & minor erit altitudo KX, quam ZN, vt patet. Vnde cum minorem altitudinem triangulum PKR conſequeretur, eſſet minus, quam PNR. Quare PNR erit maximum cum maius, vel æquale nequeat aſſignari.

THEOR. II. PROP. XLV.

Triangula maxima inter parallelas exiſtentia in Hyperbola ſunt inuicem æqualia.

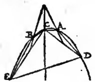
*SInt triangula maxima RCA in pr.43.h. & BDS. Dico illa eſſe æqualia. Nam ductis diametris PA, & QA, & linea DC per eorum vertices C, & D ea erit parallela applicatę RS, & ideo etiam vertices triágulorum maximorũ RCB, BDS erũt in parallelis applicatiſque; quare ex 43. h. erunt æqualia.

* Prob. Nam ducatur PQ, & applicata CO, & diuiſa bifariam RS ducatur quoque diameter LA; Iſti itaque tres diametri ex prop.29. Tract. 24. Coroll. conuenient in idem punctum A, & quia in triangulo RBL eſt vt RL ad TP, ſic LB ad TB, & ſic in alio LS ad TQ, ideo erit RL ad PT, vt LS ad TQ. ideoq; *permutando* RL erit ad LS, vt PT ad TQ. ſed RL, & RS ſunt æquales, ergo etiam PT, & PQ. Ab O itaq; ducatur OD in verticem trianguli BDS, & hæc erit applicata quoque. Nam æquabitur ipſi OC. Probatur autem hoc. Nam TQ eſt ad OD, vt TA ad OA, & TA ad OA, vt PT ad CO. Ergo ex 11. lib.5. TQ erit ad DO, vt PT ad CO; ideoq; *permutando* TQ erit ad TP, vt OD ad CO; ſed PT, & TQ oſtẽſæ ſunt ęquales, ergo etiam CO, & OD ex 12. l.5. Ergo DO erit applicata, & ideo parallela ipſi RS. Quamobrem cum triangula BCB, & BDC maxima obtineant vertices in parallelis, & applicatis erunt æqualia.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Cuiuſcumque Hyperbolæ ſegmenta; in quibus capiant triangulà æqualia maxima inuicem æqualia ſunt.

*Sint ſegmenta Hyperbolica, in quibus triangula maxima DAC, & CBE capiant. Dico etiam ipſa ſegmenta eſſe æqualia.



Probatur. Nam reliqua quoque ſegmenta capient triangula maxima, cum ſint inter parallelas DE, & AB ex theſi, & idem dicas de reſiduis, & ſic abſque fine: Inſcribantur itaque ſemper per æqualem numerum procedendo in vtroque ſegmento omnia triangula maxima, quæ inſcribi poſſunt; hęc infinita ſeries ęquabit ipſa ſegmenta. Nam ſi non ęquaret adhuc reſtaret aliquod ſpatium, in quo triangulum maximum poſſet inſcribi: ſed hęc triangula, vt vt multiplicentur ſemper æqualia perſeuerant, ergo etiam omni poſſibili multiplicatione præſtita æqualia erunt. Quadere ipſa quoque hyperbolica ſegmenta, quæ ęquant ſeries poſſibili omni multiplicatione numeroſas erunt ęqualia.

Quod verò ſemper multiplicentur ęquali numero patet: nam relinquit quodlibet triangulum duo ſpatia, quę duobus triangulis poſſunt inſcribi, & hęc ſingula duo quoque, & ideo quatuor, & hæc octo, & ſic continuè duplicando.

PROB. IV. PROPOS. XLVII.

Si detur Hyperbola Aſymptotis incluſa, & applicatæ extremo ducantur Aſymptotis parallelæ, illa includent ſpatia æqualia.

EXponatur Hyperbola BC, & ab ea ſint duæ parallelæ ductæ BL, & CM à terminis applicatę BC, necnon BE, & CF Aſymptotis FD, & DN. Dico etiam EBDL, & MDCF eſſe æqualia quadrangula.



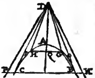
Prob. Producta BC ad aſymptotas in N, & P erũt NB, & CP æquales ea prop. 46. vel 66. Tract. 24. de conicis, & ob paralleliſmum linearum EA, & MC, ita erit, NA ad NC, ideſt æquales CP, ad PB, vt BE ad CM. Verùm ob eandem rationem, vt CP ad PB, ſic CF ad BL. Ergo ob ſimilitudinem rationum vni tertiæ ex prop. 16. lib. 5. erit EA ad MC, vt CF ad BL reciprocè, quare rectangula AL, & FM æqualia ex prop. 10. lib. 6. Elem.

THEOR. IV. PROPOS. XLVIII.

Si detur Hyperbola aſymptotis ſtipata, & in ea duo ſegmenta conuexa perhibeantur æqualia, erunt etiam ſegmenta concaua æqualia.

SIt Hyperbola BGAHC Aſymptotis ſtipata PO, & ND, & dentur ſegmenta æqualia conuexa BOG, & HIC in ipſa BGAHC: Dico, quòd etiam ſegmenta concaua BODG, & HICD erunt æqualia.

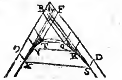
* Probatur. Nam primo triangula GDQ, & HDQ ob eandem altitudinem, & ęquales baſes GQ, & QH erunt æqualia; Trapezia quoque QGTB, & CHTQ erunt æqualia ex propoſ. 12. tract. 29. ob eandem altitudinem cum ſint inter parallelas, & ęquales baſes, quæ applicatæ GQ, & QH, & CT, & TB ſunt. Tandemq; idem aſſeras de triangulis BDT, & DTC ob eandem altitudinem DT, & æquales baſes CT. & TB. Ablatis itaq; triangulo DQG, & trapezio TQGB ab æquali toto BDT alteri TDC toti, cui ſimiliter auferantur partialia prædictis ęqualia triangulum HDQ, & trapezium HQCT reliqua remanebunt æqualia BGD, & HDC. A quibus ſi vtrinque auferantur ſegmenta conuexa ex 46. h. æqualia BOG, & HIC remanebunt quoque concaua BOGD, & HDIC æqualia.



THEOR. V. PROPOS. XLIX.

Si ſint ſegmenta in Hyperbola concaua, quæ æqualium parallelogrammorum lateribus contineantur, illa inter ſe erunt æqualia.

*SIt Hyperbola contenta aſymptotis ſuis, ſintque iuxta propoſ. 47. huius expenſ. æqualia parallelogramma TA, & QA, necnon, & BA, & XA, relinquent mixtilinea nigra ſuper SQ. & XT.



Ducta parallela RV erunt rurſus parallelogramma VA, & RA æqualia; necnon, & parallelogramma TA, & QA ex eadem prop. & relinquent mixtilinea minora nigra, & ſi ſic ſemper ſubdiuidantur, ſemper ipſa parallelogramma remanebunt ęqualia: ſed ſemper minus, & minus mixtilineum relinquent. Multiplicentur itaque vſquedum multiplicari queunt ſubdiuidendo, relinquent minus ſpatium mixtilineum omni poſſibili ſimili ſpatio; ſi enim adhuc ſupereſſet aliquod mixtilineum, tantò magis adeſſet ſpatium pro parallelogrammo mi-

minori conſtituendo. Quoniam parallelogrammũ quodlibet à mixtilineo deficit ſegmento concauo nigro. Cum itaque omnis poſſibilis multiplicatio parallelogrammorum omne ſpatium mixtilineum abſumat, erunt illa parallelogramma ęqualia toti ſegmento concauo OAFTX, ſic etiã ex alia parte concauo ſegmento SDBAQ. Cum itaque ſeries parallelogrammorũ SQAN ſit ſecundum omnes ſuos terminos æqualis ſeriei parallelogrammorũ ATXO, & ſingulæ ſeries æquent ſegmentum concauum ſuum, etiam ipſa ſegmenta concaua SBQDAB, & TVXOAF erunt ęqualia.

PROBL. III. PROPOS. L.

Dato Hyperbolæ ſegmento conuexo à dato puncto in ambitu illius ducere rectam, quæ æquale ſegmentum auferat.

DAtum ſit ſegmentum Hyperbolæ linea AD abſciſſum, & punctum B in ambitu Hyperbolæ DAT. Ducatur ab A ad B punctum datum linea AB, & huic fiat parallela DF, & ducatur BF. Dico factum eſſe, quod petebatur, & ſegmenta lineis DA, & BF abſciſſa eſſe inter ſe æqualia.



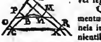
Probatur. Quoniam cum ſint inter parallelas DF, & AB in ipſis triangula maxima inſcribi poterunt æqualia ex propoſ. 44. huius. Vnde ex prop. 46. huius ipſa ſegmenta conuexa erunt æqualia; Rurſus ſi AF punctum coniungatur puncto A, & ducatur ipſi AF parallela DH, & FH; ſegmentum FH erit æquale oppoſito DA, & ideo ſegmento BF, & ſic in infinitum.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Concauum ſegmentum alteri æquale exhibere in eadem Hyperbola ſuis Aſymptotis ſtipata ab aſſignato puncto.

SIt in Hyperbola pr. 48. h. in aſymptotis ND, & NP ſegmentum concauum BOG, & velit aliquis à puncto H abſcindere ſegmentum, quod ſit ęquale dato BOG. Ducatur GH ad datum pũctum H, & poſtea illi parallela BC, & coniungantur extrema H, & C vertici D, & erit factum, quòd poſtulatur.

Patet enim ex pr. 48. h. BDOG triangulũ concauũ ęquari triang. cõcauo HICD, vel ſegmentum ſegmento.



Quod ſi cupias ſegmentum non contineri lineis in verticem D conuenientibus; ſed parallelis alteri aſymptotorum ſit datum ſegmentum concauum caro clauſum lineis CO, & BP, & ad deſtinatum punctum N æquale oporteat ponere aliud ſegmentum. Ducatur parallela ad datum punctum N recta BN, & ei parallela CX; deinde ducantur rectæ à punctis N, & X parallelæ aſymptoto OA, & dico *ſegmentum* NMXR *æquari ſegmento* CPBO.

Probatur. Nam ſegmentum concauum BCOA æquatur ſegmento concauo NXRA ex propoſ. 49. h. Parallelogrammum quoque BAP parallelogrammo NMA, quibus ablatis BAP, & NMA relinquentur BPCO, & XRNM ęqualia.

EXPENSIO VII.

De Spatijs Spiralibus.

SPatia ſpiralia ſunt illa; quę diametro ſpiram generante, vt QA, & ſpira ipſa continentur, vt eſt ſpatium AGEHQA; Horum autem ſpatiorum proportiones ad ſpatium circuli inueſtigandæ ſunt vt ex illis innoteſcat eorum quadratio.

Præaſſumptum. Reminiſcendum itaque ſectores habere eam proportionem, quam rectãgula ex ſemiarcu ſubtenſo, & radio, ſi ſint diuerſorum circulorum; dummodo arcus ſint ſimiles, quia eis ſunt æqualia, vt diximus propoſ. 4. h. agentes de circulo. Quadere ſectores diuerſorum circulorum decreſcentium, vel creſcentium augmento arithmetico, vel decremento, quorum arcus ſint ſimiles; ipſi quoque decreſcent, vel ſe augebunt eadem ratione, qua rectangula diametrorum, & arcuum.

V. g. ſector BAQ erit in fig. prop. 53. maior ſectore CPQ eodem incremento, quo augetur rectangulum ex dimidio arcu BA, & radio QA. Super rectangulũ ex dimidio arcu CP, & radio CQ. Siquidẽ arcus ſimiles ſunt inuicem, vt diametri ex 44. l. 6. Quare ita augebuntur arcus inuicem, & diametri, & ita ſemidiametri, & ſemiarcus, ſcilicet ſi QA ſit 8. partium, & arcus BA octaua pars ſui circuli ponatur 8. partium, diameter QL erit 7. partium, & PC arcus eius, octaua pars ſui circuli, erit quoque 7. partium, & ſi MQ ſit 6. erit arcus DM octaua pars ſui circuli conſtatus ex 6. partibus. Quare etiam rectangula ex ſemidiametro, & ſemiarcu æqualia ſectoribus: ſe reſpicient, vt ea rectangula quorum latera arithmetico decremento continuo decreſcunt, de quibus ſupra Tract. 28. Exp. 3. Siquidem deficiunt, horum quoque rectangulorum latera duplici decremento arithmetico. Quare ſe habebunt ad inuicẽ, vt rectangula AX, & AC, & cęt. vſq; ad LX, vt fig. pr. 13. tr. 28. videre poteſt. Quę ſunt facta ex lateribus arithmetico decremento deficientibus BA, & XG vſque ad CL. Oſtenſum autem ibi eſt prop. 16. Quòd hęc rectangula in ſeriem infinitam multiplicata, ſi ſimul ponantur ad rectangula integra, & maximo æqualia inuicem, & multitudine prędicta erunt, vt 2. ad 6. Rectangula igitur quoque ſectoribus ęqualia, quę deficiunt duplici decremento Arithmetico propter radium, & propter arcum deficientes erunt ad integra, vt 2. ad 6. ſi multiplicentur omni multiplicatione poſſibili, ſiquidem quoad vtrumque latus alterum æquale radio alterum æquale ſemiarcui deficiunt.

THEOR.

PROBL. I. PROPOS. LII.

Spiræ inſcribere, vel circumſcribere ſectores tot, vt ſint ſimul poſita omnia ſpatia inter ſpiram, ſectoremque concluſa minora qualibet data quantitate.

SIt data ſpira in fig. prop. ſequent. ACEHQ. & debeāt circumſcribi tot ſectores, vt ſpatium quod relinquunt, vt GAL, ſit minus quantitate Z. Redigatur quantitas Z in rectangulum ex tract. 19. prop. 3 & hoc fiat ſector QBA primus minor, quod facile fiet efficiendo triangulum circumſcriptum ABQ illi rectangulo ex Z effecto æquale; & ſector ipſe BAQ minor triangulo erit minor quoque, quàm Z. Dico, quod ſi reliqui ſectores æqualis anguli apud Q circumſcribantur æquali deficientes diminutione AL, & CM, vt diximus tract. 18. prop. 9 poſſe fieri, relinquent hi ſectores, vt BAQ. & cæt. quantitatem minorem, quam Z.

Probatur. Quia differentiæ BACL, & CMBE, & BMHI, & aliæ omnes æquant, vt patet BAQ ſectorem minorem, quam Z. Ergo omnes ſimul differentiæ erunt minores, quam quantitas Z, & tantò minores, ſi ſumamus differentias non quibus inuicem differunt, ſed quibus differunt à ſpira, vt BAC, CPE, EPH exteriores, vel interiores ACL, CEM, EHI.

THEOR. I. PROPOS. LIII.

Spiræ primæ circumſcripti ſectores habent proportionem ad ſectores circuli ſpiram comprehendentis maiorem; quàm 2. ad 6. & ſectores ſpiræ inſcripti habent minorem proportionem ad illos, quam 2. ad 6.

SIt ſpira ACEH vſque ad Q, quæ eſt prima, & circulus illam complectens, cuius radius AQ. Sectores circuli ſint octo; quorum vnus eſt BAQ; Sectores circumſcripti ſint BAQ, & CPQ, & EFQ, & cæt. Inſcripti LCQ, & MQE, & NHQ & cæt. Circumſcriptique erunt 8. cum maximo, at inſcripti, quia excludunt maximum, erunt ſeptem. Itaque vt in præaſſ. Arithmeticè decreſcentes ſectores ſunt ad ſectores non decreſcētes æquales numero,



vt rectangula ſimiliter decreſcentia TR, TV ad numero æqualia ſed non decreſcentia rectangula, ſed hæc decreſcentia ſunt magis, quam 1 ad 3. incluſo maximo, & minus eo excluſo maximo ad tot rectangula non decreſcentia æqualia. Ergo tales quoque erunt ſectores, & omnes octo ſectores decreſcentes arithmeticè incluſo maximo, vt BQA & CQP, & EQF. & cæt. erunt ad octo maximos, vt QBA æquales inuicem magis, quam 1. ad 3. at ſeptem ſectores CQL, MQE, & NHQ minùs, quam 1. ad 3. ad octo maximos, & ſic ſemper erit quocumque numero maiori ſectorum electo, & ſine vlla meta multiplicato.

THEOR. II. PROP. LIV.

Spatium à ſpira prima, & radio ad eius initium ducto concluſum eſt ad circulum ſuum, vt 1. ad 3.

SIt ſpatium ACEHQA ſpira ACEHQ, & radio QA clauſum. Dico, quòd hoc ſpatium ad totam planitiem circuli eſt, vt 1. ad 3. vel quod idē 2. ad 6.

* Probatur. Nam ſpatium ACEHQA prædictum non eſt maius, aut minus, quam ⅓ totius circuli. Ergo æquale erit. Primò enim ſi illud ſpatium eſt maius, ſit minus quātitate aliqua Z, & tot ſpiræ ſectores inſcribantur ex 1. h. donec ſpatiū inter ſpirā atcūq; inſcripti ſectoris clauſū ſit minus quātitate propoſita Z, qua ſpatium à ſpira, radioque concluſum ACL, & cætera omnia ſuperant tertiā partē circuli. Cum itaque ſpatium radio, ſpiraque clauſum ſit maius tertia parte circuli conſequenter ſpatium ſectoribus contextum CLQ, & MEQ, & cæt. erit maius tertia parte circuli, cùm ſpatium inter ſpiram, ſectoremque arcus interceptum quale vnum ex ipſis CAL ſit minus eo ſpatio, quo ſpatium ſpira, radioque clauſum tertiam partem circuli ſuperat. Quòd autem ſpatium ſectorum inſcriptorum, qui primo, & maximo excluſo BAQ incipiunt à ſectore CLQ habeat maiorem proportionem, quam 1. ad 3. ad circulum, id eſt tertia parte circuli ſit maius, hoc eſt contra præcedentem demonſtrationem, ideoque abſurdè eſſet minus, & maius ſectorum ſpatium tertia parte circuli. Si verò aſſeratur ſpira, radioque ſpatium concluſum eſſe minus, quam tertia pars circuli. Sit minus quantitate Z, & deinde tot ſectores circumſcribantur, & ſit adeo numeroſa multitudo ſectorum, vt ſpatium arcubus ſectorum, ſpiraque interceptum CBA, & PCE, & cæt. ſit minus quantitate Z. Spatium itaque ſectoribus clauſum minus erit tertia parte circuli, cum illud ſpatium interceptum inter ſpiram, & ſectorum arcus ſit minus ſpatio Z, quo ſpirale ſpatium minus eſt tertia parte circuli: Sed ſupra oſtenſum eſt ſectores circumſcriptos cum includant maximum conficere ſpatium maius, quàm tertia pars circuli. Ergo eſſet maius & minus, quod eſſe nequit.

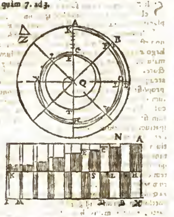
THEOR. III. PROPOS. LV.

Sectores inſcripti ſpiræ ſecundæ habent proportionem ad primum circulum minus quàm 7. ad 3. & circumſcripti ad eundem circulum maiorem proportionem obtinent, quàm 7. ad 3.

SIt ſpira in ſecunda ſua reuolutione AFCVHXLE; & inſcripti ſectores FEQ, & FCQ, & cæt. Dico hos ſectores habere proportionem ad ſectores tot numero, vt EQL, ſeu ad circulum primæ reuolu-

 tionis

tionis ET, cuius radius EQ, vt 7. ad 3. Sectores verò circumſcriptos, vt BAQ, & TDQ habere maiorem proportionem ad eundem circulum ET, quam 7. ad 3. Quod vt oſtendatur fiant rectangula illis inſcriptis æqualia BC, & DE, vſq; ad X necnon etiam circumſcripti æqualia rectangula HA, & BC, & DE, quę deficient, vt ſectores arithmetico decremento, & primum AB æquabitur primo ſectori BAQ. Cum itaque hæc rectangula decreſcentia ſe habeant ad rectangula XH, & cęt. primi circuli ſectoribus æqualia magis, quàm, vt 7. ad 3. vt oſtendetur incluſo maximo, & minus, quàm 7. ad 3 eo excluſo, ſequitur, quòd etiam ſectores illis æquales incluſo maximo ſe habeant ad ſectores primi circoli magis, quam 7. ad 3. & minus excluſo maximo, quàm 7. ad 3.



Oſtendendum itaque eſt rectangula AB, & BC, & cęt. decreſcentia ſe habere ad rectangula primi circuli ſectoribus æqualia magis, quam 7. ad 3. & rectangula BC, & DE, & cęt. excluſo maximo minus, quã 7. ad 3. Siquidem ſector BAQ maximus eſt ad ſectorẽ EQL circuli primi, vt circulus maior ad circulum minorem; ſed circulus ad circulũ eſt quadruplus cum ſit ſupra duplò maiorem diametrum, & ideo duplicatam diametrorum habeat rationem ex prop. 2. lib. 6. duplicata verò proportio 2. ad 1. eſt 4. ad 1. ſed etiam rectangulum AB ad HX ſe habet, vt 4. ad 1. Ergo cùm rectangulum AB æquetur ſectori BAQ ex conſtructione etiam rectangulum HX, ſeu HN æquabitur ſectori EQL circuli primi. Conſiderandum autem eſt, quòd in tota progreſſione decreſcente HX, BL, & DS, & cæt. vſque ad T perſeuerant integra. Deinde rectangula nigra AH, & LN, & EF, vel HA, LD, & cęt. perſeuerantia eiuſdem altitudinis ex pr. 12. Tr. 28. de progr. planitierum erunt dimidium rectangulorũ omnium æqualium BL, & DS, & aliorum vſque ad X. Sic eorum complementa nigra HA, & NL, & CS, & aliorum vſque ad K ipſis æqualia ex prop. 35. lib. 1. quapropter erunt cum alijs rectangulis nigris, complementiſque ſuis æqualia rectangulis albis BL, & DS, & cęt. quæ æqualia perſeuerant; ſiquidem duo dimidia integrum æquant. Vnde ſi ſumamus omnia ſimul rectangula integra XH, & BL, & cęt. vſque ad X, & complementa vtraque nigra decreſcentia HA, & LD, ſic AH, NL, & CS vſq; ad X erunt totę planities duplæ planitierũ XH, BL vſq;

ad T, quæ integræ perſeuerant, ſcilicet, vt 2 ad 1. vel vt 6. ad 3.

Quia verò HN, & LC, & SV, & cęt. vſque ad T duplici decremento arithmetico hinc, & inde quo ad vtrumq; latus deficiant. & primum, maximumque HN demonſtratum eſt æquale maximo ſectori ELQ, & ideo maximo rectangulo ſibi æquali præc. propoſ. decrementa omnia ex Theſi ſunt æqualia decrementis rectangulorum præc. propoſ. rectangula LC vſque ad KQ erunt ſingula ſingulis prædictis æqualia; Ideoque ad tot numero rectangula integra HN ex prop. 19. Tract. 28. ſe habebunt magis, quam 2. ad 3. incluſo maximo HN vtrinq; Propterea que cum rectangula, quę integra perſeuerant, & deficientia complementa ſe habeant ad integra tantum, vt 6. ad 3. ſi iſtis addes rectangula HN cum deficientibus LC vſque ad KQ erunt ad rectãgula integra tot numero HN, vel HX, vel, DS vſq; ad T magis, quam 7. ad 3. ex prop. 32. Tract. 28. de propor. rationũ. Verùm ſi demas ab vnaquaque ſerie maximum ſcilicet AB, & HA, & HB, & HN, ſeries LC vſque ad KQ deficiens ad ſeriem non deficientem BL, & DS conflata ex pari multitudine terminorum erit minus, quàm 7. ad 3. & ideo cum ſeries rectangulorum prædictorum ęqualium BL, & complementorum nigrorum, ſcilicet tota rectangula HN, & HA, & cęt. ſe habebit ad ſeriem rectangulorum non deficientium XH, & aliorum minus, quam 7. ad 3. quòd remanſerat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc eſt, quod cum ex 2. lib. 6. circuli inter ſe ſint, vt ex diametris quadrata, quod ſi ponamus primum circulum 3. cuius radius VQ ſecundus erit 12. nempe vt quadratum EQ ad quadratum QA. Vnde rectangula circumſcripta ſpirę ſecundę ſe habebunt ad circulum eundem magis, quam 7. ad 12. & inſcripta minus, quam 7. ad 12.

THEOR. IV. PROPOS. LVI.

Circulus ſecundæ ſpiræ eſt ad ſpatium ab ipſa ſpira, ſemiradioque clauſum, vt 12. ad 7.

Sit ſpatium EA recta, & ſpira ſecunda ACHEE concluſum. Dico, *quòd circulus, cuius radius* AQ *ad hoc ſpatium ſe habet, vt 12. ad 7.*

* Probatur. Nam ſectores circumſcripti, & decreſcentes BAQ, & FCQ & cęt. vſque ad LEQ oſtenſi ſunt ex Coroll. pręced. propoſ. in maiori proportione maximum BAQ includendo, quàm 7. ad 12. & inſcripti deficientes KQF excludendo maximum in minori proportione, quam 7. ad 12. demonſtrati ſunt ad ſectores maximus numero æquali multiplicatus. Si ergo ſpatium ſpirale non ſit ad circulum, vt 7. ad 12. erit ad quid minus, aut maius. Maius itaque ſit primo, quam 7. partes, in quas circulus diuiſus eſt ſpatio Z. Et tot inſcribantur ſectores donec omne ſpatium, vt KVA, & FCF, & cęt. quòd inter arcus ſectorum, & ſpiram intercluditur ſit minus, quàm ſpatium Z. Ergo erunt omnes iſti ſectores maiores, quam 7. partes ex 12. in quas circulus diuiſus eſt; quia à ſpatio ſpirali maiori, quam partes 7. illarum, in quas circulus diuiſus eſt in ſpatio Z minus differunt, quam 7. quod eſt abſurdum; cum oſtenſum ſit ſectores inſcriptos

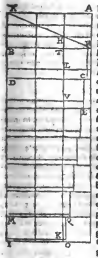
ſcriptos ad totum circulum ſe habere minori in proportione, quam 7. ad 12.

Si verò aliquis dicat eſſe minus ſpatium ſpirale, quam partes 7. & ijs, in quas 12. circulus ſuus diuiſus eſt. Circumſcribantur tot ſectores donec omne ſpatium, quod arcu ſectorum, & ſpira clauditur ſit minus, quàm ſpatium Z: tunc ſectores circumſcripti erunt minores, quàm 7. partes ex ijs 12. in quas circulus partitus eſt, cum minus differant à ſpatio ſpirali minori, quam partes 7. minori differentia, quam Z ſpatium, in quo ſpirale ſpatium partibus 7. minus euadit: Hoc autem eſſe nequit cum ſectores circumſcripti oſtenſi ſint obtinere proportionem maiorem ad 12. quàm 7. ad 12. Ergo cum non poſſit eſſe, aut maius, aut minus ſpatium ſpirale AICVNXBA; quam 7. partes ex partibus 12. circuli, erit ad circulum, vt 7. ad 12. & *conuertendo* circulus ad ſpirale ſpatium, vt 12. ad 7.

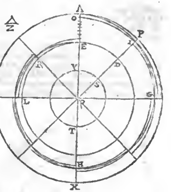
THEOR. V. PROPOS. LVII.

Sectores inſcripti tertiæ ſpiræ habent minorem proportionem ad primum circulum, quam 19. ad 3. & circumſcripti maiorem proportionem, quàm 19. ad 3.

SIt ſpira in tertia circumuolutione AIUN, vſque ad N, & diameter circuli ſpiram comprehendentis QA triplus diametri primæ ſpiræ TY; erunt circuli in ratione duplicata ſuarum diametrorum; Ideoque circulus tertiæ ſpiræ QAX erit ad circulum primæ ſpiræ TY, vt 9. ad 1. ex 41. lib. 6. Quare ſinguli ſectores ſimiles eius ad ſectores circuli TY primæ ſpiræ ſe habebunt, vt 9. ad 1. Fient itaque rectangula AB, BC, & DE, & cęt. æqualia ſectori PAQ tertię ſpirę, & ſectoribus alijs deficientibus, & rectangulum primũ AB ſe habeat ad rectangulũ HN, vt 9. ad 1. eritque rectangulum HN ęquale ſectori maximo ſimili circuli YQS primę ſpirę cumque cęteri LC, & VE, & cęt. deficiant æqualibus decrementis arithmeticis ſecundum vtrũque latus, ac rectangula primæ ſpirę, vt in fig. 2. pr. 53. hinc ſingula ſingulis erunt æqualia; Quamobrem ad rectangula æqualia, & non deficientia incluſo maximo vtrinque HN magis erunt, quam 1. ad 3. at excluſo maximo, minus quàm 1. ad 3.



Iſtis itaque rectangulis decreſcentibus adde pari numero rectangula, quę eadem perſeuerent XN, & NL vſque ad KM, & cęt. quæ ſe habent, ad HN, vt 4. ad 8. & inſuper rectangula BH, & LD, & alia, quæ decreſcunt ſecundum vnicum latus decremento arithmetico, quę etiam dupla ſunt rectanguli HN; & erunt ad integra HN, vt 1. ad 2. ſiquidem ob decrementum arithmeticum pro dimidio deficiunt ex prop 12. Tract. 7. & ideo efficiuntur ei æqualia, quibus adde æqualia complementa, ſimiliterque deficientia HA, & cęt. vſque ad KQ, & cum prędictis erunt dupla ipſorum, ſcilicet, vt 2. ad 1., & cum rectangulis quadruplicibus XH vſque ad MK erunt, vt 6. ad 1. ſeu, vt 18. ad 3. Adde itaque inſuper rectangula duplici arithmetico decremento deficientia HN, & LC, & cęt. vſque ad KO, quæ addito HN ſe habent magis, quam 1. ad 3.



Ideoque tota ſeries rectangulorum XN, & BC, & DE deficientia incluſo maximo XN, cui ne ſinguli termini prędictis rectangulis partialibus conſtant, erit ad rectangula HN æquali numero ſumpta non deficientia magis, quàm 19. ad 3. At ſi à ſingulis ſeriebus excludas maximum, & ideo rectangulum XN, erit tota ſeries rectangulorum BC, & DA vſque ad MO ad totam ſeriem rectangulorum æqualium inuicem, & multitudine prędictis HN minùs, quàm 19. ad 3. Cum itaque ſectores circumſcripti ſinguli ſint æquales ſingulis rectangulis; ſiquidem ita deficit rectangulum, vt ſector quilibet circumſcriptus ex hypotheſi, & æqualibus decrementis, & ſectores circumſcripti includant maximum PAQ, ſectoreſque circuli primæ ſpiræ SYQ, omnes ſint æquales oſtenſi rectangulis HN ęqualibus inuicem; Sequitur, quod ſectores PAQ, & cæteri circũſcripti deficientes ſe habeant ad ſectores circuli YSQ primę ſpirę magis, quã 19. ad 3. Sectores verò inſcripti OIQ, & ext ęquales rectangulis BC, & DE & cęt. maximũ excludentes minus, quam 19. ad 3. ad ſectores circuli primę ſpirę SYQ, & cęteris ęqualibus, & qui numero ſectoribus deficientibus reſpõdeãt.

COROLLARIVM.

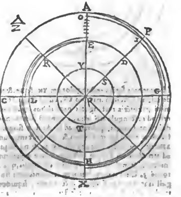
CIrculus tertiam ſpiram comprehendens iuxtà Coroll. prop. 21. lib. 6. eſt ad circulum primæ ſpiræ, vt 27. ad 3. cum ad illum obtineat diametri proportionẽ duplicatã 9. ad 3. Quamobrem cum rectangula ęqualia ſectoribus circumſcriptis tertiæ ſpiræ ſint ad rectangula omnia æqualia ſectoribus primi circuli, vt 19. ad 3. erunt ad ſectores æquales tertij circuli, & ideo ad ipſum circu-

ſum, vt 19. ad 27. & paulò empliùs, quis incluͤdunt maximum. At inſeriptis ſectoribus æqualia rectangule ad rectangule æqualia ſectoribus primi circuli, quia ſont minùa, qoàm 19. ed 3. & ideo quoque ſectores iuſcripti ſectoribus circuli primi æqualibus ſint minùs, quam 19. ad 3. erunt ed ſectores omnes tertij circuli, & ideo ad ipſum tertium circulum mſuùs, quam 19. ad 27.

THEOR. VI. PROPOS. LVIII.

Spiræ tertiæ ſpatium comprehenſum eſt ad circulum eam claudentem, vt 19. ad 27.

PRobatur eodem modo ex propoſ. 54. b. Nam ſpatium ſpire coucluſum ABHLEA non eſt meius, aut minus, qoàm 19. partes, quarum circulus eam comprebeudens continet 27. Ergo erit ad circulum vt 19. ad 27. Nem ſi poteſt eſſe maiue ſit maius quantitate Z, & ſectores Inſcripti adeò multiplicentur, vt propoſ. 5 e. Tract. b. vt ſpatium AIO, & alia omnia iuter ſpirem, ercumque ſectoris internum coneluſe ſimul ſumpta ſint minora,



quantitate Z. Qole iteq; ex aduerſarijs ſpatiū ipsū ſpirele eſt maius partibus 19. erit etiam multitudo ſectorū maior, quā partes 19. ex 27. circuli partibus, cum ſectores differant mlnùs à ſpatio ſpirali, quā quod ipſum ſpatium ſpirale differt à partibus circuli 19. Hoc eutem eſſe nequit; eum inſeripti ſectores ſint minùa, quàm 19. partes circuli maximi partibos 27. conſtantis, vt propoſ. præced.

Si verò affirmetur, quòd ſpatium ſpirale ſit minùs, quàm pertes 19. quarum circulus includens eſt 27. Sit defectus ſpatiū Z, & tot circūſcribātur ſectores, vt ſpatia omnia, vt IPA inter ſpiram, arcuſq; ſectorum ambiētiū intercepta ſimul ſumpte ſint minus, quam ſpatium Z, tunc ſectores, qui minus differunt à ſpirali ſpatio minori partibus 19. quàm partes 19. differant ab ipſo ſpatio ſpirali erunt minora, quàm pertes 19. vnde ſe habebunt ad circulum claudentem minùs, quàm 19. ad 27. contra oſtenſa propoſ. 57. h. Cum itaque ſpirale ſpatium, nec maius eſſe poſſit, nec minus, quam 19. ad 27. eam proportionem conſequetur quam 19. ad 27. quod demonſtrandum erat.

THEOR. VII. PROPOS. LIX.

Spira prima ad ſecundam eſt, vt 1. ad 6. & ſecuda verò ad tertiam ſe habet, vt 1. ad 2. & ſic tertia ad quartam, & cæt.

PRobatur. Nam repetita figura propoſ. 55. h. ſit ſpatium primum ſpirale QS, & ſecundum ACHXBA. Dico itaque, quòd primum ſpatium ſpirale ad ſecundum ſe habet, vt 1. ad 6.

Probatur: Nam prima ſpira eſt ad ſuum circulum, vt 1. ad 3. hic verò ad circulum ſecundum, vt 3. ad 12. Quare prima ſpira ſe habebit ad circulum ſecundum, vt 1. ad 12. ſecunda ſpira eſt ad circulum ſuum, vt 7. ad 12. Proptereaque cum illæ proportiones habeant eoſdem terminos ex prop. 7. de propor. Tract. 17. ſe habebunt ad inuicem, vt fundamenta 1. ad 7. Sed ſpatium ſpiræ 7. comprehēdit ipſam ſpiram minorem cum ſuo circulo; clauditur enim ſpira ACHXB, & portione radij SA, ideoq; ſubducta ſpira prima SQ remanebit ſecunda 6. Vnde prima ſpira ſe habebit ad ſecūdam, vt 1. ad 6.

Probatur etiam ſecunda pars. Nàm tertia ſpiræ habet proportionem ad ſuum circulum, quam 19. ad 27. & circulus iſte ad primum eſt, vt 27. ad 3. & circulus primus ad ſpiram, quam claodit eſt, vt 3. ed 1. Ideo ex *æquo* ſpira tertia ad primam erit vt 19. ad 1. Cum ergo tertia ſpira ſecunda, & prime ſit 19. ablata prima erit 18. & ſecunda, quæ eſt 7. remenebit 12. Quare habebit ſecunda ſpira ad tertiam proportionem, quam 6. ad 12. nempe ſubduplam.

Quòd verò reliquę ſpirę minores ad immediatè maiores ſubduplam proportionem ſeruent, patet. Nam iuxta modū probandi adhibitū antecedentibus propoſitionibus quarta ſpira ſe habebit ad ſuum circulum, vt 43. ad 48. ablata verò prima ſecunda, & tertia ſpira, quod ſpatium eſt 19. partium remanebit ſpira quarta 24. ad tertiam ſpiram quæ eſt 12. nempe 2. ad 1. vel conuertendo tertia ad quartam, vt 1. ed 2. & ſic de reliquis.

COROLLARIVM I.

VNde cum noueris circulum, in quo prima ſpira deſcribitur, facile inuenies areę cuiuſlibet ſpiralis quantitatem. Nam V.g. ſit quinta ſpira, & circulus primæ reuolutionis ſit 35. partium. Inuenietur primo proportio reuolutionis quintæ ad primum circulum, qui ponatur 3. Itaq; iuxta tradita, quia vt eſt ſector ad ſectorem, vt circulus ad circulum, & rectangula ſectoribus æqualia, & pariter progreſſiones eorum; ideo rectangulum æquale ſectori ſpiræ quintæ ad rectangulū æquale ſectori ſpirę primę ſe habebit, vt 25. ad 1. vel vt 75. ad 3. cum latera ſe habeant, vt 5. ad 1. Ideoq; ſi in fig. 1. pr. 57. ponas latus ſectori quinti circuli erit partiū 25. ad 1. vel 75. ad 3. rectāgulum verò XH, cuius latus erit, minus vnica parte erit, vt 16. ad 1. ideoque triplatum erit vt 48. ed 3. rectaugule verò HS, & HA deficientia pro ſuo dimidio ſe habebunt, ve baſes, nempe quodlibet, vt 4. ad 1. & ſimul, vt 8. ad 1. & quia deficiunt pro dimidio ruſus, vt 4. ad 1. & ideo, vt 12. ad 3. & cū non deficientibus, vt 60. ad 3. ſi verò addas rectāgula HH, quę deficiunt circuli ſui $\frac{1}{3}$: ideo omnia ſimul ſe habebunt ad circulum primæ ſpirę, qui ponitur 3. vt 64. ad 3. At etiā inpente

uenta pr oportio primi circuli ad quintam ſpiram. Quę ob tenti dices adhibendo regulam proportionum, ſi 3. dant 61. quid 35. ideoque calculus prodet 711 $\frac{2}{3}$ pro quintæ reuolutionis ſpatio poſito primo circulo partium 35.

THEOR. VIII. PROPOS. LX.

Spiralis ſpatij ſectio eſt ad ſuum ſectorem maximum circuli maximi comprehendentem eam ſectionem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus ſimul, & triens quadrati ex earundem differentia ad quadratum diametri circuli prędicti maximi comprehendentis.

Sit datum ſegmentum ſpirale AGB, quod cōcludat ſpatium IAB; Dico, quod hoc ſpatium ad ſectorem comprehandentem ALC habet eam proportionem, quam rectangulum ex IB, & AI, vel IC æquali vnà cum quadrato ex differentia AC ad quadratum ex diametro IA, vel IC.

Probatur. Nam ſi fiant rectangula deficientia ęqualia ſectoribus ſingulis inſcriptis, & deficientibus omni poſſibili multiplicatione multiplicatis AIL, DEI, EGI, & HIB, & cæt. hęc rectangula erunt ad rectangula æqualia quantitate ſectoribus non deficientibus, & inuicem, & numero prędictis deficientibus ex prop. 19. tract. 28. Cor. vt rectangulum ex maximo, à quo incipit, & minimo latere, ad quem peruenit propreſſio cum triente quadrati ex differentia eorundē laterum ad rectangulum totum maximum. Ergo etiam ſectores ipſi ſimiliter multiplicati, & iiſdem rectangulis ſinguli ſingulis æquales arithmetico decremento defficientes, ſed non vſque ad vltimum ſui ab A vſque ad B, & ob omnem eorum multiplicationem omnimodam poſſibilem, ſpiram equantes, habebunt ad ſectores integros equales numero prędicto, & quantitate inuicem eandem proportionem, eruntque, vt rectangulum ex AI, & IB maximo, ad quem terminat cum triente quadrati ex AC differentię ad rectangulum ex AI, & IC hoc eſt quadratum AI.



TRAC-

TRACTATVS XXXI.

De Tranformatione ſuperficierum corpora circumueſtientium.

SVperficies, quæ corpora circundant aliæ ſunt curuæ, aliæ planæ, de planis ſupra ſatis eſt actum. Vnde breuiter ab hoc nos expediemus negotio. Curuarum ingenioſior, difficiliorque ſpeculatio. Quapropter in ea magis immorabimur datorum corporum regularium, rotundorum, vel ſemirotundorum ſuperficiebus planas æquiualentes, ſeu proportionales indigitando, & quibus modis poſsint, & partiri, & augeri, & minui proportionaliter; & in alias operationes mathematicas cogi.

EXPENSIO I.

De transformatione ſuperficierum corporum planis contentorum.

TRansformatin ſuperficierum planarum, quæ corpora ambiunt, non differt à transformatione ſuperficierum planarum de quibus egimus expenſ. 1. tract. 19. proptereaque ſufficiet eas indigitaſſe: ſed vt ea, quæ dicentur expeditiùs capiantur accipe corporum regularium planis contentorum ex 11. lib. Euclid. definitiones, quæ nondum hauſtæ ſunt.

DEFINITIO I.

PYramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur ab vno puncto ad id m planum terminantia.

Videlicet ſi trea ſuperficies, vt in fig. prop. 2. BAC, ACH, & BAH conueniant à plano BCH, quod eſt baſis in punctum A hoc corpus pyramis dicetur, quæ poteſt obtinere, nedum tres ſuperficies, quæ in vnū punctum A conſpirent: ſed etiam quatuor, & quinque, prout baſis BHC latera multiplicat.



DEFINITIO II.

PRiſma eſt figura ſolida planis ſuperficiebus parallelis contenta, quarum duæ, quæ baſes vocantur, ſunt æquales, & ſimiles.

Itaque Priſma eſt velut figura ſequentis prop. FD, cuius baſes AD, & FH ſunt æquales, & ſimiles; poteſt verò Priſma obtinere præter baſes tres, aut quatuor, aut quinque ſuperficies, prout altera baſium multiplicat latera, ex quibus ſuperficies laterales conſurgunt. Quia verò latera baſium correſpondentia ſunt æqualia, & parallela, patet, ſuperficies laterales parallelogrammas eſſe.

PROBL. I. PROPOS. I.

Omnes Priſmatis ſuperficies menſurare, & in vnicam planam ſuperficiem redigere.

HOc faciliter efficitur. Nam quoad menſurationem, cùm omne priſma ſuperficiebus parallelogrammis conſtet, ſingulæ iuxta dicta tract. 29. ex prop. 3. per mutuum laterum eas ambientium ductum inuenientur; Propter quod cognitis tribus lateribus cuiuſcumque ſuperficiei priſmatis, nempe altitudinem AB 10. palmorum, & latitudinē AE 3. palmorum, Area AC multiplicatis inuicem lateribus 3. per 10. innoteſcet, quæ erit 30. palmorum quadratorum; Sic cognito latere DI 4. palmorum cum iam habeamus notum latus AB, ſeu CF, obtinebimus quoque aream DC 40. palmorum ex mutua eorum multiplicatione: Area verò DA ex notis lateribus DI, & AI 12. palmorum prodibit: Itaque tres ſuperficies ſimul erunt 82. palmorum quadratorum, & quia aliæ tres reſtant iſtis ſingulæ æquales, duplicato numero 82. erunt omnes 164. palmorum quadratorum.

Quoad verò transformationem facilè fiet ex Expenſ. quarta de augendis, & minuendis fig. tract. 29. Si vni ex ipſis ſuperficiebus cæteræ omnes addantur.



PROBL.

PROBL. II. PROPOS. II.

Pyramidis areas inuenire ex notis lateribus, & in vnicam planam ſuperficiem componere.

FAcilis quoque euadit menſuratio arearum alicuius pyramidis, ex notis lateribus. Nam cum ſingulæ laterales ſuperficies V. g. BAC ſint triangula; baſes verò ſint ſuperficies planæ vt ACH vel triangulares, vel pluribus lateribus conſtantes ex dict. prop.17.& 19.Tr.29.Planimetrici,earum menſuratio dignoſcitur, ſi ſingula triangula, ſeu ſcalena, ſeu Iſoſcelia ad menſuram redigantur, vt ibi docemus, & ſi baſis ſit polygona inuenietur eius area iuxta dicta propoſ.29.Tract.20. eiuſdem. Quaderè collectis tandem in vnam ſummam omnibus areis, tum triangulorum lateralium,tum baſis ſubtenſæ, conficient menſuram areæ totam Pyramidem ambientis.

Ad ſecundam propoſ. pertem operi conſignendam videntur expenſ.4. Tract.29. de augment. & diminutione fig. Ibi enim docemus modum reuocandi plurima triangula diuerſę altitudinis in vnicum triangulum. Quapropter ſi omnia triangula Pyramidis datæ in vnicum transferantur, & baſis quoq; multilatere in triangulum iuxta dicte pr. 20.tract.29.de transformatione fig.transfundatur, & hoc triangulum quoque cum alijs in vnam ſuperficiem reſtituatur, hęc ſuperficies, ſeu triangularis ea ſit, ſeu quadrata erit æqualis ſuperficiei pyramidem circumueſtientis.

PROBL. III. PROPOS. III.

Omnium corporum regularium dato vno latere areas inuenire.

QVoniam quodcumque corpus regulare conſtat ſuperficiebus vnius tantum generis V. g. triangulis quatuor, vt pyramis, aut octo,vt octaedrum, aut viginti, vt Icoſaedrum, vel ſex quadratis, vt cubus, vel duodecim pentagonis, vt duodecaedrum; Ideo cognito vnico latere,per ea, quæ dicta ſunt prop.19. Tract.20.tota ſuperficies vnius trianguli,vel quadrati, vel pentagoni agnoſcitur, & cum omnes vnius cuiuſcumque generis ſint inuicem æquales,ideo cognita vna, omnes alię patebunt. Quare per numerum ſuperficierum V. g. ſi ſit pyramis per quatuor, ſi cubus per ſex, & cęt. totam ſummam ſuperficierum corpus regulare circundantium component. Vt verò latera harum figurarum inueniantur, ſi fortè aliunde non pateant, docebimus, cùm de ſolidis agemus.

COROLLARIVM.

IDem tandem pręſtandum in omni corpore, cuiuſcumque generis, & irregulari, dummodo ſingulorum planorum, quibus conſtat latera noueris; eadem enim eſt ratio de omnibus.

COROLLARIVM II.

SI verò cupias ſuperficies illas iuxta datam proportionem augere, vel minuere, idem agendum in ſingulis, quod, & de ſuperficiebus planis prop.c3.tract.19. Et deinde omnibus ſimul conglobatis, & in corporis ambitum redactis, ſeu factis ſuperficiebus alicuius corporis illis adauctis æqualibus obtinebimus corpus; quod ſuperficies conſequetur iuxta datam proportionem maiores, vt autem conſtituatur corpus regulare, id ſuo loco reſeruamus, cum de corporibus.

EXPENSIO II.

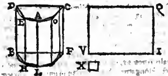
De ſuperficie Cylindrica.

CYlindri ſuperficies eſt radix,primaque origo, ob quam cęterę ſuperficies rotundæ tetragoniſmo ſubijciantur, & ad aliquam figuram planam reuocentur,ideo hic in primis de ea agendum, vt eſt ſuperficies cylindri circularis.

THEOR I. PROPOS. IV.

Superficies Cylindri recti eſt æqualis ex axe, & peripheriæ linea æquali conſtituto rectangulo.

SIt Cylindrus CDFB: Dico, quod, ſi fiat rectangulum,cuius altitudo IQ, æquet altitudinem DE, & latus IV peripheriam CAD; hoc inquam rectangulum ſuperficiei Cylindricę æquabitur. Quod ſi ab aliquo negetur;& ſuperficies FLBCAD



Cylindrica non æquat rectangulum QV; erit, aut maior, aut minor ipſo rectangulo QV. Sit ergo primo maior, differentiaq; ſit quantitas X,quam ſi non haberet eſſet rectangulo QV æqualis, ideo diceret rectangulo FD eandem proportionem,quam eidem dicit rectangulum QV ex prop. 7. lib. 5. Inſcribâtur itaque tot rectangula BE, & HA, & cęt, donec ſit minor differentia inter ipſa, & ſuperficiem cylindricam, quam quantitas X, dicent itaq; ad quadratum FBCD maiorem proportionem,quam rectangulum QV, quia minus differunt, à ſuperficie maiori cylindrica.

Verùm etiam dicerent minorem proportionem omnia rectangula inſcripta DH, & EL, & cęt. ad rectangulum CB, quam QV, ergo dicerent maiorem, & minorem proportionem ad FD rectangula inſcripta, quam QV, vnde ex prop.8. lib.5. eſſent maiora, & minora ipſo rectangulo QV, quod eſt abſurdum.

Id autem oſtenditur,nam rectangula inſcripte DH,

& EL

& EL, & cęt, cum ſint eiuſdem altitudinis, ac rectang QV ſe habebunt ad inuicem, vt baſes ex 16. ſed baſes, vtpote inſcriptę ſunt minores peripheria, & ideo æquali peripheriæ latere IV. Ergo etiam rectangula inſcripta HB, & EL, & cęt. erunt minora, quàm QV. Vnde ad ca rectangulum minorem proportionem dicerent. Itaque diceret proportionē ad rectangulū ca ſimul, & maiorē, & minorē. q̄ eſt impoſſibile. Quod ſi dicatur Cylindrica ſuperficies minor rectangulo QV ſit differentia quantitas X. Circumſcribanturque rectangula FO adeo multiplicata, vt differat eorū ſuperficies à ſuperficie Cylindrica minùs, quàm quantitas X; ideo quia eſt minor Cylindrica ſuperficies rectangulo QV ex aduerſarijs, minor quoque differentia ab ipſa, dicent minorem proportionem ad rectangulum BFCD, quàm rectangulum QV; quia minus differunt à minori ſuperficie cylindrica, ſed hæ rectangularum circumſcriptorū baſes, vt OC, vtpote circumſcriptę ſimul sūt maiores peripheria Cylindrica, & ideo latere IV, quare cum rectangula DF obtineant eandem altitudinem erūt ſimul maiora rectangulo QV, cū ſe referant vt baſes; quare ad rectangulū FACD dicent maiorē proportionem. Ideſt maiorem ſimul, & minorē, quod impoſſibile eſt. Cum ergo ſuperficies Cylindrica non poſſit eſſe, aut maior, aut minor rectangulo QV; erit æqualis, quod vult propoſ.

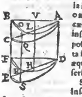
THEOR II. PROP. V.

Cylindri etiam obliqui ſuperficies dummodò baſes parallelas habeat, eſt æqualis parallelogrammo eiuſdem altitudinis, ac eius axis, & cuius alterum latus ſit æquale circumferentiæ alicuius plani ſecantis, ad axem recti.

SIt Cylindrus ACDE obliquus quoad baſes AQC, & DSE; Sitque circulus DRF rectus axi LH. Dico eius ſuperficiem eſſe æqualem rectangulo altitudinis HL, & cuius alterum latus æquet peripheriam DRF plani ad axem recti ſecantis cylindrum.

Prolungetur cylindrus in B, ſitque linea CB æqualis lineæ BF, quà planum obliquum maximè à recto elongatur. Nam dico in primis ſuperficiem DRFESD eſſe æqualem ſuperficiei AOBCQA.

Ad quod oſtandendum, inſcribantur rectangula in æqualibus arcubus AF, & OB, & cæt. vt ſunt OBQC, & cætera iſta erunt æqualia, & ſi inſcribantur donec inſcribi poſſunt ſucceſſiuè, quę inſcripta ſunt in AOBCQ ſemper erūt æqualia ijs, quæ in DRFES inſcribuntur.



Sed omnia rectangula, quæ inſcribi poſſunt æquant totam ſuperficiem, & ſi adhuc daretur locus non omnis poſſibilis multitudo eſſet inſcripta. Ergo ſuperficies AOBCQ æquatur ſuperficiei DRFR.

Quod verò rectangula inſcripta ſemper perſeuerent æqualia, dummodò æqualibus arcubus planorum, rectorum, ſecantium inſcripta.

Probatur linea QR ob parallelismum ex Theſi planorum æquatur lineæ AD, & pariter linea QS ob idem parallelismum æquatur lineæ AD, cūm ergo vni tertiæ AD lineæ OR, & QS æquentur; inuicem quoque erunt æquales, & ſic dicas de lineis BF, & CE; Quare quadrangula QCSR, & OBRF inter eaſdem parallelas, & ſuper æquales baſes erunt æqualia. Ablato itaque communi QCRF; reſtabunt æqualia trapezia inſcripta OBQC, & RFSE, & idem dicas de alijs quibuſcumq; inſcriptis: Vnde patet etiam ſuperficies cylindricas omnem multitudinem inſcriptorum rectangulorum ęquantes, eſſe inuicem æquales.

Quadropter ſi cylindrus obliquus DBAC differt à recto DFAB æquali ſuperficie, ita quòd quantùm addit ſuperficies DFB tantùm deficiat alteri parti ACB, erit itaque ſuperficies cylindri recti ABDF æqualis obliqui ſuperficiei ACDE. Sed illa oſtenſa eſt æqualis rectangulo ex altitudine AD; & peripheria AOB. Ergo, & cylindrus obliquus talis rationis erit. Linea autem AD æquatur axi HL.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Fruſti Cylindri acuta ſuperficies eſt æqualis ſuperficiei dimidiæ recti Cylindri.

SIt acuta ſuperficies, & Cylindri ſegmentum à à baſi obliqua ad axem, & altera recta, vt eſt ALC factum, & perficiatur cylindrus rectus AHB, LMC. Dico ſuperficiem acutam ALC eſſe dimidium ſuperficiei AHB, LMC.

Inſcribatur rectangulum APLR, & BHTC ſuper æquales arcus HB, & LR baſis ad axem rectæ. Aſſero in primis hæc rectangula, & quęcumque alia ſimiliter inſcripta eſſe inuicem æqualia. Agatur planum HR per latera RP, & TH, ſecabitque planum APTC, & ſectio erit linea TP, quæ diuiſa per medium in V ducatur OI per V parallela baſibus.



Erunt itaque triangula PVO, & VIT æquiangula in plano HR, ſiquidem anguli apud I, & O recti ſunt, & apud V ſunt anguli ad verticem: quare cum ſint æquiangula ex 17. lib 1. Elem. & baſis VP baſi VT ſit æqualis reliqua latera ex 4. lib. 6. erunt in eadem proportione, ac qualitatis: Quare TI æquabitur lineę OP. Et quia OR ęquatur lineę IH, quod punctum V medium ſit inter H, & R additis æqualibus TI, & OP remanebunt æquales RP, & TH. Quare etiam rectangula trapezia æqualibus lateribus, & eiuſdem altitudinis contenta erunt æqualia. Siquidem HB, & LR ęquales, lineis BO, & LA ſunt rectangulę. Cum ergo omnia trapezia, quæ ſucceſſiuè inſcribi poſſunt in ſuperficiebus acutis cylindri ALCB ſint æqualia, & illa omnia poſſibili multiplicationa multiplicata æquent ſuperficiem cylindricam; etiam cylindricę ſuperficies acutę inuicē erunt æquales. Vnde totius LACB ſuperficies cylindrica LAC dimidiū erit.

COROLLARIVM.

ELicitur fruſti Cylindrici acutam ſuperficiem eſſe æqualem rectangulo ſub dimidia CB æqualis axi, & circumferentia AHB, vel dimidia circumferentia AHB, & tota perpendiculari ac cylindri recti, in quo eſt. Ratio eſt, quia hæc ſunt æqualia dimidio rectanguli ex altitudine, & peripheria

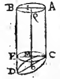
phericæ lineæ æquali comprehenſi toti ſuperficiei cylindri recti æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Cylindri ſuperficies ſine baſibus, cuius baſes non ſint parallelæ, ſed altera ſit circulus, eſt æqualis parallelogrammo, cuius unum latus ſit æquale circulari ambitui; alterum verò ipſius axi.

Sit Cylindrus ABCD, cuius baſes nequaquam ſint parallelæ. Dico eius ſuperficiem eſſe æqualem rectangulo ſub axe OQ, comprehenſo, latere alio ex linea æquali circumferentiæ facto.

Probatur. Nam ducta CE parallela baſi AB erit ſuperficies cylindri CAAE ſine baſibus æqualis rectangulo comprehenſo ſub axe MI, & circumferentia AQSA, ex propoſ. I. h. Item ex Coroll. præced. CED portio erit æqualis rectangulo eiuſdem longitudinis, quæ eſt ambitus. Sed ſub dimidia ED, ſc. ſub axe MO comprehenſo. Ergo tota ſuperficies exclusis baſibus cylindri AACD, erit æqualis rectangulo longitudine æquali peripheriæ baſis AQAA, & axi ID contento.



COROLLARIVM I.

Hinc ergo obtines modum menſurandi omnes cylindros; quorum baſes ſint circuli, ſiue illæ ſint baſibus parallelis, ſiue non. Nam multiplicata peripheria cum axe dabit rectangulum ſuperficiei cylindricæ exclusis baſibus æquale. Quadratio verò baſium eſt eadem, ac circulorum, quam docuimus ſupra prop. 2. tract. 30.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam euenit omnem ſuperficiem cylindricam eſſe æqualem quadrato, quod ſit à media proportionali inter lineam æqualem peripheriæ, & axem ipſius. Nam ex propoſ. 17. lib. 6. quadratum tale eſt æquale rectangulo QIV fig. propoſ. 4. cuius latus VI æquat peripheriam, & IQ axem.

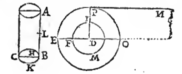
COROLLARIVM III.

Hinc etiam eſt: Quòd ſi cylindrus ſecetur per axem, rectangulum à diametro, & axe comprehenſum, vt FBCD in fig. prop. 4. h. in quocumque cylindro, etiam baſium non æquidiſtantium dicat eam proportionem ad ſuperficiem cylindricam ſine baſibus; quam diameter ad circumferentiam, quia rectangulum QIV æquale cylindricæ ſuperficiei habet æqualem baſim QI, eum ſit eadem, ac axis, aut CF latus. Vnde ſe habebunt inuicem, vt altitudines ex propoſ. I. lib. 6. Cor. ſed altitudo rectanguli QV, nempe IV eſt æqualis peripheriæ, & rectanguli FD diametro. Ergo erit FD rectangulum ad QV rectangulum æquale ſuperficiei cylindricæ, vt diameter CD ad circumferentiam, ſeu ei æqualem lineam IV.

THEOR. V. PROP. VIII.

Superficies Cylindri recti ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter ſit media proportionalis inter axem, & diametrum baſis.

Sit Cylindrus, cuius latus axi æquale AB, & diameter baſis BC, inueniaturque media proportionalis DE inter AB, & BC: ſuperque eam, vt ſemidiametro fiat circulus. Dico hunc circulum eſſe æqualem ſuperficiei cylindricæ ſine baſibus.



Probatur. Nam, cùm ſit AB latus ad DE ſemidiametrum circuli confecti, vt ipſe ſemidiameter DE ad diametrum baſis BC ex effectione. Erit quoque medietas LB lateris ad medietatem FE radij DB, vt ipſa medietas FE ad radiũ baſis medietatem BH. Et vt medietas DF ad BH, ita gyrus FIM ad gyrũ baſis BKCB ex prop. 43. lib. 6. Et ideo ex 16. lib. 5. El. latus integrum BA erit ad ſemidiametrum ED, vt circumferentia FIM ad circumferentiam BKCB. Si ergo ex circumferentia FIM, & diametro DE, fiat rectangulum DN, & circumferentia BKCB, & latere AB fiat item rectangulum hæc rectangula erunt æqualia ex prop. 43. lib. 6. Eucl. Nam cum ſint quatuor proportionales rectangulum comprehenſum ſub medijs DE, & FIM æquale erit ei, quod comprehenditur ſub extremis AB latere, & BKCB circumferentia cylindrica.

Rectangulum verò DN ex circumferentia FIM, & DE factum eſt æquale circulo, cuius diameter EN: Quia huic circulo eſt æquale rectangulum factum ex ſemidiametro DE, & eius circumferentia: Tota verò circumferentia MFI eſt æqualis dimidiæ circumferentiæ EPO; quod ſit facta ſuper ſemidiametrum DE tamquam ex diametro. Vnde quia ita eſt circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex prop. 43. lib. 6. quia DE eſt dimidius diameter circumferentia etiam FMI erit dimidia circumferentia maius EPOS. Cum ergo circulus EPO æquetur rectangulo DN, & huic æquetur rectangulum ſub AB latere, ſeu axi, & BKCB circumferentia, quod oſtenſum eſt æquale ſupra prop. 4. h. ſuperficiei Cylindricæ, etiam circulus EPO factus ex radio DE media proportionali inter BA, & BC æquabitur ſuperficiei cylindricæ.

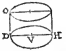
COROLLARIVM.

Hinc verò emanat, quòd ſi ex diametro, & axe fiat rectangulum, & ex eo extrahatur radix quadrata, quòd hæc erit diameter prædicti circuli, cuius area iuxta dicta de planorum curuilineorum menſura conquiſita offeret circulum æqualem cylindricæ ſuperficiei.

THEOR. VI. PROPOS. VIII I.

Superficies Cylindrica eſt dupla ſuæ baſis, ſi habeat Cylindrus eandem altitudinem, ac ſemidiameter.

SIt Cylindrus HO, cuius latus DO ſit æquale radio DV. Dico eius ſuperficiem eſſe duplam baſis.



Probatur. Rectangulum ſub dimidia peripheria, & ſemidiametro comprehenſum eſt æquale ipſi circulo ex prop. 3. Tract. 30. Ergo rectangulum ſub tota circumferentia, & ſemidiametro comprehenſum eſt duplum ſui circuli: Sed talis eſt ſuperficies cylindri HO, quæ eſt eiuſdem altitudinis DO, ac ſemidiametri, vt patet ex prop. 4. h. ergo erit dupla ſuæ baſis.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ita ſit ſuperficies cylindrica, quæ ſit eiuſdem altitudinis, ac radius ad ſuam baſim, vt diameter ad radium, quia ſicut ſuperficies cylindrica eſt dupla ſuæ baſis, ſic diameter eſt duplus radij. Vnde etiam ſi ſit cylindrus eius altitudinis, ac diameter, ſuperficies eius eandem rationem ad duplum ſuę baſis, quam altitudo ad radium ex prop. 18. lib. 5. conſequetur.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Superficies Cylindricæ, ſine baſibus eiuſdem altitudinis ſunt inuicem, vt peripheriæ, vel diametri baſium, vel ſi baſes ſint eædem, erunt, vt altitudines.

PRobatur. Nam ſuperficies cylindri AC eſt ad ſuperficiem cylindri LH, vt rectangulum æquale cylindricæ ſuperficiei AC ad rectangulum ęquale cylindricę ſuperficiei LH: ſed illa rectangula habent eandem altitudinem, ac cylindri AC, & LH eiuſdem altitudinis: ergo etiam inuicem eiuſdem altitudinis ſunt: quare



erunt inuicem ex 1. lib 6. vt baſes; baſes autem rectangulorum illorũ ſunt æquales peripherijs, ergo dicent inuicem eandem rationem: quam peripherię cylindricę, & peripherię eam, quam diametri. Vnde, & ſuperficies cylindri AC erit ad ſuperficiem cylindri LH, vt diameter CB ad diametrum IH.

Pr. 2 para eadem ratione, quod æqualia ſuperficiei cylindricę rectangula ęquentur inuicem baſi, quia æquatur peripherija cylindrorum, & ideo ſe referant inuicem, vt altitudines, ex 1. lib. 6.

THEOR. VII. PROPOS. XI.

Superficies Cylindricæ ſine baſibus ſimilium Cylindrorum ad inuicem dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, ſeu altitudinum.

CYlindri ſimiles ſunt illi; quorum rectangula per axem AC, & LH ſunt æquiangula, & habent circa æquales angulos latera proportionalia V.g. AB ad BC, vt LH ad HI: quæ eſt eadem ac proportio axis coni ad diametrum, aut radium, vel ad circumferentiam.

* Prob. vt rectangulum per axem AC ad ſuperficiem cylindri AC, ſic BC diameter ad peripheriam ex BC ex prop. 7. Coroll. 3. h. Vt autem diameter BC ad peripheriam ex BC: ſic diameter HI ad peripheriam ex HI ex 43. lib. 6. vt autem HI diameter ad peripheriam ex HI ſic ex propoſ. 7. h. Coroll. 3. rectangulum per axem LI ad ſuperficiem cylindri LI, ergo ex 16. lib. 5. vt rectangulum per axem AC, ad ſuperficiem cylindri AC, ſic rectangulum LI ad ſuperficiem cylindri LI. Ideo permutando rectangulum AC ad rectangulum LI erit, vt ſuperficies cylindri AC ad ſuperficiem cylindri LI, ſed rectangulum AC ad rectangulũ LI duplicatam habet proportionem laterum AB, ad LH vel BC ad HI ex 21. l. 6. ergo, & cylindri AC ſuperficies ad ſuperficiem cylindri LI habebit duplicatam proportionem lateris AB ad latus LH ideoq; altitudinis ad altitudinem, vel diametri BC ad diametrum HI, & ideo ex 43. lib. 6. peripheriæ ex BC ad peripheriam ex HI.



THEOR. VIII. PROPOS. XII.

Superficies Cylindricæ ſine baſibus, & diuerſæ altitudinis, quorum baſes parallelæ, & rectangula per axem ducta æquiangula habent proportionem compoſitam, ex altitudine, & peripheria.

SInt Cylindri CA, & IL, quorum rectangula per axem CA, & IL ſint æquiangula. Dico eorum ſuperficies habere rationem compoſitam ex altitudine HL ad BA altitudinem, & peripheria IH ad peripheriam CB. Probatur. Quia talia ſunt rectangula illis æqualia, quorum laterum alterum altitudinem exæquet alterum peripheriam. Ideoque ſicut illa rectangula ex prop. 23. lib. 6. Elem. proportionem inuicem compoſitam dicunt, laterum nempe ex altitudinibus, & baſibus, quæ peripherias æquant: Sic cylindricæ ſuperficies ſine baſibus compoſitam conſequuntur proportionem ex altitudine, & peripheria.



COROLLARIVM.

HInc educes, quod licet cylindri ſint obliqui, & baſibus non parallelis, adhuc tamen prop. verificatur

verificatur, uti oſtenſum eſt prop.7.h. ſuperficiem horum cylindrorum eſſe æqualem rectangulum, cuius vnum latus ſit æquale peripheriæ circuli ad axem recti, & alterum ipſi axi, quare ſi ast in iſtis cylindris altitudinem menſuremus, & peripheriam circuli ad axem recti pro baſi ſumamus vera de ipſis euadet proportio.

EXPENSIO II.

De quadratione ſuperficiei vngulæ cylindricæ.

QVadrationẽ vngulæ cylindricæ adinuenit inter inſignia eius opera Ambroſius à Sancto Vincentio, quæ licet non admodum veniat in vſum; quia tamen ſingulari ingenio excogitata eſt hic eam tradere viſum eſt.

DEFINITIO.

VNgula cylindrica eſt portio cylindri recta à plano aliquo abſciſſa ſemicirculo ſemiellipſi, & parte ſuperficiei cylindricæ contenta.

Sic in fig. pr.15. ABM dicitur vngula cylindrica, quia continetur ſemicirculo ACB ſemiellipſi ADMEB, & parte ſuperficiei cylindricæ ACBMA.

THEOR. I. PROP. XIII.

Rectangulum ex contingente, & chorda à puncto contactus perpendiculariter in diametrum cadente æquatur rectangulo ex diametro, & eius portione intercepta à perpendicularibus extremo tangentis deductis.

SIt AB tangens, & duæ perpendiculares AC, BD intercipiant portionem diametri CD, quæ ab extremis tangentis A, & B, deſcendunt, ſitque chorda HM à puncto contactus perpendiculariter in diametrum EF cadens. Dico *rectangulum ex AS, & HM æquale eſſe rectangulo ex diametro EF, & portione CD eſt Pappi in collect. Math. lib.5.*



Quod vt oſtendatur, ducatur diameter HN, & coniungatur MN. Erit triangulum HMN rectangulum, quod ſit in ſemicirculo ex propoſ.28. lib.3. Ducanturque ad angulos rectos chordæ MH, ab H recta HI, & AL; angulus itaque BHN, ratione diametri, & tangentis ex propoſ.21. lib.3. eſt rectus; Rectus quoque ex effectione angulus IHM. Ergo ablata communi portione IHN ab æqualibus rectis remanebunt triangula HAI, & HMN æqoiangula, ideoque erit HB ad HN, vt HI ad HM ex 4.l.6. Quare rectangulum compoſitum ex extremis HB, & HM æquabitur rectangulo confecto ex medijs HN, & HI. Et idem dicas de triangulo AHL æquiangulo triangulo HNM eidem. Ideoque ob proportionalia latera rectangulum ex AH, & HM æquabitur rectangulo ex AL, & HN. Proptereaque duo rectangula ex AL, & HN, & aliud ex HN & HI ſimul, ideſt rectangulum ex FE, & DC æquabuntur duobus ex AH, & HM, & ex HB, & HM; ideſt rectangulo ex chorda HM, & contingente BA.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

Rectangulum ex duobus ſinubus, vt vno crure, & chorda interpoſita, æquatur rectangulo ex chorda ſemicirculum complente, & portione diametri ſinubus intercepta.

SInt duo ſinus AG, & BL, inter quos ſit chorda AB, ſitque portio GL diametri à ſinubus AG, & BL intercepta. Dico, quod ſi ſinus in vnum latus componantur, & adhibeatur chorda pro alio latere rectangulum conſtitutum æquabitur rectangulo ex chorda AM complente ſemicirculum BAM, & diametri intercepta portione GL.

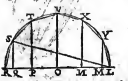
Quod vt oſtendatur normalis AI, ducatur; & diameter BM, & coniungantur puncta AN, & AM; eritque ABM rectangulum triangulum, & æquiangulum rectangulo AIN; quia anguli M, & N ſuper eundem arcum AB inſiſtentes ſunt æquales.



Quamobrem ex lib. 6. Elem. prop. 4. AM erit ad IN, vt AB ad AI. Sed IN æquatur ſinui BL, & AG, ſiquidem NL, & LB ſicut IL, & AG æquantur, & AI ipſi GL: Ergo, vt AM ad BL, & AG, vt vna linea, ſic AB ad GL. Vnde rectangulum ex AM, & GL æquabitur rectangulo ex BL, & AG ſimul, & ex AB.

COROLLARIVM.

HInc enaſcitur rectangulum ex RL, & LS ſubtendente arcum reſiduum LYS, qui cum arcu SR efficit ſemicirculum, hoc inquam rectangulum ex LR, & LS æquari rectangulis omnibus ſimul nempe QR, & SR, & rectangulo ex RS, &



ſinubus SQ, TP, vt vno latere, & etiam OV, & PT, vt vno, & SR pro alio, & NX, & QV pro vno latere SR alio exiſtente, & MY, & NX pariter, vt vno latere, & alio eodem SR, dummodo omnes chordæ TS, & VT, & cæt. æquentur chordæ SR. Nam primo triangula LSQ, & QSR ſunt proportionalia, eſtque LS ad SR, vt SQ ad QR, & ideo rectangulum ex extremis LS, & QR æquatur rectangulo ex QS, & SR medijs. Idem eſt de rectang. YM, & YL æqua. rect. SL, ML; Sic in præced. rectangulum ex LS, & PR

 æquatur

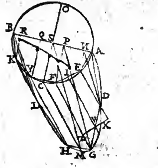
æquatur rectangulo ex PT, & QS, vt vno, & TS, ideſt SR æquali pro alio, & rectangulum ex LS, & OP rectangulo pariter ex OV, & TP pro vno, VT pro alio deſeruiente, ideſt RS: quòd LS chordæ VT ſit complementum vſque ad ſemicirculum ſicut eſt complementum chordæ SR, & ſic de alijs vſque ad L cum omnes TS, VT, AV, & cæt. ſint æquales ipſi SR. Quare ſingula rectangula ex ſinubus, & chorda SR æquabuntur ſingulis ex chorda LS, & interceptis diametri portionibus QR, PQ, & cæt. ſed hæc rectangula cum habeant idem latus LS ea 4. lib. 2. Elem. æquant rectangulum ex LS, & LR. Ergo omnia rectangula ex ſinubus duobus pro vno latere, & chorda pro alio æquabuntur cùm duobus ex SQ, SR, & MT, SR rectãgulo ex LS, & LR.

THEOR. III. PROP. XV.

Vngulæ ſupra definitæ eiuſdem altitudinis, ac diametri plana inſcripta ſimul ſumpta erunt æqualia rectangulo à tota diametro, & chorda omnes arcus inſcriptos ſubtendente dempto vltimo.

SIt circulus AOBC baſis cylindri, & vngulæ ſuperficies AMU, inſeribanturque plana AED, & DEFG, & GFYH, & cæt. Dico hæc omnia plana æquari rectangulo, quod fit ex diametro, & EA; quę ſubtendit omnes arcus ſimul, qui planorum inſcriptorum lateribus, vt BK, & cæteris ſubtenduntur vſque ad BX excludendo EA vltimum arcum.

Progreſſ. 1 Itaque oſtendendum eſt primò omnia latera ED, & FG eſſe dupla ſinuum: quibus perpendiculariter inſiſtunt prout, & ipſa ſuperficies vngulæ, ex def. inſiſtit normaliter baſi AOBC. Nam cum omnia plana triangulorum SCM, & NBD, & cæt. ſint recta ſectioni AS Ellipſis, & circuli



vngulam claudentis, erunt omnes anguli æquales, vtpote inclinationis planorum, & ex propoſ. 6. tract. 22. quia coniungunt perpendiculares CM, & ND, CS verò, & BN ſunt normales, etiam ND, & MS erunt normales diametro AB, ideoque parallelæ cum ergo triangula SCM, & NBD parallelis conſtent erunt æquiangula, ideoque ex lib. 6. prop. 4. conſtabunt cruribus proportionalibus, ideoq; MC erit ad CS, vt DB ad BN; ſed MC ex Theſi eſt dupla ſinus, CS, vt æqualis diametro. Ergo etiam DB eſt dupla ſinus BN, & ſic dicas de alijs ex reſpectu FP, & cęt. licet triangula HYQ, & cæt. non ſint delineata ad vitandam confuſionem.

Progreſſ. 2. Hinc verò oſtendetur triangulum AED eſſe ęquale rectangulo ſub AE chorda, & EN ſinu: nam cum DE ſit baſis normalis ipſi AE altitudo trianguli erit AE, & cum ſit dupla lateris, & ſinus NE rectangulumqne habeat pro alio latere altitudinem AE; triangulum, vtpote duplæ baſis, & eiuſdem altitudinis ex prop. 41. lib. 1. Elem. æquabitur rectangulo ex AE, & NE, & idem dicas de alio triangulo BK, quod æquet rectangulum ei KE, & KR.

Progreſſ. 3. Oſtendendum eſt, deinde trapezia DEFG æqualia eſſe rectangulis ex ſinubus NE, & PF, vt vno latere, & chorda EF conſtitutis.

Itaque DEFG trapezium eſt rectangulum ob angulos apud E, & F rectos ex Theſi, vnde diuiſã chorda EF in I bifariam, & ducta IV. necnon, & per V chordæ EF parallela XZ erit EDV triangulum rectangulum æquale ob angulos ad V verticem æquales triangulo VZG. Vnde ſuplente VZG defectum trianguli XDV trapezium GDEF ęquabitur rectangulo EZFE. Ideoque ſubduplum erit rectanguli ex DE, & FG tanquam vno latere, & EF pro alio conſtituti; ſiquidem latus excedens GF ſuplet deficiens latus DE ęquali linea GZ ipſi XD. Sed etiam rectangulum ex ſinibus ex NE, & PF, vt vno latere, & EF eodem pro alio, eſt ſubduplum rectanguli ex DE, & FG pro vno, & EF pro alio, quod DE, & FG oſtenſæ ſint in 1. progr. duplæ ſinuum EN, & FP. Ergo trapezium rectangulum DEFG eſt æquale rectangulo ex ſinubus EN, & FP ſimul, & EF, & ſic diſcurras de alijs trapezijs reſpectu aliorum rectangulorum ex ſinubus, & chordis.

Progr. 4. Modo oſtendetur principaliter prop.

Cum enim ex Coroll. præc. omnia rectangula ex ſinubus, & chordis ſint æqualia rectangulo ex diametro AB, & chorda SE ex prop. 14. h. Cor. Conſequenter omnia trapezia prædictis rectangulis ex ſinubus, & chordis æqualia erunt quoque rectangulo conſtituto ex diametro AB, & chorda BE, quæ omnes arcus ſubtendat excepto arcu AE.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

Quadratum ex diametro non poteſt eſſe maius Vngulæ ſuperficie, cuius altitudo æquet diametrum circuli baſeos, cui recta eſt.

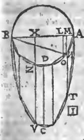
SIt Cylindricæ vngulæ ſuperficies ACB, quę inſiſtat perpendiculariter circulo AOB, & cuius altitudo DC æquet diametrum AB. Dico hanc *ſuperficiem quadrato diametri non poſſe eſſe minorem.*

Nam ſi eſt vngula BAC minor, quam quadratum ex BA, aſſignetur aliqua quantitas Z, in qua quadratum ex diametro vngulam excedat. Fiatque ex 2. Elem. prop. 16. rectangulum ex diametro, & linea AL V. g. quod ſit æquale quadrato Z; & conſequenter rectangulum ex AB, & AL erit exceſſus, quò quadratum diametri ſuperficiem vngulæ ſuperat, ex L itaque puncto excitetur normalis LO, & deinde inſcribatur aliquod polygonum regulare circulo, cuius vnum latus AN ſit minus, quam chorda ſubtendens arcum AO, & deinde vngulæ trapezia, vt in præced. propoſ. inſcribantur, vt ANT, & cæt.

Cum ergo rectangulum ex AL, & AB, & ex LB, &

AB

AB integrent quadratum ex AB ee 4. propoſ. lib. 2. Elem. Et rectangulum ex AL, AB ſit æquale ex effectione ſuperficiei, quæ ponitur quadratum ex AB diametri ſuperere vngulę ſuperficiem; erit itaque reſiduum rectangulum ex AB, & SL æquale ſuperficiei vngulæ; Ideoque rectangulum AB, & BM maius erit vngulæ ſuperficie, & tantò magis rectangulum ee AB, & BN: ſed rectangulum ee AB, & BN æquet omnia trapezie inſcripte ex præced. Ergo omnia trapezie inſcripte eſſent maiore ſuperficie vngulæ, quæ ea embit, quod eſt abſurdum. Non ergo quadretum ex AB, diemetro ſuperet vngulæ ſuperficiem.



COROLLARIVM.

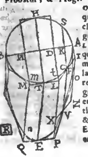
IDem dicendum de parte rectangulorum inſcriptorum, ideſt rectangulis ATCVZ, & rectangulo AB, & AX. Nam rectangulum ſub BN, & AX eſt æquale omnibus planis vngulæ inſcriptis AZV, cùm ſingule inſcripta in vngulari ſuperficie AZV oſtenſe ſint ęqualis ſingulis rectangulis ee ſinubus, & chordis intermedijs ex Cor. prop. 14. h. quæ ex 4. lib. 2. æquantur rectangulo ex BN, & AX cum ſint eiuſdem altitudinis NB ex partibus alterius lateris AX; Vnde ſingula plena inſcripta AZV æquabunt rectangulum ea AX, & NB ſacta. Ergo præced. conſtructione, idem valebit argumentum, & oſtendetur Rectangulum ee AB, & AX non eſſe maius ſuperficie vnguleri AZV.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Omnia plana Vngulam vt ſupra, circumueſtientia ſunt æqualia quadrato ex diametro exceptis vltimis duobus triangulis.

SIt Vngula ABD, circumueſtiantque eam plane AIO, & IOLP, & LMPQ, & cæt. rectangula ipſi baſi circulari vngulæ, quę ſit eiuſdem altitudinis TB, ac diameter AB. Dico hęc omnia rectangulerie trapezia æquari quadreto diametri AB excludendo extrema duo triengule apud A, & B, vt vnum ex ipſis eſt AIO.

Probatur, & Progr. 1. Oſtendendo planum OILP rectangulo ILXZ æquari; ſiquidem cum plane circumſcripta ſint rectangule trapezium apud S, & L rectos angulos conſequetur, vnde è puncto V medio ducte parallela ex lateri SL figura ILZX erit rectangulum, & in triengulis ZOV, & VXP erunt engull X, Z recti, & ad verticem V æquales; Vnde, & triangula ex 17. lib. 1. Elem. Coroll. æquiangule erunt, & ęqualie latera ZO, & XP. Quare triengulo VXP, quo trapezium ILOP abundat pro triengulo VZO, quo deficit à rectangulo EZLI repoſito æquabuntur inuicem LIVO, & LIXS; & idem dicea de alijs trapezijs.



Progr. 2. Deinde oſtendendum eſt rectangulum ZILX æquari rectangulo ex CS, & IL. Nam in pr. 15. demonſtretum eſt VC, vel XL eſſe duplam XC, & ideo æqualie erit duplæ CS; ergo rectangulum ex IL, & XL æquabitur rectangulo ee CS, & IL.

Progr. 3. Rectangulum verò hoc ex IL, & CS oſtenſum eſt prop. 13. h. æquari rectangulo ex AB, & AD. Ergo etiem trapezium IOPL æquabitur rectangulo BA, & AD; Et ſic dicas de rectangulo LMPQ, quod æquetur rectangulo ee LM, & TH; & ideo rectangulo ex AB, & DN, & ſic de alijs.

Progr. 4. Hæc autem omnie rectangule ee 4. lib. 2. ee AB, & DN, ſicut, & ex AB, & AD æquantur quadrato ee AB, ſiquidem habent idem latus AB, & alterum ſunt ſegmenta eiuſdem. Ergo etiem plene circumſcripte vngulæ æquentur quadrato AB, & remenent duo triangule, vt AIO, & aliud apud B, quæ cum nulla rectangula habeant correſpondentia, quibus æquentur, abundant ſuper quadretum AB.

THEOR. VI. PROPOS. XVIII.

Quadratum ex diametro non poteſt eſſe minus ſuperficie vngulæ cylindricæ prædictæ.

PRobetur. Nam, ſi poteſt eſſe minus ſit minus in præced. fig. quantitate R, totque plane vngulæ circumſcribantur, donec triengula lateralie ſint minora quentitate R: ſiquidem id tandem continget, cum multiplicatis planis circumſcriptis in infinitum ſemper minora efficientur. Igitur quadratum AB vna cum duobus triangulie erit minus ſuperficie vngulari, ſed AB quadratum æquetur omnibus plenis circumſcriptis ex pręced. demptis triengulis: Ergo etiam illæ vnà cum triangulis erunt minore ſuperficie vngulari, quem cingunt, quod eſt abſurdum. Igitur ſuperficies vngularis non erit minor quadreto AB.

COROLLARIVM.

HInc deduces idem intelligendum de parte ſuperficiei vngularis nVAm: Nam omnia plena circumſcripta vngulæ ſunt æquali e oſtenſa ſingulis ſingulis rectangulie ex chorde V. g. CS, & latere polygoni circumſcripti SL; hæc eutem æquent ſingula rectengula ſub AB, & ſegmentis diametri, quæ æquant ex 4. lib. 2. Elem. rectangulum ex AN, ideſt ex omnibus ſegmentis AD, & DN ſimul pro vno latere, & AB pro alio. Vnde plane vngulæ parti A m n circumſcripte ſimul æquabunt rectangulum ee AB, & AN dempto triangulo AIO. Fiat ergo, vt præc. propoſ. docuimus, & oſtendetur rectangulum ee diametro, & ſegmento AN non poſſe eſſe minus ſuperficie vngulæ A m n eodem argumento, quò vſi ſumus anteced. propoſ.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XIX.

Superficies vngularis prædicta æquat quadratum diametri, & eius aſſignatæ portiones æquant rectangulum ſub diametro, & ſegmento diametri, quod ſinu portionem diuidente intercipitur.

PRobatur prima pars: Nam in prop. 16. oſtenſum eſt non poſſe eſſe maius, & prop. 18. huius non poſſe eſſe minus quadratum diametri ipſa vngulari ſuperficie: Ergo illam æquabit.

Pro oſtendenda ſecunda parte ſit aſſignata portio vngulæ A m n, quæ determinetur in præced. fig. à ſinu N m. Dico vngulæ portionis A m n ſuperficiem eſſe æqualem rectangulo AS, & AN.

Probatur. Nam ex Coroll. prop. 16. non poteſt eſſe minus prædicta vngulæ ſuperficie A m n, & ex pr. 18. Cor. non poteſt eſſe maius: Ergo ei erit æquale rectangulum ex AB, AN.

COROLLARIVM I.

HInc verò colligitur primo rectangulo ex AB, & DN æquale eſſe ſuperficiem vngularem m t n x; Eo quia ſuperficies A n m ſit æqualis rectangulo AS, AN, & ideo etiam ſuperficies A t x ſit equalis rectangulo ſub AS, & AD: Ablatis ergo æqualibus ſuperficie vngulari A t x à ſuperficie vngulari A m n. & rectangulum ſub AB, & AD à rectangulo ſub AB, & AN contento reſiduum t m n x vngulare reſtabit æquale reſiduo rectangulo ſub AB, & DN contento.

COROLLARIVM II.

OMnia plana vngulam ambientia AOPL, & cęt. triangulis lateralibus demptis in fig. pr. 17. æquari ſuperficiei vngulari. Nam illa prop. 18. huius oſtenſa ſunt æqualia quadrato AB ſine triangulis accepta: ſed etiam vngularis ſuperficies oſtenſa eſt æqualis quadrato AB; Ergo erunt ſuperficies vngularis, & plana ambientia demptis triangulis æqualia.

COROLLARIVM III.

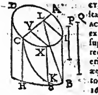
ET idem dicendum eſſe etiam de partibus, tum ſuperficiei Cylindricæ, tum planorum contingentium V. g. planum contingens ILOP eſſe æquale ſuperficiei vngulari, quam tangit I t E X, & pariter LMPQ æquari ſuperficiei, quam contingit t m X n: eo quia ſuperficies vngularis V. g. tmxn oſtenſa ſit æqualis rectangulo ſub AB, & DN contento, & eidem rectangulo oſtenſum ſit æquale planum contingens eam LMPQ, quare æquabuntur inuicem ſuperficies t m x n contacta, & planum contingens LMPQ.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Vngularem ſuperficiem prædictam ſecundùm datam rationem partiri.

SIt data vngularis ſuperficies ABC diuidenda ſecundùm datam rationem P ad Q; fiat, vt Q ad P, ita AC ad aliud CY ex prop. 15. lib. 6. Elem. ducaturque ſinus YX, & perpendicularis baſi XK: & dico ſuperficiem vngulę CXK eſſe ad ſuperficiem vngularem totam ABC, vt P ad Q.

Probatur. Factum eſt Q ad P, vt AC ad YC, ideo *inuertendo* erit P ad Q, vt CY, ad AC: ſed vt CY ad AC, ita eſt rectangulum ſub AC, YC ad quadratum AC ex 1. lib. 6. & ideo æqualis ſuperficies vngularis CXK rectangulo ex AC, & CY erit ad ſuperficiem totam æqualem ex 19. h. quadrato AC, vt P ad Q ex prop. 16. lib. 5. Elem.



COROLLARIVM.

VNde patet ſuperficierum vngularium ſegmenta eſſe ad inuicem in ea proportione, quà diametri baſeos ſegmenta, cum oſtenſum ſit YC eſſe ad CA, vt ſuperficies vngularis portio XCK ad totam ſuperficiem, & CL ad CA, vt portio ICK ſuperficiei vngularis ad totam, & ideo AC diameter erit ad CL ſegmentum *inuertendo*, vt tota ſuperficies ABC ad portionem ſuperficiei ICB: quare ex æquo YC erit ad CL, vt ſuperficiei portio CXK ad portionem ICB.

COROLLARIVM II.

HInc etiam patet: Vngularem ſuperficiem, cuius altitudo ſit diameter eam obtinere rationem ad ſuperficiem cylindri eiuſdem altitudinis, quam diameter circuli ad perimetrum.

Nam ſuperficies cylindrica eſt æqualis rectangulo ex diametro CA, & peripheria CIAD; at ſuperficies vngularis eſt æqualis quadrato diametri CA, ſed hęc duo rectangula cum ſint eiuſdem altitudinis diametri habent eandem proportionem, quam baſes: Ergo habent eandem proportionem, quam diameter baſis quadrati æquantis vngulæ ſuperficiem ad peripheriam baſim rectanguli cylindricam ſuperficiem æquantis.

Inſuper, & partes vngularis ſuperficiei cylindricæ eodem arcu contentæ V. g. CXK ad CXOH habent eandem proportionem; quam portio diametri CY ad portionem peripheriæ CX. Nam ita eſt ſuperficies CXK vngularis ad totam vngularem ſuperficiem, vt rectangulum ex YC, & CA, cui pars æquatur ex dicta prop. 19. h. & Coroll. ad quadratum AC, cui tota æquatur.

Tota verò vngularis ſuperficies eſt ad cylindricam ſuperficiem, vt quadratum AC ad peripheriæ OAIC, diametrique AC rectangulum: Cylindrica verò ſuperficies eſt ad portionem Cylindricam CXOH, vt peripheriæ, diametrique rectangulum eſt ad rectangulum ex arcu XC, & diametro CH, vel CA; Quare ex *æquo* ita erit ſuperficies XSC ad

ad portionem cylindricam CXOH, vt rectangulum ex AC, & CY ad rectangulum ex arcu CX, & diametro CA, quæ eſt eadem ob eandem rectangulorum altitudinem, quam AC ſegmenti diametralis ad arcum CX, qui ſuperficiem cylindricam, & vngularem ſubtendit.

THEOR. VIII. PROPOS. XXI.

Suqerficies vngularis, cuius altitudo diameter ad ſuperficiem vngularem quamcumque (dummodò rectangula baſi circulari) eſt vt altitudo ad altitudinem.

DEtur vngula ABC, cuius altitudo eadem, ac diametri CA rectangula baſi, & alia, quęcumque ADC ſimiliter rectangula, dico ABC ſuperficiem eſſe ad ſuperficiē ADC, vt altitudo BB ad altitudinē ED: Quod vt oſtendatur, ducantur ad diametrum normales LE, & MT, & QN, & cæt. quibus aliæ normales per ſuperficies vngulares ducantur BB, & TR, & QS, & aliæ ſi placet. Iunganturque puncta LB, & MR, & NB, Sicut etiam puncta LD, & MV, & XC. Erunt itaque omnia triangula LBE, & MVR, & MQS æquiangula inter ſe ex 17. lib 1. cum anguli apud E, T, Q recti ſint, & anguli L, & M, & N ſint inclinationis planorum ABC, AEC æquales ex prop. 18. tract. 22. Idem dicas de triangulis LBD, & MTV, & NQX ob eandem



rationem. Quadere, vt EB ad TR, ſic EL ad MT, vt autem EL ad MT; ita eſt ED ad TV. Ergo ob prop. 16. lib. 5. ob eandem proportionem, quam dicunt eidem tertiæ EB erit ad TR, vt AD ad TV. Ideoq; etiam planum ſubtendens BETR erit ad planum ſuperficiē TVED ſubtendens, vt BD ad DB ex propoſ. 14. tract. 29. eum ſit trapezium eiuſdem altitudinis, & ſic dicas de omnibus alijs. Quapropter eum ſingula plana maiora inſcripta ad ſingula minora ſint vt baſis maior ad minorem V. g. vt SQ ad XQ, quæ eſt eadem, ac BB ad DB; etiam omnia maiora ad omnia minora ſimul ex prop. 12. lib 5. eandem obtinebunt proportionem, licet multiplicentur ſecundùm quamcumque multiplicationem poſſibilem, ideſt proportione baſis BB, ad DB baſim ſe reſpicient. At illa plana multiplicata, vt vt poſſunt, ſuperficies vngulares implent, & æquant, ergo etiam ſuperficies vngularis BAB erit ad vngularem ſuperficiem AED, vt altitudo BB ad DE.

COROLLARIVM.

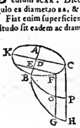
HOc autem, quod dicitur de tota eodem argumento concludit de partibus: eum ATB parti vngulę plana omnia inſcriptibilia ad parti ATV inſcriptibilia plana eandem, obtineant proportionem, vt RT ad TV ob rationem prædictam, ideſt, vt BE ad DE,

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Qualiſcumque ſuperficies vngularis æqualis eſt rectangulo ſub diametro baſis circularis, & eius ſuperficies altitudine contento.

SIt ſuperficies vngularis ACPB habens baſim circulum BCAK. Dico eam eſſe æqualem rectangulo ex diametro BA, & altitudine CP.

Fiat enim ſuperficies vngularis CAHB, cuius altitudo ſit eadem ac diametri; iam oſtenſum eſt in



præced. ſuperficiem vngularem CBHA eſſe ad ſuperficiem vngularē CPBA, vt altitudo HC, ideſt diameter BA ad altitudinem PC: Quare etiam quadratum diametri BA, ſeu altitudinis HC æquale ſuperficiei ACBH erit ad ſuperficiem vngularem BPCA, vt HC altitudo ad PC altitudinem; ſed vt HC ad PC, ita eſt quadratum HC ad rectangulum ex HC, & PC ob eandem altitudinem ex 1 lib. 6. Ergo quadratum HC ad ſuperficiem vngularem BPCA, & ad rectangulum ſub CP, & BA eandem habet rationem altitudinis HC ad altitudinem PC: Ergo ex prop. 9. lib. 5. æquantur inuicem ſuperficies BPCA, & rectangulum ſub CP, & BA contentum.

COROLLARIVM.

HInc etiam eſt, quòd ſi detur portio vngularis ſuperficiei FOB, hæc ſit æqualis rectangulo quod ſub BB ſegmento diametri, & PC altitudine cōtinetur; ſicut ſuperficies APC æquatur rectangulo ſub CP altitudine, & totobaſis diametro AB. Nam poſita ſuperficie vngulæ æqualis altitudinis, ac diametri, erit ſuperficies FBG æqualis rectangulo ſub AB, & BB ex propoſ. 19. huius Cor. 1. hoc itaq; rectangulum AB, & BE erit ad ſuperficiem FOB, vt ſuperficies GFB æqualis illi rect. ad ſuperficiem eandem FOB; ideſt ex præced. huius Coroll vt HC ad CP, vel æqualis AB ad CP; nimirum, vt rectangulum BB, AB ad rectangulum eiuſdem altitudinis PC, BE; quæ eſt eadem, ac baſium AB vel HC ad PC, quę eſt eadem ac ſuperficierum GFB ad OFB: Rectāgulum itaque idem BE, & AB ad rectangulum PC, & BE, & ad ſuperficiem FOB eadem ratione referetur, vt HC ad PC. Quare ex 11. lib. 5. Elem. quòd idem ad vtrumq; eandem rationem dicat, quam HC ad PC ſuperficies vngularis FOB, & rectangulum ſub BE, & PC erunt æqualia.

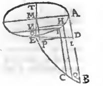
PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Data ſuperficie vngulari, cuius cylindri baſis, ſit circulus, & altitudo æqualis diametro, & data in ea aliqua portione; illi portioni æqualem in alia aliqua ſuperficie vngulari inuenire.

SIt data vngula, vt vult propoſitio ABB, & in ea ſegmentum EIC, & oportet ſuper arcum AH portionem efficere alicuius ſuperficiei vngularis, quæ datæ portioni EIC æquetur.

Ex arcu dato AH, & arcu portionis datæ BI duæ normales HN, IO ad diametrum TB agantur. Fiat deinde rectangulum ea MN æquale rectangulo ex EO, TE ex prop.45.lib.1. Elem. & alterum latus eius eueniat MP. Ducaturque parallela ipſi MA, perque punctum D, & diametrum TB agatur planum exhibens ellipſim DE. Ex H itaque deducatur HL parallela ipſi AD, & ſuperficies ADHL æquabitur ſuperficiei IBC.



Probatur. Et primo, quod rectangulum ex MN, & AD æquale ſit ſuperficiei ADHL. Superficies BQAH eſt ad ſuperficiem AHDL ex prop.21.h. Cor. vt AB ad AD, hoc eſt ob eandem altitudinem, vt rectangulum BA, & MN ad rectangulum ea MN, & PM, ſed ſuperficies BQHA eſt æqualis rectangulo ex BA, & MN ea 18. huius Coroll. Ergo etiam ſuperficies ex prop.12. lib.5. Elem. DAHL æquatur rectangulo ex MN, & PM.

Progr. 2. Cùm verò rectangulum MN, & PM ex conſtructione æquetur rectangulo TB, & OE, & hoc ex prop.18 huius Coroll. ſuperficiei datę CIB; ſequitur, quòd ſuperficies AHDL ęquetur ſuperficiei IBC.

EXPENSIO III.

De ſuperficiebus conuexis, quæ conum ambiunt.

COni ſuperficies deſeruit ad inueniendas quoque alias ſuperficies, vt ſphæræ, & ſphęroidis Elliptici, & cętera. Vnde operę pretium erit eas diligentiùs inueſtigare.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Superficies conica recti coni circularis, (quod ſemper intelligitur) ſine baſibus, eſt æqualis ſectori circuli, cuius radius ſit coni latus, & arcus, ſit æqualis circumferentiæ baſis.

SIt conus ABC, cuius baſis CAB. Dico *huius ſuperficiem eſſe æqualem ſectori circuli* ACE, cuius radius ſit AC latus coni, & circumferentia CBE ſit æqualis circumferentiæ baſis conicę CKBC.

Probatur. Nam circumferentia CBE eſt æqualis ex hypotheſi circumferentiæ CKBC, ſunt autem tum vnius, tum alterius perpetuò facta qualibet diuiſione ęqualia latera AC, & AE, cùm ergo latera tum coni ſuperficiem diuidentia omni diuiſione poſſibil, tum ſectoris, & ipſæ ſubtenſæ æquali numero diuiſionum affectæ ſemper ſint æquales, etiam omnia plana inſcriptibilia, vel circumſcriptibilia æqualia erunt. Sed hęc adeo multiplicata non excedunt, aut minus ſunt ſuperficie conuexa coni, vel ſuperficie plana ſectoris ABC, alioquin adhuc multiplicari poſſent; Ergo ipſæ ſuperficies æquabuntur inuicem.



COROLLARIVM.

HInc educitur, quod ſi fiat triangulum rectilineum ſectori CAE æquale ex prop. 4. tract. 3. nempe quod baſim conſequatur dimidio circumferentiæ CBA æqualem, & latera lateri AC, hoc erit æquale etiam ſuperficiei conicæ: Item ſi fiat rectangulum dimidio peripheriæ CB ſectoris CAE, & altitudinis AC hoc item erit æquale ſuperficiei conicę. Cum æquale ſectori ACE exiſtat ex prop. 4. tract. 30.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Superficies conica recti coni eſt æqualis ſuperficiei recti Cylindri, qui habeat eandem altitudinem, ac latus coni, & ſemidiametrum baſis conicæ pro diametro ſuæ baſis.

SIt conus ABC rectus, & detur Cylindrus DEFH rectus, qui habeat pro diametro DE ſemidiametrum OC, & altitudinem EF æqualem lateri CA. Dico ſuperficiem coni BAC eſſe ęqualem ſuperficiei cylindri HFDE.

Probatur. Nam ex Coroll. 2. Conus rectus in ſua ſuperficie eſt æqualis rectangulo facto ex latere æquali dimidiatæ circumferentiæ, & altitudine æquali lateri CA. Dimidiata verò peripheria circuli BLCB eſt peripheria facta ſuper diametrum DE, & altitudo æqualis lateri CA eſt EF ea con-



x conſtructione. Ergo ſuperficies conica BCA erit æqualis rectangulo facto ex latere æquali peripheriæ DE, & altitudine EF; ſed huic ex prop.4. huius ſuperficiea cylindrica HFDE æquatur, ergo ſuperficies cylindrica cylindri DFEH eſt ęqualis conicæ ABC.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Superficies coni recti ſine baſi eſt æqualis circulo, cuius ſemidiameter ſit media proportionalis inter ſemidiametrum baſis, & eius latus.

PRobatur. Cylindri ſuperficies HFDE in præc. fig. eſt æqualis circulo, cuius diameter ſit media proportionalis inter diametrum DE, & altitudinem EF ex prop.8. huius: Sed altitudo EF eſt æqualis lateri CA, & diameter DE ex effectione eſt æqualis ſemidiametro OC, ſuperficies verò cylindri recti DEHF eſt æqualis ſuperficiei coni recti BAC. Ergo circulus cuius diameter ſit media proportionalis inter HF, vel OC ſemidiametrum. & inter altitudinem EF, vel latus CA æqualis ſuperficiei cylindri erit etiam æqualis ſuperficiei coni ABC.

COROLLARIVM.

HInc patet quomodo ſuperficies coni recti in circulum, & ſuperficiem cylindricam transformetur, vel quomodo circulus, vel cylindrica ſuperficies in ſuperficiem conicam trasfundi poſſit.

Nam ſi ſuperficies coni recti ſit in circulum transferenda media proportionalis inuenta ex propoſ.16. lib.6. inter radium, & latus coni; circuli quæſiti diametrum dabit.

Si verò in cylindri ſuperficiem ſit mutanda ſuperficiea coni ſemidiametro OC tamquam diametro fiat circulus, & cylindrus eiuſdem altitudinis, ac latus coni in eo circulo pro baſi ſitus habebit ſuperficiem æqualem ſuperficiei conicæ.

At è contrà fiet, ſi cylindri ſuperficies in coni ſuperficiem ſit mutanda aſſumendo ſemidiametrũ pro diametro, & axem pro latere, quòd, & intelligitur de obliquis cum oſtenſum ſit ęquari cylindris rectis eiuſdem circuli, & altitudinis.

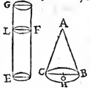
Quod ſi circulus in conicam, vel cylindricam ſuperficiem ſit trasferendus, tunc ſemidiametro eius duæ extręmę proportionales inuenientur ex prop.16.Tract.16.& ex ijs fiat altitudo, & diameter cylindri, vel altitudo, & radius coni, & huius cylindri; ſiue coni ſuperficies erunt circulo ęquales.

THEOR IV. PROPOS. XXVII.

Coni recti circularis ſuperficies ad ſuperficiem cylindricam rectam, cuius baſis diameter æquetur radio baſeos coni, eam conſequitur proportionem, quam latus coni ad eius axem, ſeu altitudinem.

SIt conus ABC, & cylindrus FO, cuius baſis FL, in quà diameter FL ſit dimidiũ BO diametri: CB Dico ita eſſe ſup erficiem coni ABC ad ſuperficiem circompoſitam c ylindro FG, vt latus CA ad altitudinem LG.

Fiat enim ęqualis altitudo cylindri lateri CA, & ſit EL. Superficies cy lindri FG ad ſuperficiem



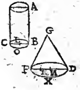
cylindri LE eſt, vt altitudo LG ad altitudinẽ EL, vt colligitur ex 10. h. ſed ſuperficies cylindri FE eſt ęqualis ſuperficiei conicę BAHC ex dictis prop.25 h. & altitudo EL ex effectione ęquatur lateri coni CA. Ergo, vt eſt altitudo LO cylindri ad latus coni CA. Sic ſuperficies cylindrica FG ad eonicam BAHC.

THEOR. V. PROP. XXVIII.

Superficies coni recti habentis latus æquale diametro, eſt duplo ſuæ baſis æquale.

SIt conus rectus FGDX habens latus FG ęquale diametro FD. Dico *eius ſuperficiem eſſe duplam ſuæ baſis*.

Probatur ſuperficies coni FGDX eſt ęqualis ex



prop.25. huius ſuperficiei cylindricę CA ęqualis altitudinis AB, ac latus FG, & ſuper baſim radium NF baſis conicę pro diametro CB habentem: ſed hęc eſt octupla ſuę baſis COB; quia cum eadem altitudo, ac ſemidiametri BC faciet duplam ex dictis propoſ.9. h. altitudo, totius diametri faciet quadruplam. Vnde BA diametro coni ęqualis, & dupla BC faciet octuplam: baſis verò coni FXD eſt quadrupla baſis BC; cum ſit in duplicata proportione diametrorum FD ad BC: Ergo erit ſubdupla ſuperficiei cylindricę CA: Sed hęc ſuperficies ex propoſ.25.h. ęquatur ſuperficiei conicę cum ſit ſuper dimidium diametri, & eandem altitudinem, ac lateria coni conſequatur. Ergo etiã baſis conica FXD erit ſubdupla ſuperficiei conicę FGDX, & ſic ſuperficies conica erit ipſius dupla.

THEOR. VI. PROPOS. XXIX.

Superficies prædicti Coni ſe habet ad ſuam baſim, vt latus ad radium baſis.

SIt in fig. pręc. conus DGF, cuius latus GF trianguli per axem ſit ęquale diametro DF cylindruſq; AC, qui habeat lateri GF altitudinem ęqualem, & ideo diametro DF, & radiũ NF baſis conicæ pro diametro baſis ſuę BC, eritque ſuperficies cylindrica COBA æqualis ſuperficiei coni DGF conuexę ex prop.27.h. Itaque conica ſuperficies DGF habebit proportionem ad duplum baſis cylindri COB, quam altitudo BA cylindri ad radium cylindri BL. Siquidem ſupra oſtenſum eſt in Coroll. propoſ.9.h. Cylindri ſuperficiem, quæ ſit eiuſdem altitudinis, ac diameter dicere eam proportionem

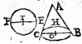
ad duplum ſuæ baſis, quam altitudo, ſeu axis ad radium, & ideo ſuperficies coni æqualis cylindri ſuperficiei eam proportionem dicet ad duplum baſis cylindri, quã altitudo cylindri, ſeu latus coni ad radiũ, ſed radius huius LB eſt NI ſemiradius baſis coni ex dictis, & baſis ipſa cylindri eſt ſubquadrupla baſis coni ex prop 33. lib. 6. Elem. Ideoque duplum illius baſis COB eſt æqualis dimidiæ baſis coni DXF. Quare ita erit latus coni FG diametro DF æquale ad radium BL cylindri, vel ſemiradium baſis coni IF; vt ſuperficies coni DGF ad dimidiam baſim DXF ipſius coni: Et ideo erit latus GF coni ad radium NF, vt ſuperficies coni eiuſdem ad totam baſim ſuam DXF.

THEOR. VI. PROPOS. XXX.

* *Superficies coni recti ad ſuum circulum habet proportionem, quam latus ipſius coni ad radium ipſius circuli.*

SIt conus ABC, & circulus quicumque EF. Dico, quod ita ſit ſuperficies conuexa coni ab circulum EF, vt eſt latus AC ad IE radium.

Probatur, Habet enim ſuperficies coni BAC ad circulum ſuæ baſis BOC eam proportionem, quam latus AC ad radium OC ſuæ baſis ex pr. 26 h. Quia radius, qui eſt media proportionalis inter latus, & radium baſis coni facit circulum ſuperficiei coni æqualẽ ex 26. b. ergo ex 21. Euc. Cor. circulus æqualis ſuperficiei erit ad circulum baſis, vtpote figuræ ſimiles, vt CA latus ad CO radium ſc. in duplicata ratione ſuorum diametrorũ.



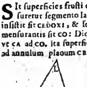
COROLLARIVM.

HInc q; eſt, quod ſuperficies coni CAB ſit ad quemcumque circulum FE, vt quad. ex media inter CA, & CO ad quadratum diametri FE, quod circulus ex media æquans ſuperficiem coni CAB, ita ſit ex 41. lib. 6. ad circulum FB.

THEOR VII. PROP. XXXI.

* *Superficies fruſti conici eam habet proportionem ad annulum planum, cui inſiſtit; quam ſegmentum lateris eam menſurantis ad ſegmentum annuli illum menſurantis.*

SIt ſuperficies fruſti conici AFBCED, quæ menſuretur ſegmento lateris AC, & annulus, cui inſiſtit ſit CEDOXI, & ſegmentum diametri illud menſurantis ſit CO: Dico ita eſſe in proportione, vt CA ad CO, ita ſuperficies fruſti conici AFBCED ad annulum planum CEDOXI.



* Progr. 1. Probatur. Ita eſt eſt totius coni ſuperficies CEDL ad totam ſuam baſim CED, vt eſt ſuperficies coni ALFB fruſti coni ablata ad ſuam baſim AFB ablatam; Ergo & propoſ. 22. lib. 5. reliqua quoq; ſuperficies AFBCED erit ad reliquum annulum CED, OIX, vt conica ſuperficies tota LCD ad totam baſim CED, vel vt ALB ſuperficies conica ablata ad baſim ablatã AFB.

Progr. 2. Quod verò ſit tota ſuperficies conica CELD ad baſim CED, vt ſuperficies conica ALFB ad baſim AFB.

Probatur. Quia ita eſt latus AL ad radium AN, vt LC latus ab radiũ CM, quæ eſt eadem proportio ob parallelas ex 4. lib 6. propterea erit ex 16. lib. 5. eadem proportio ſuperficiei CELD ad baſim AED, quam ſuperficiei ALFB ad baſim AFB, cum ſit eadem vbi tertiæ proportioni AL ad AN, vel CL ad CM 30. h.

Progr. 3. Cum itaque LECD ſuperficies ſit ad CED baſim, vt CL ad CM, & hæc ſit, vt AL ad AN erit etiam, vt reliquum CA ex CL ſublato AL ad reliquum CO ex CM ſublato AN. Verùm iam oſtenſum eſt progr. 1. quòd, vt LCED ſuperficies ad CED ſuperficiem; ita eſt reſidua fruſti coni ſuperficies AFBCED ad annulum CED OXI. Ergo ex 16. lib. 5. vt ſuperficies fruſti conici AFBCED ad annulum CEDOXI ita eſt CA ſegmentum lateris menſurantis ad CO fruſtum diametri.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXII.

Superficies conica fruſti coni recti æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter ſit media proportionalis inter ſemidiametros baſium infimæ, & ſupremæ tamquam vna linea, & latus fruſti coni.

SIt conus ABC, in quo baſis infima GB, & ſuprema CE conſtituant fruſtum coni CEBG. Ex IE, & HG radijs vna linea fiat, & inter illas, & GE media proportionalis ſit inuenta FL. Dico, quod ſi hoc radio deſcribatur circulus PQ: hunc eſſe fruſti ſuperficiei conicæ CEGB æqualem.



Probatur, & Progr. 1. Nam ſi inter AG latus, & HG ſemidiametrum media proportionalis inueniatur NF ex hac FN velut ſemidiametro conſtitutus circulus PX æquabit ſuperficiem coni BAG ex prop. 16. h.

Progr. 2. Fiat deinde rectangulum ex BI, & BA, quod ſit AY, & aliud ex GH, & IG, quod ſit EB, & tandem aliud ex EG, & EI, quod ſit XG, vel GY, quod erit æquale complemento YZ ex propoſ 43. lib. 1. Elem. Ideoque tria rectangula AY, & EB, & GX, ideſt YZ æquabunt rectangulum AF conſtitutum ex AG, & GH, vel æquali GF. Et Gnomon ZPGEY æquabit rectangulum FX nimirum duo rectangula alterum ex BG, & GH, & alterum ex EG, & EI, quod rectangulum GX æquetur rectangulo GY, ideſt complemento YZ.

Progr.

Progr. 3. Inueniatur autē media proportionalis inter ZT, & TY lineā TV; & quadratum ex TV æquabitur rectangulo YZ, ſic inuenietur media proportionalis TL inter EG, & TX nempe inter latus EG, & inter duos radios AI, & HG, & quadratum ex TL æquabit rectangulum FX, nempe ex dictis progr. 2. gnomonem illi rectangulo æqualem EFYZ. Ideoque duo quadrata TV,& TL æquabunt quadratum ex FN æquale rectangulo AF ex latere coni toto AG, & radio GH. Ratio eſt, quia illa duo quadrata ex TV, & TL æquant rectangulum AF quadratum quidem TV rectangulum YA, at quadratum TL gnomonem reliquum FYZ, & quadratum FN eſt æquale rectangulo AF.

Progr. 4. Cum itaque ſit circulus ad circulum, vt quadratum ad quadratum ex diametris, ſeu ex ſemidiametris ex prop 41. lib 6. Elem. Ideo ſi duo quadrata TV, & TL æquant quadratum FN, etiam circuli ex illis conſtituti TV,& TL quales ſunt PR, & PQ, circuli æquabunt circulum FN, vel PK. Cum ergo circulus ex PK occupet totam ſuperficiem coni GAB; circulus autem ex PR ſuperficiem coni CAB, reliquus quoque circulus PQ æquabit reliquam ſuperficiem fruſti coni CBEO. Quandoquidem circulus PR, & PQ æquant, vt ſupradictum eſt circulum KP, qui totam ſuperficiem coni ſua planitie exequat.

THEOR. IX. PROP. XXXIII.

Similium conorum rectorum ſuperficies ſine baſibus ſunt in duplicata proportione altitudinum, & peripheriarum, ſeu diametrorum, aut radiorum.

PRobatur. Nam ſimiles coni ſunt illi, qui æqualibus angulis ad verticem continentur, vt OPR, & OXS. Quare cum triangula ad axem rectangula OIR, & OTS ſint ſimilia, erit OI ad IR, vt OT ad TS, & permutando OI ad OT, vt IR ad TS, & ideo vt OR ad OS, aut PR ad XS, & pariter, vt peripheria ex IR ad peripheriam ex TS ex 43. l. 6. ſed coni ſuperficies equalis eſt rectangulo ſub vno latere, & dimidia circumferentia cōprehenſo, & rectāgula ſimilia ſunt in duplicata ratione laterum homologorum Ergo etiam conicæ ſuperficies erunt in duplicata ratione ſemicircumferentiarum, & laterum; ſed ita eſt ſemicircumfeferentia ad ſemicircumferentiam, vt tota ad totam, & tota circumferentia ad totam circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex prop. 43. lib. 6. & vt ſemidiameter ad ſemidiametrum, & perpendicularis axis ad axē. Quare duplicata proportio, ſeu laterum, ſeu axium, ſeu diametrorum, ſeu radiorum, ſeu circumferentiarum eſt illa, quam vnius coni ſuperficies habet ad aliā ſuperficiem alterius coni ſimilis.



COROLLARIVM.

HInc eſt conos æqualium baſium referri, vt altitudines. quòd cylindri ęquales ipſis, qui habēt pro altitudine latus coni, & pro diametro radium, & ideo ęqualium baſium referantur, vt rectangula ſibi ęqualia, ex peripheria, & altitudine ipſorum, ideſt cum ſint ęqualis peripherię, vt altitudines.

THEOR. X. PROPOS. XXXIV.

Conicæ ſuperficies conorum rectorum ſimilium habent proportionem compoſitam ex lateribus, & ſemiperipheria.

PRobatur. Quoniam talem proportionem etiam cylindricæ æquales eis ſuperficies inter ſe gerunt, nempe compoſitam, ea proportione altitudinum, & peripheriarum; altitudo verò cylindricæ ſuperficiei, quæ æquet conicam eſt æqualis lateri coni, ſicut peripheria ſemiperipheriæ ex prop. 24. huius. Quare etiam conicæ ſuperficies habebunt laterum coni, & ſemiperipheriarum compoſitam proportionem.

THEOR. XI. PROPOS. XXXV.

Superficies conorum rectorum eiuſdem altitudinem habentium ſe habent ad inuicem, vt peripheriæ, aut diametri.

SInt duo coni eiuſdem altitudinis ACD, & BHL, erit triangulum per axem CAD ad triangulum per axem HBL, vt baſis CD ad baſim HL, ſed baſis CD diameter ad HL diametrum eſt vt ſemiperipheria ex CD ad ſemiperipheriam ex HL, & ideo, vt latus æquale ſemiperipheriæ ex CD rectangulo, cuius alterū latus, & altitudo ſit AD ad ſemiperipheriē ex HL æquale latus eius rectāguli, cuius altitudo LB eadem, quæ AD. Sed rectangulum ex latere ęquali ſemiperipherię CD ad rectangulum ex latere ęquali ſemiperipheriæ HL eiuſdem altitudinis eſt, vt baſis ad baſim, ideſt vt ſemiperipheria ad ſemiperipheriam, vel vt peripheria ad peripheriam, vel ex 43. lib 6. vt radius ad radium, vel diameter ad diametrum, ergo erit etiam ſuperficies coni CAD ad ſuperficiem coni HBL eiuſdem altitudinis, vt radius ad radium, vel vt diameter ad diametrum, vel vt peripheria ad peripheriam baſium, vel vt medietas ad ipſarum medietatem.



EXPENSIO IV.

De ſuperficie Sphæroidis Elliptici.

QVamuis, quod viderim apud authores, nondum hæc ſuperficies tetragoniſmo ſubacta fuerit, curabimus tamen pro noſtris viribus eam ad planam ſuperficiem redigere.

THEOR. I. PROPOS. XXXVI.

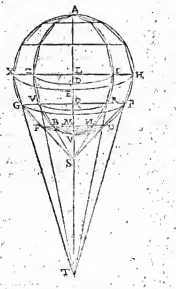
Sphæroidis Elliptici ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ ſe habet, vt ſuperficies Ellipſis ad ſuperficiem circuli.

SIt ſphæra AHVX, & circulus maximus in ea, &

 (phę-

ſphęroides in eo AIVZ, quæ, & exprimat Ellipſim ſphęroidem generantem. Dico, quod vt ſuperficies ellipſis AIVZ eſt ad ſuperficiem circuli AHVX; ſic ſit ſuperficies ſphęroidis ad ſuperficiem ſphęrę.

Diuidatur AHVX circulus in ſphęra maximus in partes æquales, & rectæ ducantur normales ad diametrum AV, & ſint HL, & PQ, & OM, quæ ſecabunt ellipſim in I, R, N; eruntque applicatæ in ellipſi IL, QR, & NM. Per partes ergo circuli HP, & ellipſis IR ducantur rectæ, quæ ex oſtenſis propoſ. 72. Tract. 24. conuenient in T diametro maiori producto.



Sic ſi ducantur rectæ TO, & RN, conuenient in diametrum productum maiorē, & tandem OV, & NV in V, ſic dicas de alia parte. Itaque omnia erunt triangula æquicrura HTX, & ITZ æqualis altitudinis, ſicut, & PSG, & RYS, & cęt. quę ſi intelligantur circumuolui in ſphęra, & in ſphęroide inſcribent ſegmenta conorum in ſphęra quidem HEXPG, & cæt. in ſphęroide verò IDZRY, & cęt.

Probandū itaque eſt in primis horum ſegmentorum ſphęroide inſcriptorum, & cęt. ſuperficiem ZDRIY eſſe ad ſuperficiem conicorū ſegmentorum inſcriptorum ſphęra XEHPG, vt ſuperficies IRZY ad ſuperficiem PHXG ſegmētorū, quæ circulo, ellipſiq; inſcripta ſunt. Spatia IQRL ſemiellipſis ſunt ad ſpatia ſemicirculi LQPH, ſicut RQNM ad PORM, & cęt. vt ſemidiameter IL ad ſemidiametrum LH ex prop. 14. Tract. 29. Ideoque dupla ipſorum IZRY ad HPXG erunt, vt diameter IZ ad diametrum HX. Vt autem diameter IZ ad diametrum XH; ſic eſt circulus IDZ ad circulum XEH ex prop. 33 lib. 6. Elem; ita circulus ex RY ad PG circulum cum radij applicatarum ellipſi QR, & MN, & cæt. vt propoſ. 72. eadem cit. conic. ſint ad radios circuli ſinus PQ, & OM in eadem proportione, ac ſemiaxis IL ad ſemidiametrum LH. Vt autem circulus IDZ ad circulum HEX, ſic eſt coni ſuperficies eiuſdem altitudinis IDZT ad coni ſuperficiem HEXT ob eandem altitudinem ex prop. 35. h & vt circulus ex RY ad circulum ex PG. ſic eſt ſuperficies coni RYT ad coni ſuperficiem PGT ob eandem altitudinem, ergo vt ſuperficies IZT coni ad ſuperficiem coni HTX. Ideoque ablata ſuperficies coni RTY erit ad ſuperficiem coni PTG ablatam, vt ſuperficies coni totius ITZ ad totam ſuperficiem coni HTX, & ideo etiam reliquum ſuperficies IRDZY erit ad ſuperficiem HPXGE, vt tota ad totam, ideoque vt ſpatium planum IZYR ad ſpatium planum HXPG, cum etiam ſpatiorum, vt dictum eſt ſit eadem ratio, quę IZ ad HX. Idem oſtendes, & eodem prorſus argumento de ſegmentis RYNB, & POFG, quorum ſuperficies circulares erunt in ea propoſitione, quod conueniant in eundem verticem, qua baſes circulares, & ideo, qua diametri circulorū, & ideo, qua ſpatia diametris contenta YRNB ad PGFO, &c.

Cum ergo ſingulæ ſegmentorum conicorum ſuperficies ſphęroide inſcriptorum; ſint ad ſingulas ſuperficies ſegmentorum conicorum ſphęra inſcriptorum, vt ſingulæ ſuperficies planæ ellipſi generanti figurę inſcriptæ ad ſingulas ſuperficies figurę inſcriptę circulo, omnes quoque ex propoſ. 17. l. 5. erunt ad omnes in eadem proportione ſc. conicæ ſuperficies ſphęroide inſcriptæ ad omnes ſuperficies conicas ſphęra inſcriptas, vt omnes planæ ſuperficies ellipſis ad omnes planas ſuperficies circuli.

Quo poſito inſcribantur tot ſuperficies conicę circulo, & ſphęroide elliptica, quod poſſūt inſcribi multiplicatis lateribus figurę, & ellipſi, & circulo inſcriptæ, quouſque poſſunt multiplicari, hæc inſcriptio omne ſpatium, quod inter curuam, & rectam eſt, occupabit alioquin ſi adeſſet locus, adhuc noua inſcriptio poſſet inſtitui contra hypotheſim; Quamobrem cum omnis poſſibilis multitudo conicarum ſuperficierum ſphęra, ſphęroideque inſcriptarum ęquent ipſam ſphęræ ſphęroidiſque ſuperficiem. Sicut, & poſſibilis multitudo laterum in multilatero circulo, ellipſique inſcripto æquant ipſos circulum, & ellipſim: Erit ſpatium ellipſis ipſa ad circulum, vt ſuperficies ſphęroidis, quę eam generat, ad ſuperficiem circuli; quod erat oſtendendum.

THEOR. II. PROPOS. XXXVII.

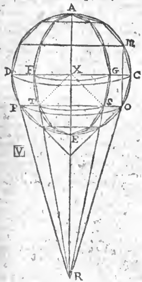
Superficies ſphæroidis Elliptici eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ, cuius radius media proportionalis ſit inter axes maiorem, & minorem.

Sit ſphęra ACBD, & ſphęroides ellipticam AFGE. Et inſcribantur in eo corpora ex ſegmentis conorum conflata, vt in anteced. factum eſt, & figura ſolida ſphęroide inſcripta ad figuram ſolidam ſphęra inſcriptam, vt diameter GF ad diametrum CD; vel vt ſpatium Ellipticum AGFE ad circulare ſpatium CAED, quoad ſuperficiem refertur.

Rurſus ſupra oſtenſum eſt cum ageremus de planis ſuperficiebus ex propoſ. 35. tract. 30. ſuperficiē figuræ circulo HIKL inſcriptę eſſe ęqualem figurę tantundem laterum Ellipſi AOFE inſcriptę eo quod HI diameter ſit media proportionalis inter GF, & CO. Modo ante omnia oportet oſtendere, quòd ſuperficies

quæque

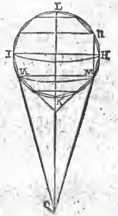
quoque ex ſegmento conico HIMN, & cęt. quod conuexum intelligas refertur ad CDOP ſegmantum conicum, vtpote, quod conuexum intelligendum ſit, vt HIMN ſuperficias plana ad CDOP ſuperficiem planam, & ſic de ſingulis alijs.



Nam HIQ conus habebit proportionem duplicatam ad conum CDR, quoad ſuperficiem ſuæ baſis ambitus HI ad baſis ambitum CD, ſiquidem ſunt coni ſimiles recti, eo quod angulus HMN æqualis angulo HQL ob parallelas MN, & QL ſit ęqualis angulo CO m. ideſt ob eandē rationē angulo CRA, quod ſubtendat ſimilem arcum H n; & C m cum ergo ſuperficiea faciant cum axe eundem angulum apud Q, vt apud R. erunt ſimiles coni CDR, & HIQ. Quod cum ita ſit ſuperficiea coni CDR, & HIQ, vtpote in duplicata ea prop. 33. huius, ratione ſuarum circularium baſium, & ideo diametrorum, dicant ad inuicem eam proportionem, quam GF, ad CD, ſiquidem ex effectione GF, HI, & CD ſunt tres continuæ proportionales, ideſt quam ſpatium Ellipticum GSST ad ſpatium circuli CDOP, & ideo quam ſuperficies globoſa fruſti conici GFST ad ſuperficiem rotundam fruſti conici ſphęra inſcripti CODP ex præced. propoſ. 36.

Coni quoque ſuperficies MNQ erit ad coni OPR in duplicata ratione chordę NM ad chordam OP, quę eſt eadem ea 35. lib 6. ac HI diametri ad CD diametrum, & ideo habebit proportionem, quam GF ad CD, & quam cum ſit eadem ea propoſ. 72. tract. 24. ST ad OP. Cum ergo ſit totus conus HIQ ad totum CDR, vt ablatus MNQ ad ablatum OPR quoad ſuperficiem, erit etiam reſiduum fruſtum conicum HIMN ad fruſtum conicum CDOP in ſuperficie, vt tota HIQ ad totam CDR ſuperficiem, & ideo in duplicata ratione HI ad CD, quę eſt GF ad CD, & quę vt dictum eſt ſuperficiei fruſti conici GFST ad ſuperficiem fruſti conici CDOP: Et ita argumentaberis de alijs ſegmentis conicis, vt vt multiplicaris.

Quadere cum ſingulæ fruſtorum conicorum ſuperficies ſphęra LHKI inſcriptorum ſe habeant ad ſingulas ſuperficies conorū ſphęra ACBD inſcriptorū, vt conicę ſupficies ſphęroidi īſcriptę ad eaſdem conicas ſuperficies ſphæra inſcriptas, etiam omnes ex prop. 17 lib 5. Elem taliter erunt ad omnes. Quamobrem tota ſuperficiea fruſtorum conicorum ſphæra LHKI inſcriptorum ſe habebit ad totam ſuperficiem figurę ſolidę conorum ſegmentis conflatæ ſphęra ACBD inſcriptę, vt ſuperficiea figurę ſolidę ex fruſtis conicis in ſphęroide Elliptica inſcriptę ad eandem ſuperficiem figurę ſolidę ACDB. Quare ex prop. 17. lib. 5. ſuperficies figurę ſphęra LHKI inſcriptę ęquabitur figurę in ſphęroide inſcriptæ AGFE: cum eidem eandem obtineat proportionem: quam OV ad CD, vel quàm ſuperficies Elliptica AGFE ad circuli ſuperficiem ACDB.



Quod cum ita ſit modo oſtendendum eſt ſuperficiem quoque ſphęrę HKIL eſſe ęqualem ſuperficiei ſphęroidicę ACEF, id autem oſtendetur. Non enim eſt maior, aut minor ſuperficies ſpęrę LHKI ſuperficie ſphęroidali. Ergo æquabitur. Namq; ſit maior ſuperficies LHKI ſphęrę. Tunc ſuperficies LHKI dicet ad ſuperficiem ſphęrę ACBD maiorem proportionem, quàm ſuperficies ſphęroidis Elliptici AGFE; ſit itaque V ſuperficies illa, in qua dicit maiorem proportionem; ita quod ſi illa à ſuperficie ſphęrę LHKI abſcinderetur; tunc eandem proportionem diceret ad ſuperficiem ſphęrę ACBD quàm ſuperficies ſphęroidis Elliptici AGEF. Inſcribantur itaque tot ſegmenta conica in ſphęra LHKI; donec differentia, quę inter ſuperficiem ſphęræ mediat, & inſcriptam figuram ſit minor quantitate V. Igitur figura inſcripta ſphęrę LHKI dicet maiorē proportionem ad ſuperficiem ſphęricam ACBD, quam ſuperficies ſphęroidis ellipticæ AGEF, cum ad hoc, vt diceret eandē tota differentia V ipſi figurę inſcriptę ſuperficiei debuiſſet deficere. Quare tantò maiorem proportionem dicet ſuperficiei inſcriptę figurę conicę ADCB, & tantò dicet maiorem proportionem, quam figura inſcripta ſphęroidi, quę ſuperficie ſphęroidis minor eſt. Sed ſupra oſtenſum eſt dicere eandem. Ergo diceret eandem proportionem, & maiorem ad eandem figurę conicę inſcriptę ſphęrę ACBD ſuperficiem, quod eſt abſurdum.

Quod

Quod ſi dicatur ad ſphęricam ſuperficiem ACED ſuperficies LHXI minori in proportione, quàm ſphęroidalis ſuperficies AGEF ſit aſſignata differentia V, quę ſi deficeret ſphęroidali ſuperficiei, tunc diceret eandem proportionem. Inſcribantur itaque in ſphęroide tot ſegmenta conica, donec differentia, quę intermediat inter ſphęroidis ſuperficiem, & ſuperficiem conicorum ſegmentorum Inſcriptorum ſit minor ſuperficie V. Igitur figura Ellipticę ſphęroidi inſcripta dicet maiorem proportionem ad ſuperficiem ſphęrę ACED quàm ſuperficies ſphęrę LHXI, cum vt diceret eandem deberet illi deficere tota differentia V. Ergo multò maiorem dicet ad figurę conicę inſcriptę eidem ſphærę ACED, quę minor eſt, & multò maiorem, quàm figurę ex ſegmentis conicis conflatę ſphęrę LHXI inſcriptę ſuperficies, quę minor eſt. Sed ſupra oſtenſum eſt, quod dicebat eandem figura ſphęroidi inſcripta ad figurę conicę ſuperficiem inſcriptę ſphęra ACED, quam conicę figurę ſuperficiea ſphęrę LHXI inſcriptę. Ergo diceret eandem, & maiorem, quod eſt impoſſibile.

COROLLARIVM.

EX hoc doctrina clarè deducitur idem dicende ſegmentis ſphęroidalibus V. g. de ſegmento STE, nempe quod eius ſuperficies ſit æquali ſegmenti ſphęrici NMX ſuperficiei, cuius ſubtenſa MN ſit media proportionalis inter ſubtenſam ſeu applicatam ST, & chordam OP: Eadem enim prorſus demonſtratio valet, vnde eam non replicabimus. Igitur cognoſces ſectoris ſphęroidalis ſuperficiem XSETX, ſiquidem illa conſtat ſuperficie conica SXT, & ſuperficie ſegmenti ſphęroidalis STE, nempe æqualis ſuperficiei ſegmenti MNX, ſphæræ. Hic verò etiam deduces ſphęroidalem ſuperficiem AGEF, eſſe quadruplùm circuli LHIX talis eſt enim ſuperficies ſphęræ HKIL, cui æquatur reſpectu ſui circuli, cęteraſque ſimiles proportiones ex tuo ingenio venaberis.

EXPENSIO V.

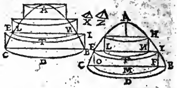
De ſuperficie cuiuſcumque corporis circularis ad axem ſuum recti.

CVm multa dentur corpora, quę neque conoidem parabolicum aut ellipticum imitantur, ſed videntur omnino irregularia, videndum tamen eſt an illorum aliquo modo area inueniri poſſit, loquor autem de illis, qui axe ſuper ſuam baſim directè, normaliterque inſiſtunt.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

** Omne corpus, quod ex plano axem circa ſuum cirumuoluto formatur, habet planum per axem ad ſuperficiem conuexam in ea proportione, qua baſis diameter ad peripheriam baſis.*

SIt corpus ex parabola conſtans rectum ad axẽ cuius ſuperficiei plani per axem ductæ nota ſit quantitas. Dico, quod ex hac inueniri poterit etiam quantitas eius ſuperficiei conuexæ. Nam planum per axem ita ſe habet ad ſuperficiem conuexam, vt diameter BC ad peripheriam BCD.



Nam ſic ſuperficies BAC plana non eſt ad conuexam XACD, vt AC diameter ad BDC peripheriam. Erit ergo V. g. ſuperficies plana BAC ad conuexam BACD in maiori proportione quantitate Z; tali modo, quòd ſi quantitas Z à ſuperficie plana BAC tolleretur; tunc ea ſuperficies plana BAC eſſet ad conuexam corporis dati BACD, vt AC diameter ad peripheriam BDC; Inſcribantur itaque tot rectangula donec ſuperficies eorum minùs differat à ſuperficie plani per axem ABC, quam quantitas Z ex prop. 1. Tr. 30. & ſit hæc minor differentia quantitas X. Ergo quia rectangulorũ EF, & EH, & cæt. inſcriptorum ſeries minus differt à ſuperficie plani per axem BAC, habebunt maiorem proportionem ad ſuperficiem conuexam corporis dati BACD, quàm diameter DC ad peripheriam XDC: Verùm, vt BC diameter ad peripheriã BDC, ita eſt FO diameter ad peripheriam FMO, & ita eſt rectangulum inſcriptum FF ad ſuperficiem fruſti cylindrici OMFE cum ſint ſuperficies eiuſdem altitudinis, at vt PO rectangulum ad MOFE ſuperficiem cylindricam, ita eſt HL rectangulum ad NLH ſuperficiem cylindricam ex prop. 1. lib. 6. cùm ſit eiuſdem altitudinis rectangulum illi ſuperficiei æquale ex pr. 4. trih. Quare ex prop. 17. lib. 5. tota ſeries rectangulorum ad totam ſeriem ſuperficierum conorum conuexam erit, vt diameter aliquis V. g. FO, vel BC ad peripheriam aliquam puta FMO, vel BDC. Sed rectangulorum inſcriptorum omnium ſuperficies ponitur habere maiorem proportionem ad ſuperficiem conuexam corporis dati BADC; quàm diameter AC ad peripheriam BDC. Et ſuperficies eadem rectangulorum inſcriptorum habet eandem proportionem ad ſuperficiem ipſorum cylindrorum conuexam, quam BC diameter ad ADC peripheriam. Ergo cùm eadem planorum ſuperficies rectangulorum inſcriptorum ad conuexam corporis dati XADC habebat maiorem proportionem, quam ad cylindrorum conuexam ſuperficiem ex 12. lib. 5. erit maior cylindrorum ſuperficies, quam continentis corporis BADC, quod eſt abſurdum.

Quod ſi ponas obtinere ſuperficiẽ per axem BAC planã ad ſuperficiem conuexam corporis dati XADC minorem proportionem: ſit differentia quãtitas X, quæ ſi adeſſet, addita ſuperficiei planæ; tunc eſſet vt diameter BC ad peripheriam BDC; Tunc circumſcribantur rectangula adeò multiplicata, vt differentia X ſit minor, quàm Z, quam obtinent à ſuperficie plana XAC plani per axem ducti, & erit adhuc minor proportio rectangulorum circumſcriptorum ad conuexam ſuperficiem BADC corporis dati; quam BC ad BCD: Fiant ita, vt priùs fruſta cylindrica circa rectangula. Rectangulaque

ad

ad illorum omnium ſuperficiem eront, vt BC ad BDC. Cum itaque eadem rectangulorum ſuperficies ad ſuperficiem cylindrorum habeat eandem proportionem BC ad BOC, & ad ſuperficiem BADC corporis dati minorem, quam BC ad BDC erit maior ex 18. lib. 6. ſuperficies corporis dati BADC licet inſcripta ſuperficie circumſcripta rectangulorum; quod eſt abſurdũ. Cũ ergo ſuperficies plani per axẽ dicat, nec maiorẽ proportionem, nec minorem proportionem ad conuexam ſuperficiem, quam diameter BC ad peripheriam BOC; Dicet itaque eandem proportionem: quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Itaque cum nota ſit dictis pr. 33. Tract 30. ſuperficies plani ducti per axem conoidis parabolici, quæ eſt parabola, etiam ſuperficies eius conuexa patebit ſine baſi conſiderata. Nam ita ſe parabola per axem ducta in conoide parabolico ſe habebit ad ſuperficiem conuexam ipſius, vt diameter, ſeu applicata axi ad peripheriam circuli, quæ eo ſemidiametro deducitur.

EXPENSIO VI.

De ſuperficie ſphæræ menſuranda.

Archimedes, dum ſolliditatem ſphæræ perquireret, hoc nobis indigne problema reliquit, quo ſphæricam ſuperficiem ſumma facilitate menſurare poſſemus, quod cum apud ipſum obſcurè omninò tradatur, nos clariùs, quàm fieri poſſit explanare curabimus.

THEOR. I. PROPOS. XXXIX.

Chordæ parallelæ coniungentes latera æqualia figuræ circulo inſcriptæ parium numero laterum, omnes ſimul tamquam vna ad diametrum eam habent proportionem, quam chorda vnum latus diametro coniungens ad ipſum latus.

Sit pr. 40. fig. duodecim V. g. laterum circulo inſcripta. Dico, quòd chordæ BC, EF, HG, IT, ML coniungentes latera, & parallelæ eam habent proportionem àd diametrum AD, acceptæ tamquam vna linea, quam habet chorda CD ſubtenſa omnibus arcubus ſemicirculi vno dempto ad ipſum latus CA ſubtendens arcum reliquum; quod vt oſtendatur ducantur rectæ de vna ad aliam BC, HF, IG, & LT, quæ erunt parallelæ, vtpote æqualia latera coniungentes, & ideo omnia triangula AOB, OCB, FEQ, QFR, & cæt. erunt æquiangula, vnde ex El. l. 6. prop. 41. Cor. habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, eritque vt BO ad OA, ſic CO ad OF, & ita EQ ad QP, & ſic FQ ad QR. Sic quoque GS ad SN, & IK ad KN, & cæt. Quare ſicut vna ad vnam, ſic omnes ad omnes ex prop. 17 lib. 5. Ideo linea hY omnibus chordis BC, BE, GH, TI, ML extenſa, ita erit ad totam diametrum AO, vt vna V. g. OB, vel OC ad vnam OA; Sed vt eſt OC ad OA, ita eſt CO coniungens latus diametro ad AC latus ex prop. 8. lib. 6. ob rectangulorum ſimilitudinem. Ergo quam proportionem omnes CB, FE, & cæt. connumeratæ quinque, velut vna V. g. Y h ad diametrum, hanc habet CD chorda prædicta ad latus CA.

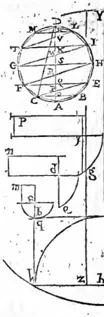
COROLLARIVM.

Collige ita, eſſe latus ex aliquibus chordis cum dimidia compactum V. g. CB FE, & dimidia HS ad diametrum interceptum AS, vt CD ad CA ratio eſt, quia dicunt eandem proportionem ex præced. propoſitione, quam OB ad AO, & eandem dicit ſimiliter CO ad CA.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Corporis ex portionibus conicarum ſuperficierum conſtantis in ſphæra inſcripti ſuperficies æqualis eſt circulo; cuius ſemidiameter poſſit quadratum æquale rectangulo, cuius vnum latus omnes fruſtorum conicorum diametros æquet, & alterum latus ipſorum.

Sit figura præcedens, ſed intelligatur globoſa, & ſit LMD apex coni, cuius circulus baſis ML diametro conſtet; Sic ILTM fruſtum coni, cuius baſis circulus diametrum KI, poſſideat, & ſectio, item circulus M L diametro L M gaudeat, & ſic eſſare de alijs.



Inueniantur autem circuli æquales ſuperficiebus fruſtorum horum conicorum iuxta dicta propoſ. 32. huius; ſitque proportionalis a b inuenta inter AB BO: inter OB ſurſus, & QE tamquam vna, & BE media proportionalis d e. Sic in EQ & SH tamquã vna, & EH media proportionalis f g reliquę quoque tres inueniantur proportionales, quæ erunt tribus prędictis æquales, ſicut ipſa tria rectangula, ex quibus prodeunt erunt æqualia, vt a m, d n, & f p. Rectangula autem ex quibus mediæ proportionales inuentæ, ſi in vnum rectangulum

gulum ex 4. lib. 2. Elem. componuntur. Quis primum ex OS efficitur pro vno latere ſecundum ex OB eodem, & EQ tertium ex EQ eodem, & SH, pro alio ſemper BA deſeruiente cum BA, BF, EN, & cęt. ex Theſi æquentur ſemper, ideo dum ſinguli ſinus replicantur linea h y ex omnibus ſinubus duplicatis extenſa æquabitur omnibus chordis BC, FB, EF, HG, & cæt. Et ideo omnia rectangula ſub eadē altitudine lateris AB erunt æqualia rectangulo ex AB pro vno latere, & quinque linea chordiſq; BC, & EF, & cæt. tamquam alio latere compacto, vt eſt ZY ex 4. lib. 6. ſi ergo inueniatur media proportionalis inter z h, & h y, quæ eſt i h, hæc quadratum conſtituet æquale ZI, & conſequenter omnibus rectangulis ſex, quorum duo ſunt a m duo d n, & duo f n, & ideo etiā quadratis æqualibus quibus ex d e; a b, & f g. Quamobrem, ſi ex inuenta proportionali h i tamquam radio conſtituatur circulus, hic circulus erit quoque æqualis omnibus ſex circulis de duobus radijs æqualibus duobus lineę a b duobus lineę d e, & duobus lineæ fg; ſed illi ſex circuli ex pr. 31. h. ſunt æquales ſuperficiebus fructorū conicorū, omniū quæ figurā ſolidam in ſphæra inſcriptam componunt: Ergo, & circulus ex ſemidiametro h l, cuius quadrantē cōtinet quadratum h q illam ſuperficiem æquabit.

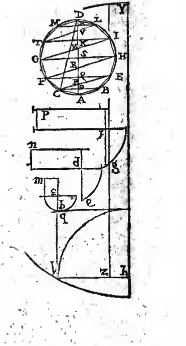
COROLLARIVM.

QVis ex Cor. pr. 39. eſt CD ad CA, vt aliquę chordæ V. g. CB, & EF cum dimidia HS ad AS; quia probatum eſt in ipſa ita eſſe prædictas duas cum dimidia ad AE, vt SO ad OA, & ideo rectangulo ex AC, EF. & dimidia HS tamquam vno latere & ex AB pro alio latere quadratum æquale habebit latus, quod aſſumptum pro diametro deſcribet circulum æquale ſuperficiei corporis conici AHO inſcripti portioni alicuius ſphæræ.

THEOR. III. PROPOS. XLII.

Superficies figuræ ſolidæ in ſphæra inſcriptæ eſt minor quadruplo circuli maximi eiuſdem.

SIt figura duodecim laterum, vel talium, quæ quaternario numerentur in ſphæra AHGD inſcripta, datuſque ſit circulus eius ſuperficiei ęqualis deſcriptus diametro i b ex præced. & quia demonſtratum eſt primo pr. ita eſſe h y compacta ex omnibus quinque chordis CB FB, & cæt. ad diametrum, vt eſt CD chorda ad CA latus; Si conſtituatur ex medijs nimirum AD, & CD rectangulum hoc erit æquale rectangulo ex extremis conſtituto AC, & h y ex propoſ. 17. lib. 6. Elem. vt duod. propoſ. huius Cor. ideoque quadratum bq ex b i æquale prædicto rectangulo z y erit etiam æquale rectangulo ex AC, & CD conſtituto; ſed hoc eſt minus, quam quadratum ex AD. Ergo quadratum i h eſt minus, quam quadratum diametri. Quare, & quadruplum ex h l quale eſt quadratum ambiens circulū, cuius radius h l, quod æquatur figuræ inſcriptæ ſolidæ ſuperficiei ex 40. h erit minùs, quā quadruplum quadrati ex AD; ſed ſicut ſe habet quadratum ad quadratum, ita circulus ad circulum, ideoq; circulus quoque, cuius quadrans in h q æquans ſuperficiē figuræ ſphæra inſcriptæ minus erit quadruplo circuli maximi, veluti eſt AHGD.

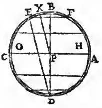


THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Figuræ ſolidæ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies maior eſt, quam quadruplum maximi ſphæræ circuli.

SIt ſphæra ABCD circa quam ſit duodecim laterum circumſcripta figura ſolida ex fruſtis conorum, vt præcedens integrata quamobrem rectangulum ex chorda ED, BD diametro confectum æquabitur rectangulo ex EB latere, & linea æquali omnibus quinque chordis ſimul, quarum vna eſt EF, cui, & æqualis quadrati latus tamquam radio facit circulum æqualem ſuperficiei figuræ ſolidæ ſphæra inſcriptę ex 41. h. ſed hoc rectangulū ex DE, DB eſt maius, quā quadratum ex diametro ſphærę comprehenſę OH in fig. conica; quia habet latus BD maius; latus verò ED eſt æquale diametro OH, quòd ob paralleliſmum DS, PX ſit duplum radij PX. Ergo rectangulum ex DE & compactum erit maius quadrato ex diametro ſphæræ comprehenſæ OH. Quapropter, & ſi fiat quadratū æquale rectangulo à DE, & DB lateribus comprehenſo erit quoque maius, quam quadratum ex diametro

metro OH, conſequenterque quadruplum eius erit maius quadruplo quadrati ex diemetro OH ſphęrę. Circuluſque in eo inſcriptus circulo quadruplo maximi circuli ſphæræ, ſed ille circulus maior quadruplo maximi ſphæræ circuli eſt æqualis ſuperficiei figuræ ſolidæ ſphæra circumſcriptæ, & in maiori ſphæra inſcriptæ, quia eſt æqualis quarta eius pars rectangulo ex DE DB, quòd æquatur rectangulo pro vno latere ex chordis quinque compacto, & pro alio ex EB, cuius quadrati latus



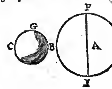
Pro radio vſurpatum circulum facit illius figuræ ſolidi circumſcripti ſphęræ ſuperficiei æquale quale latus in præced. fig. eſt h l, quòd quadratũ, quia æquale eſt rectangulo ex quinque chordis pro vno latere, & pro alio ex EB, quod æquatur DA, & DB rectangulo maius quadrato ex OH diametro, ſi quadruplicetur, erit quoque maius quadruplo quadrati ex OH, & ideo circulus in eo quadrato quadruplo maiori inſcriptus, erit quoque maior circulo quadruplo maiori, quàm circulus ex OH.

Vnde, & fig. conicę circumſcriptę ſuperficies eſt maior quadruplo maximi ſphęrę circuli ex OH.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Quæcumque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt circuli, qui in ea maximus habetur.

SIt circulus B I F ſphæræ maximo circulo B G C quadruplex. Dico, quod is circulus eſt ęqualis ſuperficiei ſphæræ. Nam ſi talis non eſt, erit, aut maior, aut minor, ſed nec maior, nec minor eſſe poteſt: ergo æqualis.



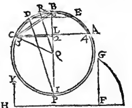
Nam ſi eſt maior, erit aliquis circulus alius æqualis ſuperficiei figuræ ſolidæ circulo circumſcriptæ, qui vel æquabit prædictum circulũ, vel eo erit minor: ſiquidem ſi vna affirmetur maior ſuperficie ſphæræ, & ſuperficies omnis circumſcripta ſphæræ corporis ſolidi, ſic quoque maior; dabitur aliqua ſuperficies ſolidi corporis inter infinitas, quæ erit quidem maior ſuperficie ſphæræ, ſed minor prædicto circulo IFB, ſi enim V. g. ſuperficies corporis ſolidi 12. laterum eſt nimia, poteſt aſſumi 24. laterum, aut 48. aut 95. & ſic in infinitum donec decreſcat vſque quo ſit minor, vel ęqualis circulo IFB, cum ergo quælibet ſuperficies corporis ſolidi ſphæra circumſcripti ſit maior ex 42. h. quadruplo circuli maximi, foret etiam maior circulo prędicto IFB, quod eſſe nequit, cùm minor electa ſit.

Sit rurſus ſupeficies ſphæræ minor, I B F quadruplum circuli maximi BGC ipſius ſphæræ. Dabitur itaque eodem modo circulus maior, quàm IBFA, qui æquabit aliquam ſuperficiem corporis ſolidi in ſphæra inſcripti, ſiquidem ſi maiorem non det fig. 12. laterum poteſt aſſumi 24. laterum aut 48. aut 92. & ſic infinitum donec fiat maior, quàm circulus I B F minor ſuperficie ſphæræ. Sed hic circulus eſt minor quadruplo maximi circuli ſphæræ ex 41.h ergo eſſet maior, & minor circulo FIB, quod eſt abſurdum, cum itaq; nec maior, nec minor eſſe poſſit, erit ei æqualis, & ideo ſuperficies ſphærę quadrupla erit circuli CGB.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Portionis figuræ conicæ ſuperſcriptæ ſphæræ ſuperficies eſt maior circulo, cuius radius ſit chorda à vertice portionis ad baſim eius ducta.

SIt portio ſphæræ O34. cuius vertex O baſis 34. chorda à vertice ad baſim educta O3. circa quã portionem ſit deſcripta figura ſolida conica æquilatera AEBDC, & circa eam circulus ABCP. Deinde eſto circulus, cuius ſemidiameter ſit latus quadrati æquale rectangulo ſub latere BD, & omnibus chordis latera figuræ coniungentibus, & dimidia baſi contento, vt eſt latus FG, cuius quadratum æquat parallelogrammum FH, HK, cuius latus FH æquat EO chordam latera figuræ coniungentem, & CL ſemibaſim, & alterum latus FH æquat BD, & ideo ſuperficies corporis conici inſcripti AEBDC.



Probandum eſt ergo, quòd quadratum ex FG ſit maius quadrato O3. & conſequenter circulus, cui pro radio deſeruit maior circulo, cui radius eſt O3. Quia ergo ex Cor. propoſ. 41. h. conſtat, quod FH ſit ad LB, PD ad AO, ideo rectãgulum ſub medijs LB, PO erit æquale AI, quod ab extremis comprehenditur rectãgulo FH, & BD, id eſt rectangulum ex FH, HK. Rectangulum verò hoc LA, PO eſt maius rectangulo ex IO O2. vt demonſtrabo, cui rectangulo IO, O2. quadratum O3. eſt æquale, vt pariter infra oſtendam, cum ergo rectangulum PO, & LB æquale quadrato GF, & ideo rectãgulo ex HF, HK ſit maius rectãgulo IO O2. & quadrato O3. patet propoſitum, nimirum quod circulus ex FG radio factus æqualis ſuperficiei figurę circumſcriptæ portionis ſphæræ ex Coroll. prop. 40 h. erit maior, quã circulus ductus ex O3. chorda à vertice O. ad baſim X3. deducta, & ideo circũſcripta ſuperficies.

Duo itaque remanent oſtendenda primo quadratum

dratom 03. eſſe æquale rect angulo 10. & 02. lateribus clauſo; ſecundò rectangulum BL, PD eſſe maius rectangulo prędicto ca 10. & 02. & conſequenter etiam quadrato 03.

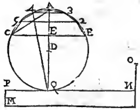
Primum ſic oſtendo ex pr.35. l. 3. Quadratum a 3. eſt æquale rectangulo 12. & 20. cui ſi addas quadratum ex 20. fiet totum rectangulum 10. 02. æquale duobus quadratis ex 20. & 23. ſed iſtis eſt æquale quadr. 03. ex. 11. l. 2. ergo hoc quadr. erit æquale etiam rectangulo 10. & 02. & ecce primum.

Secundum verò, quod hoc rectangulum 10 02. ſit minus rectangulo LB, PD, ſic demonſtro linea LB eſt maior, quam 02. cum triangula BCL, & 013. ſint æquiangula, & minor ſit 23. quam LC, & 30. quam BC, & ideo etiam 02. minor erit, quam LB, alterum vero latus PD eſt æquale 10. lateri. Quia enim AR eſt medietas lineæ AD, & QI medietas diametri IB, ideo erit BR ad BD, vt BQ ad BI, & ideo etiam erit ita QR ad PD: quare PD erit etiam dupla lineæ QB, quæ eſt ſemidiameter minoris ſphæræ, & ideo PD eius diameter, & æqualis 10. quare rectangulum PD, BL æquale in latere PD maius in latere LB, rectangulo 10 02. erit ipſo 10 02. abſolutè maius, quod eſt ſecundum.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Portionis figuræ conicæ ſolidæ ſphæræ inſcriptæ ſuperficies eſt minor circulo, cuius ſemidiameter ſit linea à vertice portionis ad baſim eius deducta.

SIt ſuperficies portionis ſphæræ BAC linea à vertice ducta ad baſim BC ſit AC: corporis conici inſcripti ſint æqualia latera B 2. & 23. 3 A, & cæt. quę rectis coniungantur 25. 34. Fiat rectangulum latere conſtans omnibus chordis, & radio baſis æquale, nimirum rectis 2. 5. 3. 4. & EC, & pro latere habeat A 4. & ſit MN, quibus lateribus inueniatur media proportionalis, & ſit NO circulus, itaque radio NO erit æqualis toti ſuperficiei illius corporis ſolidi ſphæra inſcripti ea Cor. prop. 40. huius. Quia verò ea propoſ. 39. Cor. eadem proportio eſt omnium chordarum in portione exiſtentium cum dimidia, vt eſt PN ad BA ſegmentum diametri interceptum, quam Q 4. ad latus 4A ideo rectangulum ea medijs Q 4, & BA erit æquale rectangulo MN ea extremis ex pr 17. l 6. El. nempe A 4, & omnibus chordis cum dimidia, quæ linea eſt PN, hoc autem rectangulum eſt minus quadrato AC, vt oſtendam, idemque etiam MN, & ideo quoque quadratum ex NO, cum hæc tria inuicem ſint



æqualia; & ideo, ſi ea AC fiat circulus, tamquàm radio erit maior, quam circulus factus ex radio NO, qui ęquatur ſuperficiei fig. conicę inſcriptę ex Cor. pr. 40.

Sic verò demonſtro quadratum AC eſſe maius rectangulo ea Q 4, & EA lateribus extructo. Nam eſt æquale rectangulo ex QA, & AE confecto; Sed hoc rectangulum eſt maius rectangulo Q 4 EA, quod habeat latus QA maius, quàm Q 4: Ergo etiam quadratum ex AC rectangulo illi maiori QA, AE æquale erit maius rectangulo Q 4. AE; quod autem quadratum AC ſit rectangulo QA, AE æquale, patet. Nam eſt æquale ex pr. 11. l. 2. quadratis EA, & EC: at quadratum EC eſt æquale rectangulo QE, EA ex 45. lib 3. cui ſi addas quadratum EA fiet vnicum rectangulum QA, AE ob eandem altitudinem EA æquale duobus quadratis ex EA, & EC, & conſequenter quadrato AC; Cum ergo quadratum AC ſit æquale rectangulo ex QA AE; erit maius rectangulo Q 4. AE, & rectangulo MN, & quadrato ex NO; Vnde, & circulus illo radio AC deſcriptus erit maior circulo deſcripto ea radio NO.

THEOR. VIII. PROPOS. XLVI.

Superficies cuiuſcumque portionis ſphæræ minor dimidia eſt æqualis circulo, cuius radius eſt chorda à vertice portionis ad baſim deducta.

SIt eadem fig. quæ ſuperioris propoſ. BACQ, & portio eius BAC minor dimidia ſphæra. Sitq; chorda à vertice ſphęræ deducta AC, ex qua tamquam radio fiat circulus. Dico hunc circulum eſſe æqualem ſphæræ portionis BAC ſuperficiei.

Probatur. Nam ſi non erit ęqualis, erit aut maior, aut minor; ſed nec vnum, nec aliud eſſe poteſt. Ergo erit ęqualis circulus ex AB ſuperficiei ſphęrę

Probatur, quod maior eſſe nequeat. Nam ſi maior eſt, circumſcribatur ipſi portioni conicum corpus, vt propoſ. 44. huius factum eſt, adeo multiplicatis lateribus, vt eius ſuperficies ſit quidem maior ſphęra, vt ſemper eſt, ſed tamen minor circulo ex AC, qui maior ea ſuperficie ſphęrica prędicatur; tuncq; circulus AC deſcriptus contra oſtenſa propoſ. 44. huius erit maior ſuperficie conici corporis circumſcripti, quod eſt abſurdum.

Probatur quoque, quod non poſſit eſſe minor; tunc enim poterit deſcribi in ſphęra corpus conicum adeo lateribus multiplicatis, vt ſit minor quidem eius ſuperficies ſuperficie portionis ſphęrę; ſed maior circulo ex AC, qui ſuperficie portionis ſphærę minor dicitur, & ita ſequetur contra oſtenſa in præc. propoſ. quod ſuperficies circuli AC poſſit eſſe minor, quam corporis inſcripti conici ſuperficies, quod abſurdum item eſt.

Cum ergo circulus ex AC radio, nec maior, nec minor eſſe poſſit ſuperficie ſegmenti ſphęrici BAC, ipſi erit æqualis, vt aſſerit propoſitio.

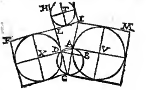
THEOR. IX. PROPOS. XLVII.

Superficies cuiuſcumque portionis ſphæræ maior dimidia eſt æqualis circulo, cuius radius eſt chorda à vertice portionis ad baſim deducta.

SIt ſphęra ABCD, eius portio maior dimidia ſit BCD. Ducatur diameter AC perpendicularis ſectioni BD; deinde duæ chordę AD, DC. Fiatque ex diametro QA, tamquã ſemidiametro circulus; ex

hic

hic cuim erit quater maior circulo maximo ſphæræ datæ, qui eſt ABCD; quia etiam quadratum, in quo concluditur eſt quadruplo maius, vt patet in quadrato CM, cum habeat proportionem lateris



duplicatam, eritque ęquale duobus circulis ex AD radio, & DC radio confectis. Nam eſt quadratum CM ęquale duobus quadratis IH, CF: quare, & circulis ex centro T, & centro X inſcriptis in illis ex centro V deſcriptus circulus, erit æqualis. Circulus autem IH eſt ęqualis ſuperficiei portionis ſphęrę BSD, vtpote chorda AD, tamquam ſemiradio deſcriptus cum IL ſit dupla AD ex 4.l.6. ob duplam CI ipſius CA. Ergo circulus X ęqualis, cum T, circulo alteri V, & ideo toti ſuperficiei ſphęrę, erit ęqualia ſe ſolùm reſiduę ſuperficiei portionis ſphęrę BCDA.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

* *Datam ſphæram, ſic ſecare plana ſuperficie, vt portionum ſuperficies ſimilem cuicumque portioni datæ retineant proportionem.*

*SIt ſphęra data BADQ, & ſemidiameter AQ; ſitque proportio data, quam vnum ad duo ſcilicet X ad I. Inueniatur duabus X, I media proportionalis V, diuidaturque diameter AQ ex Cor. I. prop. 13. lib. 6. iuxta proportionem, quam habet X ad I, & ducatur à puncto diuiſionis H normalis HD, & per H agatur planum BD. Dico ſphęræ ſuperficiem eſſe diuiſam in proportiones datas.



Probatur. Nam ducta AD, QD ex præced. pr. 46. & 47. ſuperficies portionis BAD eſt æqualis circulo cuius radius eſt AD: item ſuperficies ſphæricæ portionis BQD eſt æqualis circulo, cuius radius eſt QD. Quia itaque triangula ſunt ęquiangula ADH, HDQ erit AH ad AD, vt HD ad DQ, & *permutando* erit AH in proportione ad HD, vt AD ad DQ; vt autem AH ad HD, ſic eſt HD ad HQ ex Cor. prop. 16. lib. 6. quare erit AH ad HD, ſic X ad V, quia etiam V eſt media proportionalis inter X, & I, ſicut HD eſt media proportionalis inter AH, & HQ, quę ex conſtructione ſunt in eadem proportione, vt X ad I, & ideo, vt X ad V lineas, ſic erit AH ad HD, & AD ad DQ, & ideo vt AH ad tertiam HQ, vel X ad I ita ex 21. lib. 6. Cor. quadr. AD ad quadr. DQ, vt autē quadr. AD ad quadr. DQ; ſic circulus inſcriptus ad circulum inſcriptum; vt autem circulus inſcriptus in quadrato AD ad circulum inſcriptum in quadrato DQ, ſic quadruplum circuli AD ad quadruplum circuli DQ: Sed quadruium circuli inſcripti quadrato AD eſt æqualis ſuperficiei portionis ſphæricæ BAD, & quadruplum circuli QD quadrato inſcripti eſt ęqualis ſuperficiei portionis ſphæricæ BQD. Ergo ex 16. lib. 6. vt X ad I, ſic ſphęricæ portionis ſuperficies BAD ad ſphæricæ portionis BQD ſuperficiem.

PROBL. II. PROPOS. XLIX.

* *A ſphæræ ſuperficie portionem abſcindere æqualem ſuperficiei circuli dati; dummodo ſemidiameter circuli diametro ſphæræ ſit minor.*

*SIt datus in fig. propoſ. præced. ſemidiameter circuli PR, & ex propoſ. I. Elem. 4. accommodetur in data ſphæra maximo circulo BADQ ducto priùs diametro AQ à puncto Q, & ſit V. g. QD, ducatur deinde DB planum normale ad AQ dico BQD eſſe portionem ſphæræ, quæ habet ſuperficiem æqualem circulo, cuius ſemidiameter PR.

Probatur. Quia PR effecta eſt chorda QD: chorda vero QD vſurpata pro radio deſcribit circulum æqualem circulo ex PR, quod ſit ei æqualis, & item æqualem ſuperficiei portionis ſphęræ, DQB quam ſecat BD baſis, vt ſupra oſtenſum eſt.

TRACTATVS XXXII.

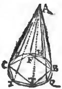
De ſuperficiebus corporum in planum redigentis.

PRoiectio ſuperficierum corporearum, quę in planum extenduntur, aliquibus videbitur forte non omninò Mathematica, cùm per puncta, per quæ habili manu lineæ flexæ ducuntur ſuperficies eiuſdem rationis, & quantitatis, ac illæ, quæ circumambiunt corpora deſcribantur: Verùm ſi iſtæ conſideret, quod & Ellipticæ, Parabolicæ, Hyperbolicæque ſuperficies, ita delineantur, ſicut, & Quadratrices, & Aſymptoticæ lineæ ſic deſcriptæ in præcedentibus fuere: non infitiabitur rigoroſam eſſe hanc ſuperficierum corporearum in planum extenſionem, maximè, quia fundatur omnino in Orthographia, quæ certè Mathematica deſcriptio eſt. Verum tamen eſt, quod ſingulis proiectionibus oſtenſiones non adferemus cùm eas ſupra tract. 25. ſatis produxerimus.

EXPENSIO I.

De ſuperficiebus cylindricis in planum extendendis.

PRæaſſumo tamquam euidens, quo magis multiplicantur inſcripta plana, eorum ſuperficiem magis accedere ad ſuperficiem corporis conuexi, in quo inſcribuntur: Siquidem in Cono recto BAI ſi ſit inſcriptum triangulum BAF, eius ſuperficies erit breuiſſima ex def. 7. tract 3. quæ inter eius lineas terminatrices interiacet, ergo erit breuior, quam BHF ſuperficies coni, & idem dicas de alijs æqualibus inſcriptis: Si verò in ſegmēto FBA coni; duo alia triāgula inſcribātur BAH, & AFH hæc ſimul erunt maiora, quā BAF, ſiquidem BH, & FH triāguli BFA latera ſunt maiora



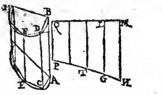
ſimul, quam BF, triangula verò BAH, & AFH ſont maiora, quam BAF, quòd ſint æqualia, & terminent in maiorem altitudinē, quam BAF. Quare ſimul dicent maiorem proportionem ad BHAF ſuperficiē coni, quàm triangulum BFA ex 8. l. 5. & idem dicas de alijs BAQ, AQT, & cæt. æqualibus. Sed adhuc erunt minora ſuperficie coni cum ſuperficies triangulares inſcriptæ, vtpote planæ ſint breuiſſimæ inter lineas FA, & AQ V g. non autem conicæ, globoſæ inter eaſdem lineas BA, & AQ, & alias concluſæ. Quare ſemper magis fit acceſſus ad æqualitatem, quò magis multilaterum inſcriptum facies multiplicat, cum ſemper maiorem proportionem globoſæ ſuperficiei, cui inſcribitur dicat.

THEOR. I. PROP. I.

Si ſint trapezia tot plana, quæ altitudinem trapeziorum cylindro inſcriptorum æquent, & latera eiuſdem longitudinis obtineant, quam inſcripta cylindro: hæc omnia ſimul æquabunt ſuperficiem multilateri corporis cylindro inſcripti.

PRobatur. Nam ex propoſ. 13. tract. 29. trapezia æqualis altitudinis, & baſium æqualium ſunt inuicem æqualia. Cum itaque trapezia DA DE, & cæt. inſcripta Cylindro ſint æqualis altitudinis, & baſis ex theſi, ac MO; LT, & cæt. trapezia plano extenſa. Conſequenter ſingula ſingulis erunt æqualia. Proptereaque ex 18. lib. 5. omnia ſimul trapezia Cylindro inſcripta, ideſt ſuperficies multilateri in ABEFGH æquabitur ſuperficiei extenſæ MNQP.

PROBL.



PRORL. I. PROPOS. II.

Cylindri concaui ab alto cylindro ſecti rectanguli ſuperficiem, partesque eius projicere, & deinde illam in planam extendere.

SIt datus Cylindrus concauus, cuius baſis, ſeu annuli dimidiū ſit CABDFH ſectus à duabus ſuperficiebus cylindricis, quæ proiectæ ex 9. prop. tract. 26. ſint XMN, & OPQ, inter quas interceptus in ſectione AB in figura 112 videre licet, cylindrus intelligatur. Et primò partes cylindri intercepti ſint proiciendæ, atque adeo tota eius ſuperficies. Ducatur circulus medius, & vtcumq; diuiſo aliquo eorum V. g in part. 6. ducantur radij, ſeu radiorum portiones FLA, t 3 3, & à punctis, in quibus circulos ſecant, demittantur perpendiculares ad BC, quas diſtinctionis gratia ab extrinſeco ſemicirculo profectas trahemus continuas, vt 3 4, & à medio punctatas, vt 2 5. ab interno interruptas t 6. & ſic ab alijs punctis quoq; 10 11. 12. & B, G, D, & vlterius producemus vſque ad 7. 8. 9. nempe vſque dum ſecent duos circulos XMN, & OPQ, quibus cylindri ſecantis inſiſtunt ſuperficies, inter quas, ſuperficies cylindri ſecti intercluditur. Et 8ONQ erit cylindri ſuperficies proiecta, cum quoad totum, tum quoad ſingulas partes.

Probatur. Nam XMN, & OPQ ſunt cylindri ad planum recti ſuperficies proiectæ, quoniam ex pr. 8. tract. 26. ſuperficies omnis perpendicularis plano in lineam tranſit, cum ſit eadem, ac ſuperficies proiectrix, & ideo in plano ſit ſectio ſuperficiei proiectricis. Talis eſt autem ſuperficies cylindri ſecantis, cùm ponatur orthogonalis plano. Vnde in lineam tranſibit. Sectio verò eius cum plano circulus eſt aut ellipſis; ergo proiectio eius talis erit. Ruſus ſi in cylindrica ſuperficie ſecta partes lineis parallelis axi diſtinctę intelligantur, cùm axis plano orthographo parallelus ſit omnes erunt parallelæ ex propoſ. 6. & æquales ex 5. prop. tract. 26. diſtantiæ verò earum ad inuicem menſurentur arcu normali, & ſint 1 F, 10 1, & cæt. ideoque diſtantiæ eorum proiectæ ex prop. 8. tract. 25. erunt partes diametri 22 19. & aliæ. Vnde PM 6 9. & alię erunt partes proiectæ quoad latitudinē, & diſtantiā ab inuicē. Sed etiā quoad longitudinem. Nam cum ſint parallelæ plano orthographo æquales erunt illis, quas XMN, & OPQ ſecantes cylindricę ſuperficies detruncant è ſuperficie cylindrica originaria ſectâ DFH. Siquidem, vt diximus XMN, & OPQ proiectricium ſuperficierum ſectiones ſunt. Vnde 6 M P 9 erit ſuperficies cylindri DFH proiecta, & ſic de alijs partibus dicas, vnde totus per partes tali modo proijcietur, & iam apparatus erit completus neceſſarius ad ſuperficiem quæſitam inueniendam.

Quare ſeorſim ducatur recta RT, & in ipſa circuli interni, (ſi ſuperficies interna deſideraretur) partibus FI, I 10 & 10. D partes ęquales aſſumātur, vel certò ipſa linea RT per quadratricem, vel per computum, vt ſupra docuimus, vel practicè minimas partes arcus FI, I 10 & 10 D trāſferendo & deinde in tot numero partes, quot arcus D, 10. I F, diuiſus eſt, diuidatur, ducanturque perpendiculares 13 15. 14 16. R 17. T 18. deinde aſſumatur interuallum 19. M, & transferatur à linea TR, & ſit F 23. & 22 6; ſit 13. 24. ſic 27. 28. menſuret 14. 25. & tandem D 29. diſtantiam donet R 26. perque hæc puncta flexa ducatur 26. 25. 24. 23.

Idem fiat de alijs punctis in arcu OQ repertis. Nam aſſumptis interuallis 19. P transferatur in T 18. ſic 22. 9. in 13. 15. ſicque alia interualla 27. 30. in 14. 16 & D 31. in R 17 perque puncta reperta flexa ducatur 17. 16. 15. 18. quæ terminabit ſuperficiem internam 26. 23. 17. 18. quadrantis cylindri D 10 I F, & idem fiat de ſuperficie externa aſſumendo diſtantias à linea BC ad arcum KM, & ad arcum OP, ſed in lineis continuis à punctis extrinſecis A 3 12 proficiſcentibus.

PROBL. II. PROPOS. III.

Superficies coniunctiuas eiuſdem Cylindri perquirere.

SI annulus ſolidus eſſet diuerſis ſegmentis compoſitus, vt ſolent portarum arcus lapidei, quæritur, quænam eſſet ſuperficies ea, qua coniungeretur lapis ad lapidem.

Sit igitur exquirenda ſuperficies, ſecundum quam ſegmentum 3 I FA, ſegmento 3 I 12 16. coniungitur, quia 13. 15. pertinet originariè ad punctum I. Ideo illi lineæ deberet applicari. Nam illa dat longitudinem illius internam 24. 15. Ab hac ergo linea 13. 15. menſuretur interuallum 1. 2. & ſit 13. 37 & interuallum 1 3. & ſit 37 36. ducanturque perpendiculares 37 35. & 36 34. ad lineam RT. Menſuretur exinde diſtantia 21. 5. à puncto 37. vſque ad 33. & 20 4. à puncto 35 in 32 & ducatur flexa portio Ellipſis 32. 33. 24. Ruſuſque accipiatur interuallum 21. 8. & 20. 7. & transferatur in 37 35. & 36 34. & per puncta 34. 35. 15. flexa ducatur, quæ erit portio Ellipſis, & erit ſuperficies 32. 24 34. 15. quæ quęritur, nempe ea, ſecundùm quam ſegmentum A 3 I 8 coniungitur cum ſegmento 3 I 12 10.

Probatur verò primo propoſitio antecedens. Nam altitudo TR ex effectione eſt ęqualis arcui normali D 10. I F; latitudo verò T 18. & cęterę menſuratę linea T 18. & cęteris vſque ad R 17. eſt æqualis latitudini 19 P vſq; ad O 31. erit ſuperficies 23. 18 26. 17 altitudine quidē ęqualis quadrāti DF, latitudine verò ſuperficiei 19 P D 31. Vnde ex prop. I. h. ęquabitur multilatero ſuperficiei Cylindri inſcripti inter ſuperficies, alteram cuius ſectio 2 19 alteram cuius ſectio OP intercepti.

Ita dicas de ſuperficie RT 26 23. Nā altitudine quidē normali ęquat quadrātē D 01 I F latitudine verò latitudinem D 29 M 19. Quare ęquabitur multilateri ſuperficiei inter ſuperficies planam,

cuius

cuius ſectio D 19 & curuam cuius ſectio KM Quare ſi hęc minor RT 23. 26. ſubducatur ab illa RT 17. 18 remanebit ſuperficies inter media æqualis ſuperficiei intermediæ inter ſuperficies cylindricas, conuexas MNQ, XPO interceptę multilateri Cylindri inſcripti: vnde iam multilaterum, ſi ſit adeo multiplicatis lateribus inſcriptum, vt ſuperficies eius ſenſibiliter non differat à ſuperficie cylindri etiam ſuperficies 26. 23. 17. 18. à cylindrica ſuperficie, quę ſi ſcitur in arcum DF; continetur verò inter circulos, vel inter ſuperficies, perpendiculares arcubus OFQ; KMN, æqualis erit.

Secundò idem probatur de ſuperficie coniunctiua. Nam altitudo quidem 13. 36. eſt eadem, quæ 2. 3. longitudo, verò inter arcus KN, & OQ contineri debet eo in ſitu; quo lineæ 5. 8 & 4. 7. per illa puncta tranſeuntes intercipiuntur inter prædictos arcus; tales verò ſunt ex effectione 34. 32. & 35. 33.

PROBL. III. PROPOS. IV.

Cylindri concaui ſuperficiem internam inuenire à ſuperficie angulari ſecti rectangulè.

SIt idem, qui ſuperiùs Cylindrus concauus, ſeu cylindri quadrans BAFD, diuiſus, vt ſupra, & lineæ ſimiliter ductæ 1 40 44. & 2 41 43. & cæt. quę ſecent lineas angulares VPX, & ZYM, ſuper quas, ſuperficies erectę intelligantur perpendiculariter ad axem cylindri, & erit portio cylindri proiecta præced. Etiam apparatus erit adornatus, vt ex eo extēſio ſuperficiei cylindricæ, quæ intercipitur inter latus VPX, ZYM, & ſuperficiem concauā quadrātis cylindri O 1 10 F texit, diduci queat.

Sit linea RTS, quæ exprimat ſectionem BC Sitque portio T F quadrantis extenſa ſuper eam, & ſit T 13. 21 1. 10. æquet 13. 14. & cæt. perpendiculareſque ad RS, vt ſuperiùs ductæ ſint, vt 3. 46. 49 ſic T 18. 50. & cæt.

Deinde ſumatur diſtantia 19. P, & ſit tranſlata in T 18. rurſùs 22. 40. & ſit 13. 46. Ita 27 51. & æquet 14 47. & tandem O 52. & æquet R 3. quibus punctis repertis ducatur flexa per illa 53 47. 46 18. Idem fiat de alijs interuallis alteriùs angularis lineæ ZYM, nempe de interuallo 19. Y, qui erit T 50. & 22. 44. & erit 13. 49. itaque ſi per puncta 54. 48 49. 50. ducatur flexa, erit vndique terminata ſuperficies 53. 18. 54. 50. quæ erit ea, quæ cylindri quadrantem interiùs texet.

Probatur verò, vt ſupra. Siquidem altitudo eſt TR, quæ eſt eadem ex effectione, quæ lineæ circularis F1 10. D, at latitudo ſuperficiei RT 18. 53. eadem, quæ O 19. P 52. Rurſùſq; latitudo RT 54. 50. eadē, quæ O 19. Y 95. ablata itaque prima longitudine, ab hac poſtrema remanebit 53. 18. 54. 50. ęqualis longitudini 52 P 95 Y; quę intercipitur inter lineas angulares, cum autē ſuperficies interna cylindri quadrantis ſit latitudine quidem æqualis 52 P 95. ſuperficiei, cum inter ſuperficies VP, ZY curuis inſiſtentes intercipiatur, longitudine verò quadranti FD, erit quoque æqualis longitudine, & altitudine ſuperficiei 18. 53. 54. 50.

At ſi quis vellet ſuperficies coniunctiuas eodem modo operabitur; latitudines enim erunt eędē 13. 37. 36. à quibus ducendæ parallelæ 56. 58. & 57. 59. & deinde diſtantia 21. 42 tranſportanda in 37 56. ſicut, & 20. 41. in 36. 57. & deinde ducenda eſt recta 46. 56. 57. Sic tranſlatis interuallis 21. 43. in 37 58. & 20. 45. in 36. 59. ducenda eſt recta 59. 58. 49 & ſic habebimus ſuperficiem coniunctiuā 59. 57. 46. 49. æqualis ſuperficiei, cuius altitudo 3 2 1, longitudo verò inter parallelas 40. 44. & 41 45. intercipitur. De qua eadem ratio, quæ ſuperius militat.

PROBL. IV. PROPOS. V.

Cylindri circularis concaui ſuperficiem internam inuenire à ſuperficie gemina cylindrica ſecti plano perpendiculariter inſiſtentis, ſed non ad axem recti.

SIt ſuperficies ſectionis, vt ſupra cylindri ſecti SAFO non rectangula ad axem, ita quod axis A e non incurrat in axem cylindri ſecantis. Deduces, vt ſupra normales à dato quadrante EDAF à punctis 1 2 3 & cęteris, vt ſupra deductæ, vltrà rectam p q planę ſuperficiei cylindrum ſecantis ſeu eius veſtigiū, nempe ſectionis SACRFO, quam ſenſim in linea 70 71. extendes cum ſingulis eius partibus 1 F, quæ ſit 73. 72. & cæt. accepta poſtmodum diſtantia 96. 61. transferes in 72. & 74 & ſic de cęteris partibus originarijs ab F 1, 1 10. & 10 D arcus FD efficies, & hæc regula in cęteris omnibus extendendis planis ſuperficiebus, tum interna circulari, tum coniunctiua ſeruabitur, vt ex ipſo exemplo potes percipere, & ita ſuperficiem 77. 78. 75. 76. obtinebis; ſicut & coniunctiuas, quarum vna eſt ſuperficies 79. 90. 91. 92.

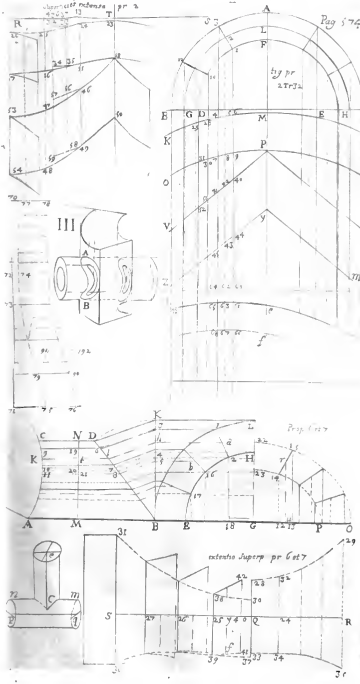
PROBL. V. PROPOS. VI.

Cylindri Elliptici concaui internam ſuperficiem hinc obliquè à ſuperficie plana ſecti inde rectangulè à cylindrica; in planum proiicere.

SIt ſemicylindrus Oualis, ſeu Ellipticus A BCD, cuius oporteat ſuperficiem in planum proijcere, & quia cylindrus Ellipticus poteſt ſecari à plana ſuperficie tali modo, vt ſectio ſit circulus, hęc talis ſit, & circuli interni ſit datus quadrans BH, & externi SL, ſemidiameterque totus ab externa ſuperficie pertingens osęquali ſemidiametro GL, vel G2. Sit verò ab alia parte detruncatus à ſuperficie cylindrica, cuius ſectio ſit ad axem cylindri perpendicularis, vt eſt videre ſeorſum in cylindro e c, qui ſuperficie cylindrica m n detruncatur, ita quòd axis p q ſit orthogonalis axi eius e e; ſuperficies verò e licet rotunda non ſit, tamen ipſi axi e c ad angulos rectos eſt.

Diuidatur itaque circulus, ſeu exterior PL, ſeu interior BH, & trahantur portiones radiorum LH 1 2. & cęt. & ab illis punctis 2, 1. & 1 H, & alijs ducantur parallelę vſque ad SK parallelam radio GL vt ſunt LK, 1 3. & alię continuę ab extrinſeco ambitu, & punctis eius L, & 1, & alię parallelę pūctatę à punctis intrinſeci ambitus, vt ſunt H 4 2 5. & cęt.

Digitized by Google



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

& cęt. A recta deiode DK centro B, interuallo BK, ducatur arcus, qui occurrat lineę CD altitudinis dati cylindri ellipticl G a a. in D, & trahatur DB, quę erit ęqualis SK, vtpote radius, & ideo radio LG, & deinde ducatur DX, & à ceteris punctis 3.4.5. & alijs parallelę prędictę DK educātur vt ſunt continuę 3 6. & cęt. & punctatę 4 7. 8 5. &c. & tandem ab iſtis punctis ducantur parallelę lineę DC, vt ſunt 6 9. 7 10. 11 8. & cęterę, quę erunt lineę in ſuperficie coni exiſtentes: ſed proiectę in plano C A O a, & ideo cylindrus erit proiectus, cuius baſis ad axem rectangula erit a3. a a. P o proiecta in lineam NM ex propoſ. 8. Tract. 26. & obliqua BLEH proiecta in DS, & cylindri ſecantis ſuperficies in lineam curuam A 11 C, quia omnes iſtę, vtpote normales plano orthographo ACDB in lineas tranſeunt ex 8. prop. ant 16. tract. 26. prop. 1. Lineę verò, quę in ſuperficie conica diſtingunt partes lineis parallelis interceptis exprimentur, vt ex demonſtratione prop. 1. colligere poteſ, vel ex 6. tract. 26.

Poſtmodum ducatur GO perpendicularis ad MN, vel GL, quę erit ſemidiameter maior ſit conſtitutus, & poſitus, vt aG, vel GL.

Interuallo itaque perpendiculari H S. & LI ſuper diametrum GO erigantur perpendiculares 12 14, & 13 15, & cęt. quę diſtent à GH, vt eſt diſtantia perpendicularis H a. vel S L, & ſic fiat de cęteris punctis internis 16 17. & etiam externis correſpondentibus, & habebimus ſemidiametrum maiorem ellipſis OO ſimiliter truncatum, & diuiſum, prout eſt diuiſus EG à perpendicularibus, quarum vna eſt 18 a. Transferantur itaque altitudinea externę ſuperficiei MN in G 22. & M 19. in 13 15. & cęterę, tum internę M 20. in G 23. & M 21 in 12 14. & cęterę punctatia, & parallelis intercęptę ſuper punctataa perpendiculares correſpondentes 12 14. & cęt. per puncta vrtò 23 14. & cętera in illis exiſtentia deducatur ęquabili manu curua, nam hęc erit ellipſis interna, quę cylindri axi rectangula eſt: Deinde per puncta extrema in lineis continuis reperta vt 22. 15. & cęt. ducatur rurſus æquabili manu linea curua. Nam hęc ellipſis extrinſeca erit, quę axi cylindri item rectangula eſt.

Quod oſtenditur, aut ex propoſ. 13. tract. 26. quia ibi aſſeruimus proiectionem ellipſis ellipſim eſſe, vel ex propoſ. 72. tract. 24. de conicis. Nam perpendiculares ſinus, vt 18 a. & cæteri deuecti in lineam SK redacti fuere per parallelas ad eius diuiſiones ſimiliter ſectum minorem ſemidiametrum MN externum, M 20 internum; Quare G 23. 12 14. interni, ſicut, & externi G a a. & cęt. quilibet ſuę portioni in MN correſpondenti æquales lineę erunt ſimiles ſinubus originarijs 23 C ipſi GH vt 15. 14. ipſi 18. a. Quare iſti ſinus 12. 14. G 22. erunt applicatæ ad partes eaſdem diametri GO, vel GP; & ideo per eorum extrema tranſibit ellipſis, cui O 23. minor diameter eſt.

Itaque habemus iam. In Cylindro ACSD ambitū axi orthogonalem; tum intrinſecum 23. 14. P tū extrinſecum 22. 15. O: Quare ſi per minimas particulas in lineam rectam vtrumque ambitum proiciamus; ita vt QR ſit ęqualis intrinſecę 23 14 P, & QS ſit ęqualis lineę 22 15 O extrinſecę ellipticę habebimus longitudinem ambitus cylindri in planum extenſam, ſaltem quàm proximè, faciemuſque ſingulas partes ſingulis quam proximè ęquales Q 24 flexę 23 14. & cęterę cęteris; ſicut, & Q 25. flexę Ellipticę 22. 15. & alię vſque ad S alijs ęquales, vt ſunt 25 26. 26 27. & 75 S perque ſingula diuiſionum puncta perpendiculares ducantur 28 Q, & 29 R, & cęterę intermedię, ſicut, & S 31. Q 30. & cęterę interpoſitę; quas ſingulas ſingulis correſpondentibus in cylindro CDAB faciemus æquales tali modo. Quia QR eſt ambitus 23 14 P, cuius diameter M 20, & quęlibet latitudo eius, vt Q 24 correſpondet cuilibet ambitus 23 14 P V. g. portioni 23 14 linea quoque Q 28 erit ea, quę ſecundùm longitudinem tranſit per punctum 23. quę eſt 20 7. linea in cylindro ACSD. Vnde 20 7. longitudo transferetur in lineam Q 28 à linea QR punctoque Q vſque ad 28. & ſic de alia punctata fiat; aſſumpta enim eius longitudine 21 8 transferatur in 24 32 & ſic ſucceſſiuè de alijs. Deinde longitudo reſidua punctata 20 10 transferatur in Q 33. & 21. 11. in 24 34. & ſic de alijs, perque extrema puncta 28 32. & cęteris vſque ad 29. ducatur ęquabili manu flexa 28 32 29. ſicut, & per puncta 33 34. & alia vſque ad 35 flexa ducetur, & erit ſuperficies interna extenſa 28 29 33 35. Cylindri prędicti C D A B, cuius ambitus interior 23 14 P radius maior GP minor M 20. axis AB, patet verò quòd cętera pars ſemicilindri eiuſdem ab hac, quæ eſt quarta pars non differet.

Eodem modo ſuperficies externa extendetur. Nam ND transferetur in Q 30. at 19 6. in 25 38. & ſic de alijs. Pariter 19 9. in 26 39 & NC in Q 37. & ſic de alijs notatis. Ergo omnibus punctis normalium, tùm hine, tùm inde lineę QS coniunctis flexa 30 38 31. ſicut & alijs 37 39 36. habebimus ſuperficiem extrinſecā pro ſui parte dimidia ſemicylindri CDAB, cuius ſectio plana cognita BLHS expreſſa per lineam DB, & ad aliam partem, cuius ſectio eſt cylindrica expreſſa per arcum AC, & ambitur exterior plani ad axē recti a2 15 O.

Probatur verò, quod talis ſit. Nam eiuſdem altitudinem, nempe quartam partem ambitus per lineam QS expreſſimus, & lineę flexę longitudinem terminantes V. g. 30 38 31. & 37 39 36. per datas lōgitudines duximus, nēpe per 30 Q ęquales longitudini ND, & Q 37 ęqualia longitudini 19 9. & ſic dicas de alijs: quare ex oſtenſis prop. 2. deductis à prop. 1. ſuperficies 28 29 23 35 ęquabitur ſuperficiei cylindricę internę prędictis ſuperficiebus interceptę, ſicut etiam ſuperficies 30 31 36 37 erit ęqualis externę prędictis ſuperficiebus abſciſę.

PROBL. VI. PROPOS. VII.

Superficies coniunctiuas eiuſdem ſemicylindri plano diſtendere.

QVia Cylindrum prędictum conſtantem fingimus, diuerſiſque quaſi doliorum aſſeribus coagmentatum, ideo ſi quis etiam ipſarum iuncturarum ſuperficiem vellet agnoſcere, id faciliter fiet.

Nam earum ſuperficierum craſſitudines, ſeu latitudines habemus expreſſas in lineis 22 23. 14 15. & alijs, quę vtramque ellipſim intrinſecam, & extrinſecam connectunt, longitudinemque tum intrinſecam, tum extrinſecam in ſuperficiebus nuper inuentis. Sit ergo inuenienda ſuperficies iuncturę 14 15, hęc erit longitudinis extrinſecę 38 39. quare à puncto 25. ſuper lineam SQ verſus,

ſus, quam volueris partem transferes interuallum 14 15. quod erit 25 40: ductaque linea 41 42. habebis quoque terminum extrinſecum, nempe longitudinem 24 32. vel 21 8. quod interuallum transferes in 40 42. duceſque 38 42 & erit terminata ab hac parte ſuperficies quæſita. Rurſus transferes 24 34. vel æqualẽ 21 11. in 40 41. At quia ſuperficies iſta quatenus terminat in cylindrũ CA nõ facit ſectionẽ lineã rectã, ideo terminus huius ſuperficiei coniunctiuæ, quã preſtare volumus linea recta non erit, ideoque aliud punctum medium, per quòd linea flexa ducatur inueniendum erit: Ideo diuiſa linea a 1 in a ducatur parallela, alijs lineolis continuata a b, deinde h i, deinde t x: habebimuſque longitudinem t x. Deinde diſtantia pũcti a 22. à linea LG aſſumpta trasferemus à o in u, & ducta perpendiculari u r dabit punctum r, diſtantiam ergo iſtam 14 r transferemus in 25 y, ductaque y ſ transferemus diſtantiam t x nuper inuentam in y ſ, habebimuſque tria puncta 39 ſ 41. per quæ ducta linea curua terminabit ſuperficiem coniunctiuam 38 42 39 41. Et ſic ages in alijs ſimilibus.

Ratio verò, & euidentia operationis ex ratione prop. 1. huius ſatis innoteſcit; patet vero ex prop. 22. tract. 25. lineam curuam 39 ſ 41. ellipſis non eſſe portionem.

PROBL. VII. PROPOS. VIII.

Semicylindri concaui, & rotundi ſuperficiem hinc obliquè à ſuperficie plano ſecti, inde à Cylindro item axi obliquo, in planum extendere, & repreſentare.

Sit datus Cylindrus ABCD, qui ſecetur, vt oſtenditur ſeorſim, nempe à ſuperficie plana a b, & à cylindri f e ſuperficie, quæ ambę obliquè ad axem c d ſecent, ſeu æquidiſtanter, ſeu non, verſùs tamen eaſdem partes, ita, vt linea a b maximę declinationis ſuperficiei planę ſit in eodem plano ac axis f e, & detur eius ambitus ad axem rectus, cognitus nempe circulus, cuius diameter exterior ſit XE, & interior ſit XF.

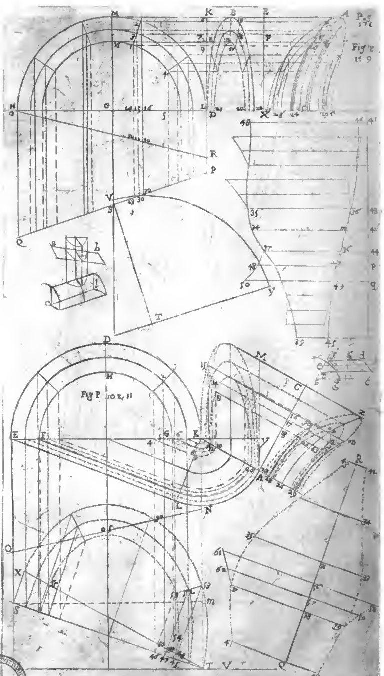
Diametro itaque XF fiat circulus LMH, & diametro interiori XF alius eodem centro G, inſuperque addatur alius circulus intermedius, vt placet, diuiſoque altero eorum in quotlibet ſegmenta, ducantur radij M N, 2 1, & alij, & à punctis, in quibus circulos ſecant ducantur parallelæ, tùm diametro LH, tùm diametro GM, à punctis quidem intrinſeci gyri propter diſtinctionem continuę, vt M B & 2 10 à medio punctatæ, vt 3 11. 4 5. & 3 7 ab interno lineolis continuatæ, vt 1 12, 1 9, & producantur, quantùm ſat eſt.

In plano deinde LHPQ, ducatur OR, quæ repreſentet maximam obliquitatem planæ ſuperficiei, cum axe GS, & rurſùm PQ, quæ item repreſentet obliquitatem ſuperficiei cylindricæ ſecantis, cuius cylindri ſemidiameter ſit TS.

Diſtantiæ itaque, vt 14 12 intrinſeca, 15 11 media, 16 10. extrinſeca aſſumantur, & ſuper parallelas in ijſdem lineis, quibus oriuntur lineæ aſſumptarum diſtantiarum transferantur: nimirum 14 12 in lineolis diſtinctam 8 9 17. à pũcto 9 vſque ad 17. diſtantia 15 11. in lineam punctatam 3 7 18. à puncto 7. vſque ad 18. & ſic 16 10. in lineam continuam extrinſecam 2 6 10. à puncto 6 vſque ad 19. & ita agatur de cęteris; quibus omnibus tranſlatis per puncta in ſingulis parallelis ſignata, quę intrinſeco ſemicirculo naſcuntur duces flexã 20 n. 17 21. quę erit dimidiata ellipſis: Deinde aliam per puncta ſignata in parallelis à medio gyro profectis punctatis, & tandem omnibus maiorem D B 22 per puncta ſignata in parallelis à gyro extrinſeco exortis, quę erit extrinſeca Ellipſis. Coniunges deinde tres ellipſes lineis curuis per puncta tria vnum in lineolis deductis alterum in punctatis tertium in continuis reperta 17 18 19. quę imitabuntur, & ſtabunt loco ſegmenti radij 2 3 1. Quod autem prædictæ circumferentiæ ſint ellipſes, patet ex tr. 25. pr. 22. vbi ſectionẽ cylindri obliquam ellipſim eſſe oſtẽdimus, & pr 17. tr. 26. par. 1. Et etiam, quòd longitudines 16 10. & 15 11. & cæt. tranſlatæ ſint proportionales ob earum parallelismum in triangulo LOHR non completo; quare vt eſt HL ad H 14. ita eſt OL ad 14 12. deducta diſtantia HR ab vtraque, & ſic de alijs, vnde ex prop. 72. tract. 24. Coroll. deſcripta erit ſemiellipſis, & proiectus ſemicirculus LMH; & alij interiores.

Sed modo vertamus opus ad deſcribendas orbitas; quas cum cylindri ſuperficie obliquè ſecti facit ſemicylindrus propoſitus: Sciendumque eſt quaſlibet ſuperficies parallelas axi in obliquo cylindro ex TS rad. non efficere ſectiones circulos licet cylindrus ſit circularis, ſed ellipſes ex prop. 22. tract. 25 Et quia omnes eundem angulum faciunt cum axe cylindri ſecantis omnes erunt ęquales ex eiuſdem prop. Coroll. ideoque oportebit priùs dato diametro cylindri ſecantis inuenire ſaltem quartam ellipſis, cuius ſemidiameter minor eſt TS, vel TY, nempe ſemidiameter circuli, qui cylindro ſecanti baſis eſt, & alter TV, prout TV parallela axi SM cylindri ſecti tranſeundo obliquè per centrum T augeſcit. Qua ellipſi deſcripta ex repertis axibus TS, & TV. Fiat modulus ex papyro, ſeu aliqua alia materia, vt non tibi ſint deſcribendæ tot ellipſes æquales, quot opus ſunt. Deinde aſſumpta diſtantia 14 23. & alijs linearum parallelarum deductarum, menſuretur ab L verſus Z ſuper lineã LZ. & ſit L 24. Sic o 5 ſit L 25 · applicato dein modulo TVY, ita vt linea VT cõgruat lineæ ZL, & punctum V puncto 24. deducatur ellipſis 26 24. ſic applicato rurſùs modulo ſuper eandem lineam eodem modo, ſed ita, quod punctum V congruat puncto 25. deducatur portio ellipſis 25 A, & ita fiat de cæteris, & vbi protractæ ellipſes ſecant parallelas lineolis ductas 27 N, & 26 1, & cęteras à ſemicirculo intrinſeco deuectas ea puncta notentur, & per ea deducatur orbita 28 27 26 29. Sic fiat de lineis punctatis deſumendo diſtantias 15 30. & os, & cęteras, at transferendo illas ob L verſus Z, & deinde ſingulis punctis eodem modulo elliptico applicato alię portiones ellipſium trahantur, & per puncta quibus parallelas, vt 4 31. flexa ducatur: Iterumque idem fiat de diſtantijs in lineis continuis deſumptis 32 16. quod interuallum cum cæteris in lineis eiuſdem generis deſumptis transferatur ab L verſùs Z. Et applicato eodem modo modulo TVY portiones ellipticę ducantur, & vbi ſecant parallelas continuas, vt MA per ea puncta, vt per A orbita ducatur quę erit 33 A C. Et tandem ipſæ orbitæ, & puncta per quæ deducta ſunt lineis, vt 27 31 A, & 46 51 52. quę etiam flexæ erunt, coniungantur.

Itaque portiones ellipſium, vt 24 26. & aliæ duce-



NAPOLI

diſcedentes à diſtantijs 14 23. eadem quę L 24. in plano parallelo axi ſed eodem, qui L 25. proiectę occurrunt lineis 2 26. & alijs, & puncta, quibus illę 2 26. & ſimiles occurrunt ſuperficiei cylindricę decernunt: Vnde, & longitudines exhibent 24 23. non quidem in plano: ſed in ſua naturali eleuatione, quę eſt lineę 9 26.

Iam verò omnis apparatus concinnatus ad ſuperficiem, tum extrinſecam, tum intrinſecam extendendam.

Ducatur linea recta 40 41. & ſingulę partes circuli interni per eam extendantur, vt IN ęqualis lineę 42 43. cęterę cęteris partibus, & ab ijs punctis erigantur perpendiculares, vt 42 34. 43 35. & alię. Deinde ſumatur diſtantia à linea LX ad quodlibet punctum in lineolis parallelis repertum, vt 9 17. & transferatur à puncto 44. in 36. & punctum 9 26. in eadem lineolis contexta, & transferatur ſuper eadē 44 37. & ſic fiat de omnibus alijs punctis in ijſdē parallelis diſcontinuis repertis. Et iam in perpēdicularibus 44 37. 42 34. & 43 35 & alijs hinc vſq; ad 46 38. inde vſq; ad 45 39. cōſequemur puncta, per quę ducta flexa 46 36 45. & 39 34 48. dabit ſuperficiem concauam internam cylindri propoſiti 46 45 48 39.

Si verò ſuperficies externa in planum proiicienda ſit, id non alio modo peragemus; ſed puncta in lineis continuis, quę proueniunt à ſemicirculo extrinſeco quęrenda V.g. in linea MA, vt BK, 6 19. & alijs eiuſdem generis.

Patet verò aſſignatam ſuperficiem eſſe intrinſecam cylindri, quia altitudines, vt 42 44. ſunt ſemicirculi intrinſeci in partes octo ęquales diuiſi, cuius vna pars IN, à perpendicularibus 44 37. & a ijs, in quas diſtincta eſt ſuperficies prędicta: Longitudines verò patet eſſe V. g. lineę 24 22 23. ſed cum additamento, quòd ellipticā coruitas cylindri ſecantis ſuperaddit. Hę curuitates ellipticę ab ellipſi deductę V. g. curuitas 24 26. à puncto L diſtans, vt 24 à 23. prouecta vſq; ad altitudinē 26. ſuperaddit aliquid, & ſit longior linea 9 26. quam 24 L, & conſequenter, quàm 24 23. Idemque deſumpta longitudo 27 8. dabit longitudinem ſuperficialem, eo in puncto 42 34. à quâ detracta longitudo 42 m ęqualis longitudini 8 n relinquit longitudinem cylindricę ſuperficiei eo in puncto m 34. ęqualem longitudini n 8. & ſic de alijs punctis.

PROBL. VIII. PROPOS. IX.

Superficies coniunctiuas eiuſdem ſemicylindri plano extendere.

SIt iunctura 1. 2. 3. plano extendenda; quia 36 37. ſuperficiei intrinſecę extenſa ad eam ex ordine pertinet, hanc ſuperficiem coniunctiuam ei addemus; Sumpto itaque interuallo 1 3. & 3 2. transferātur, & eodē interuallo parallelę eidē 36 37 ducantur 47 48. & 49 50. Deinde ſumatur interuallum 7 18. in punctata, & 19 6 in continuata, transferaturque 19 6. in q 49. & 7 18. in P 47. ducaturque linea, quę flexa per tria puncta tranſeat 36 47 49. Deinde aſſumptis diſtantijs 7 51 transferatur in P 48. & 6 52. in q 50. & per tria puncta ducatur flexa 37 48 50. eritque iunctura 36 49 37 50. quę per 1 3 2. tranſit. Eodem autem pacto propoſitio oſtenditur, ac precedens.

PROBL. IX. PROPOS. X.

Superficiem ſemicylindri inuenire, dato eius ambitu ad axem recto, qui ſecetur à ſuperficie plana, nec axi, nec plano per axem, & per diametrum ducto rectangula; ab alia autem parte conica ſuperficie ſecetur, cuius coni axis ipſius axi rectangulus ſit.

DIffert hæc propoſito ab antecedenti. Nam plana ſuperficies ſecans erat plano per axem cylindri ſecantis ad rectos angulos; at verò hęc ſuperficies plana nequaquam, vt eſt videre ſeorſùm: nam cylindrus a e c d b ſecatur à cono g a e f, & planum ſecans c b d plano g b per axem u m cylindri tranſeunti non eſt perpendiculare, vt eſt l i K, quod prę ſupponitur cognitum, nempe eſſe circulum (poſſet verò, & eſſe ellipſis, vt, & in præced. propoſ. etiam poterat eſſe ellipſis) Axis tamē coni g f eſt ad angulos rectos axi m u. Sit ergo circuli cylindri interni ſemidiameter AB, & externi AC, ex quibus interuallis duo circuli ducantur KDB, & GHF diametro extrinſeco AC intrinſeco AB, aliuſque medius.

Diuiſiſque, vt ſupra illis circulis KDK, vel GHF radijs 1 2 3 deducantur perpēdiculares 1 4 lineolis 2 5 punctis 6 3 continua deductæ. Dato verò quod ad alteram partem magis diſtet à KB recta ad axem ſuperficies quantùm eſt MT ad punctum K ducatur æqualis LK, & à punctis 6 5 4. & omnibus alijs à perpendicularibus 1 4. & cæt. nōtatis in diametro KA ducantur parallelæ, & eꝰ normales 6 7. 5 8. 4 9. & cæteræ. Deinde ducta AK; vtcumque fiat angulus CAM: quo planum num ſecans obliquè AM declinat à plano CA ſecante axem rectè, & facto centro in K lineæ arcubus 9 10. 8 12. 7 11. deducantur ad AK, & à punctis quibus ſecant 10 12. & 11. & alijs erigantur parallelæ ad AM, vt ſunt 10 13. 12 14. 11 15.

Aſſumptis verò altitudinibus 1. 4. & alijs transferantur ſuper AC ab A, & 1 4. ſit A 18. & 5 2. ſit A 17. & 6 3. ſit A 16. & ſic agatur de omnibus alijs altitudinibus, ſeu ſinubus, & per puncta ſignata parallelæ ducantur 15 16. 14 17. & 13 18. & cæteræ, occurrent enim primò ductis punctatæ punctatis, continuę continuis, & interruptæ lineolis interruptis: Per puncta itaque vbi ſe continuæ ſecant ducatur ellipſis A 15 e, & per puncta vbi punctatæ ſe tangunt, ducatūr ellipſis 20 14 22. & per puncta vbi interruptæ ſe ſecant vltima, minorque ellipſis ducatur 19 13 21. Erunt autem hę flexę dimidiæ ellipſes ex 28. tract. 25. quia planum ſecans obliquè ad axem cylindrum facit ſectionem ellipſim. Coniunganturq; tandem puncta 13. 14. 15. & ſimilia, & iam erit parata conſtructio, quæ ad ſectionem planam ſpectat.

Sit deinde axis coni IV, cuius baſis circulus, & ſuperficiei ſecantis veſtigium NO: A ſingulis punctis V. g. 90. aſſumantur rectangulè diſtantię ab axe IV, & facto centro in P, ducatur arcus 23 24. ſicque fiat de cæteris punctis V. g. aſſumpta puncti 95. diſtantia rectangulè ab axe IV con NO eodem centro P ducatur circuli arcus 26 27. &c.

Puncta verò pertinentia ad idem genus linea-

rum nectantur flexis, vt ducta eſt 29 27 24 23. nectanturque puncta 24. 30. flexa, quæ portiones ellipſium erunt ex 6. tr. 23. ſiquidem ſunt plana ſecantia cylindrum per axem 3. 2. 1. ſecundum eam ſectionem, quam ſecando conum in eius ſuperficie relinquunt. Iamque eſt proiectus cylindrus in XMZ 29 A, & portio coni, quæ ab ipſo ſecatur in 28 30. Z 60 29. Et obliqua ſuperficies ſecans obliquè in X 15. A, vt ex 12. tract. 25. par. 1. colligi poteſt.

Hoc apparatu præſtito, iam ſuperficies interna eodem modo, ac ſuperior in planum diſtenditur. Io Linea ſeorſim ducta QR circuli intrinſeci partes transferantur, quarum vna eſt IH translata in 31 38. & per puncta diuiſionum rectæ perpendiculares ducantur 33. 35. 39 37. & cæt. Aſſumpta deinde diſtantia à linea AC ad quodlibet punctum pertinens ad ſuperficiem intrinſecam linearū diſcontinuarum vt 18 13. transferatur in 38 37. deinde aſſumpta diſtantia 18 63. transferatur in 38 39. & ſic agatur de alijs ad ellipſim intrinſecam 19 13 10, & orbitam alteram 29. 27 24. pertinentibus. Habebimuſque puncta 40 39 33 34 42. & cætera, per quæ flexa æquabili manu trahenda; ſic & habebimus puncta 41 35 43. & alia, per quæ ſimiliter flexa ducta totam ſuperficiem extrinſecam cylindri propoſiti exhibebit 40 41 42 43. Extrinſeca verò eodem pacto fiet aſſumendo puncta ad extrinſecam orbitam, & ellipſim ſpectantia.

Sed ſi quis ipſam ſectionem, & ſemiellipſim; qua planum ſecat cylindrum datum in ſua naturali magnitudine exoptet; id conſequetur hoc modo. Ad ST à punctis 6. 4. 5. & cæteris perpendiculares ad XR ducatur, nempe 4. 46. 5 47. 6 45. & cæt. ab iſtis verò punctis ad ſectionis lineam ST perpendiculares rurſùs ducantur, vt 45 48. 47. 49. 46 50. & quantum ſufficit ad aliquatenus maiorem altitudinem, quàm AM; aſſumpto deinde interuallo AT transferatur in SX ad eam partem, quà magis ſectio ST accedit ad XR, & ducatur XT. Deinde altitudines 10 13. 12 14. 11 15. transferantur quælibet in lineam eiuſdem generis, & correſpondentia, & ſint 48 53. 49 52. 50 51. Sicque fiat de alijs, & per puncta in lineis eiuſdem generis æquabili manu ellipſis ducatur V. g. per puncta pertinentia ad lineas continuas ducatur ellipſis X 53 T, & aliæ per alia, vt meliùs videa, & habebis ſuperficiem X 53 T 54 51 55. ortam à ſectione obliqua cylindri, & eſt ellipſis; ſed cuius diameter AT eſt ex coniugatis non à generatione, quod autem talis ſit, patet quod ST partes proportionales KS lineæ partibus, obtineat, & applicatas item vt 50 51. etiam proportionales ob parallelas 15 16. & cæteras, quibus detruncatur, & terminatur, vnde ex prop. 72. Coroll. tract. 24. ellipſis erit, quod, & poteſt oſtendi ex prop. 22. tract. 25.

PROBL. X. PROPOS. XI.

Superficies coniunctiuas eiuſdem Cylindri reperire.

HOc fit eodem modo, ac ſuperiori. Nam ducuntur parallelæ per puncta 56. 57. ad interuallum à linea 39 37. quæ eſt 1. & 2. rurſuſque inter 2. & 3.

Sic verò terminabuntur interuallum 15 55. transportabitur in 56 51. & 17 14. in 57 62. & per puncta 37. 62. 61. ducatur flexa 37 62 6.1 Sicque præſtabitur ad aliam partem; nam interuallum 16 60. transferetur in 58 56. ſicut, & 17 61. in 57 59. & per tria puncta flexa ducetur 39 58 39. & erit ſuperficies coniunctiua 58 59 37 61. idemque ages in alijs.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Semicylindri ſuperficiem à perpendiculari eiuſdem rationis, ſed Cylindro ſecti, & data ſectione plana declinante, & inclinata, alio modo in planum proijcere.

IN præced. pr. Cylindri ambitus circularis axi rectus præſupponebatur cognitus; hic autem ipſa ſectio plana præſupponitur cognita, at verò ambitus cylindri, ſeu ſemicylindri conquirendus eſt, & poſſet quidem eodem modo exquiri, ac præcedens, ſicut, & præcedens probl. hoc modo in opus deduci, ſed doctrinę abundantioris gratia.

Sit data ſectio conica plana circularis ADCGEV, & inclinatio ad planū per axem ductum exprimatur per lineam AH inclinatā ad AC; declinatio verò per LK ad AC non æquidiſtantem.

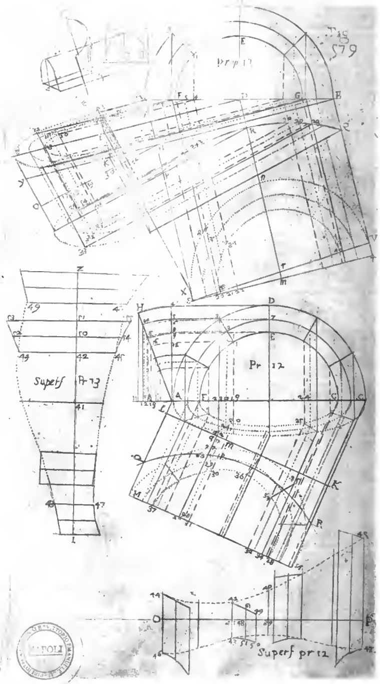
Per puncta 1. 2. 3. quibus radij de more ducendi ſecant tres circulos, (vt in alijs factum) ducantur parallelæ ad diametrū AC, vt ſunt D 4. 7 6. 3 5. 2 8. & cæterę vſq; ad A 4 & facto centro in A, iterum deducantur arcubus ad AH, vt linea AH repreſentans ſectionem ſit æqualis ſecundùm omnes diuiſiones lineæ A 4. & ab omnibus punctis, in quibus ſecatur ab arcubus prædictis perpendiculares, vt ſunt continua H 11. & 14 12. punctata 15 18. & lineulis producta 16 13. & aliæ eadem.

Deducantur rurſùs ab ijſdem punctis 3. 2. 1. & elijs ſimilibus perpendiculares ad AC, quæ, & producantur vlteriùs 1 19 20. 2 21. & 3 22. Aſſumpta verò diſtantia A 13. interruptæ perpendicularis 16 13. à puncto A. transferatur à puncto 19. vſque ad 20. & 24. vſque ad 25. ſic diſtantia A 18. in 17 21. & ad aliam partem quoque, & diſtantia A 13. in 23 22, & ſic de cæteris diſtantijs hinc inde illas transferendo, vt in prima factum eſt: Per puncta verò pertinentia ad eiuſdem generis lineas, vt per V 20. 25 O, & alia, flexa, curuetur, & erit proiecta ex tract. 24. pr. 72. vel ex 16. prop. 16. tract. 26. par. 1. ſemiellipſis, ſicut, & per cætera puncta aliæ ellipſes ducentur, deinde quælibet tria puncta, vt 20. 21. 22. nectantur rectis.

Ab iſtis verò punctis omnibus perpendiculares ad ſectionem obliquam declinantem LK agantur, & producatur quantùm ſufficit, deinde aſſumpta diſtantia 12 14. originata à puncto 3 transferetur ſuper lineam habentem eandem originem à linea MN, & ſit 26 27. & ſic ad aliam partem 34 35. ſic altitudo 18 15. proueniens à 2. transferatur ſuper lineam 21 28. habentem eandem originem, & ſit 28 29. Idem fiat de altitudine 13 16. & transferatur in 31 30. lineam originatam ab 1. & idem fiat ad aliam partem qualis eſt 32 33. & ſic de omnibus alijs fiat eandem diſtantiam hinc inde transferendo, perque puncta pertinentia ad idem genus linearum flexæ ducantur, quæ, & erunt ellipſes, vt conſtat ex Coroll. 2. propoſ. 72. tract. 24.

quia

Digitized by Google


Fig 579
Pr 12
Superf Pr 13
Superf pr 12

quia tum LX ſecta proportionaliter eſt, vt AC ob parallelas; ſicut, & altitudines IL, H, & cæteræ ſunt altitudinibus BD, & cæteris proportionales: quare erunt deſcriptę tres ellipſes, quæ exprimunt Ellipſes axi rectangulas exiſtentes, quod requiritur, vt ſuperficies expetita in planum diſtendi poſſit.

Ducta itaque ſeorſim linea OP, ſit ſuperficies interior extendenda. Semiellipſis 37 30 36 33 38. cum ſuis omnibus partibus in lineam ipſam OP extendatur, quo facto per puncta ad illam perpendiculares ducantur, vt 39 40. 41 42 43. Sumatur deinde interuallum m 20. & transferatur in 41 42. deinde interuallum m P, & transferatur in 41 43. & ſic fiat de cæteris omnibus interuallis linearum interruptarum, quæ pertinent ad intrinſecum circulum FBG, & ab illius punctis originem trahunt intercluſis inter ellipſes F. 20. 25. G. & KL, ſicut, & inter QPX cylindrum prolectum, & eandem LX, & inuenies perpendicularium 43 41 42. & cæterarum longitudines. Quamobrem per puncta extrema 44 42 40 45. ducta flexa, & alia ſimili linea per puncta 46. 43. 47. & cætera, iſtę duæ terminabunt ſuperficiem cylindri internam 44 45 46 47. quæ exquiritur.

De ſuperficiebus verò coniunctiuis non multa dicenda cum latitudo 30 27. vt eſt 41 48. altitudo verò q 22. det altitudinem 49 48. & q 60. det altitudinem 48 50. Vnde ducta per puncta 42 49. recta, & flexa 43 51 50. dabit ſuperficiem coniunctiuam 42 49 43 50.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Semicylindri ſuperficiem in planum proijcere, cuius ſectio plana declinans, & inclinata nota ſit, ſeceturque Cylindro ad aliam partem rectangulo ad axem.

Sit ſemicylindri nota ſectio plana effecta, quæ ſit circulus, ſeu annulus planus ACBGAF: Sitque linea declinationis BH, at inclinationis LX, vel angulus DLX. A portionibus radiorum 1. 2. 3 & cæteris ducantur perpendiculares; ab extrinſeco quidem circulo continuę, à medio punctatæ ab intimo interruptæ, vſque ad AA, vt 1 4. 2 5. 3 6 & à punctis, in quæ incidunt, ducantur perpendiculares lineæ AH, vt ſunt 4 7. 5 8. 6 9. & producatur vſque dum ſufficit. Ducta deinde parallela XM, ipſi AH aſſumantur altitudo 4 1. & feratur in 7 10. ſicut, & 5 2. & collocetur in 8 11. & 6 3. & tranſportetur in 9 12 & ſic fiat de cæteris alijs interuallis, transferendo ea ſuper illas lineas, quę originem ducunt ab ijs punctis, quæ interualla transferenda terminant, vt BD in L 13. Per hæc autem puncta, quæ ad idem genus linearum pertinent V. g. interruptarum ducatur orbita 14 13 10 7. & ſic per alia puncta reperta, tum in punctatis; tum in continuis, vt extrinſeca X C 12. M 3 quæ erunt ſemiellipſes, quod AH proportionaliter diuiſa ſit, vt conſtat ex Coroll. 4. propoſ. 72. conicorum tract. 24.

Ducta verò NO perpendiculari ad lineam inclinationis LX ad illam perpendiculares ducantur ab ellipſibus, iam deſcriptis, & à ſingulis earum punctis ab ijs, quæ in continuis ſunt continuę, & ab ijs, quæ in punctatis punctatæ, & tandem ab illis, quæ in interruptis ſunt interruptæ, quales ſūt 10 19. 11 18. 12 17. & producatur quantùm ſat eſt.

Deinde ab iiſdem punctis, quę ſunt in diametro AB perpendiculares ad AH producantur 6 20. 5 21. & 4 22. & cęterę omnes, ſeruata earum differentia ob confuſionem vitandam, quę tranſibunt per arcum PXQ cylindri perpendiculariter erecti ex theſi ſuper LNX. A pũctis igitur, per quę tranſibunt, duces perpendiculares ad LX, vt ſunt 26 27. vel 28 33. 29 32. 30 31. & vbi occurrunt lineis parallelis ad LX, notentur puncta, prout quælibet lineam eiuſdem generis inuenit, ita 31. punctum pertinet ad interruptas 31 30. & punctum 32. ad punctatas 32 29. ſicut, & 33 pertinet ad continuas 33 28. Per puncta itaque, quæ in lineis eiuſdem ſpeciei inueniuntur flexę ducantur orbitæ, quæ ellipſes non erunt, cum non ſit ſecans ſuperficies, cuius veſtigium PXQ, plana.

Tandem deducendæ ſunt ellipſes, quæ cylindri axi perpendiculares ſunt, ad quod in omnibus deducēdum ducta recta SP aſſumatur interuallũ 34 35. & ſit VT, ducaturq; SV, nam ſi AB ponatur orizontalis, vel eius vicaria XM linea BH, cuius loco ſtat SV, ſe eleuabit magis à plano verſùs B, quàm verſùs H, quantum eſt ſpatium VT: A puncto autem 34. verſus Q aſſumantur omnium linearum parallelarum interualla, & transferantur in lineas correſpondentes ab iiſdem punctis primitiui arcus originatas, tum extrinſeci, tum medij, tum intimi. Sic interuallum 34 O à D prouenientis p lineas E O, DE, transferatur in lineā ab eodē puncto profectam D, & ſit m n. Sic 34 19 in lineam 22 84. prouenientem à 4. ſic 34 18 in lineam 21 35. profectam à 5. & tandem 34 17. originatam à puncto 6. in lineam 20 86. ab eodem puncto 6. ab initio propagatam, & idem agendum de cæteris, & tandem per pũcta ad idem genus linearum pertinentia ducatur Ellipſis 39 84 40. & per alia puncta extima 5 86. n. V, & cætera ellipſis extima 5 86. n. V, & ita fiat in ducenda media, deinde tria ſingula puncta rectis copulentur, vt 36 35 84. eritque totus apparatus ad ſuperficiem extendendam neceſſarius conſectus.

Quod autem 39 84 40. & cæteræ ſint ellipſes patet. Nā diametro 39 40. ſunt applicatæ, cũſit 39 40. diameter proportionaliter ſectas, ex 13. l. 6. vt AA, & ipſæ altitudines, ſint quoque proportionales altitudinibus primitiuis, qualis vna eſt 7 10. æqualis 4 1 ob parallelas per HO deductas, vnde HO ſecta eſt, vt YH in triangulo HOY.

Iſtis itaque omnibus præparatis, vt ſuperficies interna dati cylindri in planum diſtendatur, trahatur linea ZI, & ſuper eam quęlibet pars ſemiellipſis 39 84 40. extendatur, vel potius ſubtenſæ rectæ ipſi minimę, quàm fieri poſſit 39 84 & cæterę cæteris, perque puncta 41 42. & per cętera perpendiculares ad ZI ducantur, quorum terminationes exquirendæ ſunt. Quia ergo pertinet ad intrinſecam ſuperficiem à linea HO aſſumatur diſtantia 19 10. & ſit 42 43. tranſlata, iterumq; 39 44. & ſit 42 45. ſicque in alijs fiat diſtantias à linea HO ad ellipſim intrinſecam 15 10 14. & ad orbitā intrinſecā 44 31 91. & p pũcta inuenta 49. 43. 48. & cęt. flexę ducantur. Nam conſtituent ſuperficiem intrinſecam 49 48 47 45. Quòd oſtenditur eodem argumento, ac prop. 1. h. ex principijs propoſ. 1. huius.

Si verò ſuperficies coniunctiuas exoptemus diſtantia 86 35. & 35 84. à linea 45 43. menſuretur, & ſit 42 50. & 50 51. perque puncta 50 51

perpendiculares ducantur, quæ terminabuntur transferendo diſtantiam 18 11. in 10 52. & 17 12. in 51 53. ducendoque rectam 53 52 43.

Rurſúſque transferendo interualla 18 54. & in 50 54. & 17 27. in 51 55. ductaque flexa 55 54 45. habebimus exoptatam ſuperficiem 53 43 55 45.

Nota, quòd, ſi cylindrus circularis ſecans ſit iacens non perpendicularis plano, cui inſiſtit dictæ ſectiones V. g. 28 33. erunt rectæ, quod ſi iſecat, & eius curuitas recto cylindro obijciatur rectangulè erunt circuli æquales à linea PX ducendi ſi ſit obliquus, tunc ellipſes eędem omnes ęquales ducendæ ſunt ex prop. 12. tract. 25. quod ſi non ſit circularis, at ellipticus omnes erunt ellipſes ęquales ex prop. 22. Coroll. Tract. 25. quod ſi non ſit cylindrus: ſed conus iacens, tunc circuli omnes erunt diuerſi; at ſi obliquè iſecat, tunc omnes erunt ellipſes diuerſę, ſed ſimiles ex prop. 4. tract. 25. Si verò conus ſit perpendicularis, vt in hac propoſitione ſuppoſuimus cylindrum, tunc ſequenti modo agendum eſt.

PROBL. XII. PROPOS. XIIII.

Cylindri ſuperficiem, qui à cono, cuius axis ſit ad eius axem normalis, ſecetur ſuperficiebus intrinſeca, & intrinſeca parallelis inuenire.

Sit conus, cuius vertex A, & trianguli per axem latus AB, cuius baſis circulus, qui ſecet cylindrum, cuius ſectionem planam faciat annuli quadrans DEFI; Coni verò craſſitudo ſit ca eadem; que HV circulorum centro X ductorum, radij AV, & XH equalibus mc, & m s. Diuiſo itaque tripliçi quadrante IF. & ED, & cæt vt in alijs factum eſt in quaslibet partes V. g. in tres ducantur radij 1 2. 3. & cæteri, ab iſtiſque punctis parallelę ducantur diametro HD, ideſt 1 4. 2 5. & 3 6. & cæt. ſicut & aliæ parallelæ radio HE, quæ ſint 3 7. & 2 8. & 1 9. & alias ab extimi quidem circuli diuiſionibus continuę, à medio punctatæ ab intimis interruptę diſtinctionis gratia, quarum poſtremarum longitudines à linea A m aſſumantur, vt 10 7. & interuallo 10 7. centro X arcus ducatur 13 6. vſque dum occurret lineę 6 3. quę ab eodem puncto 3. natalia ducit, ita de linea 11 8. quo interuallo centro X ducatur 14 5. & cæt.

Per ſingula ergo puncta, quibus fiunt interſeſectiones illæ arcuum iſtorum, vt 13 6. & parallelarum 3 6. quæ ab eodem arcu originem trahunt flexa ducatur 15 6 16 17. & erit in planum ſubiacens, & in baſim ipſam coni proiecta, extrinſece orbits, quam cylindri ſuperficiea occurrendo ſuperficiei coni effbrit, ſic 13 5 18. erit proiecta orbita intrimedie, fleſa autem 14 4 19. orbita intima ab ambitu F 11. ſuperficiei cum ſuperficie coni cauſata. Quæ regula etiam obſeruanda eſt in proiciendo gyro, qui in. ſuperficie coni interna imprimitur, ſumendo interualla normalia inter lineam m A, & ſingula puncta in CL reperta, vt ſunt 10 20. & centro X ducendo arcus 21. & 22.

Patet autem hæc proiectio, nam circulus ille, qui tranſiret per 10 7. parallelus baſi eſt: quare ex prop. 9. tract. 26. in circulum cuius arcus 13 6 æqualem proijcietur. Diſtat verò à ſectione ipſa per axem coni ducta, & cylindri quantum eſt ſubtenſa 10, 3. vel diſtantia inter axem DH, & parallelam 36. ergo 6. erit punctum 3. commune vtrique ſuperficiei coni, & cylindri proiectum, quæ ſe in arcum D 3 X cutnet, & ita fare de alijs.

Nunc ſit proicienda quoq; ſuperficies illa, quæ coni intercipitur inter ſuperficiem extimam, & intimam cylindri. Accipiatur interuallum AB, & centro M ducatur arcus NO. Sic interuallo A 7. centro M arcus trahatur 23 24. & fiat eiuſdem longitudinis, ac arcus 13 6. quod poteſt fieri ducendo parallelam ad eandem diſtantiam PN à diametro HD, qua ducta eſt 3 6. abſq; ſenſibili errore, ſed exactiùs aſſumēdo ſingulas partes 13 6. & trāſferendo illas in arcum 23 24. & idem fiat de omnibus alijs punctis. Rurſuſque interuallo A 8. à centro M ducetur arcus 26 17. & eadem menſura determinabitur, & ita habebimus ſingulorum orbitatum conica ſuperficie factarum proiectionem, nempe extimæ quidem D 3 E ſuperficiei proiectionem P 24 O intermediæ 53 17 31. Intimæ verò FI proiectio erit 28 29 30. & conſequenter totius ſuperficiei conicę inter vtramque ſuperficiem cylindricam interceptę proiectio erit ſuperficies P O 30 28.

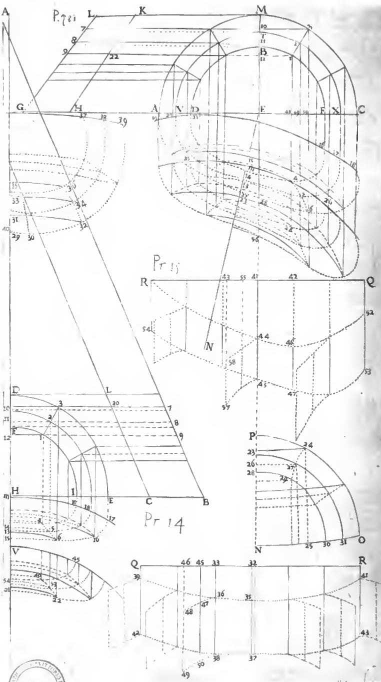
Probatur ex prop. 2°. tract. 31. Nam arcus à vertice coni ductus, & eiuſdem longitudinis, ac arcus baſis, vt eſt arcus 23 34. ſubtendit ſuperficiem æqualem ſuperficiei coni, qui arcu baſis eiuſdem menſuræ 3 6 determinatur; quare cum arcus 13 6. decernat in baſi punctum 6. proiectum decernet etiam in ſuperficie conica punctum, 24. quod circulus D 3 E cylindri ſe interſecando cum circulo coni, cuius diameter 10 7. parallelo baſis imprimit in ipſo cono, & ſic de alijs: cum ergo habeamus plurima puncta in ſuperficie coni à conicis circulis effecta, dum ſecant circulos extimos cylindri DEI, ſemper vbicumque ſecet cylindrū, ſibi ipſis æquales ipſum gyrum impreſſum in ſuperficie coni P 24 O delineare poterimus, & ſic alios quoque intermedium, & intimum, qui ſuperficiem illam concludunt, vnde eam habebimus in plano extenſam P O 30 28.

Oporteat poſtea delineare ſuperficiem cylindri inter ſuperficies conicas extimam AB, intimam CL interceptam. Ducatur itaque linea RQ, quæ repreſentet ſectionem HE, in ea quæ extendetur circulus F 11. intimus, cuius ſuperficiem delineare volumus intercluſam inter CL, & CA, ſinguliq; eius arcus pariter tranſportētur V. g. FI in 32 33. ducatur poſtea à ſingulis punctis 32. 33. & cæt. normales 32 37. & 33 38. & aliæ. Inque eas à linea QR diſtantię transferantur H 14 in 32. & 35. & H 42. in eādem in 32 37. ſic 34 4. tranſmigret in 33 36. & 34 40. in 33. 38 & ſic de alijs. Deinde puncta è flexa 14. 4 19. deſumpta flexa vinciat 39 35 41. & à flexa 42 40 45. deſumpta pūcta, alia curua vniat 42 38 37. & habebimus ſuperficiem 39 41 42 43. extenſam, quam exoptamus.

Patet probatio ex cęteris modis, quos ſupra declarauimus, cū eodē modo, priùs operati fuerimus.

Si tandem ſuperficies coniunctiuas quis exoptet, quarum ſectio eſt 1. 2. 3. interceptas inter ſuperficiem extimam, & intimam coni eodem modo operabitur, ac in cæteris. Tranſlatis .n. diſtantis 1 2. & 2 3 in 33 puncti 1 repreſentatiuo in 45. & à 45. in 46. deducātur normales 45 50. & 46 49. deinde à punctis 45. in 47. trauſeat interuallum 51 5. & 46. in 48. interuallum 52 6. rurſùſque ab ijſdem punctis 45

&



NAPOLI

Digitized by Google

& 15. tranſportetur diſtantia 51 5:. & 52 22: & ſiat 45 50 & 46 49. punctaque flexix nectantur & habebimus ſuperficiem 36 48 49 33. coniunctiuam pertinentem ad coniunctionem 1 23. & ſic operare in alijs, omneſque conſequeris.

THEOR. II. PROPOS. XV.

Cylindri ſuperficiem inuenire, qui à coni gemina ſuperficie non parallela ſecetur ad eius axem perpendiculari, & axis coni axi Cylindri non occurrat.

DIffert hæc propoſ. à præced. quia ibi fingebatur axem coni ſuper axem cylindri inſiſtere normaliter: hic autem nequaquam, ſed extra cadere licet normaliter plano per axem cylindri occurrat.

Sit ſemiannulus cylindri AMC DBF, qui coni ſecetur gemina ſuperficie externa GL interna HK, cuius baſis circularis, diameter EN, vel SG, & diſtātia ſectionum ſuperficierum coni in baſi N M; & axis cylindri MZ axi coni ſuper N inſiſtenti non occurrat.

Primo proiciemus ſuperficies coni à cylindro interceptas; Quod vt efficiamus iuxta morem diuidemus ſemicirculum DBF in partes libitas, & ducemus normales 1 4. 2 5. & 3 6. diametro AC, & ei parallelas 7 3. 8 2. & 1 9. & alias ſimiles ab alijs interſectionum punctis. Diſtantiæ verò ſingulæ ab axe SM coni ad ſuperficiē LG accipiantur nempe 10 7, & eo interuallo ab N centro ducatur arcus 3 6. donec occurrat normali 6 3. ab eodem puncto 3. interualli 3 7. naſcenti. Sic interuallū 8 11. dabit arcum 14 5. & 9 12. interuallum 15 4. ſic ML dabit arcum 27. & 28. ſomitatis 28. punctum, & ſi id agatur de omnibus alijs punctis obtinebimus ſingula puncta arcuum DXF, & AMC, & intermedijs ipſorum proiecta, per quæ ducta flexa 21 4 16. repreſentabit coni ſectionē cū extima cylindri ſuperficie, cuius ſectio AMC, proiectā.

Sic 19 6 18. eiuſdem conicæ ſuperficiei cum interna cylindri, cuius veſtigium DBF. & 20 5 17. eiuſdem cum medis. Eodem modo, quoque tranſlatis interuallis 12 22. & cæteris, quæ inter axem XM, & ſuperficiem coni internam intercipiuntur centro N deſcribemus arcum 23 24. donec ſecet normalem 1 24. & dabit punctum 24. aliæque diſtantiæ eiuſdem rationis parient arcus alios punctorum aliorum indices, quorum qui pertinet originaliter ad intimum circulum flexa vinciantur 25 24 26. erit interſectio cylindri ſuperficiei cum intima coni proiecta.

Libeat, itaque nunc exprimere ſuperficiem coni inter geminas ſuperficies extimam, & intimam cylindri interclusam. A vertice coni, qui vertex in fig. expreſſus non eſt ob anguſtiam paginæ ſingula interualla accipiantur vſque ad ſingula puncta à parallelis 3 7. 2 8. & alijs impreſſa qualia ſunt 7. 8 9. & cęt. ducemuſq; ijs ſingulis interuallis centro X primò arcum 29 30. in quē tranſlatus arcus 27 28. exhibebit punctū ſumitatis. Ita arcus 13 6 tranſportetur in arcum 31 32. & 14 5. in arcum 33 34. ſic arcus 15 4. in arcum 35 36. & ſic de alijs, habebimuſque puncta, per quæ flexę ducantur, nempe per eam, quarum menſuræ ſumptæ ſunt ab arcubus intrinſecis, vt 15 4. quæ faciunt flexam 21 4 16. ducatur flexa 35 36 37. & aliæ flexæ per alia correſpondentia puncta conſequemur, ſuperficiem 35 37 39 40. coni interclusam inter ſuperficies cylindri intimam, & extimam, quod prom iſſum fuit.

Sit rurſus exhibenda ſuperficies illa intima cylindri, quæ intercloſa eſt inter ſuperficiem extimam GL, & intimam HK, cuius ſemiambitus eſt DBF arcus. Ducatur recta RQ, in eaque circulus DBF extendatur ita quod ſingulæ partes ſingulis correſpondeant V. g. X t parti 41 42. & aliæ æquentur alijs, à ſinguliſque punctis perpendiculares ducantur 41 45. & 43 57 & reliquas, inque ſingulas à linea RQ ſingulæ intercapedines transferantur, quæ inter CA lineam, & ſingula orbitarum 21 4 16. & aliarum proiecta puncta interſunt V. g. 48 4. tranſeat in 42 45. & X 51 in 41 44. & ſic de alijs, perque puncta R 44 46 58 & alia ducatur flexa. Item 43. 24 tranſportetur in 48 47. & per inuenta puncta omnis 54. 45 47. 53. & cætera alia flexa ducatur, & erit tota ſuperficies quæſita R 54 52 53.

Si verò cupias coniunctiuas ſuperficies V. g. radij BTM interualla XT, & TM transferes in QR, & erunt 41 55. & 55. 43. à quibus duces normales, & ſicut 8 51 exhibet diſtantiam 41 44. ſic R 56. dabit 43 57. aliæque à ſingulis orbitis, alias quibus coniunctiuam ſuperficiem obtinebit 57. 58 44 45 pertinentem ad iuncturam MB.

EXPENSIO II.

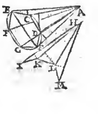
De ſuperficiebus conorum diuerſimodè ſectis in planum extendendis.

EGimus ſatis de Cylindri ſuperficiebus nunc ad Conorum paulò difficiliores ſuperficies ſtylus conuertendus.

THEOR. I. PROP. XVI.

Si ſint tot triangula plana, quæ altitudinem triangulorum quocumque cono inſcriptorum æquent, & baſim eiuſdem longitudinis conſequantur hæc omnia ſimul æquabunt multilateram figuram cono inſcriptam.

SIt conus ABCE, in quo ſit inſcripta Pyramis multilatera, cuius latera ſint ACB, & ACD, &



ADR.

ADX. Dico, quod hæc figura inſcripta ABCDE æquabitur figuræ planæ HIM ſit conflata tot triangulis, quot ſũt in ipſa figura inſcripta cono ABCDE, & quę ſint æqualis altitudinis, & baſis, vel habeant latera ſingula ſingulis æqualia.

Patet: Nam ſingula ſingulis erunt æqualia ex Cor. pr. 40. vel ex 23. l. 1. vnde ex 18. l. 5. erũt quoq; tota ex illis triangulis conflata nempe figura plana HMLXI, & ABCDE inſcripta inuicem æqualia.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Coni concaui ſuperficiem externam, & internam inuenire, cuius baſis data rectangula axi, atque circularis ſit.

Sit quadrans coni, ſeu annuli eius ABCD data baſis, Coni verò internũ triangulum ſit GFC, & externum GED; craſſitudoque eius corporis, & ſoliditas ſit FCDE; quę animo concipiatur inſiſtere annulo ABCD, oporteatque ſuperficiem internam; externamque inuenire, quam proximè.

Diuidatur arcus AD in quotcumque partes V. g. in quinq; & ducantur radij G 13. & G 12. G D, & alij. Interuallo FC, ſuper lineam 1. 2. ducatur arcus 3. 4. fiatque 2 3. æqualis arcui 5 6. ſicut, & 2 4. æqualis arcui C 5. ducanturq; lineę 1 3. & 1 4. Hęcque erit ſuperficies interna, quæ radijs continetur G 6, & GC, nimirum quinta pars ſemiconi. Ducta deinde perpendiculari C 7. ad latus FE, ſumatur 7 D, & transferatur in 2 8. ſumpto deinde interuallo DE transferatur ab 8 in 9. & centro 9. ducatur portio arcus 10. 11. quæ ſit æqualis arcui D 12 13. ducanturque lineæ 9 11. & 9 10. eritque ſuperficies 9 11 10. extrinſeca, & ea quę continetur radijs G 13. & G D; nimirumquinta pars extrinſecæ ſuperficiei ſemiconi, vel decima totius coni. Superficies verò coniunctiuæ erunt omnes eædem FCDE, at verò ſectio eadem, quæ annulus planus ABCD.

Quod verò res ita proximè ſe habeat, demonſtrabitur de ſuperficie externa 1. 3. 4. & eadem ratio erit de interna. Nam cum conus ſit rectus, ex hypotheſi, omnes lineæ ductæ ab apice ad baſim erunt æquales lineæ FC, vt ſunt ex effectione 13. 1 3. 1 4. latitudo verò eſt effecta eadem, quam arcus C 6. ergo cum ſuperficies dimidij coni ſit æqualis ſectori, qui diametro latere FC conficitur ex prop. 24 tract. 21. & arcu æquali licet ex maiori ſemidiametro FC ductus circumferentiæ A 6 C, & arcus 3 4. ſit factus æqualis quintæ parti ſemicirculi A 6 C, etiam ſuperficies 1 3 4 erit proximè æqualis quintę parti ſuperficiei conicę.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Dato dimidio arcu in ſuperficie angulari datæ altitudinis, coni ad illum terminantis ſuperficiem inuenire.

Sit data altitudo coni BA, eiuſq; ſemitriangulũ CBA, qui ſecetur angulata ſuperficie ſuper planum CDHA perpendiculariter inſiſtentis in lineis CH, & DH. Arcus verò datus ſit CA, ſeu annulus GCFE, & oporteat reperire ſuperficiem coni in illum arcum CE terminantis.

Diuiſo annulo GCEF, in quot libuerit partes, & ductis lineis diuiſionum B. 1. & cæteræ demittantur parallelæ ad BD continua 1 3. ab intrinſeco circulo, & 2 4. punctata ab extrinſeco; deinde iungantur DA A 3. & A 4. & cætera omnia puncta à perpendicularibus notata iiſdem diſtinctionibus adhibitis linearum diuerſimodè ductarum.

Facto deinde centro in D ducatur arcus A 5. ita poſito pede circini in 3. ab eodem puncto A ducatur A 6. ſic in 4. poſito circino ducendus arcus A 7 & ſic de cæteris, quæ puncta coniungenda ſunt rurſus primis ſuis punctis; vnde profecta fuere; ſic punctum 5. puncto B iungetur, at 6. puncto 1; punctum verò 7. puncto 2; quod ſit exortum à 4. pũcto à circulo extrinſeco prouenięte, & ſic alia vt eſt punctum 7. rurſus ad eiuſdem circuli punctum eodem ordine reſtituantur. Iamq; præparatum erit, id quod requiritur ad ſuperficiem requiſitam conficiendam.

Seorſum ergo ducatur LM, & in ea notetur interuallum 5 X, & ſit LM: deinde ſumpto interuallo E I centro M ducatur arcus; rurſuſque ſumpto interuallo 6 I. centro L ducatur arcus ad eaſdem partes. Nam punctum 8. in quo ſe interſecant erit illud, per quod ducenda eſt linea L 8.

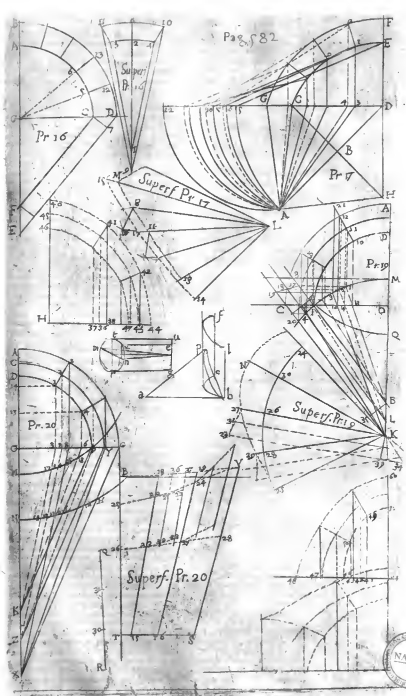
Rurſus ſumpto interuallo 1 9. poſitoque pede circini in 8. ducatur arcus, deinde ſumpto interuallo 8 9. poſito pede circini in L ducatur ad eaſdem partes arcus, & vbi ſecat præcedentem in puncto 11. ducatur L 11. & ſic de cęteris fiat vſque ad C 12. quæ transferetur in L 13. eodem modo, ac cæteræ. Deinde per hæc puncta M 8 11 13. ducatur parumper flexa; hæc enim terminabit ſuperficiem L M 13. intrinſecam coni, qui in arcum CA finit.

Superficies verò L 15. 14 eſt extrinſeca eadem arte delineata.

Probatur. Quia latitudinem quintæ partis ſuperficiei datam 1 E habet, quæ eſt M 8. deinde longitudinem conſequitur, quam Hypotenuſa haberet in ſuperficie coni interna deducta à vertice vſque ad 1: ſiquidem eſt illa, quæ ſubtendit, tùm lineam altitudinis 1 3, tùm longitudinis 3 A, quæ illa ex effectione eſt 6 1 æqualis L 8. & ita dicas de linea 5 E; Cum ergo L M 8 triangulum habeat, ſua latera eiuſdem longitudinis velut, quam triangulum in ſuperficie coni interna deſcriptum, erit id æquale quartæ parti ſuperficiei ipſius ſaltem proximè, & ideo ex prop. 16. h. etiam tota figura plana L M 13. æquabitur multilatero coni inſcripto, quod ſi erit ex multiplicatis lateribus quantum fieri poteſt conflatum neq; ad ſenſũ differet.

Si autem aliquis exoptet ſuperficies coniunctiuas; is vnius accipiat exemplum, ex qua cæteræ innoteſcent; Sit itaque deſcribenda ſuperficies coniunctiua, qua F B 1 2 coniungitur cum ſegmento B 1 9: Accipiatur interuallum 1 2. & centro 8 deſcribatur arcus; deinde accepta longitudine 7 B centro L deſcribatur arcus verſùs eaſdem partes; ſeque interſecabit cum priùs ducto in puncto 16. vbi ergo ſe interſecat, ducatur à puncto 8. recta, & rurſus ad lineam 8 L parallela 16 17. Nam hæc deducta vſque ad L ſuperficiem coniunctiuam dabit, eam verò non terminamus prope punctum L. Quia non admodum deſeruit, & facilè quiſque ex ſe inuenire poterit.

PROBL.



BIBL. NAZ. VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Coni recti circularis, cylindri ſuperficie concaua ſecti, ſuperficiem in planum proijcere.

SIt datus conus ſectus, vel eius ſemitriengulum intrinſecum OBI, extrinſecum verò CKO, qui ſit circularis baſis, cuius quadrans ID internę, externæ verò CA, ſeceturque cylindro, cuius portio circuli MI, & cuius ſuperficies imaginanda eſt plano IBO perpendiculariter inſiſtere velut ebipf ſecat a p c b in fig. ſeorſim facta.

Diuiſo itaque annulo CIAD, in quot libuerit pertes ducantur, à punctis, quibus portiones radiorum, vt 10. 12. ſecant perpendiculares ad CO, ſintque 10 13. diſcontinua, à punctis interni circuli 11 14. punctata, à punctis medij, & 12 16 continua ad extrinſeco circulo, & vbi ſecant OC, ad diſcontinuas à vertice intrinſeco 2 ad punctatas ab L, ad continuas à vertice coni extrinſeco K, ducentur rectæ, vt ſunt 2 13. L 14. & K 16.

Productis itaque lineis in quadrante AOC, quæ à vertice B proficiſcuntur vſqurdum incidant in arcum AM à punctis, in quæ cadunt 1. 2. 3. erigantur perpendiculares ipſi AO, ſeu parallelæ lineæ CN, quæ ſint 1 17. 2. 18. 3 19. perque puncta 17. 18. 19. ducatur flexa, & idem agatur in alijs ſimilibus, & hic apparatus erit ſufficiens ad ſuperficiem internam, ſuperficieſque coniunctiuas deſcribendas.

Verùm ad hoc, vt etiam ſuperficiem extrinſecam arcuatã, clauſã duabus ſuperficiebus CA, & ID intrinſeca, & extrinſeca coni facias. A punctis 3 2 1 parallelæ OA diametro ducendæ, nos dualimus ſolum à punctis 3. & 4. quæ à circuli extrinſeci punctis originem ducunt, quæ parallelæ ſunt 3 21. & 4 23. ſed alię quoque à cæteris ſimilibus punctis in arcu IM repertis ducendæ ſunt, ſi volumus, nedum CA, ſed medium, & intrinſecum ID, arcus delineare. Quibus confectis erit adornatum machinamentum ad ſuperficies extendendas.

Interuallo itaque BI ſuper lineam a 30. ſeorſim ductam deſcribatur arcus 24. 25. ſuper quem à linea x 30. transferantur minimæ partes quadrantis ID V. g. 30 26. ſit æqualis D 10. cætereque cæteris, & per puncta 26. 24. 25. & alia rectę ducantur, vt eſt a 30. & s 26. quæ terminabuntur ſumpto interuallo B 8. & tranſlato in a N, ſic B 17. & tranſlato in x 27. ſic ſumpto interuallo 8 6. & tranſlato in a 29. & 21 in K 25. & tandem ducta flexa, N 27 29 25. erit N K 25 ſuperficies interna quartæ parti coni dati ęqualis.

Ita autem inueniemus ſuperficies coniunctiuas ad interuallum 10 11. & 11 12. ducemus rectas 31 32. & 33 34. æqui diſtantes à linea 26 K ſumpta deinde diſtantia B 18. poſito pede circini in a ducatur arcus, qui ſecet 31 32 in puncto 31. & rurſùs interuallo B 19. poſito centro in x deſcribatur arcus, qui ſecet 33 34. lineam in puncto 33, & per puncta 27. 31. 33. ducatur flexa: Rurſus ducatur à puncto K perpendicularis K 39. & à a altera 35 B, & ſumpto interuallo à puncto 35. vſque ad x transferatur in 39 34. & vbi terminatur puncto 34. ducatur recta K 34. & habebimus ſuperficiem coniunctiuam 27 K 33 34.

At ſi quis exoptet habere ſectioné, quá facit conus in cylindro ipſo. Super lineá H 44. ab H tráſferatur p particulas aſſumptus arcus 20 M. & ſit H 44. curſúſque arcus M 3 per minimas particulas aſſumptus erit N 38. & arcus M 4. & ſit N 43. & tandem arcus M 20. & ſit N 44. à quibus punctis excitentur perpendiculares, quales ſunt 43 42. 41 38. H 40. Sumpta verò diſtantia st. 3 tráſferatur in 41 38. & 4 2 3. in 43. 42. perq; ea puncta ducatur flexa 40 41 42 44. quæ non erit ellipſis cum cylindri ſectio non ſit plana, ſed quoddammodo eam imitabitur, ſic ducetur media 45. 43. & extima 46 47. vt ſatis conſtat ex ſchemate.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Superficiem Coni concaui circularis in planum proijcere ſecti à ſuperficie conuexa Cylindri ad axem perpendicularis.

HÆc propoſitio, vt præcedens operi conſignabitur, niſi quod arcus MI contrariò modo eſt collocandus, vt arcus IQ.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Coni in rectam terminantis ſuperficiem à ſuperficie cylindrica gemina ſectam in planitiem conſignare.

HVnc conum deſcrip. prop. 8. tract. 25. vt in eius fig. videri poteſt; probauimuſque ibi eius ſectiones baſi, rectæ axi, æquidiſtantes eſſe ellipſes, & qualem repreſentat conus m r n t g k n ſeorſim factus.

Sit ergo talis conus, cuius baſis ſit circulus, ſeu eius vicarius quadrans PO, & triangulum per axem OPK, quem repreſentat m n k in figura ſeorſim facta; Diuiſo itaque quadrante NP in quaſlibet partes ducantur radij, ſeu portiones radiorum quarum vna eſt 1 3. & à punctis, in quibus ſecant quadrantes extrinſecum AG intrinſecum DP, & medium CY parallelæ 1 14. & 4 13. & cæt. & normales 1 5. 2 7. 3 8. & 4 6. & cęt. ducantur ipſi PO, quæ normales incident in puncta 5. & 6. ſectionis OB baſis cum triágulo OPK. Ab ijs ergo punctis ad verticem coni K rectæ ducantur, & ſint. a 5. & 6 K. A punctis verò 7 8. & ſitus P, Y, & alijs ſimilibus pertinentibus ad circulos medium, & externum prædictis parallelæ quales ſunt 7 10. ipſi 5 K, & Y 12 ipſi PK cum ad puncta 2, & Z aſſumpta tendant, vt fecimus in præced. propoſ. Iſtæ itaque ſecabunt arcum MP, & NH exprimentes veſtigium ſuperficiei cylindricę conum ſecantis, iamque omnis apparatus erit completus ad ſuperficies, quas volumus, tum coni, tum cylindri, tùm coniunctiuas delineandas.

Seorſim itaque ducta linea QR transferatur in eã per minimas partes arcus D 4 P, & ſint partes D 1, & 1 14, & 4 P ęquales tribus R 30. & 30 31. & 31 Q, & cæterę, cęteris; ſi adſint. Ducatur deinde ſeorſùm linea FT, quæ exprimat t u in fig. coni, & ei normalis T S quę exprimat g u, in eamq; transferantur omnes ſinus verſos D. 14. & ſit T 15. deinde 14 13. & ſit 15 16. & tandem DO, & ſit TS. Aſſumpto autem interuallo 5 x centro puncto 15. ducatur arcus verſùs x, & interuallo R 30. ducatur arcus centro R, & vbi ſe de-

cuſſant

euſſant arcus, ducatur recta; 18 15. Rurſus interuallo 6 x centro 16 ducatur arcus, & interuallo 30 31 centro 18 ducatur alius arcus, & vbi ſe decuſſant in 19. puncto ducatur recta 16 19. Idem que fiat interuallo PA, centro S, & rurſus interuallo 31 Q centro 19. & ducatur S V, perque puncta interſectionum arcuum B 18 19 V flexa enructur, & tota ſuperficies BVTS erit ſuperficies coni propoſiti, qui in lineam definit.

Ad quod ratione confirmandũ; ſciendum eſt, quòd omnes lineę in ſuperficie huius coni t g à peripheria baſis m t n r ad lineam g n, in quem terminat ductæ ſunt parallelæ plano, ſicut t u à vertice ducta plano m n ⱪ parallela eſt, vnde pars e ⱪ in ipſa linea coni terminatrice eſt ſinus h y, & e u crus reſiduum, & ideo e ⱪ parallela, & inter parallelas æquabitur ipſi ſinui hy. Et quod t u ducta à vertice coni, & ſectio rectanguli per axem eſt quoque rectangula lineæ terminatrici n g. Vnde ſuperficies coni quatenùs in g u terminat, erit rectangula: Ideo TS repreſentans t u eſt rectangula lineæ TS repreſentanti u g, & ſingulę partes in ea ſunt æquales ſingulis ſinubus baſis, vt t5 s ſinui 5 1, vel o 14 ea effectione. Et quia h ⱪ æquatur ipſi y e, ideo 15 18 fecimus æqualem rectæ 5 x; quia itaque flexa B 18 V æquatur arcui DP, & angulus T rectus eſt, vt eſt angulus u. Ideo x 18 T 15 æquabitur ſuperficiei coni æqualibus lineis rectis ſub æquali angulo, & arcu contentę ſaltem proximè.

Modò ſit deſcribenda ſuperficies illa, quę intercipitur inter duas ſuperficies MP, & NH cylindri ſecantis conum. Accipiatur interuallum 5 17, & transferatur ſuper lineam 18 15 à puncto 18 vſque ad 20. ſic 6 18 à puncto 19 vſque ad 24 ſuper lineam 16 19, ſic MO ſuper lineam TB, quæ ſit B 25. & per puncta 25. 20. 24 V flexa ducatur. Rurſus interuallũ MN transferantur in 25 26. & 17 13 in 20 23. ſic 18 9 in 24 27. & tandem YL in V 28; perque puncta 26. 23. 27. 28 flexa ducatur 26 27 28. & iam ſuperficies 25 V 23 26 erit illa, quæ inter duas ſuperficies cylindri ſecantis intercipitur.

Quod patet. Nam cum lineæ 5 x, & aliæ ſint parallelæ, & æquales lineis 18 15, & alijs. ſi cogitentur in cono ipſo, vt y e parallela ipſi h ⱪ ſuperficieſque nempe baſis coni, & cylindri ſecantis ſint rectangulę ad planum OCK trianguli per axem, repreſentati per triangulum m n ⱪ interceptæ quoque portiones 5 17. & 18 6. erunt æquales illis, quæ in ſuperficie coni ſunt inter baſim coni, & ſuperficies cylindri interceptæ, quod eſt dicendum de alijs. Quapropter 8 15. & 18 20. eo quòd illæ 5 17. & alijs æquales ſint, menſurabunt intercapedinem æqualem illi, qua inter baſim coni, & ſuperficiem cylindri intercluditur. Sic 25 26, 20 23 ęquales 17 13 ſibi parallelis intercapedinem, quę inter vtramque ſuperficiem cylindrorum reperitur menſurabunt.

Iam ſi velimus ſuperficies coniunctiuas ſumpto interuallo 1 2. & 2 3 arcus DP, CY, & AE trahantur parallelæ ipſi 18 15 lineę 21 32. & 22 33. accepto verò interuallo 7 34 transferetur in correſpondentes lineas 36 21. & interuallum 8 35. in 22 37. & ducatur 20 21 22 flexa per puncta 20. 21. 22 ſic ſpatium 7 20 in 36 32. & 8 21 in 32 33. perque puncta 23. 32 33 flexa ducatur; & erit ſuperficies 20 22 23 33 coniunctiua in radio 1 3.

Ratio huius operationis poteſt colligi ex præcedentibus, vnde eam non adferemus.

Tandem ſuperficies cylindri, quę inter vtramque ſuperficiem coni eſt, ita exprimetur Extendatur arcus NH in lineam 48 44, & ſingulę eius partes N 13. & 13 9. & 9 L extendantur in ea 44 41. & 41 43. & 43 46, & à ſingulis erigantur perpendiculares ęquales ſingulis ſinubus 41 49 æquetur ſinui 5 1. & 43 50 ſinui 6 4. & 44 51 ſinui OD, perque puncta 46. 50. 49. 51. flexa ducatur, & erit ſectio ſuperficiei coni in cylindrica ſuperficie, cuius ambitus NH; ita ducantur alię vt patet in figura, & erit tota ſuperficies 48 60 51 46. ea, quæ quæritur.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Coni obliqui rotundi ſuperficiem inuenire à Cylindri ſuperficie ad axem non perpendiculari ſecti.

Sit data baſis coni circulus ABC, coni verò triangulum ſcalenum ADC: Arcus verò ſuperficiei cylindricę ſecantis AFG; ſuper quem intelligatur cylindrica ſuperficies: ſed inclinata, quantùm eſt linea ML à linea perpendiculari LH. Ad vitandam verò obſcuritatem, quantùm fieri poteſt, loquemur primò de apparatu neceſſario ad ſuperficiem intrinſecam deſcribendam.

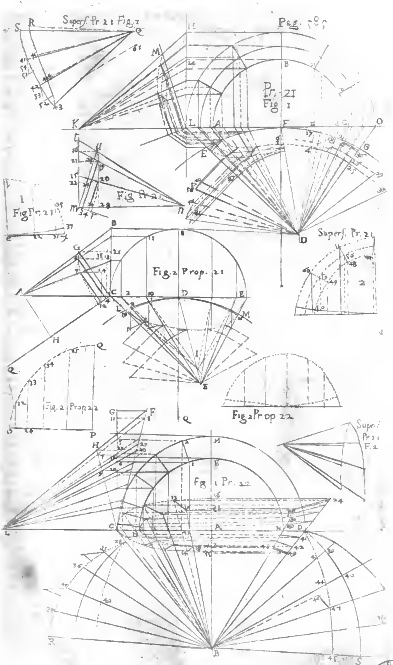
In quadrante itaque BC factis, vt libet diuiſionibus 10 11 ducantur perpendiculares 12 11. & 10 13. & à vertice coni D educantur rectæ D 12. & D 13. & DC, & DB.

Deinde ſeorſim in rectangulis lineis m t, & m n altitudines perpendicularium transferantur, vel etiam poteſt fieri ad alteram partem, vt in triangulo A L M fecimus pro quadrante ſiniſtro AB, quia enim conus eſt ſcalenus, ideo ambæ partes in apparatum neceſſariò accerſandæ ſunt cùm ſuperficies quartæ partis ſit differens ab alijs quartarum ſuperficiebus. Longitudo itaque m n ſit eadem, quæ DB, & altitudo m 15 eadem, quæ 13 10. ſicut & m 16 eadem, quæ 12 11. & tandem m c eadem, quę FB, & ducantur ab n rectę n 15. & cęterę. Ducta deinde u m, quę faciat eundem angulum, ac eſt angulus MLH, erit inclinatio cylindri, ducatur m x illi perpendicularis; deinde ſumptis diſtantijs punctorum 17. 18. 2 à linea OF, ſed rectangulè ad earum diſtantiam ducantur parallelæ 3 19. & 4 20 vſque dum ſecet quęlibet ſuam correſpondentem lineam; ſic linea 3 19. quę diſtat tantùm ab m u quantũ puncta 12. 17. ad lineam n 19 producenda eſt, quòd m 16 ſit eadem, ac altitudo 12 11, & cęt.

Hoc autem confecto aſſumantur rectangulè diſtantię punctorum, vt t 9, & aliorum à linea t m, vt u 16. & transferatur à linea FO etiam rectangulè ab V verſus 3. deinde diſtantia 21 23. & transferatur iterum ab s verſus 3. deinde interuallo PF, quo deſcriptus eſt arcus AFG inferius polito ſuper lineam FP à puncto 6 apud 3. ducatur arcus, qui ſecet lineam D 12. in 4. & rurſus diſtantia 24 22 eodem modo reperiatur punctum 7. ſed tranſlata diſtantia m x dabit punctum 9. Deinde per puncta reperta 3. 4. 7. 9. in plano 800 ducatur flexa, quę erit id, quod de cono abſumis pendentia ipſius cylindri: Siquidē omnes axi eius parallelæ in cylindro pendente, ſi ſint æquales, pendent ęqualiter, & ęqualem lineam perpendiculares à verticibus cadentes intercipiunt, quę ad baſim coni normalis ſit.

His

Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

His ita peractis centro D à puncto 4. ducatur arcus 4 25. ſicuti à puncto 7. arcus 7 26. à puncto 3. arcus 3 27. ad partam ſiniſtram, & ab iſtis punctis 26. 25. 27. perpendiculares ad DG, & DZ excitentur. Deinde ſumpta altitudine perpendiculari u 28 transferatur à 27 in 31. & ducatur D 31. rurſus altitudo 19 23. transferatur in 25 30. & ducatur D 30. tandem altitudo 28 20 aſſumpta perpendiculariter tranſportetur in 26 29. & ducatur D 29. quæ datę D 4 vel quæ eadem D 25. & altitudinis 25 30. erunt Hypotenuſæ, & longitudines ſuperficiei conicæ in ſilo ſitu.

Hoc peracto ſeorſim ducta e ſ, transferatur ſuper eam ambitus 3. 4.& 4. 7. 7 9. vt ſunt e 32. 32 33.& 33 ſ;atq; erectis perpẽdicularibus e l, quæ ſit eiuſdem altitudinis, ac m u, & 32 34 æqualis lineæ 3 19. iterumque 33 35. quæ æquetur 4 20 per puncta l 34 35 ſ curua ducetur, quæ imitabitur ſuperficiem, quam in ipſo cylindro obliquo conus ſecans efficit. Sumpto verò interuallo r x, & alijs inter m 4. & m x ſimiliter ſumptis transferemus in f 37. & alias lineas; ducemuſque arcum e 37. quò ob pendentiam cylindri minor eſt ſuperficies l e f.

Iam verò tempus eſt, vt ſuperficiem internam deſcribamus. Sit linea QR æqualis lineæ D 36 minor, quam DO, quæ ſecat circulum cylindri FC, aſſumatur deinde interuallum D 29. & centro Q arcus portio deſcribatur, rurſuſque interuallum 37. 35. ex orbita l f, & centro R alia portio circuli occultè deſcribatur, vbi ergo ſe ſecant in puncto 45. ducatur linea 45 Q: Rurſus aſſumpto interuallo O 30. centro Q circuli portio deſcribatur, denuòque ab orbita l f interuallum 34 35 aſſumatur, & centro puncto 45 circuli arcus deſcribatur, & vbi ſe ſecant in 44 à Q ducatur recta; Iterum ſumpto interuallo D 31 ex Q centro arcus fiat; centro verò 44 alius arcus interuallo l 34 interſecet punctum 43: Per extrema itaque harum linearum ducetur flexa R 45 44 43. & erit quarta pars conicæ ſuperficiei deſcripta: Non alio verò modo alterius quartæ ſuperficies deſcribetur aſſumptis longioribus interuallis rectarum O 46. D 40. & DZ interualliſq; curuarum 47 48. & 48 49. & 49 50. quas ſeorſim deſcripſimus in fig. notata n. 2.

Si verò ſuperficies coniunctiuas, quis cupiat dignoſcere, is aſſumpto interuallo 48 56 deſcribat portionem gyri centro 42. & aſſumpto interuallo O 57 deſcribat aliam portionem circuli centro Q, qui ſe interſecabunt in puncto 53. & idem fiat de interuallo 55 56. & de interuallo O 58. qui ſe interſecabunt in puncto 52. per quæ reperta puncta ducatur flexa 52 53 42 & parallela 52 61. & hæc erit ſuperficies coniunctiua comprehenſa numeris 42 51 61. quæ verſus 61 terminabitur, vt placet, & ſic dicas de alijs.

Scias tamen hunc modum non eſſe præciſum. Vnde ingenijs ſcrupoloſis. Minùs fortè probabitur, licet quoad vſum, aut ſaltem, vt plurimum inſenſibiliter differat ab exactiſſimo. Qui talis erit. Sit Conus ACB, qui ſuper axem AD trianguli ſcaleni, & ſuper planum CEF ad rectos collocatus ſit angulus.

Sitque cylindri ſecantis latus GC, & radius DQ, quò eius peripheria DL ducta eſt, & ei CC rectāgula linea CH, quæ baſim cylindri exprimet, & cadet à vertice coni normalis AH, quæ eam terminet, transferaturque CH, ſuper DB, & ſit DI, & ab hoc centro rectę punctatę ducantur ad punctum 10. & ſimilia, quibus perpendiculares cadunt; vt 10 11. & ab iſtis punctatis aſſumatur rectangulè ad CF interuallum à puncto, quo ſecant LDM lineæ 1 10. & aliæ, non autem à punctis in quibus ſecant lineæ 10 5, & cæteræ, ratio eſt, quia illæ non ſunt in plano, quo ponitur eſſe linea HC, ſed ſunt in plano ACB planum itaque CFI exprimit baſim cylindri, in quò eſt HC linea, at vero CFB planum triangulare coni, in quo AC axis, & vertex A. Hæc verò interualla transferuntur in CH V. g. ſit 10 1 æqualis C 4 & 2. 3. æqualis C 12. tota verò constructio G 12 C, fiat vt priùs. Ductis poſtmodũm parallelis ad CB à punctis 4. & alijs nuper ſignatis, vt 4. 13. aſſumatur interuallum rectangulè ad eas puncti G à CB, quod erit 21 C, & 6 à 4 13, quod erit 6 13. & 7 14 puncti 7 à linea 12 15. transferanturque V. g. 7 14 in 2 5. nempe in lineas tranſeuntes per punctum 2 perpendiculares ad CF, & ſint 2 5. & interuallo DQ poſito pede circini in centro Q cylindri interuallo Q 5 arcus ducatur, qui pertingat vſque ad lineam E 3. ſitq; arcus 5 8. eritque punctum 8 in orbita 15 8 16. quia tantùm remouetur à linea ſuper 2 perpendiculariter, vt 2 5. vel quantùm eſt 7 14. vnde circulus cylindri, vel ſaltem portio Ellipſis, quę parum differet à circulo qualis eſt 15 D 16. tranſibit per 5. & per lineam CE in 8. vnde punctum 8. tantùm remouebitur à lineæ CF, quantùm remouetur punctum 7. à CB perpendiculari. Si verò aliquis velit etiam exactiùs rem proſequi non trahet arcum 5 8. ſed puncto 5. applicabit normam factam iuxtà ellipſim 15 D 16. ad perpendicularem DQ, quæ faciat angulum mixtilineum 15 D, Q ſingulis punctis V. g. puncto 5. & vbi ſecabit 3 E in puncto 8 illud punctum 8 erit in orbita 15 8 16. cætera verò omnia executioni mandabuntur, vt prius.

PROB. VII. PROPOS. XXII.

Dati coni concaui ſuperficie plana, ſed axi non perpendiculari ſecti, ſuperficiem inuenire.

HÆc ſuperficies axi non rectangula, vel poteſt pendere verſus apicem coni, vel in auerſam partem: ſed quo quo modo pendeat, eadem eſt operatio; ita conus poteſt eſſe, vel cuius baſis ſit circulus, vel cuius ſit ellipſis; ſed quæcumque illa ſit, eadem etiam eſt praxis.

Sit ergo datus conus ACD, cuius axis AB, & ſemibaſis CMD, & HBN, planum verò pendens CH, vel CF lineis exprimatur. Ducantur radij, vel eorum portiones 1 2. & cæteri; deinde à puncto C ducatur perpendicularis ad CO recta CN, ad quam ducantur perpendiculares 2 5. & 1 6. & aliæ ſicut, & ad lineam CO ducantur perpendiculares 1 3. & 2 4. & aliæ à vertice verò L diſtante à C, vt 2 idẽ vertex diſtat ab A per puncta, in 5, 6, & alia, quę ppẽdiculares cadunt rectæ ducantur, & vltra producantur quantùm ſat eſt V. g. ab L ducatur linea L 5. & L 6. & aliæ; ſicut, & à 2 producatur linea 2 3. & 2 4. quantùm ſat eſt.

Lineæ itaque à puncto L productæ ſecabunt CH planũ pendens in oppoſitũ apicis L in punctis 10 & 8. horum itaque punctorum aſſumetur diſtantia perpendicularis, vt 11 8 à linea G C, & transferetur ſuper lineam correſpondentem rectangulè, ſic diſtantia rectangula puncti 13 à linea CD ſignati in linea 2 4 13 erit æqualis lineæ 8 11, &

puncti 14. diſtantia rectangula à CD erit æqualis diſtantiæ rectangulæ puncti 7. à 12. & ſic de reliquis, vtpote puncti 18 à CD erit æqualis diſtantiæ 9 20 & puncti 19 à CD diſtantiæ 10 21. & cęt. Per hæc autem puncta ſignata in lineis, quæ procedunt à B ducantur flexæ C 13 16. & H 19. 22. & C P 26 16. erit poſitio, ſeu ſitus, quem in plano CBD deſcribunt circuli F B H, & CMD ad planum pendens CF producti, ſic C 14 15. & H 18 17 flexę, portionesque ellipſium erunt; quas conus ſemicircularis in plano producit detruncatus à plano CH.

Productis autem lineis BN, & BD, ad eas à punctis prædictis V. g. 13. 19. & alijs eiuſdem generis producantur perpendiculares ipſi E, ab ellipſibus, quidem internis H 18 17: & H 19 22. quę terminent in BN productam, ab ellipſibus verò extrinſecis C 13 16. & C 14 15. quæ terminent in BD item productam, ſic punctum 19 producetur vſque ad 23. punctum verò 13, vſque ad 24. quę & ſimul poterunt coniungi linea 23 24. ſicut, & puncta 19 13. linea item coniungi debent, vt puncta originaria, à quibus prodeunt 1. & 2. coniuncta ſunt. Iſtis itaque peractis iam omnis apparatus adaptatus erit, vt ex eo erui poſſint exoptatæ ſuperficies.

Si ergo conus ſit ſcalenus, priùs oportebit deſcribere totam ellipſim, at ſi non, ellipſis quadrantem O 25 Q tali modo, Axis AH ellipſis F 19 22 in lineam rectam extendatur, & ſit OP, ſingulaque puncta, vt 19. 22. & alia, quæ in ipſa ſunt in linea PO notentur, & punctum 22 ſit V. g. punctum P, & punctum 13 ſit 26. & cæt. ab iſtis verò punctis perpendiculares erigantur, vt 26 25. eiuſdem altitudinis; ac punctum 10. à linea CD, quod interuallum rectangulè ſumatur; & ſic agatur de alijs punctis, prout originem ducunt à punctis correſpondentibus in arcu HIB, ſic diſtantia puncti 27 rectangula à CD erit eadem, ac PQ, & ſic de alijs, quibus peractis per puncta extrema O 25 Q, & alia ducatur flexa, quæ erit portio ellipſis: quę expoſcitur, & quam conus datus productus vſque ad planum CF ſignat in ipſo: ſiquidem latitudines adipiſcimur per partes axis 22 19 translatas in OP, & altitudines per diſtantias punctorum 27. & 10. & cæt. à linea CD translatas in rectas 26. 25. & PQ, & alias.

Hac itaque ellipſi erecta, ſic deinde ſuperficies interna extendetur: Sit linea B 28. ſeorſim ſumpta æqualis lineæ BN aſſumatur interuallum B 29. & centro B deſcribatur arcus; rurſúſque interuallo O 32 in altera fig. 2. centro puncto 28. in linea B 28 arcus deſcribatur, & quò ſe decuſſant arcus in puncto 35 ducatur recta B 35. ſic ſumpto interuallo B 30 deſcribatur arcus centro B, & rurſus interuallo 32. 33. deſcribatur arcus centro puncto 35. & quò ſe decuſſant in puncto 36. ducatur recta B 36. ſic fiat quoque interuallo B 31. & interuallo 33. 34 ad uenandum punctum 37. & de interuallo B 23. & 34 35 ad nanciſcendum punctum 38. & ſic de alijs, vſque ad punctum R: perq; extrema puncta R 38. 37. 36. & cæt. vſque ad 28 flexa ducatur, quæ ſuperficiem dimidiam dimidij coni integrabit, eritque eodem modo altera dimidia pars facienda cū hęc pro alio dimidio coni obliqui deſeruire nequeat, at ſi conus ſit rectus ſufficiet hæc quarta pars cùm omnes quartæ ſint æquales.

Verùm aduertendum eſt quoque in conis rectis alio modo abſque ellipſi O 25 Q poſſe deſcribi ſuperficies propoſita. Sit ergo deſcribenda ſuperficies exterior, quam à cono LFC detruncat planum expreſſum linea CH. Interuallo BD deſcribatur arcus OS, & interualla M A & alia quadrantis C M transferantur in O S; ſicque M A æqualis arcui D 39. & alia alijs; ad ſingulaque puncta ducantur rectæ velut B 39. vel B 40. & cęt. Deinde interuallū B 41 transferatur ſuper lineam B 39. & ſit B 43. ſicut, & interuallum B 42. & ſic B 44. & ſic de alijs vſque ad 45. perque puncta D 43. 44. 45. & alia, flexa trahatur, quæ terminabit ſuperficiem extrinſecam deficientem à perpendiculari ſectione B, D, 45.

At ſi quis ſuperficies coniunctiuas exoptet, ſumpto interuallo B 48 verſùs 47 centro ipſo B ducatur arcus; deinde ſumpto interuallo 48. 42 centro 47 arcus deſcribatur, & quo ſe decuſſant in puncto 46 recta ducatur B, 46. & alia 47. 46. eritque ſuperficies B, 46. 47. ea, quæ expoſcitur.

COROLLARIVM.

QVod ſi lineæ C H, vel CF eſſent flexæ; eodem modo operandum eſſet V. g. ſi eſſent ſuperficies cylindricæ, quarum axis in plano iaceret, maximè ſi conus eſſet rectus, at ſi conus eſſet ſcalenus eodem modo, ac in propoſitione 21. huius de cono ſcaleno docuimus erit agendum.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

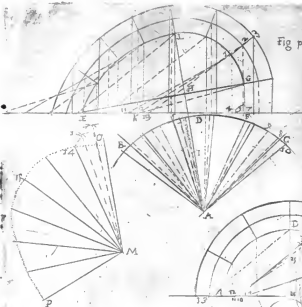
Coni concaui quacumque ſuperficie axi perpendiculari ſecti, ſeu conus ſit rectus, ſeu ſcalenus, ſeu rotundus, ſeu Ellipticus ſuperficiem in planum extendere.

SIt triangulum per axem conum exprimens ABC, & eius ſemibaſis AOB, qui quacumque ſuperficie ſecetur EFG ipſi plano triangulari CAB, & axi CB perpendicularis; oporteatque eius ſuperficiem in planum proijcere.

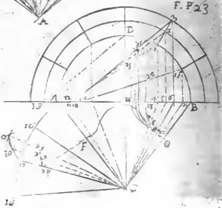
Diuiſa eius craſſitie tribus circulis deſcripta in quotlibet partes ad centrum radij ducantur, vt eſt 1. 2. 3. & vbi ſe decuſſant cum circulis intimo, medio, & extimo ad AB perpendiculares ducantur 1. 4 2. 5 3. 6. deinde à vertice coni C rectæ ad puncta 4. 5. 6. ducantur, quales ſunt C 4. & C 5. & C 6. quæ ſecabunt ſuperficiem FEG in punctis 7. 8. 9. centro ergo V. g. 4. Interuallo 4 C ducta portione circuli occurra notetur in AB punctum 12. & ducatur 3 12. Sicque centro 5. interuallo C 5 notetur punctum 11. nec non eodem modo in centro 6. interuallo C 6 notetur punctum 10. & ducatur 1 12. & 1. 10. & idem agatur in omnibus alijs punctis, in quibus radij, ſeu portiones radiorum tres ſemicirculos ſecant. Iamque apparatus erit adornatus ad ſuperficiem in planum extendendam.

Super ergo AC, ſeu ſi libeat ſuper aliam æqualem ſeorſim ductam centro C interuallo 14 15 ducatur arcus, rurſúſque centro A interuallo B 15. alius arcus deſcribatur; & vbi ſe interſecant in puncto 16. ducatur linea 16 C; rurſus centro C interuallo 12 B ducatur arcus, & deinde centro 16. interuallo 15 I alius arcus ſignetur, & vbi ſe decuſſant in puncto 17. recta ducatur 17 C, & eodem modo ſumpto interuallo 13 D ducatur recta

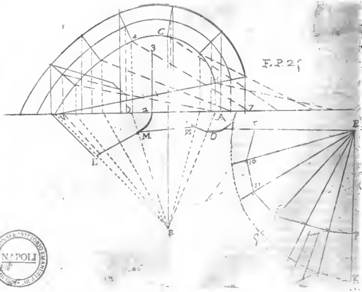
P 586
Fig prop 24.



F. P. 23



F. P. 25



NAPOLI

Digitized by Google

18 c; tandem per puncta 18. 17. 16. A ducatur flexa, quæ in cono recto, & circulari, vt in hoc circulus erit, at ea erit in alijs ambitus quicumque. Itaque coni ſuperficies, quæ A 16 18 c continetur est illa: quę quartam partem coni operit.

Superficies autem coniunctiua eodem modo fiet, nam adhibitis interuallis 11. 2 centro c ducetur arcus, & 1 2 à centro 17. ducetur arcus, qui ſe interſecabunt in puncto 19. & ducetur recta c 19. Iterumque adhibito interuallo 10. 3 centro c arcus ducetur, & 2 3 interuallo, centro 19. alius arcus ducetur, qui ſe intercipient in puncto 20. & deſcribetur recta c 20. deinde puncta 17. 19. 20. flexa coniungentur, & ſuperficies 17 20 c erit coniunctiua coni integri.

Modo via ſubtractionis inquirenda eſt ſuperficies, quæ ſecatur à ſuperficie FEG, quod vt fiat cētro puncto 21. interuallo 21 22 ducetur arcus, qui ſecet AB in 23. & ex eo puncto erigatur perpendicularis 23 24. & ſic fiat de alijs punctis, quibus perpendiculares 1 4. & E D, aliæque ſi ſint plures inciduut, & ductis arcubus, vt 7 26. erigatur à puncto 26 perpendicularis 26 25. & cæt.

Deinde interuallum 14 24 transferantur à c in 27. ſuper lineam c 16. æqualem lineæ 14 15. & interuallum 12 25. in lineam c 17. ęqualem lineæ 12 1. & fit c 28, & ſic de alijs, perq; puncta ducatur flexa 29. 28. 27. F, & erit ſuperficies, quęſita 29. FC detruncata à cylindro irregulari, ſeu regulari, cuius poſitio, ſeu ſitus eſt FEG.

Nec alio modo ſuperficies cōiunctiua inuenietur. Nam centro facto in puncto, quo perpendiculares aliorum circulorum medij, & extimi cadunt V, g. in 5. interuallo 5 8 ducetur arcus verſùs BA, & ex eo perpendiculares erigentur ad Hypotenuſas 11. 2. & 10. 3. deinde interualla V. g. 11. 30. & 10. 31. transferentur in lineas c 19. & c 20; notabunturque puncta c 32. & c 33. perque ea ducetur linea 28 32 33. eritque ſuperficies 28 c 33 coniunctiua, quæ exquiritur.

PROBL. IX. PROP. XXIV.

Superficiem coni concaui, cuius baſis lenticularis, ſeu ſemilenticularis, ſeu cuiuſcumque alius figuræ, ſecti à ſuperficie cylindrica in planum proijcere.

SIt angulus ABC, cui inſiſtat conus aliquis, qui cylindri ſuperficie ſecetur ad illud planum ABC perpendiculari, vt BDC, oporteatque inuenire ſuperficiem illius coni, qui tamen habeat baſim ad libitum electam quamcumque, & triangulum quodcumque, ſed tamen tale cuius per axem angulus aliquis ſit BCA datus, extendatur arcus ſuper rectam EF, ita vt æquales, aut ferè æquales ſint EF, & BDC, & à puncto F erigatur perpendicularis FG, & ad quamlibet longitudinē aperto circino à puncto E ducatur verſus G arcus, qui ſecet FG, eritque recta EO diameter baſis coni ad libitum electa, ſuper quā fiat quadrans GL centro H, & centro I ſuper eandem lineam alius arcus EL, eritque baſis cuiuſdam coni integrata ex diuerſorum circulorum portionibus, ipſeque conus non propriè conus; ſed potius ex portionibus conorum cōpactus: huius ergo coni ſit inuenienda ſuperficies.

Ductis radijs, ſeu radiorum portionibus V. g. 1. 2. 3. & cæteris ad centra circulorum à punctis, in quibus tres circulos ſecant intimi, extimi, & medij, quales ſunt 1. 2. 3. perpendiculares ad eu demittantur pro vt ſunt 1 4. & L 5. ſic 2 6. & 3 7. & cęt.

Deinde interualla in arcum BDC transferantur; ita vt F 6. ſit æqualis arcui C 8. & 6 7 æqualis arcui 8 10. & 6 4 æqualis arcui 8 9. & cæt. Exinde à puncto A ad ſingula puncta 10. 8. 9. & cæt. in BDC rectæ ducantur ſingulæ ſingulis perpendicularibus correſpondentes, quarum longitudines transferantur quęlibet ad perpendicularem ſibi correſpondentem, & ab ea ſuper FB menſuretur; ſic A 9 menſuretur à puncto 4. quo cadit 1 4 orthogonalis, vt ſit 4 11 æqualis rectæ A 9. ducaturque 11 1; ſic A 8 transferatur in 6 12. & ducatur 12 2. & tandem à puncto 7 menſuretur diſtantia 10 A, quæ ſit 7 13. & ducatur recta 13 3. & ſic fiat de omnibus alijs punctis, & iam apparatus fabricatus eſt ad ſuperficiem exoptatam reperiendam perquiſitus.

Ducta ergo ſeorſùm linea MO ęqualis EO naſcenti ex AC, à puncto F in E menſuratę, centro M interuallo 11 1 deſcribatur arcus occultus; rurſuſque interuallo G1 centro O alius arcus deſcribatur, & vbi ſe decuſſant in puncto 14 ducatur recta M 14. & ita fiat de alijs; donec ad vltimam peruenias M P; quæ erit æqualis rectę AE. Itaque ſi per harum linearum extrema puncta flexa ducatur P 15 14 O erit ſuperficies quæſita PMO coni, cuius baſis globoſa ELG.

Si verò requiras ſuperficies coniunctiuas, eadem arte requiri queunt. Menſurabitur itaque linea 12 2. & centro M ducetur portio arcus; rurſuſque interuallum 1 2. & centro 14. ducetur arcus, qui ſe interſecabunt in puncto 16. ad quod linea producetur à centro M; quæ ſit M 16: eodemque modo interuallo 13 3 centro M ducetur arcus, rurſùſque interuallo 1 3 centro 14 arcus ducetur, qui ſe intercipient in puncto 17. ducetur itaque linea M 17. deinde per puncta 14 16 17 flexa 14 17. trahetur, & erit ſuperficies quęſita M, 14 17.

PROBL. X. PROPOS. XXV.

Coni cuiuſcumque irregularis, & à quacumque ſuperficie ſecti orthogonaliter plano inſiſtente, ſuperficiem inuenire.

MOdus; quo hoc problema in opus demandatur idem eſt, ac duorum præcedentium problematum. Nam priùs inuenitur ſuperficies coni irregularis VAB plano inſiſtentis eùm hac tamen differentia, quod cum V A ſit recta non eſt neceſſe eam extendere, vt iuſſimus in arcu præcedentis propoſitionis BDC; ſed ſuper ipſam VA erigenda perpendicularis AH, & cætera, deinde omnia exequenda, vt in antecedenti propoſitione; quibus omnibus obſeruatis extenditur ſuperficies EIK; Deinde fingamus hunc conum eſſe detruncatum à ſuperficie cylindrica angulari irregulari LM NO, quæ plano VAB perpendiculariter inſiſtat ad hoc, vt ſuperficiem coni detruncatam in planitiem dillatemus, eadem obſeruabimus, quæ propoſitione 23. huius latè deſcripſimus. Nam centro I interuallo IM ducemus arcum M 2, exque

 puncto

puncto 8 excitabimus perpendicularem 2 3. quæ terminabitur in lineam 4 7 æqualem lineæ 8 5. Aſſumpta itaque longitudine 7 3, menſurabitur à puncto 8 ſuper rectam 8 5. & erit 8 6: Puncta itaque F, 6. P, & alia ſimili ratione inuenta erunt ea, per quæ tranſibunt rectæ F 10. & 10 11. & aliæ, eritque ſuperficies terminata FSP, quæ expoſcitur.

Ita etiam, vt in prop. prædicta ſuperficies coniunctius prodibunt; nec eſt neceſſe rem vlterius verbis proſequi, cum ipſa figura ſatis, ſuperque id, quod proponitur, demonſtret.

Ratio verò harum operationum, quas in iſtis tribus problematibus poſtremis docemus conſiſtit in eo, quòd reperiamus omnes hypotenuſas procedentes à vertice dati coni, & terminantes in ſuperficiem, quæ finguntur, vel ponuntur conum reſcindere; Harum verò Hypotenuſarum latitudines adipiſcimur, quod in datum arcum, & nobis cognitum terminent, quorum partes ad libitum diſtinximus, quæ partes, & earum ſubtenſarum ſeu hypotenuſarum diſtantiam determinant, & hoc ſufficiat cuilibet inerudito intellectui.

EXPENSIO III.

De ſuperficie ſphærica, eaque diuerſimodè ſecta varijs modis in planum extendenda.

FAciliores extenſiones priùs venabimur, exinde difficiliores, vt ordo doctrinæ ſeruetur. Faciliores ſunt, in quibus ſphæra per parallelos ſecatur, quam in quibus per circulos maximos vnde prius agemus de ſuperficiebus planis æquantibus ſuperficiem ſphæræ in partes ſectam à parallelis circulis.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Sphæricam ſuperficiem in annulares ſuperficies planas diſtribuere.

SIt quadrans ſphæræ, quod ſufficit ACB, cuius ſuperficies in planum proijcienda ſit in annulares ſuperficies diſtributa.

Diuidatur CB quadrans in quotquot partes libeat V. g. in quatuor, & producta AB per primam diuiſionem 8. à puncto C occurrat diametro producto AB verſus D recta C 8 D: Sicque fiat de punctis 2 3 producta per eos linea 2 3 E; ſicque de punctis 3. 4 ducta recta 3 4 F, & ſic de alijs, ſi adſint.

Habebimuſque latera conorum rectorum, quorũ axis V. g. coni CAD erit axis AD, baſis ſemidiameter AC; vnde ſuperficies erit CA 25 in orbem flexa, quæ circa eum vertitur ad altitudinem A 5, quæ eſt eadem, ac corporis ex annulis ſolidis compacti in ſphæra inſcripti, vt eſt corpus K; cuius annulus ſolidus MNPQ eſt idem, ac portio ſuperficiei conicæ NPQM coni NRM.

Sic dicas de cono 58 8, cuius ſemidiameter baſeos eſt 8 5., axis 5 2, vertex 8 latus 2 E. Vnde ſuperficies 5 8 3 6 ſi intelligatur circa conum gyrata ſemidiametro 5 8 efficiet ſuperficiem communem tum cono 528, tum corpori ſphæræ inſcripto annulis ſolidis compacto; cuius prius annuli ſuperficies operiat planũ 2 5 3 6. Patet verò ex demonſtratis Archimedis Tr. 18. prop. 9. quod ſuperficies hæc parùm differat à ſuperficie ipſius ſphæræ, cum, & multilaterum ipſi circulo inſcriptum parum differat à circulo maximè ſi multilaterum inſcriptum plurimis lateribus conſtet, vt propoſ. 43. Tract. 31.

Iam verò notum eſt ex prædemonſtratis ſectorem circuli, cuius ſemidiameter ſit latus coni, & circumferentia æqualis circumferentiæ ipſius coni eſſe æqualem ſuperficiei ipſius coni excluſa baſe ex propoſ. 84. Tractatus 31. Quare etiam portio annuli plani diametro eodem deſcripti erit æqualis annulo circa conum deſcripto, dummodo habeat eandem altitudinem, & eandem circumferentiam quo ſuppoſito.

Centro 8 interuallo 8 4 deſcribatur ſector 848 itaque peripheria 4 8. æqualis baſis quadranti iſte erit æqualis ſuperficiei conicæ quartæ parti coni 7 4 8. Sic centro F interuallo F 3 deſcribatur rurſùs circuli ſector 3 9 F; ſitque peripheria 39. æqualis quartæ parti peripheriæ ipſius baſis iſte ſector erit æqualis ſuperficiei coni 3 6 F; ſic, & ſector 4 10 F eadem ratione erit æqualis ſuperficiei coni 4 7 F, ablatis ergo iſtis æqualibus ſuperficiebus coni 47 F, & 4 F 10 ſectoris; hæc à ſectoris ſuperficie 39 F, illa à coni ſuperficie 36 F remanebunt ſuperficies coni reſidua 3 6 4 7. & ſectoris 3 4 10 9 æquales.

Remanet itaque docendum, quomodo ſectoris peripheria fiat æqualis peripheriæ baſiali coni ſemidiametro 7 4. vt eſt A 5 fiat circulus, ita ſemidiametro 6 3. vt eſt A 6; Iſtique circuli diuidantur in quotlibuerit partes, quoad fieri poſſit minimas, vt 12 14. & 13 15. illæque tranſferantur in peripherias 3. 9 & 4. 10, ſitque æqualis 13 15 parti 3 11. & 12 14 parti 4 16. & ſic de alijs, donec ſint numero æquales, quæ in quadrante 13 15 6. & in peripheria 13. 11. 9 ſic, & illæ, quæ ſunt in ambitu 12 14 5. ac quæ in 4 16 10. æquabunturq; phyſicè, & ſenſibiliter peripheria 13 15 6 ac 3 11 9 pariq; modo quadrans 12 14 5. ac ambitus 4 16 10. Si ergo omnes ſemiannuli ſuperficiales circa conos in annulorũ planorum portiones proijciãtur, quæ eis ſint æquales habebimus quadrantem ſphæræ ſuperficiei in annulos planos, ſeu eorum portiones proiectam, vt erat agendum.

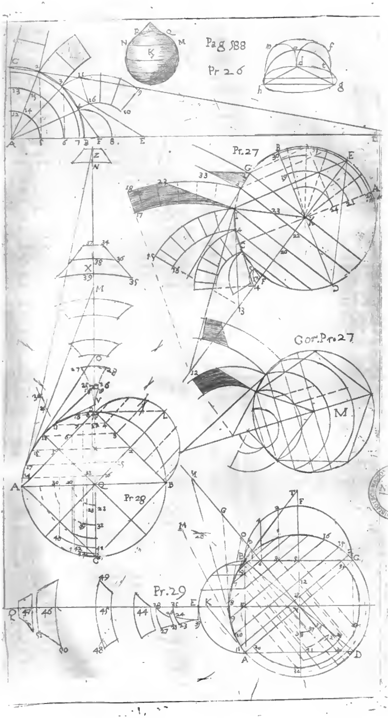
PROBL. II. PROPOS. XXVII.

Sphæricam ſuperficiem à triangulari ſuperficie ſectam in annulares ſuperficies proijcere.

DOcebimus in ſequentibus eadem ratione ſubnixi diuidere ſphæram, & eam in tales annulares planas ſuperficies proijcere, quæ rurſus circumuolutæ ipſi ſphæræ, & in formam ſphæricam redactæ emiſpherium eius in triangulum diuidant, V. g. ſi ſphæra triangulari ſuperficie plano perpendiculari h d m, & h o g, & d f g ſecetur. Inuenire ſuperficiem reſiduam, & ab ipſo triangulo ſphærico comprehenſam h d g m o f. Facto circulo ABCD; diuiſoque in quadrantes; In eo inſcribatur triangulum EDI, & ab aliquo eius angulo, vt ab E ducta recta EK vltra circulum quantùm ſat erit. Diuidaturque quadrans FG, in quot libuerit partes, & per puncta terminantia rectæ agantur, vt 2 3

verſus

Digitized by Google



NAPOLI

Digitized by Google

verſùs 12. ſic 3. I vſque ad 12, ſic 1 4 vſq; ad 13. ſic 4 C vſque ad 14. ſic C 5 vſque ad 7; nempe ad lineam 2 X V 11. Deinde modo ſuperiùs deſcripto fiant portiones annulorum planorum V g. 1 4 15 16, & alias, quæ ſingulę ab 2 vſque ad 1 terminabuntur modo ſuperiùs deſcripto, vt ſatis vides, eruntq; ſuperficies, quæ ſphericũ ſegmentum DIF extra triangulum EDI remanens operiunt.

Modo accedamus ad ſuperficiem inueſtigandam, quæ intra tertiam partem trianguli DKI remanet. Ducto itaque arcu 1 17. & menſurato ſemidiametro 20 1 ſuper K 19 erit quadrans 21 19 circumferentia baſis coni AD 1 12: quam minimis partibus aſſumptam menſurabimus ſuper 1 17 & à centro 12 trahemus lineam 17 18. & puncto 3 eodem centro ducemus arcum 3 18. & eſſet ſuperficies, quæ aperiret conum 21 3 12 quoad partem 22 3 1 20. ſed volumus ſolùm eam partem, quæ operiat 22 23 20 1.

Aſſumpto itaque 22 3 menſurabimus ſuper K 25. & ducemus quadrantem 25 30. Deinde ſuper eundem KA menſurabimus lineam 22. 23. & erit X 24. trahemuſque à puncto 24 rectam 24. 31 perpendicularẽ ad AX, quæ occurret arcui 25. 30 in puncto 31. eritque arcus 30 31, quem ſubtendit 22. 23. quem menſurabimus à puncto 18 vſque ad punctum 32. & ducetur recta 1 32. eritque ſuperficies nigra 1 32 18 17. quæ quæritur operiens ſolum partem 22 23 1 20.

Rurſùs menſurabimus 32 18 ſuper arcum 3 33. & ducemus 6 33. rectam, eritque reliqua ſuperficies X 22 29 planum operiens.

Patet verò, quòd reliquæ duę partes in triangulo EDI ſunt iſtis æquales: Vnde replicatæ ſuperficies 2 3 33. & 1 32 18 17. & aſſumptæ ſexies totum triangulum æquabunt in ſuperficie ſphæræ à triangularibus ſuperficiebus ſecantibus relictum. Vnde tum ſuperficiem portionis ſphærę DIF, & reliquarum EAD, & 2BI, tum trianguli EDI remanentis inuenimus.

COROLLARIVM.

IDem poterit fieri etiam ſi ſit quadratum, aut pentagonum, vel quælibet alia figura: quę ſphęram ſecet, vt patet in figura M appoſita, quæ nullis literis adornatur.

PROBL. III. PROP. XXVIII.

Superficiem ſphæræ à quatuor ſuperficiebus in quadrum poſitis circulo maximo perpendicularibus ſectam; intraque eas comprehenſam, inuenire.

SIt Circulus ABCD, exprimatque ſphæram, in quo ſit quadratum eiſdem literis inſignitum, quod demonſtret veſtigia ſuperficierum plano, & circulo ABCD incumbentium, ſitque reperienda ſuperficies ſphęrica, quæ ab illis ſuperficiebus clauditur.

Super latus DB fiat ſemicirculus DLB, & diuidatur in quotlibet partes, ducanturque perpendiculares à diuiſionibus factis L 2. & ea illis punctis ſignatis in latere BD ducantur parallelę ad diagonalem BA, vt 2 5, vel 3 6. ſic 4 7, & P 8. & continuentur vſque ad circulum in 10. 11. 12. 13. Deinde alię quoque ad libitum ducantur prædictis parallelæ, vt 15 17. & 16 18.

Producta deinde altera diagonali CD vſq; ad N ad eam per puncta rectæ ducantur V. g 14 17 N, & 17 13 M, & 13 12 O, & cæt. deinde ſuper eandem diagonalem C N, vel aliam rectam ſicubi facto centro in D internallo D 10. ducatur arcus 18 19. & à puncto 8 ducta ad 8 P perpendiculari, occurrat quadranti 20 21 radio 1 10 deſcripti; aſſumaturque arcus 23 21. & menſuretur à linea DO in vtramque partem ſuper arcum 18 19. poſtea aſſumpto interuallo LD tangentis DL in puncto D vbi DB terminat vſque ad el normalem QL, centro 18 arcus deducatur, & rurſus centro D alius arcus, & vbi conueniunt in pũcto 24 ducatur arcus 18 D, & idẽ fiat ad aliam partẽ, ducendo arcũ 19 D & erit 18 19 D portio prima ſuperficiei quæſitæ. Eodem deinde modo centro D interuallo V 1D deſcribatur arcus 25. & 26. fiatque æqualis arcui 18 19. vel duplus arcus 23 21. rurſùſque interuallo V 11 eodem centro arcus deſcribatur 27 28. Ducta deinde 7 29 parallela ad DC occurrentẽ arcui 30 31 ex ſemiradio 32 11 in puncto 29. & aſſumatur arcus 29 31. & menſuretur à linea OD hinc, & inde, & ſit arcus 27 28 duplus arcus 29 31. Deinde interuallo LD tangentis DL in puncto D facto centro in punctis 27 25 duo arcus ducantur, & quo ſe decuſſant in puncto 32: facto centro, ducatur arcus 25 27, & ſic fiat ad aliam partem, eritque ſuperficies ſecunda ſphęrica imminens plano 7 4 8 P, & ſic fiat de alijs; donec peruenias ad 5 2; vbi cum iam non ampliùs circulo DLB occurrant, ſed maximo, ideo rectis poterunt terminari. Verùm ſi aliquis harum ſuperficierum terminationem exactiorem exoptet, poterit tria puncta reperire, vt videre eſt in arcu 34 36 35 poſita ſuperficie Z iuxta ſuperficiem X ad hoc, vt totius ſuperficiei X Z ſimul tria puncta habeamus, eodem enim modo, quo reperta eſt diſtantia 37 34 ex arcu 40. 41. & 38. 35. ab arcu 42 43. & 39 35 ex arcu 44 45 eodẽmodo, & punctum 36 intermedium inter 34 & 35. & alia quęcomque intermedia puncta cuiuſlibet alterius ſuperficiei reperientur.

PROBL. IV. PROPOS. XXIX.

Superficiem ſphæræ à quatuor ſuperficiebus in quadratum oblongum poſitis, & plano circulari perpendicularibus ſectam in planum proijcere.

HÆc praxis parum differt à præcedenti. Taliſque eſt. Facto circulo, & diametris ſe decuſſantibus ſecto, deſcriptoque in eo parallelogrammo ABCD, ſuper vtrumque latus ſemicirculi deſcribantur AEB, & BFC. à quorum altero, vt à BFC in partes æquales diuiſo demittantur perpendiculares quales ſunt F 5. 2 3. & 4 6. & aliæ, & punctis, in quibus ſecant 6 3.5 deducantur parallelæ 16.9 diametro AC, quibus, & aliæ addantur pro libito 10 12. & 11 3. Per centrum autem Y ducatur recta perpendicularis ipſi diametro A C; quæ ſit VG, ad quam per bina puncta in arcu A 8 a ſignata, à lineis nuper ad illum immiſſis ducantur rectę 11 10 M, & 10 9 N ſic 9 8 O, & 8 7 D, & tandem 7 19 E; quibus interuallis ducantur arcus

facto

Digitized by Google

facto ſenſim centro ſuper lineam FQ in B V. g. Interuallo I 19. ducatur arcus 23. 24. deinde 25. & 26 arcus Interuallo F, 19 hinc arcus 27. 28 interuallo P 7. & ſic de alijs, vt fecimus in antecedenti, vel ſemper eodem centro B adhibito, vel ſi ſpatium deficiat, vtlibet ſumpto.

Ex inde in ſingulas chordas ſuus ſemicirculus ſuper AC erigatur V. g. diametro chorda 11 14 ſic 10 15, ſic 9 16. & ſic de alijs velut vnus ex ipſis eſt circulus 29 30 31. diametro chorda 9 16 deductus; deinde à ſingulis punctis, in quibus prædictæ chordæ latera ſecant 817. & 85, ſicut, & 5 V, & 17 V perpendiculares ad AC excitentur velut ſunt 6 V 30., ſic 3 32, ſic 5 33; ſic 17 34. & cæt. quæ quælibet ad ſuum circulum terminent; qui ſuper eam chordam, à qua diſcedunt lineæ effecti ſunt, quibus habitis.

A puncto 35 in linea 8Q menſuretur arcus 36 37. & ſit 35 24; deinde arcus 36 38. & ſit arcus 35 23 menſuretur, deinde ſuper E 39 linea ipſi 8Q normali ab E deducta diſtantia I 8 facto centro in puncto 39. & exinde in puncto 24. interuallo BT tangentis in puncto 8 vbi 5 8 terminat, & centro puncto 39. duo arcus deſcribantur, & quò ſe interſecant in puncto 40 facto centro ducatur arcus 24 39. & ſic fiat ad aliam partem: ſed interuallo adhibito AK tangentis in puncto A, & vbi in puncto 50 arcus ſe ſecant, arcus ducatur 23 24. eritque 23 24 39 prima ſuperficiė quæſita. Eodem verò modo prorſùs, vt arcus 23. 24 terminatus eſt, terminabitur quoque arcus 25 26. At arcus 27 28 terminos præbebit arcus 42 41, cui ſubtenditur recta 4 6, & quia linea 8Q ſtat loco lineæ GV 30; iden vt arcus 42 41 terminat In ipſam 30 n. Sic & arcus 27. 28. Poſtmodum ducentur arcus 26. 28 interuallo B T, & arcus 27 25 interuallo AK, & in antecedenti prima ſuperficie factum eſt, & erit 27 25 26 28 ſuperficies ſecunda. Ita quoque efficiemus ſuperficiem 44. Sic & ſuperficiem 45. cuius arcus 48 49 æquabitur arcui 31 30 34. quem linea 17 5 ſubtendit, & hinc ſuperficies reſiduæ 46. & 47 eodem quidem modo quoad arcuum longitudines determinabuntur; ſed latera V. g. 50 51. vel rectis terminabuntur, vel tribus punctis repertis: ſi ſuperficies illa ſit latior. Verùm præſuppono iſtas ſuperficies adeo eſſe paruæ latitudinis, vt arcus 50 51 per tria puncta repertus vix differat à linea recta. Vnde ſecuri linea recta pro curua poſſit vſurpari abſque ſcrupulo ſenſibilis erroris.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Superficiem ſphæricam à quatuor ſuperficiebus in quadratum poſitis plano alicui circulari ſphæræ orthogonalibus in planum proijcere alio modo, ac in præcedentibus factum eſt.

SIt ſphæra circulo ABDC expreſſa, & literæ quadratum quoque notent, ac AB; BD; DC; CA latera ſint veſtigia ſuperficierum ſecantium ſphæram perpendicularium ipſi circulo ABCD. In quadrato alij circuli concentrici inſcribantur V. g. GHFE, & alij arcus 18, & LQ quot quot placet à quibus, vbi ſecant BC, ducantur eidem BC perpendiculares veluti 6 5. 2 6. 3 7, 4 8; 1, 9. & I 10. perque puncta, in quibus ſecant arcum 10 ducantur rectæ, quæ ſecent productam AD; ſic per puncta 10. 9 ducatur recta 10 9 11. & per 9 5. recta 9 5 12. ſic per puncta 5 6 recta 5 6 13. & cæt. & vt ſupra fecimus in 26. pr. h. reperiātur ſuperficies ſphæricæ, quæ Inter circulos concentricos veluti GFEH, & 2. 15. 14 extenduntur qualis eſt ſuperficies 5. 6 16. 17. & reperiantur aliæ, & ita totum ſpatium circulo GFEH circumſceptum ſuperficiebus ſuis, nempe 5 16 17 6 6 21. & 7 22 & 7 8 ſi quater ſumantur erit opertum.

Ad hoc autem, vt reperiamus ſuperficies angulo EFH interclusas; ducta ſeorſùm linea, electoq; In ea ſicubi puncto N., aſſumatur arcus 8 10. & à puncto N menſuretur, & ſit NO; deinde ſumpta intercapedine It 10 centro M per O arcus 22 23 arcui 19 18 æqualis, factoq; centro In puncto 23. & rurſus in N ducantur duo arcus interuallo tangentis IK in puncto 8 vſque ad X in lineam normalem FX, & quo ſe decuſſant arcus in puncto 24. facto rurſùs centro eodem interuallo ducantur 23 N, & idem fiat ad aliam partem ducto arcu 22 N, eritque ſuperficies 22 23 N prima anguli, quę quæritur. Deinde rurſùs centro M aliquo in linea M N Interuallo 11 10. ducatur arcus 25 26 æqualis eidem 22 23. & rurſùs eodem centro M; ſed Interuallo 11 9 ducatur arcus 27 28. Fiatque æqualis arcui 21 20; ducantur deinde arcus 28. 26. & 27. 25. vt ductus eſt arcus 23 N, & eodem interuallo, & erit ſecunda ſuperficies, quæ requiritur 27. 28. 25. 26, & ſic tertia quoque reperienda erit. Spatia autem A 20 C implebuntur, vt ſupra factum in pr. 27. h. vt ſatis conſtat ex figura ipſa.

PROBL. VI. PROPOS. XXXI.

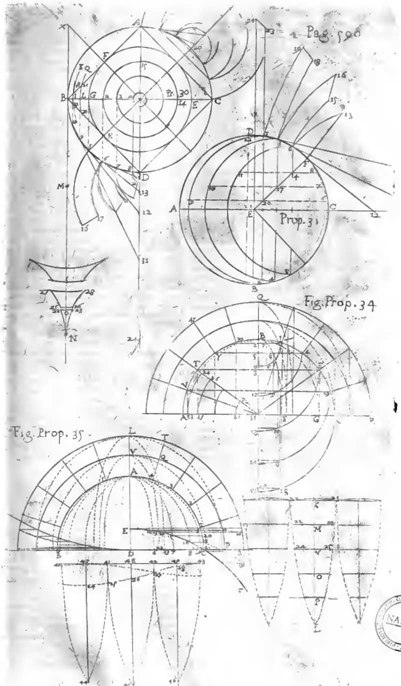
Sphæricam ſuperficiem angularibus duabus ſuperficiebus eiuſdem plano circulari perpendicularibus ſectam in planum proijcere.

SIt ſphæra expreſſa per circulum ABCD, ſintque veſtigia angularium ſuperficierum DE, & EC angulum quemcumque facientia In E; ſitque propoſitum reperire ſuperficiem ſphæricam, quæ ab illis ſuperficiebus concluditur.

Trahantur rectæ parallelæ ad libitam diſtantiam, prout commodiùs fuerit 1 2. & 3 4. & 6 5. vel plures vſque ad radium ED, & rurſùs aliæ ad eandem diſtantiam ab EC, qua diſtant ab ED primo ductæ, vt 6 9 7 10. 8 11. quæ pertingant ſaltem occultæ ad ſemicirculos ſuper priores parallelas tractos, nempe 8 11 ad 6 11 5, ſic 7 10 ad 3 10 4. ſic 6 9 ad 1 9 2.

Poſtmodùm vt fecimus ſuprà per puncta 6 F ducatur ad EC productam recta 12 F 6. & cæt. & ducantur arcus V. g. 6 13 centro 12 interuallo 12 6. & alij omnes. Fiat autem arcui 5 11. arcus 6 13 æqualis, & ducatur F 13 recta, quæ licet in ſphæra curua ſit, non tamen in multilatero, Inſcripto, & erit ſuperficies F 6 13 prima, quæ quęritur, quę operit planum F 6 14. Eodem autem arcui 6 11, fiat quoque arcus 6 15. & arcus 3 16 arcui 3 10; ducaturque recta 15 16. Et erit ſecunda ſuperficies 15 16 6 3. quę imminet plano 14 17 6 3: Eidem verò arcui 3 10 fiat æqualis arcus 3 18. et arcus 1 19 arcui 1 9. & ducatur 18

19.



NAPOLI

19. eritque ſuperficies t 3 18 19, quæ in ſphæram flexa operict planum 80 17. 1 3. pars verò reſidua ſuperficiei 20 A I D t erit (cum præſuppo-natur minima circularia) veluti ſuperficies cylindri diametrum AD habentis. Vel fiet æqualis Trapezio I 23, cuius latus D 23 æquatur arcui DA, & latus D 24. arcui I 9.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

In quacumque corpore ſpharico, Elliptico, ſeu etiam Parabolico, & Hyperbolico corpus planis ſuperficiebus conſtans inſcribi poteſt.

SIt corpus aliquod, aut ſphæricum, aut Ellipticum, aut Parabolicum, ſeu Hyperbolicum. Dico, quod corpus in illo multis ſuperficiebus conſtans inſcribi poteſt: Secetur in fig. p. 33. per aliquem axem multis planis AFB, & AOH, deinde paralleiis maximo ipſorum BLC, & MFGN, & cæt. ductis verò ſubtenſis FG, & EH, per eas agatur planum FGEH, & ita fiat de omnibus alijs vndequaque & erit corpus inſcriptum corpori exhibito.

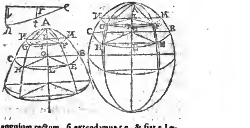
Probatur. Nam tunc dicitur aliquod corpus inſcriptum alicui alteri corpori, cum omnibus ſuis angulis ſolidis tangit corpus, cui inſcribitur, ſed omnis ſuperficies inſcripta tangit corpus circumambiens ſuis angulis, quod tranſeat per F, G, & E, H extrema, quę in ſuperficie exhibiti corporis ſunt. Ergo etiam omnis angulus ſolidus, qui angulis planis conſtat in ſuperficie corporis dati terminabie: Vnde erit inſcriptum corpus multis ſuperficiebus conſtans in corpore conuexo exhibito.

Quod autem per FG, & EH ſuperficies ductę ſint planæ, conſtat ex eo, quod EG, & EH ſunt parallelæ ex eo, quia plana parallela MFGN, & BLC, aut circuli ſint in ſphera, aut etiã ellipſes, vt in ſpheroide, & conoide omnes verò ellipſes parallelæ ſimiles ſunt ex tt. tract. 25. & ex prop. 40. lib. 6. omnes quoque circuli. Quare erit applicata OH ad IO, vt OE ad FI ex prop. 54. Tract. 24. & ex prop. 43. lib. 6. quare ex 4. lib. 6. cum triangula GIF, & HOE ſint æquiangula, etiam FG, & EH erunt parallelæ laterum proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Si ſit aliquod corpus ſphæricum, vel Ellipticum, aut etiam Parabolicum, vel Hyperbolicum; in quo inſcripti alicuius corporis omnia triangula; quæ inter plana per idem punctum ſecantia continentur, cognoſci poſſint, etiam tota ſuperficies corporis inſcripti obtinetur.

SIt corpus ſphæricum ABC, & ſecetur diuerſis circulis (intellige verò ſi ſit Ellipticum de Ellipſibus per idem punctum quomodocumque ductis, at ſi ſit Parabolicum, vel Hyperbolicum de parabolis, ſeu Hyperbolis per axem ductis, vt ex Defin. tract. 25. conſtat) V. g. circulo ALB, & AGH, & cæt. inter quę ſit inſcriptum aliquod corpus polygonum, quod poſſe fieri ſupra demonſtrauimus: habeaturque nota normalis AT ſicut TG arcum, & eius ſubtenſam, & deinde AO, & ideo ſubtenſam ipſius t ſi ergo ſuper baſim r e ipſi TA æqualem faciamus triangulum, cuius ſingula latera e t, & t r ſint ęqualia triangulo ATO, patet ex prop. 23. lib. 1. eſſe triangula æqualia. Deinde ſit trapezium FGEH. Ducaturq; planum HF normale plano TL, & ſectio quoq; EL normalis erit. Tunc cũ iam habeamus notam TG, & GH ex pręſuppoſito, &



angulum rectum, ſi extendamus r e, & fiat r l æqualia ipſi TL æquabitur triangulum TGL triangulo t r l: ducta per imaginationem ſubtenſa l t ex prop. 22. lib. 1. Quare ſi data LH, & GH ſuper l t fiat triangulum l n t hoc erit æquale triangulo LGH, vnde trapezium f l r n æquabitur trapezio TLHG. Vnde patet, quod etiam ſi non ducatur l t: idem tamen poteſt præſtari habitis punctis L, & H in plano, quæ ſint l, & n.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIV.

Sphæricam ſuperficiem in planas ſuperficies per circulos maximos diuiſam extendere.

HÆc eſt huius expenſionis pars ſecunda, in quà conabimur ſphæricam ſuperficiem in planas proijcere, quæ tamen non parallelis, vt in prima parte præſupponitur diuiſa, ſed circulis maximis.

Sit ergo ſphæra ABC, circulis maximis ſecta, quę ſe decuſſent in centro B, & quia ex propoſ. 13. tract. 29. circuli eleuati à plano ſitum conſequuntur in ipſo plano, qui non eſt; circulus; ſed ellipſis, cuius ſemidiameter maior eſt ipſe radius, at minor ſubtenſa arcui, quo dictus circulus ab ipſo plano eleuatus diſtat à vertice. Ideo, ſi aliquis arcus diſtet à vertice quantum eſt arcus AI formabitur in plano ellipſis BF, cuius ſemidiameter maior eſt radius AH, & chorda a t. ſubtendens arcum BI ſemidiameter minor; Sic dicas de circulo, qui ſit eleuatus à plano quantum eſt CE, nam ſubtenſa B 3 minor ſemidiameter erit ellipſis in plano eius ſitum exprimentis: quare erit ellipſis BG.

Ellipſibus ergo prædictis deſcriptis ex tract. 24 propoſ. 27. vel inſtrumento, vel ſaltem ellipſis quartam partem BG, quæ ſufficit, ſuper ſingulos V. g. ſinus 1. 2 fiet quadrans circuli, ſic ſuper 4. 5. & E 3. & cæt. qui erunt r. 6. 11. & 4. 9. 18. & 2, 10. 13. à punctis verò; quibus ſinus ſecant ellipſis ambitum BF V. g. à puncto 7 erigatur parallela ad radium EH, vſque quò ſecet quadrantem 1 6 11 ſuper ſinum ipſum erectum in puncto 6. ſic à puncto 8 alia parallela 8 9 ad BH ducatur, donec ſecet quadrantem 4 9 12 in puncto 9. & cæt. quibus

Digitized by Google

bus præſtitis erit parata conſtructio ad ſuperficiem extendendam. Fiat ergo ellipſis 33 Y B facta ex axe 40 H, & H B, in qua puncta ſubtenſarum arcus 18 17. & 14 15. & cętera, quale vnum ex ijs eſt punctum 40. ex præc. reperiuntur, transferendæque eſſent partes, in quas ſecatur à radijs Y 41. & cæt. ſed cum ſenſibiliter illæ partes non differant à quadrante A T B, vel C E B; ideo transferantur illæ partes.

Seorſim igitur agatur linea K L, & ſingulæ partes quadrantis B C transferantur in eam, nimirũ B I, & I 4. & 4 E, & cæt. quæ ſint K M, & M N, & cæt. p quæ puncta notata K, M, N, O, P, ducantur ad L K perpendiculares, quæ fiant æquales hinc, & inde lineæ K L diſtantijs normalibus, quæ intercipiuntur inter radium B H, & parallelas, quæ ſunt 7. 6. 8. 9. & cæt. ita vt K 20. & K 21 æquetur lineę 40 18. ſic M 22 æquetur interuallo 14 15. ſicut, & eidem M 23 ſit æqualis, lineæ verò N 24 ęquabitur interuallo 10 13. & pariter ipſi recta N 25. & ſic de cæteris: per puncta verò 20 22 24. & alia vſque ad L ſicut, & per puncta 21 23 25 vſque ad L flexæ duæ ducantur, & habebimus ſuperficiẽ 20 21 L, quæ erit quinta pars dimidij hemiſphęrij, & planum ſitumque H B C, cæteraque æqualia operiet.

Id verò ex 33. h. ſatis euidenter conſtat. Nam latitudo 21. 20 æquatur ſubtenſę arcui C E, longitudo verò quadranti C B, ſingulæ quoq; partes, vt 21 23, vel 24 25 ſubtenſis arcubus parallelorum, qui repreſentantur, in quadrantibus B 10 13. aut 14 15 19 ſimiliter æquantur; quæ partes parallelorum inter circulos maximos intercipiuntur; quorum vnus repreſentatur per lineam flexam, & quartam ellipſis 28 F, alius verò ſubintelligitur ad aliam partem ductus.

Si vero quis cupiat ſuperficies, quæ iuncturas coniungunt, ſi ſphæra ſit alicuius graſſitiei, iam per ſe clarum eſt, annulum planum, vel eius quartam partem F Q C R eam præbere.

Poterit etiam alio pacto ſuperſicies 20. 21. L, & promptiùs inueniri: nam ductis perpendicularibus T, 35; V, 33. & alijs ducantur arcus 33 34. & 35 36 & alij, qui à duobus radijs A H, & F H intercipiantur. Deinde diuiſa linea K L in partes æquales partibus quadrantis B A, & ductis, vt ſupra lineis 20. 21. & cæt. fiat 21 20 arcui A T, & 22. 23 ęqualia arcui 33. 34. ſic 24 25 arcui 35 36. & cęt. Nam ferè eadem puncta habebimus, vt priùs, ſed modus non eſt adeo perfectus, & deficit à veritate, licet expeditior.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXV.

Sphæricam ſuperficiem circulis maximis diuiſam in planas proijcere ſuperficies, à cylindrica ſuperficie plano eiuſdem circulari perpendiculari ſectam.

SIt ſphęra A B C; oporteatque reperiri ſuperficies eius ſecta à cylindrica ſuperficie, cuius veſtigia ſunt, vel conuexę G D, vel concauę E C F.

Proiecta itaque in planum ſuperficie ſphęrę, vt ſuperiùs, cuius partes ſint 40. 44 41. & 41. 45. 42. & tandem 42. 46. 43. quę circumoperiant ſphęram quantum eſt arcus C, 5, ducantur quoque quartę ellipſium, prout requirit eleuatio, cuiuſcumque circuli maximi, ſic ducentur ſingulę ellipſes, ideſt Ellipſis A 6 pro circulo eleuato ab horizonte arcu C 4; Ellipſis A 7 pro circulo C 3. Ellipſis A 8 pro circulo eleuato arcu C 2, & tandem A 9 pro arcu C 1, & ſi plures diuiſiones placitum erit in quadrante A C diſtinguere plures etiam deſcribentur ellipſes pro vniuſcuiuſcumq; circuli maximi per illas diuiſiones ducti eleuatione, & ab ijs punctis, quibus prędictę ellipſes ſecantur ab arcu E C F, vel G D ducantur rectę parallelę ad diametrũ B C, quales ſunt B 11 12 5; 15 20; 16 18; & 7 21

Et ſi cupimus etiam ſuperficies coniunctiuas, ſi ſphęra ſit alicuius graſſitiei, & orbis, tunc etiam ducantur ellipſes, quę ſint iuxta eleuationem illius circuli, cuius deſideratur ea ſuperficies coniunctiua, ſic ſi deſideretur ſuperficies, quę coniungit G 8 4 T cũ C R 4 T. Ad eleuationẽ per punctũ P Q circuli trãſeuntis deſcribatur ellipſis V 22. & ellipſis L 23 circuli tranſeuntis per punctum R T; & à punctis 13. 14. in quibus ſecantur ab arcu E F, ducantur parallelę ad D B: quę ſint 13 11 pertingens ad quadrantem medium, cuius V 22 eſt ellipſis, & 14 10 pertingens ad quadrantem L B, cuius 23 L ellipſis eſt, & iam erit omnis apparatus conſtructus ad ſuperficies, tum coniungentes, tum obuoluentes ſphęram ritè terminandas.

Et vt incipiamus à coniunctiuis 5 11. 10. ducatur flexa 5, 11. 10. & erit ſuperficies A L 5 10. quę quęritur; ſic ſi per puncta 18 P 19. quę proueniunt ab ellipſibus trium arcuum coniunctionis 2 ducatur flexa 18 P 19 erit A L 18 19 ſuperficies applicanda loco, & ſitui 2. & ſic ſi alię expoſcantur.

Transeamus ad ſuperficies ipſius ſphęrę, & globi: Accipiamus itaque interuallum C 1, quod transferatur à linea 40. 43. ſuper rectam 47. 44. & ſit 47 24 ſic interuallum C 5, & transferatur in 41 25; Sic C 20. & transferatur in 48 26. ſic C 18. & transferatur in 42 27. ſic tandem C 21. & tranſportetur in 49 28. & per puncta ſignata 24; 25; 26; 27; 28; 43 flexa ducatur, quę terminabit ſuperficies 24 25 44. & 25 45 27. & tandem 27. 46 43; quę octauam partem ſimul ſphęrę exęquans.

THEOR. IX. PROP. XXXVI.

Superficiem ſphæricam circulis maximis diuiſam in planas ſuperficies proijcere à ſuperficie cylindrica ſectam, cuius axis ſphæræ axi ſit parallelus, vel à ſuperficie plana Orizonti non perpendiculari.

SIt ſphęra, vel ſemicirculus eam repreſentans L A B: ſitque diuiſus quilibet quadrans in quot quot partes erit voluntas, vt in partes 18. 17. 16. 15. & ſingularũ deſcribẽtur ellipſes punctatę vt pr. 34. h. Sit verò ſuperficiei cylindricę ſecantis curuitas C E, vel planę pendentis angulus F C G, & E C perpendicularis. Ductis verò à ſingulis partibus, tum intrinſeci ambitus A B parallelis ad B L, veluti 19 A, 18 20. 17 21, 16 22. 15 23. & ſi etiam ſuperficies coniunctiuę exoptentur à circulo medio, & extrinſeco lineę eiuſdem rationis producantur, & ellipſes eorum circulorum, vel quartę earum exarentur, quę ad eam coniunctionem pertinent.

Igitur aſſumpto interuallo 24 19 naſcente ab A transferatur, & ſit 42 43. ſic 25 20 ſuper ellipſim

ſim

ſim A 40 productam perpendiculariter ad LB in 41 transferatur, & ſit 40 41, idem fiat de diſtantia 37 21, & ſit 44 45. & ſit de alijs vſq; ad L: Deinde ducatur flexa L 45 41 43; quę pertinet ad deſcribendam ſuperficiem ſemiſphęrę LAB ſectam à cylindrica CA; quod ſi & coniunctinę ſuperficies exoptentur, idem erit agendum, ſic transferretur G B in 42 K, & alia puncta reperientur, & ducetur flexa M 51 K. Sic, & 31 32 interuallū transportabimus in 42 O; & alijs eodem modo tranſlatis ducemus flexam N 50 O.

Si verò agatur de eadem ſphęrica ſuperficie deſcribenda; ſed à ſuperficie plana pendente ad partes internas, vt CF; centro C internallo quolibet puncto in FG, vt C 24. ducemus arcus 24 28. & 25 29. & cęt. deinde transferemus interuallum normale 24 28. in 42 6. ſic 29 25 in 7 1, ſic 27 30 in 8 3. & cęt. & ducemus quartam ellipſis 6 1 3 4 5 2, & ita medias, & extrinſecas quoq; pertinentes ad circulum mediū, & extimum ellipſes indagabimus, quas flexa iungemus 4 34.

Cùm enim CF ſit ſectio ſphęrę, & ideo circuius patet ex 13. tract. 25 eius proiectionem ellipſim fore in quacumque ſphęra, ſeu ambitus maioris, ſeu minoris.

Hęc verò puncta, per quę prędictę ellipſes ductę ſunt, reducemus ad quadrantem AL, vel AB, prout commoditas poſtulabit rectis lineis ad LB parallelis; ſic reducemus linea 5 10 punctum 5 in 10. & punctum 4 in 11. Sic quoque faciemus de punctis in flexa L 43 repertis, productis tamen quadrante BA in 46. X 35 in 80. & HC in 48. rectis ad LB perpendicularibus; ducemuſque parallelas 43 46. 41 47. & cęt. Omniſque prępararatio erit adornata, quâ ſuperficies exoptatę poſſint deſcribi.

Quod igitur pertinet ad ſuperficies coniunctiuas ita erit agendum: Sit ergo deſcribenda ſuperficies coniunctiua orbis alicuius, quę a plano FC ſecetur, & ea ſit 16 13, quæ in plano exprimitur lines punctata 4 33 34; tranſlato itaq; interuallo ellipſis a 33 in arcum N 14. & 35 34 in M 12 habebimus tria puncta 12 14. 11. per quę flexa ducta 12 11 erit ſuperficies 12 11 H A, quę quæritur coniunctioni 13 16 applicanda.

Sic ſi exoptetur ſuperficies coniunctiua pertinens ad iuncturam 18. 13. ſed orbis à cylindrica ſuperficie CE ſecti diſtantiæ puncti 50. & 51 à linea LB normaliter ſumptæ transferantur in 35 53. & C 49. & per tria puncta flexa ducatur 47 53 49. & erit ſuperficies, quæ deſideratur A H 53 49.

Sed iam tranſeamus ad ſuperficiem ipſam ſphęræ in ſuperficies planas reducendam. Itaque ductis ſeorſim lineis V T, PQ, & RS deſcribantur ſuperficies 60 T 61. & 60 Q 62. & 62 S 63; vt iam docuimus propoſ. 33. huius; quibus modo erit illud addendum, vel ſubtrahendum, quod ſuperficies ſecans, vel cylindri, vel plani requirit: itaque pro ſuperficie ſecta à plano pendente CF; punctum 61 erit punctum L, vt interuallum V 64 erit arcus L 10. & punctum 60. 66 erit arcus L 11. & cæt. per quæ flexa ducta 61 64 66 68 68 eas ſuperficies terminabit, ad quartā partē hemiſphærij à ſuperficie plana pendente ſecti ſpectātes.

Sic ſi velimus addere id quod addit ſuperficies cylindrica ſecans CA, erit punctum 61 idem quod punctum B, at interuallum V 65, idem B 52. & 67 60 idem interuallum, quod B 53. & cæt. vſque ad interuallum R 69 idem quod B 46; Per quæ puncta flexa ducta 61 65 67 69 70 69. dabit ſuperficiei quartā partē ſuperficies 61 T 67. & 67 Q 70. & 70 S 69 hemiſphærij; cum parte addita circulo GC orthogonali, tamquam ſi eſſet cylindrica ſuperficies CGF addita ſphæræ. At ſi velimus quod ſit ſphęrica, eodem modo agemus, ac in ſuperficie 61 R 68 ablata. Primò enim centro C omnia interualla in linea CG inuenta, vt CG, & C 31. & C 24. vel C 25. & alia arcubus in CS deducemus, diſtantiaſque 24. 19. à punctis, in quibus arcus ſecant CF vſque ad CG normalem; ſingulas; ſed normaliter aſſumemus; transferemuſque normaliter in ellipſes V. g. A 40 41 prolongatas; non per lineas rectas, ſed per propriam orbitam; hęcque puncta parallelis, vt 41 40 non in lineas rectas B 46. ſed in arcus productos AB, X 35. & HC, punctorumque, in quę parallelæ incidunt ab HC linea normaliter aſſumptæ transferentur normaliter quoque in lineas 70 62. & alias. Sed quæ ſint curuę, vt ſunt 60. 66. Q, & ſi fortè incipiant ſelungi, vt faciunt 62 S, & 62 Q eas in ſingulis replicando, ita vt diſtantia 62. 70 ſit notata, tum in 62 S, tum in 62 Q productas. Interualla autem, quæ in RS, & alias rectas incidunt ſolum vnica notatione contentæ erunt V. g. 42 43 notabitur in R 69. 44. 45 in P 69: & ſic ſuperficiem 61 R 69 ſuperadditam dimidio hemiſphęrio, quæ ſit pars alterius hemiſphęrij conſequemur.

EXPENSIO IV.

De ſuperficie conoidis Hyperbolici Parabolici, & ſphæroidis Elliptici, annuli que ſoliti in planas ſuperficies extendenda.

SPhęræ ſphęroides ſuccedit, cuius cum ſit frequentiſſimus vſus viſum nobis eſt, eius ſuperficiei extenſionem non eſſe prætermittendam, maximè quia quaſi eodem modo, ac ſphæra eius ſuperficies in planum vrgetur, & conoidum quoque Hyperbolicorum, Parabolicorumque ſuperficies extendere ex eius proiectione addiſcamus.

PROBL. I. PROPOS. XXXVII.

Superficiem Sphæroidis, & Hyperbolici vel Parabolici conoidis ſectam circulis circulari plano per axem ducto parallelis in planas ſuperficies proijcere.

SIt Corpus Ellipticum, ſeu Parabolicum, ſeu Hyperbolicum ABC: diuidaturque in quodlibet partes A 2; & 2 3. & cæt. & producto AAC BC in D, per partes prædictas rectæ ducantur, quæ ſint 2 3 D, & 4 3 B, & cęt. Centris deinde D, & E, & cęt. ducantur arcus 2 30 interuallo D 2. & 3. 31 interuallo D 3. qui terminentur iuxta prędicta de ſphęricis ſuperficiebus propoſ. 27. & erit præſtitum, quod proponitur.

PROBL. II. PROPOS. XXXVIII.

Eandem corporum prædictorum ſuperficiem in planas ſuperficies diſtendere ſectam ſecantibus maximis Ellipſibus, quæ in ipſis deduci poſſint.

SIt idem corpus quodcumque ex dictis ABC, cuius circularis plani quadrans ſit CFG, cuius diameter CF æquat diametrum minorem BA. Superficies verò diuidentes, & ſecantes ipſam baſim CFG imprimant ſectiones, & earum veſtigia FC, & F 6. & F 7. & cæt. diuidentes baſim circularem CFG in partes æquales, & conuenientes in puncto F, & ſe inuicem veluti faciunt in ſphæra circuli maximi in axe FC ſecantes: Cum autem interualla æqualia ſint; aſſumantur quodlibet interuallum, vt 6 16. & transferatur ſuper BA, & ſit HB; fiatque portio ellipſis, ſeu quarta eius BHC datis diametris BH, & BC, vel ſi corpus ſit parabolicũ, ſeu hyperbolicũ dimidiata Hyperbola, ſeu parabola deſcribatur data altitudine BC, & applicata BH, quę ſit H 10 C. Siquidem Tract. 26. prop. 15. & 18. probauimus parabolam inclinatam, vel hyperbolam, hyperbolã ſimiliter deſcibere, vel parabolam ſua in plano ſituatione: Ducantur deinde à punctis, in quibus ſecat perpendiculares prędicta ſituatio H 10 C rectæ parallelæ axi BC, quæ ſint 8 12. & 9 13. & 10 14. & cæt. centro deinde 16. & interuallo qualibet perpendiculari V. g. 16 5 ducatur arcus 19 12. 5 ſic centro 17 interuallo 4 17 ducatur arcus, & ſit 20 13 4. & cæt. & ſic apparatę erunt delineationes, quæ ad ſuperficiem deſcribendam neceſſariæ ſunt.

His itaq; cõparatis ducatur ſeorſum linea QI, & ei perpendicularis KL, ſuper quã partes omnes circumferentię AC transferantur, & ſit K 21 ęqualis parti A 2. ſic 21. 22 ęqualis parti 2. 3. & ſic aliæ alijs vſque ad L, ita vt tota KL æquet totum ambitum AC; perque ſingula puncta nimirum 21. 22. 23 24 ducantur parallelæ ad QI. Aſſumatur deinde arcus 19 12. & tranſferatur hinc inde, ſitque ei æqualis 24 25. & 24 26: Sic arcui 20 13 fiat æqualis 23 28. & 23 27. ſic fiat de alijs; perque puncta I. 26. 27. & alia vſque ad Q ducatur flexa, & rurſus per puncta L 25 28. vſque ad I, & erit ſuperficies Q I L quinta pars ſuperficiei, quę operit ſphęroidem BAC, nempe quartam partem dimidię ſphęroidis, vel totius conoidis.

PROBL. III. PROPOS. XXXIX.

Corpus Ellipticum in planum proijcere ſectum Ellipſibus ſe inuicem ſuperantibus.

SIcut corpus Ellipticum poteſt maximis Ellipſibus ſecari, & ideo inuicem æqualibus, vt in præcedenti propoſitione, ſic, & ellipſibus, quæ à maxima ellipſi deficiãt, & tandem in circularẽ eius baſem ſe conſtringant, vel ſi maximus ambitus, qui corpus ipſum circundat ſit circulus aliæ ellipſes paulatim in minimam ellipſim decreſcent, & hoc euenit quando ellipſes partientes corpus ellipticum non ſunt ipſi circulo elliptici corporis perpendiculares, ſed maximę, vel minimę ellipſi, quę in dicto corpore deſcribantur.

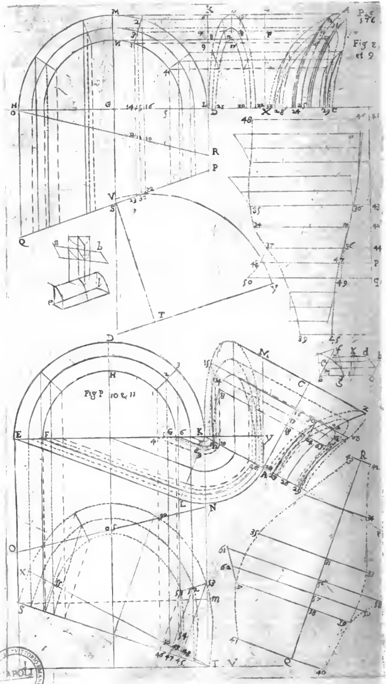
Sit ergo ellipticum corpus, vel quod ſufficit eius dimidium ADC; diuidaturque quarta eius pars in quot partes libuerit, & ducantur à centro A rectę A 20. & A 21. A 19. & cęt. deſcribanturque deinde ellipſes dato diametro minori AB, & ſucceſſiuè alio maiori, & maiori, vt A 23, deinde A 22. & cæt. Prima itaque ellipſis erit GFH, vel eius quarta pars dato diametro minori AB, qui ſit FG, & maiori A 23. quæ ſit HG, ſecundæ item pars FO dato diametro eodem minori AB eodem ac FG, & diametro A 22 eodem ac FG; Tertiæ quartą pars erit FM dato diametro maiori 21 A, & eodẽ ſemper minori, & idem agatur de diametro 20. & deſcribetur ellipſis PN. Eruntque deſcriptę Ellipſes, quæ corpus Ellipticum ex 10. Tract. 25. diuidunt. Super AB verò circulus OEK eſt, & ellipſis deſcripta ſuper AC maiori axe ipſa eſt ellipſis primo propoſita, cuius quarta pars eſt CB.

Iſtis omnibus Ellipſibus deſcriptis, Ellipſes etiam deſcribendę ſunt, quę oriuntur à planis Ellipſium parallelè ipſi DBC ellipſi maximę, circulo, cuius diameter AC, ſecantibus, & in partes ęquales diuidentibus, & tranſeuntibus per ſinus, & ſectionum veſtigia 6 T, & 2 I. 10 9. & cęt.

Cum itaque iſtę ellipſes ſint parallelę erunt inuicem ſimiles ex 11. Tract. 25. quare poterunt deſcribi, vt diximus prop. 72. Tract. 24. diuidendo DA, A 20. & A 21. &c. in partes proportionales ipſi DB, quod factum eſt duplando ſemidiametros ſingulos A 20. & A 21. & alios, vt fiant diametri, & accommodando illos in triangulo DCK. Sic menſurata dupla 20 A in D 8 ducetur arcus 83, & trahetur D 3 ad punctum 3 in quo ſecat latus AC, ſic dupla A 21 dabit longitudinem D 5. & arcus eo interuallo ductus 5 4 ſignabit punctum 4. ad quod ducetur D 4 & ſic de alijs. Porrò triangulum DCK habet pro duobus lateribus diametrum DC Ellipſis maximum, & minimum D K angulum a rectũ claudẽtibus. A partibus, itaq; diametri circuli T 2. & 29 &c. parallelę deſcendãt, diuidentq; D 3. & D 4 in partes proportionales ex prop 13. l. 6.

Singulę itaque partes proportionales in ſingulos correſpodentes ſemidiametros transferantur ſic pars 12 Y transferatur in A 13. & Y 15. in A 17. perq; puncta ſingulis in diametris impreſſa tranſeat flexa, quę conſtituet ellipſim 17. 29. 16. & ita agatur de alijs. Tandem in ellipſibus priùs factis inueniantur ſectiones iſtarum poſtremarum ellipſiũ, & quia tranſeunt per ſectiones T 5, & I 2. &c. ideo partes T 2. & 29. &c. transferãtur in ęqualem diametrum FF, & ſint O 30 & 30 31. & cęt. ducãturque parallelę 30 32. & 31 33 & cęt. abſcindentque ab ellipſibus portiones orbitarum æquales illis, quę intercipiuntur ab ellipſibus parallelis 17 29 16. & alijs ſimilibus, & erit conſtructio pręparata ad ſuperficies elliptici corporis in planum proijciendas.

Sit itaque extendenda ſuperficies, quę operit 20 A 19. Seorſim linea ducta Q S, ab aliquo puncto S, ellipſis FM facta ſuper diametrum A 21 ellipſium inæqualium extendatur, ſitque QS æqualis ellipſi FN, ſingulęque partes ſingulis V. g. F 34 parti F 36 & 34 35 parti 36 37. & cęt. Poſtea accepto interuallo 47 F ducatur arcus centro S, ſic 13 26 in fig. priori ducatur alius arcus, & punctum in quo ſe ſecant ſit 39. ſic ſumpto ab ellipſi NP interuallo P 45 ducatur centro S arcus, rurſuſque interuallo 26 40 alius arcus, & punctum in



BIBL. VITTORIO EMANUELE NAPOLI

quo ſe arcus interſecant ſit 42. Pari ordine ſumpto interuallo 46 45 centro 39 arcus ducatur, & interuallo 29 41 centro 37. ducatur alius arcus, & punctum interſectionis ſit 43. Poſtea centro 42 interuallo 47 48 arcus ducatur, & interuallo 29 27 alius arcus, & punctum, quo ſe ſecant, erit 44. & ſic ſucceſſiuè ages in alijs, obtinebiſque pūcta plurima, p quę ducta flexa S 51. & S 50 ſicut, & per puncta 51 Q 50 concludent ſuperficiem quęſitam 51 S 50. quę inter duas ellipſes, quarum radij ſunt A 20 A 19 intercipitur, ſi ergo idem agas de cęteris 19 A 23 habebis ſuperficiem quartę partis corporis Elliptici in planum extenſam. Hanc tamen propoſitionem quoad planitiem corporis ſphęroide inſcripti, non omnino mathematicam eſſe agnoſcimus, quia angulus, quam facit planum per ſubtenſas ellipſibus parallelis V. g. ambitibus 17 29 41. & 13 26 40. & cum planis ellipſium, quius axes ſunt inęquales V. g. cum ellipſi tranſeunte per HN axem non ſunt recti, vt repoſcitur ex prop. 34. Verùm adeo pręciſam, vt error ſenſibilis multiplicatis diuiſionibus, quantum ſat eſt, contingere non poſſit, cùm multiplicatis ellipſibus inęqualibus parū à recto differre poſſint anguli effecti à plano ellipſis arcus ellipſium parallelarum bifariam diuidente.

PROBL. IV. PROPOS. XL.

Ellipticum quodcumque corpus, in planas ſuperficies extendere.

PRęcedens propoſitio eſt communis omnibus corporibus ne dum quorum circulus baſis eſt, ſed etiam, quę vndequaque elliptica ſunt, & quoad latitudinem, & quoad altitudinem, imo, & omnibus corporibus, etiamſi per axem non ſectis etiam ouatis, & huiuſmodi; pro qua re hic damus exemplum corporis elliptici ABC, ſed per axem nō ſecti originē ducentis ab ellipſi FEO, quę ſit p axē minorem HI ducta, quę maximā ellipſim per axem maiorem HG obtineat FML. Sit itaque deſcribenda ſuperficies, quę operiat portionem HGC. Datis ergo ſemidiametris EF ellipſis per axem minorem HI ductę, & HC deſcribatur ellipſis KLP, deinde dato eodem diametro EF, & NH deſcribatur ellipſis KML; Diuiſo autem in partes, in quas FE diuiſus eſt diametro KL ducantur ab illorum punctis terminantibus parallelę ad eorum circumferentias, & ſint 32 33. 34 35. 36 37. ſic ad alias ellipſes 32 12. 34 13. vel 32 30. & 34 11.

Ducta itaque ſeorſùm recta QA in illam transferatur ellipſis LQ ęquando partes partibus, vt ſit S 2K parti L 48, ſic 22 23 parti 48 49. ſic 24 23 parti 11 30. & cęt.

Poſtmodum, vt in pręcedenti fecimus ſumpta diſtantia 2 4 deſcribatur arcus centro 2K puncto, deinde centro S interuallo B 39 deſcribatur ruſſus arcus, & vbi ſe decuſſant in 2K 50 punctum imprimatur. Sic centro puncto K3 interuallo 6 7 deſcribatur arcus occultus; rurſùſq; interuallo 39.37. cētro pūcto 50. alius arcus occultus ducatur & vbi ſe ſecāt ſit punctū 51. Sic reperies pūcta notata 52. 53. 54. & per illa flexa curuabitur, & ita etiam ducatur flexa 55 S ſumptis interuallis à partibus L 40. 40 41. ellipſis LP, & à centris 59. 58. 57. 56. 55. pro arcubus ducentis. Et pro arcubus à centris K2. 23. 24. 25. trahendis, ſumptis interuallis 2 3. 6 5. 9 8. & cęt. & tandem per puncta tria 55 Q 54 alia ducatur flexa, & erit ſuperficies 54 S 55. quæ deſideratur, cui ſi fiant pro alijs interuallis quatuor, quæ remanent, ſimiliter alię ſuperficies V. g. pro parte E HG, & cęt. habebimus quinque ſuperficies, quæ corporis ABC dimidiam ſupetficiem aperient, cui ęquales, ſimileſque erunt, quę aliud dimidium circundabunt.

PROBL. V. PROPOS. XLI.

Cylindri in annulum flexi ſuperficies inuenire planas.

SIt huius cylindri planum AHF, BCE, ſemicirculus autem AOB; oporteatque ſuperficies reperire planas eius rotundę, & circumflexę ſuperficiei ęquales

Diuidatur ſemicirculus AOB, in quot libuerit partes V. g. 5. perque puncta terminatiua rectæ ducantur vſque ad perpendicularem CHG, vſque quo neceſſe erit, extenſam; ſitque prima B K G, ſecūda 2 3 20 tertia 3 4 21, quarta 4 5 2K quinta 5 A 23. Facto autem centro puncto, in quo ſecant, vt in G interuallo GB ducatur arcus B, 26; & rurſùs eodem centro interuallo G 2 ducatur arcus 2 27. & ſic fiat de alijs, pro vt ſupra docuimus, agentes de ſphęris propoſ. r.

Vt autem terminentur, ducantur perpendiculares 2 11; 3 12. & cęt. & à centro K ad ſingulas extenſo circino ducantur arcus B 25. & 11. 15. & 12 16. & 13 17. & cet. vſque ad A 24. deinde menſuretur arcus K 25 ſuper arcum K 26. ſic arcus 11 15 ſuper arcum K 27. & ducatur linea K6 27 ad centrum G; omnino enim per centrum G tranſire debet, & erit ſuperficies 2. K7 K K6. quę imminet ſitui 11 15 K 25.

Rurſus arcui 11 15 adęquabitur arcus 2 28, & arcui 16 12 arcus 3 29. ductaque recta 28 29 verſus centrum 20 terminabit ſuperficiem 3 K9 K K8. quę imminet ſitui 16 12 11 15. & ita de alijs, quibus replicatis quinquies quantum numerus partium arcus BCE requirit, erunt tot, quot ſemiannuli quadrantem AHCK operient.

Sed ſi quis optaret hunc annulum concauum, & vellet cognoſcere ſuperficies coniunctiuas, quę partes ſecundum annuli craſſitudinem copulant, id pręſtitimus ad aliam partem ſiniſtram. Ducto itaque ſemicirculo ENF alius ſemicirculus ducetur LMK, quorum interuallum MN craſſitudinem annuli oſtendet; quibus in quinque partes diuiſis per earum partium puncta terminantia ducantur rectę ad perpendicularem CHG; talis eſt LEX, & 40 41 43. atque 42 44 45. & 46 47 48. & 49 50 21. Facto autem centro in puncto K1 ducatur arcus interuallo 49 21. & rurſus arcus 50 K1; Sic facto centro in puncto 48 arcus ducetur interuallo 48 45. & rurſus alius 48 47. & ſic de cęteris qui arcus ita terminabuntur.

Ducentur enim perpendiculares à punctis, à quibus educti ſunt, nempe 51 49. 47 53. & alijs ad LK, & à punctis; in quę cadunt centro A arcus deſcribentur, vt 6 7. & 51 52. & 53 54. & 55 56. & cęt. qui arcus transferentur in arcus priùs deductos, ſic arcus 6. 7 æquabitur arcui 50. 61. ſic arcus 51 52 arcui 49 62. & ducta recta 62. 61 ad centrum K1 dabit ſuperficiem, quæ requiritur coniunctiuam graſſitudinis F K 59. 50 cum altera graſſitiei parte 49. 50. 46. 47. & ſic agendum in

alijs, vt ex delineatione ſatis, ſuperque conſtat.

Ratio verò huius propoſitionis eſt eadem ac capenſ. 3. de ſuperficiebus ſphæ rarum in planum redigendis per ſuperficies ſegmentorum conicorum: ſiquidem CB V.g. circumducta ſecundùm circulum BCE efficiet conum ex defin. 1. tract. 24. quare AB erit ſegmentum conicum, vnde, & ſuperficies inter eius ambitus A 27. & B 26 ex prop. 24. tract. 31. comprehenſa erit ſuperficies fruſti conici; Siquidem certum eſt ex prop. 24. tract. 31 ſectorem diametro CB ductum, cuius peripheriæ portio æquetur circulo BCE æquari ſuperficiei coni, & ſectoris illius partes partibus ſuperficiei conicę; ideo etiã ſectoris portio B 26 C ęquabitur coni portioni, cuius ambitus B 25. & latus BC, & ſic dicas de ſectore A C 27. quod ęquetur ſuperficiei coni, cuius latus A C, & ambitus II 15, quo dempto à ſectore BC 26 remanet ſuperficies A B 27 26 æqualis reſiduo conicæ ſuperficiei, cuius arcus inferior ſit B 25. & ſuperior II 15. & altitudo B A. Id autem dicendum eſt quoque de alijs.

COROLLARIVM.

Hinc intelligi poteſt, quod ſuperficies annulum circũueſtientes tantò ſunt maiores, quę ſunt vltra XD diametrum perpendiculari M N parallelum, quantò minores ſunt, quæ ſunt citra DX, vt in figura P: Nam ſi ſumatur DY æqualis arcus, & ſignetur in XT, & ducatur XTN erunt parallelæ MY, & NX ex propoſ. 27. lib. 3. Cor. 1. Quare cum NM, & XD ſint parallelæ, MD, & NX erunt æquales, ex 33 lib. 1. Quare MY ſuperabit NX linea DY quantùm NT deficit ab NX æquali linea TX.

Ducantur verò à punctis medijs ſubtenſarum I, & H lineæ NM normales IP, & OH, & quia ſunt triangula æquiangula DIA, & XHB, vtpote effecta à parallelis ex prop. 4. lib. 6. erit DI ad IA, vt HX ad BX, vtrùm DI æquatur lateri HX, ergo AI æquabitur ipſi BX. Igitur OH æqualis ipſi AR tantùm deficiet ab RX æqualis ipſi PA quantùm PI accreſcit ſuper PA. Si ergo MY intelligatur circumuolui, & fieri conus, ſicut NX, erit EY ſemidiameter, & RX, vt DY, & TX altitudines fruſtorum æqualium ſuperficierum conicarũ, & LX, & FY annulorum planorum altitudines, & circuli RB ducti, & PI radij intermedię peripherię latitudinẽ plani ãnuli bifariam, & circulariter diuidentis. Rectangula autem erecta ex latere ipſorum mediorum circulorum æquali ex 12. tract. 30. & altitudine, ſunt annulorum planiciei æqualia. Quare cum ita ſint circumferentiæ, vt diametri, & diametri ſe ſuperent ea ratione, vt quanto RA eſt minor, quam RX, tantò ſit maior PI; etiam rectangula æqualis altitudinis LX, vel FY annulorum, ſed circumferentiarum, quarum vna ducitur radio RB altera PI ſe ſuperabunt eodem modo. Nempe ſi fiat rectangulum E ex LX, & ex circumferentia ducta radio RX, & rectangulum C ex LX, & circumferentia ducatur radio DH, & rectangulũ m ex circumferentia ducta radio PI, & LX, vel FY, cum ſe referant, vt altitudines ob æquales baſes ipſis FY, & LX, & ideo inuicem, idest vt peripheriæ, nempe vt diametri ex 33. lib. 6. erit maius m, quàm e tantùm, quantùm minus eſt t, quàm e; quare, & annuli probati ęquale prop. 12. tract. 30. illis rectangulis tales erunt.

Quare, & ſegments conorum, quæ conſtituuntur ex peripherijs æqualibus ex 24. Tr 31. nempe fruſtum conicum ex circumferentia æquali circumferentiæ ductę radio EY extimæ, & ex radio DG intimę, ſicut, & fruſtum ex TX conſtituitur ex peripheria æquali ex CH intimæ, & ex radio RX extimæ, vnde ex Coroll. propoſ. 12. tract. 30. erunt eiuſdem altitudinis ac rectangula N, & T, & ęqualis baſis inuicem TX, vel DY; vnde reſpectum rectanguli e, & ipſius altitudinis DY tantùm decreſcet fruſtum ex XT quãtum augetur fruſtum ex DY; Quod & debes facere de fruſto DZ, vtpote, quod ſit latus coni æqualis cono NX.

TRACT.

TRACTATVS XXXIII.

De inſcriptione, & circumſcriptione Solidorum.

ANtequam ad ipſorum corporum trutinandam ſoliditatem accedamus, oportunum fuit inſcriptionem corporum quinque regularium in ſphæra, & omninò neceſſarium quorumcumque corporum in globoſis deſcriptionem attingere, vtpote quod talium corporum cubatio maximè ab hac inſcriptione dependeat; Et quia ſimul agitur de proportione laterum corporum inſcriptorum benè præcedit ſoliditatis cognitionem ipſa laterum doctrina; cùm priùs ſe ſe offerant intellectui latera cognoſcenda, quàm ipſa ab eis comprehenſa ſoliditas.

EXPENSIO I.

De principijs.

PRiùſquam ipſam rerum ſoliditatem attingamus priùs definitiones, quæ ad corporum ſolidorum conſtitutionem faciunt; oportet exponere.

DEFINITIO I.

S*Olidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.*

DEFINITIO II.

S*imiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine æqualibus continentur.*

DEFINITIO III.

Æ*Quales ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.*

DEFINITIO IV.

S*Olidus angulus eſt plurium, quam duorum planorum angulorum in vnum punctum inclinatio.*

Sic ſuperficierum PBE, & PEF, & BPC, & PCP in punctum P inclinatio vocatur angulus ſolidus, vt in fig. Def. 6.

DEFIITNIO V.

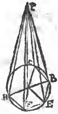
P*Yramis eſt figura ſolida, quæ planis pluſquam duobus continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.*

Quare ſi angulus ſolidus P habeat ſuperficies ſuas, quibus clauditur ab aliquo plano, V.g. CBEFH incipientes, & in punctum P terminantes pyramis dicetur, quæ, & trium planorum, & quatuor, & quinque, & ſic in infinitum ſicut, & ſolidus angulus poteſt conſtitui.

Et hinc eſt, quod ſi ſolido alicui angulo ſubſternatur baſis plana, quod illa ſuperficies tot lateribus terminatur, quot planis angulus continetur; cum enim ſuperficies, & plana angulum continentia baſim planam ei ſubtenſam terminét, tot rectas lineas habebit terminantes, quot erunt ipſorum planorum ſectiones in baſi factas.

DEFINITIO VI.

F*Igura ſolida planis ſuperficiebus conſtans in globoſa inſcripta dicitur eum, vel anguli ſuperficierum, vel ſolidi tangunt alterius ſuperficiem.*



Sic figura ſolida PBEFHC in cono inſcripta dicitur, quia omnes eius anguli tangunt conum, nempe anguli ſolidi, vt BE FP, & ſuperficierũ V. g. ſuperficiei BPE ſecundũ lineã cùm PPE. Sufficit autem pro diuerſitate corporum cõuexorum, vel quod anguli ſuperficierum, vel quod anguli ſolidi tangant.

EXPENSIO I.

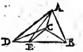
De ſolido angulo.

ANtequam ſolida ipſa pertractemus, de ſolido angulo eſt agendum, cum enim ſimilitudo ſolidorum, ne dum à proportione laterum. Sed & ab angulorum ſolidorum æqualitate dependeat ſi non cognoſceremus anguli ſolidi naturam, neque ſolidorum proportionem percipere poſſemus.

THEOR. I. PROP. I.

Etiam, ſi ſolidus angulus tribus tantùm angulis planis contineatur, duo quilibet anguli reliquo ſunt maiores.

*PRubatur. Nam ſi aliquis angulus planus in angulo ſolido ABCD eſt maior, vel ęqualis duobus reliquis. Aſſignetur, & ſit BAD, à quo demátur angulus BAE æqualis angulo BAC; remanetque reliquus EAD, vel maior, quā DAC, vel æqualis. Remaneat primo ęqualis angulo CAD; Fiat latus EA lateri CA ęquale; ſubſternaturq; baſis plana BCDE, & fiet ea 22. primi triangula æqualis; nimirū EAD triangulo ACD ob latus idem AD, & æqualia crura EA, & AC, cū ſint anguli DAE, DAC dicti æquales. At BEA triangulo BAC ob latus idē BA & crura EA, & AC æqualia cum ſint anguli apud A effecti æquales. Quare baſis quoque BC eſſet æqualis baſi BAE, & baſis ED baſi CD. Non fieret ergo triangulum BCD baſis anguli ſolidi. Nam ex 20. primi oportet duo crura trianguli reliquo eſſe maiora omnifariam ſumpta, & ſic pyramis triangularis non daretur, quæ baſim triangularem habet, & verticem tribus angulis planis contentam, & hinc neque BD maior eſſe poteſt BC, & CD cruribus eadem ratione. Vnde nec angulus BAD poteſt eſſe maior angulis BAC, & CAD.



THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quàm quatuor rectis angulis continetur.

*SIt angulus ſolidus ABCD. Dico angulos eius planos BAD, DAC, & BAC, vel ſi plures ſint eſſe minores quatuor rectis. Quod, vt probetur; determinentur omnia latera AB, & AD, & AC, & ſubſternatur baſis BDC, in quam à puncto A in ſublimi cadat ex prop. 10. Tr. 22. perpendicularis IA, & ab angulis B, D, C ad eius contactū I ducantur BI, & ID, & IC, eruntq; anguli tres DIC, & DIB, & BIC æquales quatuor rectis in plano BDC perpendiculari ad IA Cor. 1. pr. 12. lib. 1. Sed ex propoſ. 21. præcitati tract. angulus DAC ab obliquo plano effectus eſt minor, quàm DIC, & ſic BAD minor, quàm DIB, & pariter BAC minor, quàm BIC. Ergo omnes ſimul erunt quatuor rectis minores.

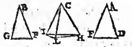


THEOR. III. PROPOS. III.

Si fuerint tres anguli, quorum duo, vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores, poterit ex illis angulus ſolidus conſtitui.

*PRobatur ad hoc, vt conſtituatur angulus ſolidus neceſſe eſt, vt baſis plana illi angulo poſſit ſubſtitui, quæ ſaltem triangularis ſit: Sed ſi anguli 2. ſint maiores reliquo, habebūt etiam duas baſes maiores reliqua: Ergo ex illis tamquam ex lateribus planum triangulare conſtitui poterit, quod angulum ſolidum ſubſternat.

Quod verò duo anguli maiores reliquo ſimul ſumpti habeant etiam baſes ſimul ſumptas maiores reliqua oſtenditur.



Sint anguli tres A, B, C, quorum duo A, & B reliquo C ſint maiores. Dico etiam baſes DE, & GF ſimul ſumptas reliqua HI eſſe maiores. Nam primo ſi vnus ex duobus ipſorū eſt maior, vel æqualis ipſi ICH cōſtat, & baſim ſub æqualibus cruribus contentam, vel eſſe æqualem ex 28. primi, vel eſſe maiorem ex 24. eiuſdem, & ideo addita altera baſi ambas reliqua eſſe maiores.

At ſi ambo anguli ſeorſim ſumpti ſunt minores angulo reliquo factis omnium angulorum æqualibus cruribus, & ſuis baſibus DE HI, FG ductis, in triangulo reliquo HCI detruncetur angulus LCH æqualis angulo A; remanebit angulus reſiduus LCI minor altero FBG, cùm duo A, & B hoc toto HCI præſupponantur maiores ex Theſi.

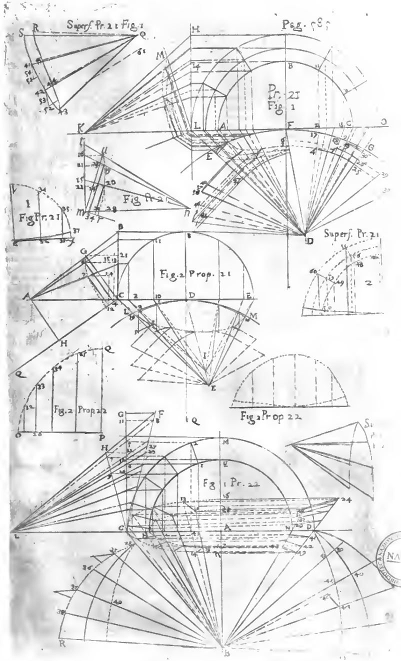
Baſis verò HI baſi DE, & LI baſi minor erit eò, quòd HL ſit æqualis DE ex prop. 22. primi ob latera æqualia HC, & CL lateribus DA, & AE, & angulum comprehenſum ab ipſis æqualem, at baſis LI ex 25. lib. 1. minor baſi FG ob angulum minorem LCI angulo FBG, & latera æqualia LC, & CI lateribus FB, & BG. At baſis HI eſt minor cruribus HL, & LI ex 20. lib. 1. Ergo HI erit minor baſibus DE, & FG ſimul ſumptis. Vnde ex illis angulis angulus ſolidus conſtitui poterit.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocumque aſſumpti reliquo ſint maiores, ſolidum angulum conſtituere; oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

*SInt tres anguli in fig. A, B, C minores quatuor rectis, & quorum duo, vt vt aſſumpti reliquo ſint maiores, & fiant ei crura æqualia ſubductis baſibus DE, FG, & HI. Electo verò quolibet triangulo, ad eius baſim V. g. ab baſim FG in triangulo FBG ducatur perpendicularis BT. Deinde ex

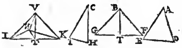
baſibus


Superf. Pr. 21 Fig. 1
Pr. 21
Fig. 1
Fig. Pr. 2
Fig. Pr. 21
Superf. Pr. 21
Fig. 2 Prop. 21
Fig. 2 Prop. 22
Fig. 2 Prop 22
Fig. 1 Pr. 22

NAPOLI

baſibus DE, FG, & HI conſtituatur triangulum KNL, & diuiſo KL, vt eſt æqualis baſis, FO in T, ducatur NT, fiatque triangulum NTV ex perpendiculari TB crure EA, & baſi NT, cuius latus TV perpendiculariter inſiſtat lateri KL, & ſecet in NT ex prop. 31. Tract 22. Deinde iungatur KV, & VL. Dico quòd ſit factus angulus ſolidus conſtans tribus angulis planis datis A. B, &C.

Probatur. Nam, quòd ex tribus baſibus poſſit triangulum conſtitui, conſtat ex hypotheſi, in qua ſupponitur duos angulos fuiſſe datos maiores reliquo; Quare, & baſes, vt prop. anteced. probatum eſt; Quòd autem ex tribus quoq; nimirum perpendiculari TB latere EA, vel quolibet illi æquali, & NT poſſit triangulum componi.



Probatur. Nam aut NT eſt maior, quàm TL, vel minor, vel æqualis. Sit primò maior Quia ergo ex TV, LV, & LT cõponitur LVT triangulũ, LV, & LT erunt maiora latera, quã VT, vnde tantò maiora erunt TN maius ex Hyp. quã TL, & NV ęqualis ipſi VL ſc. ipſi AE, vel ęqualis GB, Aut NT erit minor, quã TL, at TV, & LV ſunt maiora, quam TL, ergo tantò maiora latera erunt ipſa VT, & NV æqualis ipſi VL reliquo NT, Aut erit ęqualis NT, & LT, & ita ſi TL, & LV eſt maior, quã VT, etiã maior erit NT cũ ipſa NV ęquali VL, quam TV, vnde ex ipſis NT, TV, & NV poterit componi triangulum NVT. Quod verò ita ſuper NT conſtituendum ſit, vt TV cum KL faciat angulos rectos docuimus prop. 31. tr. 22. interſectionum.

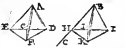
Quod tandem omnes anguli ad V nimirũ KVL, & KVN, & NVL ſint ęquales, ſinguli ſingulis aſſignatis C, B, A, oſtenditur. Nam baſis KN eſt æqualis ex conſtructione baſi HI, & crus NV item ex conſtructione cruri BA, & ideo æquali HC. Crus quoque alterũ KV eſt ęquale itẽ cruri FE. Quod oſtenditur, nam TV crus perpendiculare ex cõſtructione eſt æquale perpendiculari TB, & KT cruri FT, & anguli apud T comprehenſi à dictis cruribus ęqualibus ex cõſtruct. ambo recti; Ergo ex pr. 22. lib. 1. baſis KV baſi FB, & æquali IC erit æqualis, vnde triangulum KNV erit æquale triangulo HCI, & triangulum KTV triangulo FBT, & altera medietas TVL alteri medietati TBG, & crus LV cruri GB, vel æquali EA ſecundi trianguli. Baſis verò NL baſi DE ex hypotheſi eſt ęqualis, & crus NV cruri EA, vel æquali DA. Ergo triangulum ex 23. l. 1. NVL triangulo DAE æquale, & ſic omnia triangula KVN & NVL, & KVL ſingula ſingulis aſſignatis erũt ęqualia, quare, & anguli ad V ſinguli ſingulis B, A, C æquales erunt.

PROBL. II. PROPOS. V.

Ad datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIt angulus ſolidus A, cui coſtituẽdus ſit ęqualis angulus ſolidus B in data linea BC. Ad triangulum planum ADE ab aliquo puncto lineę AF V.g. ab F deducatur perpendicularis FG, & per G punctum tranſeat recta DE.

Deinde ex BC detruncetur BH, æqualis AF, & ad punctũ B ex pr. 24 l. 1. conſtituatur angulus planus IBH æqualis angulo plano DAE; ſiant verò æquales IB, & AD, connectaturque IH, & in HI ſumatur ſegmentum æquale ſegmento GE, quod ſit LH, ducaturq; BL, & à puncto L educatur plano triãgulo IBH perpendicularis LK, æqualis ipſi GF, connectaturque recta BK. Dico *angulum ſolidum B tribus planis contentum* IBK, *&* IBH, *&* BHK *eſſe æqualem angulo ſolido dato* A.



Probatur, quia angulus IBH eſt æqualis angulo DAE, cruſque BH cruri AE, necnon, & crus IB cruri AD, ex prop. 22. lib. 1. baſis IH erit æqualis baſi DE, totumque triangulum IBH toti DAE æquale. Cùmque LH ex effectione ſit æquale ſegmento parti GE, erit etiam LB ex propoſ. eadem 22. lib. 1. æquale crus cruri GA; aſt LK eſt æquale ex conſtructione cruri GF, & comprehendunt crus BL, & LK angulum rectum ex def. 3. tr. 22. interſectionum, erit quoque ex prop. 22. eadem lib. 1. baſis BK baſi AF æqualis; ſic quia crus IL, vtpote reſiduum ex LH ſit æquale reſiduo cruri GD, & LK cruri GF ex effectione ęquales, anguluſq; cõprehenſus rectus ſit, erit baſis IK baſi DF æqualis ex dicta propoſ. 22 lib. 1. & eadem ratione KH baſis baſi FE: Cùm itaque triangulum IBK habeat latera ſingula ſingulis lateribus trianguli FAD æqualia, erunt IBK triangulum DAF triangulo, & KBH triangulo FAE æquale ex propoſ. 23. lib. 1. ſed iam oſtenſum eſt triangulum IBH triangulo DAE æquale; Ergo omnes anguli plani conſtituti ad verticem B ſinguli ſingulis erunt æquales angulis planis apud A, & ſic angulus ſolidus B angulo A ſolido erit æqualis.

COROLLARIVM.

HInc autem non erit difficile conſtituere, & angulum ſolidum pluribus ſuperficiebus, quàm tribus contentum. Quia poteſt diuidi in tot angulos tribus ſuperficiebus conſtantes, & illis exhiberi queunt alij anguli ſolidi æquales, qui deinde ſimul compoſiti ęqualem angulum ſolidum pluribus, quàm tribus ſuperficiebus conſtantem efficiant.

EXPENSIO III.

De deſcriptione Tetaedri in ſphæra, & proportione laterum ipſius ad diametrum.

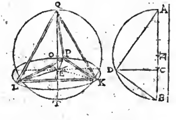
TEtaedrum eſt pyramis quædam quatuor ſuperficiebus æqualibus, & ſimilibus contenta habens quatuor ſolidos angulos tribus angulis planis clauſos, & latera ſex, de qua volumus ex Euclide docere, quomodo inſcribatur ſperæ, & quænam ſit proportio laterum, quibus continetur ad diametrum ipſius ſphærę.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Tetaedrum conſtruere, & data ſphæra complecti, & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſeſquialter ſit ipſius lateris pyramidis.

SIt datus ſphæræ diameter AB, qui diuidatur in tres partes, & ſit tertia pars CX, facto deinde ſemicirculo centro Z ſuper diametrum datam AB, à puncto C erigatur perpendicularis vſque ad circulum CD. Deinde alio in plano ad diſtantiam CO centro E fiat circulus, in quo triangulum æquilaterum deſcribatur PXL, & à centro E ducantur radij EK, & EL æquales radio EP, & conſequenter lineæ CD: ſuper verò hoc planum erigatur normalis EQ æqualis rectæ AC, & connectantur extrema QL, & QK, & QP, & erit facta pyramis requiſita.



De qua primò oſtendendum eſt conſequi omnia latera æqualia pro quo

Supponendum eſt ex prop. I. Tract. 20. lineam KL eius trianguli æquicruris poſſe deſeruire pro latere quadrati; quòd erit triplo maius; quàm quadratũ ea ſemidiametro XE, deinde oſtendendũ eſt DA poſſe deſeruire pro quadrato triplo maiori, quàm CD. quę eſt æqualis ſemidiametro EX, & ideo eſſe ęqualẽ cruri LK trianguli LPX circulo inſcripti, cui DC eſt radius. Hoc autem oſtenditur, quia ex Cor. p. 16. l. 6. AC, & CD, & CX ſunt tres ꝓportionales, & ideo quadratum ex prima AC, & media CD ſe reſpiciunt eadem proportione ea Cor. pr. 21. lib. 6. qua linea AC prima tertiam CB. Vnde ſimul compoſita quadrata ex lineis AC, & CD ad alterum ipſorum ex latere CD eandem dicent proportionem, quam compoſitæ lineæ AC, & CB, ad ipſam ſimplicem CB: ſed quadrata hæc duo ſunt æqualia quadrato ſuper AD ex 31. lib. x. Ergo iſtud quadratum AD ad quadratum CO eandem proportionem obtinebit, quam duo quadrata AC, & CD ad vnum CD, & quam AC, & CB lineæ ad ſimplicem lineam CB, & conſequenter hoc quadratum AD erit triplò maius, quàm quadratum CO, cùm etiam AC, & CX ſimul faciant lineam triplò maiorem, quàm ſola CX.

Vnde probatur pyramidem conſtitutam potiri lateribus inuicem ęqualibus. Nam omnia ſunt æqualia lineæ AD, & quidem tria latera KQ, & QL, & QP: quia triangula ipſis inſiſtentia; vt KEQ ſint æqualia triangulo ADC. Quòd habeant duo latera KE ipſi ED, & EQ ipſi AC æqualia, & angulum rectum ad E, & C claudant ex conſtructione. Latera verò KL, & KP, & LP, quòd ſint latera quadrati triplò maioria: quàm KE æqualis lineæ CD ſicut oſtenſum eſt progr. I. AD eſſe latus quadrati triplo maioris, quàm CO. Vnde cum quadrata ex LK, & OA eidem quadrato ex CD eãdem triplam proportionem dicant, erunt inuicem æqualia. Quare, & crura inuicem æqualia: nimirum AD, & AP, & alia crura PL, & LK.

Probatur ſecunda pars, quod ſphæra complecti poſſit. Nam producta diametro EQ in T donec fiat æqualis diametro AB; ſicut totum eſt ęquale toti, ita medietas BZ erit æqualis medietati OT. Sed hæc gyrata tranſit per vertices AD trianguli ADC. Ergo, & tranſibit per vertices KEQ, & PEQ, & ELQ triangulorum ęqualium prędicto ADC.

Probatur tertia pars quod ſphęræ diameter poſſit deſeruire pro quadrato ſeſquialtero, nempe vna vice, & dimidia maius quadrato, quòd fieret ex pyramidis latere. Nam ex Cor. x. pr. 8. & 22. l. 6. conſtat quadratum AX correſpondere in proportione ad quadratum erectum ſuper AD, vt AX ad CA: quòd AX, AD, & CA ſint tres continuè ꝓportionales, ſed AB. & vna vice, & dimidia maior, quam AC, quod ſit partium duarum; illa verò trium ex conſtruct. Ergo tale quoque erit quadratum AB; nempe trium partium ad quadratum AO duarum: AB verò eſt diameter ſphęræ; at AD latus pyramidis, vt oſtendimus.

COROLLARIVM I.

HInc enaſcitur diametrum ſphęrę poſſe efficere quadratum quadruplo maius, cum dimidio, quam ſemidiameter ambientis circuli triangulum baſis.

Nam oſtenſum eſt diametrum ſphęrę TQ vna vice, & dimidia in ſuo quadrato eſſe maiorem, quàm pyramidis lateris KL quadratum, ita vt ſi lateris quadratum ſit 9. illud ſit 6, & vt in ſuppoſit. lateris quadratum, excedit radij XA quadratum triplò, ita quod ſi quadratum lateris ſit 6. hoc ſit 2. Ergo quadratum diametri ſphęræ QT ad quadratum radij XE ſe habet vt 9. ad 2. nempe quatuor vicibus illud continet cum dimidia.

COROLLARIVM II.

SEcundò perpendicularem à vertice pyramidis ad baſim demiſſam eſſe duas tertias partes diametri ſphæræ. Quia EQ eſt æqualis rectæ AC, & diameter TQ eſt æqualis rectę AB. At AC ex conſtructione duas tertias partes rectę AB comprehendit, & ideo quadratum diametri ad perpendicularis quadratum erit, vt 9. ad 4. nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata 3. ad 2. vt videre eſt in iſtis numeris 9. 6. 4.

EXPENSIO IV.

De deſcriptione Octaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

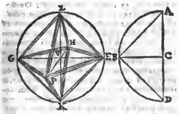
OCtaedrum eſt corpus octo triangulis ęqualibus ſimilibus, & æquilateris conſtans, quæ efformant ſex angulos ſolidos quatuor æqualibus angulis planis comprehenſos, vt in fig. ſequentis propoſ. ſatis apparet; & latera duodecim obtinet, quę angulos ęquales viginti quatuor planos efformant.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VII.

Octaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius Octaedri.

SIt AD datæ ſphærę diameter, quæ in C puncto bifariam ſectus ſit; erectaque perpendiculari CB, facto centro in C ſemicirculus deſcribatur; coniungāturque AB, & DB rectis, eritque factum ſemiquadratū ADB, quod ſufficit. Seorſim autem aliud quadratum fiat EHEG, cuius latera EP, & PG, GH, & HE lateri AB ſint æqualia, & diametri EG & PH diametro AD æqualia. A puncto verò V excitetur perpendicularis KVL, ſiutque portiones VK, & VL æquales AC, connectanturque eorum extrema octo rectis EL, & PL, & PK, & cæt. Dico primò eſſe conſtitutum Octaedrum.



Quod probatur oſtendendo omnia eius latera æqualia: quia triangula tum iacentium ſuperiora, tum inferiora ad centrum V.g. EVK, & LVP, & cęt. ſunt æqualia ob æqualia crura EV, & VH, & VL ex effectione, & angulum rectum ad V; Vnde baſes erunt æquales EL, & EP, & cæt. ſicque omnia triangula ſuperficialia, vt ELP, & cæt. æqualia latera poſſident, ſcilicet baſes triangulorum ad centrum, & ideo æquales angulos ex 23. lib. I.

Probatur ſecundò, quòd ſphęra complectatur. Nam radij EV, & VG, & VL ſunt ęquales rectę AC ex effectione; Ergo circumferentia qualibet interuallo VG centro V per eorum extrema tranſibit.

Probatur tertiò, quòd eius lateri ſit dupla in potentia diameter EG, quia ex II. lib. 2. ęquat in ELG rectangulo ex 28. lib. 3. quadratum baſis EG quadrata laterum æqualium EL, & LG, vnde quadratum EG erit duplum quadrati lateris LG.

COROLLARIVM.

HInc educitur; quod ſi in eadem ſpęra deſcriptum ſit Octaedrum, & Tetraedrum latus Tetraedri ſua potentia comprehendere lateris octaedri potentiam, ideſt quadratum, quod poteſt efficere vna vice cum tertia parte, nam quadratum lateris pyramidis eſt 4. qualium 6. eſt quadratum diametri, & octaedri lateris quadratum talium partium 3. pyramidis lateris quadrati erit 4. earundem partium, octaedri vero lateris quadratum 3, nempe Pyramidis latus comprehendet latus octaedri potentiâ ſemel, & inſuper $\frac{1}{3}$ ipſius lateris octaedri.

E X P E N S I O V.

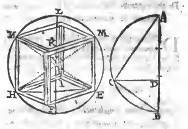
De Cubi in ſphæra deſcriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.

CVbus eſt figura ſolida ſex ſuperficiebus quadratis æqualibus conſtans, habens angulos ſolidos octo tribus planis angulis rectis concluſos, & latera duodecim.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Cubum conſtituere, & ſphæra complecti, & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIt ſphęræ diameter quicumque AB; diuidaturq; in tres partes, & ſit tertia pars BD, & à puncto extremo D excitetur perpendicularis, quam abſciudat in C ſemicirculus ſuper AB, connectanturq; AC, & CB.



Seorſum verò in aliquo plano fiat quadratum EFHE, cuius latera ſint æqualia rectę CB & ab angulis eius excitentur perpendiculares ipſis lateribus ęquales, quorū extrema L, M, E, N rectis connexa efficient cubum EHML de quo loquitur prop.

Nam, quod ſit cubus patet. Etenim ex effectione habet omnia latera ęqualia, cum enim erectę, vt XE ſint perpendiculares plano, erunt quoq; parallelę, vnde, & angulos rectos efficient cum lateribus in plano extenſis FE, & c. ex prop. 7. Tract. 22. Quia verò ſunt ęquales latera quoque ſuprema M K erunt parallela, & ęqualia lateribus EE, & perpendiculares lateribus erectis, vt EK I quare cūm omnia latera ſint ęqualia, parallelaque, & omnes anguli recti cubus conſtitutus eſt.

Prob. ſecundò, quòd ſphæra cōplecti poſſit. Quia dimidia omnium diagonalium, vt MH ſunt ęqualia, cum ipſę diagonales ſint ęquales. Vnde facto centro in communi eorum puncto medio V poterit ad interuallum VH deſcribi circulus. Qui tranſibit per extremos angulos V. g. per H, & M, & cęt ita etiam alius per L, I, & cęt.

Probatur tertia pars. Nam diameter ſphęrę MH continet in ſuo quadrato duo quadrata lateris EM ęquali quadrato lateris ſibi ęqualis EE, & diagonalis EH: diagonalis verò EH continet quadrata lateris EE, & EH ex II. lib. 2. ob angulum rectum EFH. Ergo quadratum diametri continet tria quadrata trium laterum ęqualium ME, & EH, & EF, quare vni eorum triplum eſt.

Eſt autem MH ęqualis AB diametro. Quia quadratum AB ad quadratum CB, eſt quoque triplum. Siquidem eſt ad quadratum ex CB, ideſt ME, vt AB ad DB prima ad tertiam proportionalem ex Coroll. prop XI. lib 6. quę AB tripla eſt ad BD. Quare erit quadratum AB triplum quadrati CB, & ideo ęquale diametro MH, cuius quadratum triplum eſt quoque quadrati EP, ideſt CB ęqualis lineę.

COROLLARIVM.

Hinc autem habetur diametrum cubi, ſeu ſphęrę poſſe efficere quadratum ęquale quadrato lateris cubi, & quadrato lateris pyramidis. Nam cùm; quadratum diametri ſphęrę eiuſdem contineat pyramidis quadratum vna vice, & dimidia erit vt 9. ed 6. & cùm idem contineat lateris cubi quadratum tribus vicibus erit, vt 9. ad 3. Quare compoſita hęc duo quadrata partium 6. & partium 3. efficient quadratum partium 9. quale eſt quadratum ſphęrę, ſeu cubi: Vnde ac erit latus Pyramidis, & CB cubi, cuius diameter ſit AB.

EXPENSIO VI.

De inſcriptione dodecaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

Dodecaedrũ eſt corpus duodecim pentagonis ęqualibus ęquilateris, & ęquiangulis conſtans, ſimulque angulos ſolidos 20 comprehenſos angulis planis tribus, & latera 30, conſequitur.

PRORL. I. PROPOS. IX.

Dodecaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, & demonſtrare, quòd dodecaedri latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

Cvm dodecaedrum duodecim facies habeat, & cubus 12. latera hinc eſt, quod conſtruatur delineando ſuper vnum quodque latus dodecaedri aliquam ſuperficiem Fiat itaq; quadratum b y baſis electę ad placitum cubi, circa quem dodecaedrum conſtituendum eſt, ſeceturque eius ſemilatus r o ſecundum extemam, & mediam rationem in puncto n, ducaturque linea, m e, & u x perpendiculares, abſcindatur n m, & g t ęqualis maiori ſegmento n o, deinde coniungatur t r, & extendatur. Nam dico pro. 1. progreſſ. quod impingit in punctum m.

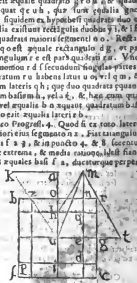
* Probatur. Nam quia ſemilatus o r eſt ſectum extrema, & media ratione, ita eſt r o, vel r g ad t g, maius extremum, vt n m idem maius extremum ad minus r n; ſed talia quoque erunt latera triangulorum t g r, & n r m, quia erit ob angulũ rectum apud n, & g, & angulos ad verticem apud r, & m æquales, ita r g ad t g, vt n m a d n r. Ergo t r debebit tranſire per punctum m. Nam ſi tranſiret aliunde, non haberet eandem proportionem, quam habet r g ad t g ſiquidẽ ſi trãſiret ſupra, vel infra, eſſet maius, aut minus illud crus trianguli r n m, quã n m, & ideo linea n m, licet maior, aut minor, quã n m eidem r n eandem proportionem diceret, quam r g ad t g, quod eſſe nequit ex 7. lib. 5.

Progreſſ. 2. Dico t m in r eſſe lineam ſectam ſecundùm mediam, & extremam rationem, quod pari modo oſtenditur. Quia eadem proportione referuntur t r ad m r, qua t g maius ſegmentum ad n r, vel e g minus. Ergo *componendo*, vt t r ad t r cum m r, ſc. t m: ſic t g ad t g cum e g, ideſt t e, vel æqualis n e dta linea extrema, & media ratione ſecta, ſc. e g ad r g, quæ eſt, vt m r ad r t, cum ſit, vt n r ad g t; quare cũ minus extremũ m r ſe habeat ad maius e r, vt maius ad totam t m, quadratum maioris ſegmenti ea prop. 11. lib 6. erit æquale rectangulo minoris ſegmenti, & totius, vnde extrema, & media ratione ſecta erit.

Dico Progreſſ. 3. Quod ſi ducta h m ex e a, & e m fiat triangulum rectangulum u a x, quòd baſis u x æqualis erit lateri quadrati r b, quod ſic probo. Nam eſt æquale eius quadratum ex 47. lib. 1. quadratis crurum a u, & a x: hæc verò duo quadrata ſunt æqualia quadrato lateris r b; Ergo quadrata lateris r b, & cruris u x æqualia ſunt, & conſequenter ipſa latera æqualia.

Probatur minor, nempe quadrata linearum a x, & a u eſſe æqualia quadrato lateris r b. Nam quadratum u a eſt æquale quadrato n b p d cum d n, & e m, ex conſtr. ſint æquales; Quadratum verò e a a k, quadrato ex m h, quod ęquale eſt quadratis ex m q, & q h; Quadratum verò ex q m eſt æquale quadrato g r o u, & quadratum q h æquat q e u h, quæ ſunt ęqualia gnomoni r d f, ſiquidem ex hypotheſi quadrata duo e q u h æqualia exiſtunt rectãgulis duobus y i, & i f, quod ſint quadrata maioris ſegmenti n o. Rectangulũ verò q o eſt æquale rectangulo d g, vt patet, & rectangulum r e eſt pars quadrati g u. Vnde totus gnomon r d f ſecundum ſingulas partes ęquat quadratum r u habens latus u o, vel q m, & quadratum lateris q h; quę duo quadrata ęquant quadratum baſis m h, vel a k, & hæc cum quadrato q a, vel æqualis b n æquant quadratum baſis u k, & ideo erit æqualis lateri r b.

Dico Progreſſ. 4. Quod ſi ex toto latere r b, & maiori eius ſegmento n z. Fiat triangulum iſoſceles f a 3, & in puncto 4. & 8 ſecentur eius latere extrema, & media ratione, ideſt fiant 4 f, & a 8 æquales baſi f a, ducaturque perpendicu-



laris Q 3. & ei perpendicularis per puncta medię ſectionis 4 8 æqualis hinc inde à puncto v medietati lateris f 3, quod ſecabitur in puncto 4. extrema, & media ratione, minuſque ſegmentum erit x 4. Nam ducta f b, parallela perpendiculari 3 Q, & b 3 baſi f a parallela. Erit primo v 5 dimidium ſegmentum maius, vtpote æquale dimidio f Q, deinde probo 5 4 eſſe aliud dimidium minoris ſegmenti 43 & ideo duplum ipſorum ęquari ipſi 3. f vel x 6. In triangulo b 3 f, ita f 3 eſt ad 4 f, vt baſis b 3. ad parallelam 54. ſed vt tota f 3 ad maius ſegmendum f 4 ita eſt f 4 maius ſegmentum ad minus 43, ergo vt eſt f 4 maius ſegmentum ad

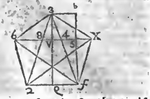
43,

43, minua ita eſt b 3. baſia ad 5 4 ſibi parallelam: ſed b 3 eſt ęqualis ſemibaſi f Q, ideſt maioris ſegmenti f 4 medietati, ergo 5 4 erit ęqualis medietati minoris ſegmenti 43, vnde cum dupla 4 f fiet tota linea ęqualis lateri 43. & cū dupla V5 æquali 4 f tota x 6 ęqualis lateri quadrati r b in 1. fig.

Progreſſ. 5. Et hinc patet, quod poſſit fieri pentagonum ęquilaterum, & æquiangulum ex 11. lib. 4. quia f 3 2 triangulum eſt quale repoſcit prop. 10. lib. 4. cuius baſis f 2 ſit ſegmentum maius lateris 23. extrema, & media ratione ſecti. Nam quia 46 ęquat f 2 parallelā, & f 2, æquat f 4 erit 46 f 2 parallelogrammum ęquilaterum. Vnde diagonali f 6 angulus 4 f Q erit diuiſus biſariam & ita erunt tres anguli ęquales f 32. 3 f 6. & 8 6 f & ita fare in parallelogrammu x 8 f 2. Vnde omnes anguli erunt æquales, cum oſtendentur ęquales angulo f 32. Latera quoque ęquabuntur. Quoniā iam tria 2 f. & f x, & 26 in parellelogrammis 28 f x, & 46 2 f ſuper eandem baſim exiſtentibus oſtenſa ſunt ęqualia. Vnde remanet de duobus x 3 & 36. Quod patet, nam ſegmentum 38. & dictis progr. 4. ęquat ſegmentum 86. Vnde, & anguli 6 3 8. & 3 6 8. ſubieoſi ex prop. 14. lib. 1. æquabuntur, ęquales autem ſunt f 3 2, & 8 6 f ex dictis. Ergo toti anguli 436, & 3 6 f ęquales erunt, ſed inuicem 3 f 6 ęquat f 3 2. Ergo reliqui æquales trianguli 3 f 6 reliquis inuicem ęqualibus trianguli f 3 2, quare erit ęquiangulū, & iſoſcelles; ſed f 3 eſt idem in vtroque triangulo. Ergo ex 4. lib. 6. f 6 ęquat 3 2. & 3 6 latus f 2. & eadem dicas de triangulo 3 x 2.

Dico progr. 6. Quod ſi ducatur m u hęc erit ęqualis in prædicto quadrato ſemidiametro cubi, cuius latus ſit r b. Nam erit eius quadratum triplo maius, quam quadratum ſemilateris cubi r o. Cumq; quadratum diametri cubi ſit triplò maius, quam quadratum lateris ex prop. 20. h. Coroll. etiam ſemidiametri erit triplo maius, quàm eius ſemilateris; Vnde u m tripla potentiâ r o ęquabit ſemidiametrum cubi, cuius ſemilatus eſt r o.

Quod autē ſit triplo maius u m baſis quadratū, quam ſemilateris o r oſtenditur. Nam eſt ęquale quadrato ex e m, vel ęquali n d, & quadrato ex e u facto in rectangulo triangulo m e u, hæc verò duo quadrata ſimul ſunt triplo maiora, quā quadratū ru ex ſemilatere r o; quoniā primò n b eſt iam æquale quadrato n r ſecundò ſi aliam partem eccipiamus d o, cum occupet idem ſpatium quadrato e b quadrati r n, & rectāgulo b n erit idem quadrato u r, et cum e i quadratum æquetur rectāgulo e r etiam parallelogrammum d o æquabitur quadrato



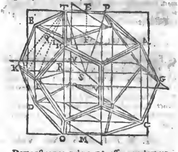
u r. Tertio u p eſt æquale rectangulo u n, cui ſi addamus quadratum alterius cruris e u æquale reliquo rectangulo r e quadrati prędicti r u fiet quātitas omnis p e r u quadrato tertiò æqualis. Iam ergo ter adæquauimus duobus quadratis ex cruribus e m, & e u quadratum r u factum ex ſemilatere r o. Vnde, & quadratum u m iſtis duobus ex m e, & eu æquale erit triplo maius, quā quadratū ex r o; Vnde erit ſemidiameter cubi, cuius ſemilatus r o.

Iſtis præſuppoſitis fiat cubus ABCD, ſeceturq; eius ſingulæ ſuperficias biſariam planis, ſeu rectis GH, & cæt. quæ plana excedant plana cubi exceſſu n m, vel quantùm eſt ſegmentum u o; quod interuallū notetur, quoq; à linea E verſus T, & ſit ET. Sic fiat vtrinquè omnibus ſuperficiebus à puncto, in quo ſe decuſſant V. g. ab E in F ab M in O, ab H in L, & K, & cæt. Deinde coniungantur puncta KB, & LN, & NT, & TB, eritque factum pentagonum, & ſi idem fiat ſingulis duodecim lateribus cubi, vt factum eſt in latere NB. Dico factum eſſe dodecaedrum.

Progreſſ. 7. Quod vt oſtendatur multa ſingulatim ſunt demonſtranda, & primò, quod pentagonum TNBLK ſit in eodem plano. Nam ſic non eſſet eadem figura, cùm non eſſet in eadem ſuperficie. Nam ducta HT; quæ tranſeat per Q deſinet in T ex progr. 1. Ergo erit in codē plano cū latere cubi ex pr. 2. tr. 22. vtpote, quia, cum eo in Q ſe ſecat; lineę verò LK lateri NB parallela eſt ex effectione, propteraque erit in eodem plano cum illa.

Quare, & latere TN, & NL, & cæt. prædictas coniungentes erunt in eodem plano, totumque pentagonum LNTKB in eodem plano erit ex pr. 2. T. 22.

Progreſſ. 8. Probatur quod ſit pentagonum æquiangulum, & æquilaterum. Nam, ſi ducantur TL, & TK, & NB ſunt inuicem æquales, & ſe inuicem ſecant extrema, & media ratione. Vnde ſunt lineę ęquianguli, & æquilateri trianguli lateribus, angulisque ſubtenſæ.



Demonſtroque primo TL eſſe æqualem NB. Nam ducta TH perpendiculari plano RLK, ductaque RL, hęc erit æqualis lineæ h m, vel a K, cum ſit baſis trianguli RHL æqualis triangulo h q m ob LH ęqualem h q, & RH ipſi q m. At RT lineę u a ex conſtructione; anguluſque apud R rectus. Quare, & baſis TL erit æqualis baſis u K vel r b, & conſequenter lateri cubi NB ex 3. prog. & 5. & eadem probatio eſt de linea TK: Deinde probatur, quod ſe ſecent extrema, & media ratione in I. Nam ex 2. prog. TH, vel mt, ſic cū latere NB ſe ſecat in Q: Ergo etiam TL, cum enim NB ſit parallela lateri KL ita erit TH ad TQ. vt TL ad TI, ſed TQ eſt minus ſegmentum ex prædicto progr. Ergo etiam TI, & conſequenter IL maius. Cùm ergo NB ſit æqualis lineæ TL, & diuiſa biſariam Q, paralleIaque lateri LK, ipſe quoque ſecabitur ſecundum mediam, & extremam rationem, minuſq; ſegmentū erit NI ex 4 progr. Quare ex 5. pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituetur. Quod ſi replicetur ſingulis in lateribus cubi, cum in omnibus ſit capacitas, conſtituentur duodecim

pentagona conficientia Dodecaedrum.

Progreſſ. 9. Probatur. Quod ſphæra poſſit amplecti. Nempe, quòd omnium horum pentagonorum anguli tangant ſphęram amplectentem. Nam ſupra oſtenſum eſt progr. 6. m u eſſe æqualē ſemidiametro, quę nectit punctum m cum centro cubi u. Quod punctum diſtat, tum ab a, tum ab n ſecundùm interuallum maioris ſegmenti; talis autem eſt linea Ps, & Ts, & cęt. quę angulos pentagoni cum centro nectunt, nam P, & T ex conſtructione diſtant à media E, tum à ſuperficie cubi quantùm eſt maius ſegmentum dimidij lateris extrema, & media ratione ſecti, & ſic dicas de omnibus alijs, vt conſiderare eſt, quod etiam verificabitur de angulis, qui cubi angulis coincidunt cum, & cubi ſit ſemidiameter.

Probatur quarto, quod latus horum pentagonorum ſit Apotome, nam ſphęrę diameter cum latere cubi eſt rationalis linea ſolùm potentia, vt ſupra oſtenſum eſt, cum triplum maius quadratum, quam latus poſſit efficere, & ideo ei ſit, vt numerus ad numerum. Cum ergo latus cubi rationalis linea ſit maius ſegmentum KL latus ex propoſ. 47. lib. 9. erit Apotome, vt ibi oſtenſum eſt.

COROLLARIVM I.

Hinc ellicitur, quod ſi latus Cubi coniungatur cum maiori ſegmento ex propoſ. 47. lib. 6 element. efficietur minus ſegmentum, & latus cubi aſſumet ſibi vices maioris, vnde ſit, quod ſi aliqua linea ſecetur ſecundum mediam, & extremam rationem maius ſegmentum poterit deſeruire pro latere cubi, ſegmentum autem minus pro latere dodecaedri.

COROLLARIVM II.

Secundo ellicitur, quòd linea coniungens ſex oppoſita latera parallela, qualia PT, & MO, ſic LK alteri apud G, ſic quòd eſt apud V alteri apud Y, vt eſt linea GH, vel SM, ſecta ſit ſecundum extremam, & mediam rationem cum contineat ex conſtruct. latus cubi, & maius ſegmentũ nępe medietatem hinc medietatē inde, vt eſt FE, qua cubum excedit.

EXPENSIO VII.

Icoſaedrum ſphæra inſcribere, ſimulque omnium corporum regularium proportionē exponere, & numerum eorum demonſtrare.

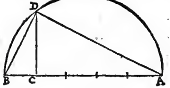
Icoſaedrum viginti triãgulis planis cōſtat ęqualibus, & ſimilibus obtinens angulos ſolidos 12. quinq; angulis planis conſtantes, & latera 30.

PROBL. I. PROPOS. X.

Icoſaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, & oſtendere, quod Icoſaedri latus irrationalis linea ſit.

Facilior eſt hæc propoſitio, quàm præcedens, licet corpus pluribus ſuperficiebus circumſeptum ſit. Ad hoc ergo, vt Icoſaedrum conſtituamus; detur diameter alicuius ſphæræ, quæ illud volumus amplecti, & ſit AB, & diuidatur in 5. partes, vnaque ex ipſis ſit CB, à quo puncto C erigatur perpendicularis, quæ terminet in circulum in D; Ducanturque AD, & DB.

Nam dico AB poſſe quintuplum magis, quàm DB, Ratio eſt; quia quadratum totius AB eſt 25. partium quarum vna eſt quadratum ex CB factum; Verùm ex quadratis planis, quæ ſint menſura quadrati AB, ex CB linea quadratum ſolùm 5. poſſidet. Siquidem, cùm ita ſit AC crus maius ad CD crus minus in maiori triangulo ADC, vt idem crus CD maius in minori ad CB minus ex Coroll. prop. 16. lib. 6. erit CD media proportionalis, & ſic eius quadratum erit æquale rectangulo ex AC, & CB quatuor partium, vnde vna cum quadrato CB faciet 5. quadrata: Iſtis verò duobus quadratis æquale eſt quadratum ex DB ex 41. lib. 1. Ergo hoc quadratum erit 5. partium reſpectu quadrati totius AB 25. partium quadratarum: Vnde cum duo harum linearum quadrata ſe habeant tamquam numerus ad numerum ipſæ lineæ AB, & DB erunt rationales potentia tantùm commenſurabiles.

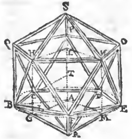


Quo ſuppoſito ſic conficitur Icoſaedrum. Semidiametro DB, fiat circulus BEDC, in eoque fiat pentagonũ æquilaterum, & æquiangulũ DCBEF ex dicta lib. 4. prop. 11. diuiſaque circumferentia FB biſfariam in G ducãtur ad planum circuli facti perpendiculares GH, LA, & MN, & cęt. æquales ipſi DB primæ figuræ, vel GA radio illi æquali. Et harum vertices iungantur N, O, Q, H rectis, Fiatq; triangulum NLH parallelum plano circuli iam factis, extendaturque eius planum, & triangulis 4. ipſi NLH æqualibus à centro H additis compleatur pentagonum NOPQH ęquale pentagono inferiori, cum triangulum NLH ſit æquale triangulo MAC, & conſequenter ęquali triangulo FAS pentagoni primo conſtituti, quibus præſtitis iungantur anguli, & puncta pentagoni ſuperioris cum inferioris angulis FH, & FN, & EN & HS, & cæt. Habebimuſq; 10. triangula æquiangula, & æquilatera. Decem quidem, quia decem latera duorum pentagonorum æqualium perhibebunt baſes; æquiangula verò, quia æquilatera ob hanc rationem, quæ de vno oſtenſa pro omnibus ob paritatem inſeruiet.

Probatur verò ex eo, quod ſingula omnium latera ſint ęqualia lateri FA. Nam vt diximus propoſ. 4. Tractat. 20. huius latus pentagoni V. g. FB, vel NH efficere quadratum æquale quadrato decagoni FG, & exagoni, nempe ſemidiametri

tri BA: Sed crus HF poteſt efficere quadratum æquale quadratis FG, & GH æqualis radio BA, ex conſtruct. vt docet prop. 11. lib. 1. ob angulum rectum apud G, ergo illæ lineæ FH, & FB, quæ æqualiter poſſunt, erunt æquales, & idē valet de cęteris.

Iſtis iam 10. triangulis conſtitutis prolungetur AL in vtramq; partem in R, & S, vt pars addita LS, hinc, & AR inde ſint æquales lateri decagoni FG; Vertexque earum R, & S coniungatur cū angulis ſuppoſitorum pentagonorum, & erunt quinque triangula, vt NHS, & cæt. ſupra; quinque infra, vt FAR, aut DCR, & cæt. ſimulque decem, quæ habebunt omnia latera prædictis æqualia, & ideo illis omnino æqualia erunt ex propoſ. 13. lib. 1.



Probatur GH eſt ex conſtructione æqualis lineę CA, & ideo lineæ LH: verū SL: & AR lineę decagoni FG; angulus verò apud L, aut A rectus, vt āgulus apud G. Ergo triangula LSH, & ARG, & FHG æqualia erunt. Quare baſes quoque erunt æquales SH, & RB, & FH. & ſic dicas de alijs. Cùm ergo omnia latera omnium triangulorum ſint ęqualia erit conſtitutum Icoſaedrum.

Probatur modo, quod ſphęra poſſit amplecti, quod conſequemur, ſi probauerimus lineas TS, & TB, & cęteras à puncto T biſariam SR partiēte procedentes ad angulos Icoſaedri, eſſe æquales. Nam tunc ſphæra omnes angulos continget.

Portio AL eſt latus Exagoni, quia radio ex AB æqualis, & LS decagoni ex conſtructione. Ergo ex prop. 3. Tract. 20. de circulo Inſcriptis, erit diuiſa tota SA extrema, & media ratione, & LS minus ſegmentum, & medietas maioris TL. At ex pr. 35. lib. 6. Eucl. minus ſegmentum cum dimidio maioris poteſt efficere quadratum quintuplo maius, quam dimidium maioris. Linea verò TB eſt eiuſdem proprietatis. Nam quadratū AB, vtpote, quod ſic dimidio AT linea maior, vtpote æqualis ipſi AL eſt quadruplex ad quadratum lineæ AT. Vnde TB baſis rectanguli TAB poterit efficere quadratum æquale quinque quadratis, quatuor cruris AB, & vni cruris AT. Quare poterit quintuplo magis, quàm AT. Vnde cum TS, & TB poſſint æqualia quadrata, nempe quintuplo maiora, quàm quadratum lineæ AT, inuicem erunt æquales.

Probatur deinde, quod tota RS æquet diametrum primæ fig. AB, & circuli ADE. Nam illa poteſt, vt in notabili quintuplo magis, quam DB; talis verò conditionis eſt SR. Nam vt dictum eſt eius medietas poteſt quintuplo magis, quam medietas TL, & ideo tota SR quintuplò poterit magis, quam tota LA æqualis ex conſtruct. ipſi DB, & ideo eorum quadrata erunt æqualia, vnde, & ipſæ æquales.

Probatur tandem, quod latus Icoſaedri ſit linea irrationalis, quod ſufficit ſcire ne fruſtra laboremus ex nota diametro in inquirendo longitudinē illius adamuſſim, cum id fieri nequeat, quòd ſit, & potentia, & longitudine incommenſurabilis.

Nā vt probaui pr. 19. tr. 20. Latus pentagoni eſt incommenſurabile diametro, tùm longitudine, tùm potentiā; ſed diameter ſphæræ RS eſt potentia commenſurabilis diametro AB circuli, in quo Inſcriptum eſt pētagonum, vt dixi, ergo latus pentagoni FB erit incommenſurabile quoque non dum diametro AB circuli; ſed etiam ſphęrę SR, tum longitudine, tum potentia ex prop. 7. lib. 10. Elem.

COROLLARIVM I.

Hinc educitur ſphæræ circumſcribentis Icoſaedrum diametrum eſſe potentia quintuplum diametri circuli pentagonum ambientis ex cuius lateribus Icoſaedrum eſt conſtitutum.

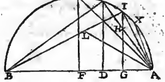
COROLLARIVM II.

Item colligitur ſphæræ Icoſaedrum ambientis diametrum eſſe compoſitum ex exagoni, & decagoni duobus lateribus circulo inſcriptis eodem, cùm AL ſit latus exagoni, at LS, & AR latera decagoni.

PROBL. II. PROP. XI.

Omnium latera corporum regularium eadem ſphæra deſcriptibilium exponere, & inuicem comparare.

DEtur diameter ſphæræ AB, & ſemicirculus circa illum deſcriptus ACB; diuidaturque AB in tres partes, & ſit tertia pars AD, ex qua ducta ad diametrum perpendiculari DE, ducatur AE, & EB. Nam. Dico *primo* EB *latus eſſe pyramidis ſphæra deſcriptibilis*, cuius diamter AB.



Probatur. Quia ſit eadem conſtructio, quæ prop. 6 h. & fig. 1. conſequenter EB lineę quadratum erit ſeſquialterum ad quadratum AO, vt ex probat. tertiæ partis illius propoſ. conſtat.

Secundo ducatur à centro F perpendicularis FC, & ducatur AC, quam dico *eſſe latus Octaedri inſcriptibilis eadem ſphæra, cuius radius* FC.

Probatur. Quia eius quadratum ſubduplum eſt ad diametrum, & quadratum diametri duplus ei eſt, vt 11. propoſ. lib. 1. diximus. Ergo eſt latus octaedri, vt ex probat. tertiæ partis propoſ. 7. h. conſtat.

Tertio dico AH *eſſe cubi latus eiuſdem ſphæra inſcriptibilis*. Probatur. Quia potentia diameter

eſt

eſt triplua ad quadratum AB; Cùm enim ita ſit baſia AB ad latua minua AB, vt ipſa AB baſia ad latua minus AD ob ſimilitudinem triangulorū ex prop. 16. ex 21. lib. 6. erit quadratum diametri AB ad quadratum lateria AB, vt AB ipſa diameter ad AD; Eſt autem diameter AB triplus ad portionem AD; quare quadratum quoq; diametri triplum erit ad quadratum AE; quare AE erit latus cubi, cui triplus eſt diameter ſphæræ circumſcribentia, vt conſtat ea prop. 8. progr. 3. huius.

Quarto ſecetur latua AE axtrema, & media rationę in H, eritq; malus ſegmentum latus AH dodecaedri, vt ex dectis prop. 9. huius conſtat.

Tandem quintò diuidatur AB in quinque partes, & ſit quinta pars AG, & à puncto G ducatur ad diametrum normalis GI, nectaturque AI, & IB, aſſumaturque latus decagoni, & ei lateri decagoni ſit æqualis IL, & ducatur AL, *quam dico eſſe latus Icoſaedri eadem ſphera inſeribendi*. Quia enim ex Coroll. propoſ. 4. lib. 6. AI, eſt media proportionalis inter AB, & GA, quod ita ſit baſis AB ad latua minus AI, vt ipſum latua, & baſis AI ad latus minua AG, erit quoque quadratum primæ, & diametri AB ad quadratum mediæ AI, vt ipſe diameter eſt quintupla lineæ AG; Ergo, & quadr. diametri AB ad quadr. lateria AI quintuplū. Vnde AI erit diameter circuli, in quo pentagonum deſcribere oportet neceſſarium ad Icoſaedrum conſtituendum in ſphæra, cuius diameter AB, vt ex Coroll. propoſ. 5. huius conſtat, & quia latua Icoſaedri ea æqualis quadrati potens; tum quadrato prædicti diametri AI, cuius circulus debet ambire pentagonum, tùm quadrato decagoni, conſequenter baſis AL in rectangulo AIL; potens, & quadratū ex AI, & quadratū IL erit latua Icoſaedri.

Quod verò attinet ad comparationem, non poſſumus comparare; niſi trium figurarum latera ad diametrum cum Icoſaedri, & Dodecaedri latera ſint omninò irrationalia: quare poſita diametro partium 6. in potẽtia, ideſt eius quadratum partium 6. Tetaedri latua erit partium 4. item in potentia; Octaedri lateris quadratum partium 3. Cubi verò lateria quadratum partium 2. quæ ex præcedentibus ſatia conſtant. Ideoque poſita diametro rationali, cætera quoque latera trium prędictorum corporum erunt rationalia; ſed quia eorum quadrata non adipiſcuntur eam proportionem, quam quadratus numerus babet ad numerum quadratum, cum reſpectu numeri 6. nec 4. nec 3. nec 2. ſit numerus quadratus, ideo omnia erunt longitudine incommenſurabilia, nimirum latua Tetaedri, Octaedri, & Cubi; cęterorum verò corporum latera irrationalia.

THEOR. I. PROP. XII.

Præter prædicta quinque corpora non poteſt aliud corpus in ſphæra inſcribi, quod conſtet ſuperficiebus æqualium; tum angulorum, tum laterum.

PRobatur ad ſolidi anguli conſtitutionem, tres ſaltem anguli plani requiruntur, qui tamen ſimul minores ſint quatuor rectis, vt propoſ. 2. huius. Illi ergo anguli, qui ad angulum ſolidum alicuius figuræ circulo inſcriptæ conſtituendum concurrunt, vel ſunt triangularis ſuperficiei, vel alterius ſuperficiei V. g. quadratæ, pentagonæ, ſexagonæ.

Si ſunt triangularia, vel tres anguli concurrunt, & triangulum habent pro baſi, & ſit Pyramis, Triangula verò ęquilatera, & æquiangula angulos habent, qui ſunt $\frac{2}{3}$ vnius recti, ex pr. 17. l. 1. Cot. vnde tres compoſiti, vt in Tetraedro faciunt $\frac{6}{3}$, ideſt duos rectos vnde angulū ſolidum conſtituere poſſunt, cū ſint minores, quā quatuor recti. Si quatuor ſint erunt $\frac{8}{3}$, ideſt duo recti cum $\frac{2}{3}$, vt in octaedro; Si quinque erunt $\frac{10}{3}$, ideſt tres recti cum $\frac{1}{3}$ vnius recti, vt in icoſaedro erunt minores adhuc quatuor rectis, vnde ad anguli ſolidi conſtitutionem poterunt deſeruire, at ſi ſint ſex triangula, ęquilatera, & æquiangula eſſẽt $\frac{12}{3}$ anguli omnes in vnum ſolidum conuenientes cum ſint ſex, & ſinguli æquant $\frac{2}{3}$ vnius recti, vnde ſimul erunt $\frac{12}{3}$, nimirum quatuor rectos æquabunt, vnde ſolidum angulum non conſtituent ampliùs, & tanto minùs ſi ſint ſeptem, vel octo.

At ſi ſint anguli alterius figuræ cum minus, quam tres plani eſſe nequeant, qui ſolidum componant, oportebit videre an anguli illi ſimul ſint minores quatuor rectis angulis, ergo rectus quadrati poterit deſeruire, vt in cubo pro angulo ſolido, quia tres anguli recti non ęquant quatuor rectos. Sic tres anguli pẽtagoni, quia illi nō ſunt ex 11. l. 4. niſi $\frac{6}{5}$ vnius recti, vnde ſimul tres cōpoſiti facient $\frac{18}{5}$, nimirum tres rectos integros, & $\frac{3}{5}$ at ſi plures horum angulorum, quam tres vellemus componere æquarent, vel excederent quatuor rectos, vt in pentagoni angulis; eſſent etenim quatuor anguli $\frac{24}{5}$ nimirum quatuor recti, vnde angulum ſolidum non conſtituerent.

At angulus ſexagoni triplex non poteſt concurrere ad angulum rectum conſtituendum, neque alterius figurę habentis plura latera, quam quinque quia angulus ſexagoni æquat vnum rectum cum $\frac{1}{3}$, vnde tres compoſiti quatuor rectos æquarent, angulus verò heptagoni tantò eſt obtuſior, vnde tantò minus tres eius anguli ſolidum angulum conſtituent.

Quare poterunt quidem alia corpora ſphęra inſcribi, ſed diuerſis ſuperficiebus conſtantia V. g. quadratis, & triangulis. Triangulis, & pentagonis, & cęt. de quibus ſuo loco cum prędictorum corporum conſtitutione fundentur, non videtur hic locus de iis agendi ſed ſingulari tractatu.

EXPENSIO VIII.

De corpore multarum facierum in ſphæra inſcribendo.

AD cubandam ſphęram Euclidiano modo oportet oſtendere, quod ſit poſſibile corpus inſcribere ſphętę, quod non tangat intimæ ſphęræ ſuperficiem, quod alio pacto; ac Euclides præſtabimus, ſimulque oſtendemus ſegmentorum inſcriptionem, quod videtur pręſupponere Archimedeę ſphętæ cubatio.

PROBL.

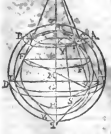
PROBL. I. PROPOS. XIII.

Inſcribere in ſphæra conorum ſegmenta, deinde tale multilaterum planis ſuperficiebus conſtans, vt ſolum tangant, ſaltem iuxta aliquas ſuperficies alterius ſphæræ concluſæ ſuperficiem.

SPæra exhibeatur ABPC, quæ concludat aliam ſphæram KHP, & oporteat in ea deſcribere corpus planis ſuperficiebus opertum, quod tangat ſphęrę cõcluſæ KSHP ſuperficiem. Diuidatur illud ſpatium in duas partes quaſcumque, & deſcribatur OVLN intermedia ſphęra radio maiori, quàm MX, deinde in hac intermedia ſphera OVLN, ſegmenta tangentia intimã ſphęram conorũ deſcribantur. Hoc autem facilè fiet; ſi ducamus MF radium ad intimiorem ſphęrã KPH, & ei erigamus tangentẽ LV, & à punctis V, & L ducamus quoſcumque parallelos OV, & TL inuicem inæquales, & per centrum ſphęræ, eorumque polos ex prop. 6. Tr. 21. p. 1. tranſeat axis MQ. Nam cum vnus parallelorum ſit maior alter minor tangens VL ad axem eorũ inclinabit, & cum illo coibit in Q cũ non poſſit ipſi parallelã eſſe ob parallelorum, & ideo radiorum ipſorum inęqualitatem. Si ergo à puncto Q tanquam vertice linea QL intelligatur circumuerti circa parallelos VO, & LT, ex def. 1. tract. 24. deſcribet conum, cuius fruſtum erit ſphęra media OLVLN interceptum, & tanget in circulo EF parallelo ſphęram intimiorem, vt oſtendam.

Sic fiat de cęteris ſphęrę partibus ducendo ęquales ipſi VL, vt eſt LN, & deſcribantur per extrema L, & N pararalleli prędictis LT, vel VO, & cętera fiant, vt priùs. Et ſic agatur de reliquis ſpatijs, donec LV accõmodari poteſt in ſemicirculo RVLN ab axe diuiſo: quod ſi ſpatium reſiduum ſit minus, tunc ducetur quęcumque V. g. RV, quę conũ pariter deſcribet, ſed non contingentẽ ſphęrę intimioris ſuperficiem, vtpote, quod VB minor ponatur, quàm LV, que tangit.

Iſtis pręſtitis intelligantur ſingulorum ſegmentorum conicorum baſes, & paralleli VO, LT, & cęt. extenti ſecare quoq; ſuperficiem ſphęrę exterioris, & deſcribere eam ſecando ex propoſ. 3. Tr. 21. p. 1. parallelos maiores DSC, & BYA. Deſcribatur ergo circa quodlibet fruſtum coni multilaterum cõtingens, ſaltem quoad plures ſuperficies, quod extimę ſphęrę includatur ſuperficie tali modo.



Ducatur MX radius ad ſphęrę mediæ ſuperficiem, & ei tangens CE. Per contactum autem X, & axem RP ducatur maximus circulus ex 16. Tract. 23. par. 1. & vbi ſecat parallelum VO in I erigatur alteri puncto I altera tangens YA, quę tangentes erunt parallelę, vtpote normales eidem plano circuli maximi BIX ex 7. tract. 22. Quare per illas planum AS tranſire poterit. Ductis itaque ſimiliter alijs planis par tangentes cęteras ſibi ęquales, vel minores, quando ęquales capere nequeunt in circulis parallelis ſingulis, donec in omnibus ſint ductę, erit corpus circa quodlibet fruſtum conicum circumſcriptum. Quod dico *tangere ad ſummum ſphæræ intimioris KEHP ſuperficiem.*

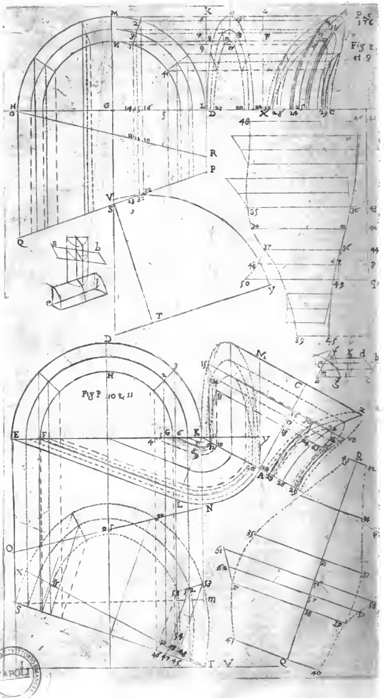
Probatur. Conicum fruſtum OVTL tangit ad ſummùm ſphęrę intimioris ſuperficiẽ XSHP. Nam VL fruſtũ recta circumducta formatur, quę circa parallelos VO, & TL gyratur, ſed illa tangit in puncto E. Ergo etiam cęterę omnes ęquales interceptę inter parallelos circulos OV, & TL ſimiliter tangent, cùm ęqualiter diſtent à centro M ex 16 lib. 3. omnium maximorum circulorum, & ideo ipſius ſphęrę. Quod oſtenditur alio modo. Nam per contactum E ducto parallelo FE ex axe QM deſcripto, hic erit in ſuperficie conica, quę ęqualiter diſtat interuallo E radij à centro E, & axe ſuo MQ. & in ſuperficie ſphęrę, quę, & eodem radio E e diſtat ab axe ſuo ZM. Quare erit parallelus EF in contactu conicę ſuperficiei etiam intimioris ſphęrę KPEH. Non poteſt autem tangere alibi, quia Conica ſuperficies ex def. 1. Tract. 24. recta VL circumgyrata contexitur, quę tangit ſphæram ſolùm in puncto E ex effectione.

Cum itaque ſuperficies plana circumſcripta Conicis ſegmentis ex 11. Tract. 24. non tangat conum, niſi penes lineam EF, quæ tandit à Q vertice, & tangit ſphæram intimam tantùm ex effectione in puncto E ſequitur, quod planum SA cõtingat ſphæram intimiorem KPHE tantùm in puncto E, quod de alijs planis æqualibus fatendum eſt. Alia autem plana contingentia minora fruſta conica, quę non contingunt ſphæram intimam, neque ipſa contingent, & tantò minùs, ſi ea plana, neque contingant ipſa fruſta conica, quę ſphæram intimam, aut tantùm contingunt, aut nullatenùs contingunt.

COROLLARIVM.

COlligitur, quod eodem artificio poterunt ſphærę circumſcribi tum conorum ſegmenta, tum corpus quodlibet planis ſuperficiebus conſtans, quod non tangat alterius ſphærę circumambientis ſuperficiem. Nam ſphæra FHE eſt talibus ſuperficiebus circumdata, vnde ſi inter ſphæram eam circumdantem duę ſphæræ ZBPC, & RLXO intercipi intelligantur, & eadem operatio præſtetur corpus circumſcriptum non tanget amplexantis ſphærę maioris, quam ZPC ſuperficiem cum illam tantùm tangat. Corpus verò conicum circumſcribatur eodem modo, ac in propoſ. & ſi debeant ſegmenta conica adeo multiplicari, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem id efficietur, vt ſequenti propoſ.

EXPEN-



NAPOLI

Digitized by Google

quo ſe arcus interſecant ſit 42. Pari ordine ſumpto interuallo 46 45 centro 39 arcus ducatur, & interuallo 29 41 centro 37. ducatur alius arcus, & punctum interſectionis ſit 43. Poſtea centro 42 interuallo 47 48 arcus ducatur, & interuallo 29 17 alius arcus, & punctum, quo ſe ſecant, erit 44. & ſic ſucceſſiuè ages in alijs, obtinebiſque pũcta plurima, p quę ducta flexa s 51. & s 50 ſicut, & per puncta 51 Q 50 concludent ſuperficiem quęſitam 51 s 50. quę inter duas ellipſes, quarum radij ſunt A 20 A 19 intercipitur, ſi ergo idem agas de cęteris 19 A 23 habebis ſuperficiem quartę partis corporis Elliptici in planum extenſam. Hanc tamen propoſitionem quoad planitiem corporis ſpheroide inſcripti, non omnino mathematicam eſſe agnoſcimus, quia angulus, quem facit planum per ſubtenſas ellipſibus parallelis V. g. ambitibus 17 29 41. & 13 26 40. & cum planis ellipſium, cuius axes ſunt inęquales V. g. cum ellipſi tranſeunte per HN axem non ſunt recti, vt repoſcitur ex prop. 34. Verùm adeo pręciſam, vt error ſenſibilis multiplicatis diuiſionibus, quantum ſat eſt, contingere non poſſit, cùm multiplicatis ellipſibus inęqualibus parũ à recto differre poſſint anguli effecti à plano ellipſis arcus ellipſium parallelarum bifariam diuidente.

PROBL. IV. PROPOS. XL.

Ellipticum quodcumque corpus, in planas ſuperficies extendere.

PRęcedens propoſitio eſt communis omnibus corporibus nedum quorum circulus baſis eſt, ſed etiam, quę vndequaque elliptica ſunt, & quoad latitudinem, & quoad altitudinem, imo, & omnibus corporibus, etiamſi per axem non ſectis etiam ouatis, & huiuſmodi; pro qua re hic damus exemplum corporis elliptici ABC, ſed per axem nõ ſecti originẽ ducentis ab ellipſi FED, quę ſit p axẽ minorem HI ducta, quę maximã ellipſim per axem maiorem HG obtineat AML. Sit itaque deſcribenda ſuperficies, quę operiat portionem HGC. Datis ergo ſemidiametris EF ellipſis per axem minorem HI ductę, & HC deſcribatur ellipſis ALP, deinde dato eodem diametro EF, & NH deſcribatur ellipſis KML; Diuiſo autem in partes, in quas FE diuiſus eſt diametro KL ducantur ab illorum puncta terminantibus parallelę ad eorum circumferentias, & ſint 32 33. 34 35. 36 37. ſic ad alias ellipſes 32 12. 34 13. vel 32 30. & 34 11.

Ducta itaque ſeorſùm recta QS in illam transferatur ellipſis LQ ęquando partes partibus, vt ſit s 52 parti L 48, ſic 22 23 parti 48 49. ſic 24 23 parti 11 30. & cęt.

Poſtmodum, vt in pręcedenti fecimus ſumpta diſtantia 2 4 deſcribatur arcus centro 22 puncto, deinde centro S interuallo A 39 deſcribatur rurſùs arcus, & vbi ſe decuſſant in 22 50 punctum imprimatur. Sic centro puncto 23 interuallo 6 7 deſcribatur arcus occultus; rurſũſq; interuallo 39. 37. cẽtro pũcto 50. alius arcus occultus ducatur & vbi ſe ſecãt ſit punctũ 51. Sic reperiea pũcta notata 52. 53. 54. & per illa flexa curuabitur, & ita etiam ducatur flexa 55 S ſumptis interuallis à partibus L 40. 40 41. ellipſis LP, & à centris 59. 58. 57. 56. 55. pro arcubus ducentis. Et pro arcubus à centris 22. 23. 24. 25. trahendis, ſumptis interuallis 2 3. 6 5. 9 8. & cęt. & tandem per puncta tria 55 Q 54 alia ducatur flexa, & erit ſuperficies 54 S 55. quæ deſideratur, cui ſi fiant pro alijs interuallis quatuor, quæ remanent, ſimiliter alię ſuperficies V. g. pro parte EHG, & cęt. habebimus quinque ſuperficies, quæ corporis ABC dimidiam ſuperficiem operient, cui ęquales, ſimileſque erunt, quę aliud dimidium circundabunt.

PROBL. V. PROPOS. XLI.

Cylindri in annulum flexi ſuperficies inuenire planas.

SIt huius cylindri planum AHF, BCE, ſemicirculus autem ADB; oporteatque ſuperficies reperire planas eius rotundę, & circumflexę ſuperficiei ęquales

Diuidatur ſemicirculus AOB, in quot libuerit partes V. g. 5. perque puncta terminantia rectæ ducantur vſque ad perpendicularem CHG, vſque quo neceſſe erit, extenſam; ſitque prima B 2 G, ſecũda 2 3 20 tertia, 3 4 21, quarta 4 5 22 quinta 5 A 23. Facto autem centro puncto, in quo ſecant, vt in G interuallo GB ducatur arcus B, 26; & rurſùs eodem centro interuallo G 2 ducatur arcus 2 27. & ſic fiat de alijs, pro vt ſupra docuimus, agentes de ſphęris propoſ. 1.

Vt autem terminentur, ducantur perpendiculares 2 11; 3 12. & cęt. & à centro 2 ad ſingulas extenſo circino ducantur arcus B 25. & 11. 15. & 12 16. & 13 17. & cęt. vſque ad A 24. deinde menſuretur arcus 2 25 ſuper arcum B 26. ſic arcus 11 15 ſuper arcum 2 27. & ducatur linea 26 27 ad centrum G: omnino enim per centrum G tranſire debet, & erit ſuperficies 2. 27 B 26. quę iminet ſitui 11 15 2 25.

Rurſus arcui 11 15 adęquabitur arcus 2 28, & arcui 16 12 arcus 3 29. ductaque recta 28 29 verſùs centrum 20 terminabit ſuperficiem 3. 29 2 28. quę iminet ſitui 16 12 11 15. & ita de alijs, quibus replicatis quinquies quantum numerus partium arcus ACB requirit, erunt tot, quot ſemiannuli quadrantem AHCB operient.

Sed ſi quis optaret hunc annulum concauum, & vellet cognoſcere ſuperficies coniunctiuas, quę partes ſecundum annuli craſſitudinem copulant, id pręſtitimus ad aliam partem ſiniſtram. Ducto itaque ſemicirculo ANF alius ſemicirculus ducetur LMB, quorum interuallum MN craſſitudinem annuli oſtendet; quibus in quinque partes diuiſis per earum partium puncta terminantia ducentur rectę ad perpendicularem CHO; talis eſt LBX, & 40 41 43. atque 42 44 45. & 46 47 48. & 49 50 21. Facto autem centro in puncto 21 ducatur arcus interuallo 49 21. & rurſus arcus 50 21; Sic facto centro in puncto 48 arcus ducetur interuallo 48 45. & rurſus alius 48 47. & ſic de cęteris qui arcus ita terminabuntur.

Ducentur enim perpendiculares à punctis, à quibus educti ſunt, nempe 51 49. 47 53. & alijs ad LK, & à punctis; in quę cadunt centro A arcus deſcribentur, vt 6 7. & 51 52. & 53 54. & 55 56. & cęt. qui arcus transferentur in arcus priùs deductos, ſic arcus 6. 7 æquabitur arcui 50. 61. ſic arcus 51 52 arcui 49 62. & ducta recta 62. 61 ad centrum 21 dabit ſuperficiem, quæ requiritur coniunctiuam graſſitudinis F E 59. 50 cum altera graſſitiei parte 49. 50. 46. 47. & ſic agendum in

alijs, vt ex delineatione ſatis, ſuperque conſtat.

Ratio verò huius propoſitionis eſt eadem ac capeuſ. 3. de ſuperficiebus ſphærarum in planum redigendis per ſuperficies ſegmentorum conicorum: ſiquidem CB V.g. circumducta ſecundùm circulum BCB efficiet conum ex defin.1.tract. 24. quare 8B erit ſegmentum conicum, vnde, & ſuperficiea inter eius ambitus 8 27. & B 26 ex prop. 24. tract. 31. comprehenſa erit ſuperficies fruſti conici: Siquidem certum eſt ea prop.24. tract.31 ſectorem diametro GB ductum, cuius peripheriæ portio æquetur circulo BCB æquari ſuperficiei coni, & ſectoris illius partes partibus ſuperficiei conicę; ideo etiā ſectoris portio B 26 G ęquabitur coni portioni, cuius ambitus B 25. & latus BG, & ſic dicas de ſectore 2 G 27. quod ęquetur ſuperficiei coni, cuius latus 2 G, & ambitus tt 15, quo dempto à ſectore BG 26 remanet ſuperficies 2 B 27 26 æqualis reſiduo conicæ ſuperficiei, cuius arcus inferior ſit B 25. & ſuperior tt 15. & altitudo B 2. Id autem dicendum eſt quoque de alijs.

COROLLARIVM.

Hinc intelligi poteſt, quod ſuperficies annulum circumveſtientes tantò ſunt maiores, quę ſunt vltra XD diametrum perpendiculari MN parallelum, quantò minores ſunt, quæ ſunt citra DX, vt in figura P: Nam ſi ſumatur DY æqualis arcus, & ſignetur in XY, & ducatur XTN erunt parallelæ MY, & NX ex propoſ.27. lib.3.Cor.1. Quare cum NM, & AD ſint parallelæ, MD, & NX erunt æquales, ex 33 lib.1. Quare MY ſuperabit NX linea DY quantùm NT deficit ab NX æquali linea TX.

Ducantur verò à punctis medijs ſubtenſarum I, & H lineæ NM normales IP, & OH, & quia ſunt triangula æquiangula DIA, & XHB, vtpote effecta à parallelis ex prop.4. lib.6. erit DI ad IA, vt HX ad BX, verùm DI æquatur lateri HX, ergo AI æquabitur ipſi BX. Igitur OH æqualis ipſi SR tantùm deficiet ab RX æqualis ipſi PA quantùm PI accreſcit ſuper PA. Si ergo MY intelligatur circumuolui, & fieri conus, ſicut NX, erit RX ſemidiameter, & RX, vt DY, & TX altitudines fruſtorum æqualium ſuperficierum conicarū, & LX, & FY annulorum planorum altitudines, & circuli RB ducti, & PI radij intermedię peripherię latitudinē plani ānuli bifariam, & circulariter diuidentis. Rectangula autem erecta ex latere ipſorum mediorum circulorum æquali ea 12. tract.30. & altitudine, ſunt annulorum planiciei æqualia. Quare cum ita ſint circumferentiæ, vt diametri, & diametri ſe ſuperent ea ratione, vt quanto RS eſt minor, quam RX, tantò ſit maior PI; etiam rectangula æqualis altitudinis LX, vel FY annulorum, ſed circumferentiarum, quarum vna ducitur radio RB altera PI ſe ſuperabunt eodem modo. Nempe ſi fiat rectangulum e ex LX, & ex circumferentia ducta radio RX, & rectangulum t ex LX, & circumferentia ducatur radio DH, & rectangulū m ex circumferentia ducta radio PI, & LX, vel FY, cum ſe referant, vt altitudines ob æquales baſes ipſis FY, & LX, & ideo inuicem, id eſt vt peripheriæ, nempe vt diametri ex 33. lib.6. erit maius m, quàm e tantùm, quantùm minus eſt t, quàm e; quare, & annuli probati ęquale prop.18.tract.30. illis rectangulis tales erunt.

Quare, & ſegmenta conorum, quæ conſtituuntur ea peripherijs æqualibus ex 24. Tr 31. nempe fruſtum conicum ex circumferentia æquali circumferentiæ ductę radio EY extimæ, & ex radio DG intimę, ſicut, & fruſtum ex TX conſtituitur ea peripheria æquali ea CH intimæ, & ex radio RA extimæ, vnde ex Coroll. propoſ.11. tract.30. erunt eiuſdem altitudinis ac rectangula N, & T, & ęqualia baſis inuicem YX, vel DY; vnde reſpectum rectanguli e, & ipſius altitudinis DY tantùm decreſcet fruſtum ex XT quātum augetur fruſtum ex DY; Quod & debes fateri de fruſto DZ, vtpote, quod ſit latus coni æqualis cono MX.

TRAC.

TRACTATVS XXXIII.

De inſcriptione, & circumſcriptione Solidorum.

ANtequam ad ipſorum corporum trutinandam ſoliditatem accedamus, oportunum fuit inſcriptionem corporum quinque regularium in ſphæra, & omninò neceſſarium quorumcumque corporum in globoſis deſcriptionem attingere, vtpote quod talium corporum cubatio maximè ab hac inſcriptione dependeat; Et quia ſimul agitur de proportione laterum corporum inſcriptorum benè præcedit ſoliditatis cognitionem ipſa laterum doctrina; cùm priùs ſe ſe offerant intellectui latera cognoſcenda, quàm ipſa ab eis comprehenſa ſoliditas.

EXPENSIO I.

De principijs.

PRiùſquam ipſam rerum ſoliditatem attingamus priùs definitiones, quæ ad corporum ſolidorum conſtitutionem faciunt;oportet exponere.

DEFINITIO I.

S*Olidum eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.*

DEFINITIO II.

S*imiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine æqualibus continentur.*

DEFINITIO III.

Æ*Quales ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.*

DEFINITIO IV.

S*Olidus angulus eſt plurium, quam duorum planorum angulorum in vnum punctum inclinatio.*

Sic ſuperficierum PBE, & PEF, & BPC, & PCF in punctum P inclinatio vocatur angulus ſolidus, vt in fig. Def. 6.

DEFIITNIO V.

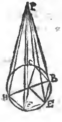
P*Yramis eſt figura ſolida, quæ planis pluſquam duobus continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta.*

Quare ſi angulus ſolidus P habeat ſuperficies ſuas, quibus clauditur ab aliquo plano, V.g. CBEFH incipientes, & in punctum P terminantes pyramis dicetur, quæ, & trium planorum, & quatuor, & quinque, & ſic in infinitum ſicut, & ſolidus angulus poteſt conſtitui.

Et hinc eſt, quod ſi ſolido alicui angulo ſubſternatur baſis plana, quod illa ſuperficies tot lateribus terminatur, quot planis angulus continetur; cum enim ſuperficies, & plana angulum continentia baſim planam ei ſubtenſam terminēt, tot rectas lineas habebit terminantes, quot erunt ipſorum planorum ſectiones in baſi factas.

DEFINITIO VI.

F*igura ſolida planis ſuperficiebus conſtans in globoſa inſcripta dicitur eum, vel anguli ſuperficierum, vel ſolidi tangunt alterius ſuperficiem.*



Sic figura ſolida PBEFHC in cono inſcripta dicitur, quia omnes eius anguli tangunt conum, nempe anguli ſolidi, vt BE FP, & ſuperficierū V. g. ſuperficiei BPE ſecundū lineā cùm FPE. Sufficit autem pro diuerſitate corporum cōuexorum, vel quod anguli ſuperficierum, vel quod anguli ſolidi tangant.

EXPEN-

EXPENSIO I.

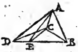
De ſolido angulo.

ANtequam ſolida ipſa pertractemus, de ſolido angulo eſt agendum, cum enim ſimilitudo ſolidorum, oe dum à proportione laterum. Sed & ab angulorum ſolidorum æqualitate dependeat ſi noo cogooſceremus anguli ſolidi oaturam, neque ſolidorum proportionem percipere poſſemus.

THEOR. I. PROP. I.

Etiam, ſi ſolidus angulus tribus tantùm angulis planis contineatur, duo quilibet anguli reliquo ſunt maiores.

*PRobatur. Nam ſi aliquis angulos planus in angulo ſolido ABCD eſt maior, vel ęqualis doobus reliquis. Aſſignetur, & ſit BAD, à quo dematur angulus BAE æqualis angulo BAC; remanetqoe reliquus EAD, vel maior, quā DAC, vel æqualis. Remaneat primo ęqualis aogulo CAD; Fiat latus EA lateri CA equale; ſubſternaturq; baſis plana ECDB, & fiēt ex 22. primi triangula æqualia; nimirū EAD triaogulo ACD ob latus idem AD, & æqoalia erora EA, & AC, cū ſint anguli DAE, DAC dicti æquales. At EEA triangulo BAC ob latus idē BA & erura EA, & AC æqualia cum ſint anguli apud A effecti æquales. Quare baſis quoque EC eſſet æqualis baſi BAE, & baſis ED baſi CD. Non fieret ergo triangulum BCD baſis anguli ſolidi. Nam ex 20. primi oportet doo crura triaoguli reliquo eſſe maiora omnifariam ſumpta, & ſic pyramis triangularis non daretur, quæ baſim triangularem habet, & verticem tribus angulis plaois contentam, & hinc neque ED maior eſſe poteſt EC, & CD cruribus eadem ratione. Vnde nec angulus BAD poteſt eſſe maior aogulis BAC, & CAD.



THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quàm quatuor rectis angulis continetur.

*SIt angulus ſolidus ABCD. Dico angulos eius planos BAD; DAC, & BAC, vel ſi plures ſint eſſe minores quatuor rectis. Qood, vt probetur; determinentur omnia latera AB, & AD, & AC, & ſubſternatur baſis BDC, io quam à puncto A in ſublimi cadat ex prop. 10. Tr. 22. perpendicularis IA, & ab angulis B, D, C ad eioa contactū I ducantur BI, & ID, & IC, eruotq; anguli tres DIC, & DIB, & BIC æquales quatuor rectis lo plano BDC perpeodicolari ad IA Cor. 1. pr. 12. lib. 1. Sed ex propoſ. 21. præcitati tract. aogulus DAC ab obliquo plano effectus eſt mioor, quàm DIC, & ſic BAD minor, quàm DIB, & pariter BAC minor, quàm BIC. Ergo omnes ſimul erunt quatuor rectis minores.



THEOR. III. PROPOS. III.

Si fuerint tres anguli, quorum duo, vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores, poterit ex illis angulus ſolidus conſtitui.

*PRobatur ad hoc, vt conſtituator angulus ſolidus neceſſe eſt, vt baſis plana illi aogulo poſſit ſubſtirui, quæ ſaltem triangularis ſit: Sed ſi aoguli 2. ſint maiores reliquo, habebūt etiam duas baſes maiores reliqua: Ergo ex illis tamqoam ex lateribus plaoum triangulare cooſtitui poterit, quod angulum ſolidum ſubſternat.

Quod verò duo anguli maiores reliquo ſimul ſumpti habeant etiam baſes ſimul ſumptas maiores reliqua oſtenditur.



Sint anguli tres A, B, C, quorum duo A, & B reliquo C ſint maiores. Dico etiam baſes DE, & GF ſimul ſumptas reliqua HI eſſe maiores. Nam primo ſi voua ex duobus ipſorū eſt maior, vel æqualis ipſi ICH cōſtat, & baſim ſub æqualibus cruribus contentam, vel eſſe æqualem ex 22. primi, vel eſſe maiorem ex 24. eioſdem, & ideo addita altera baſi ambas reliqua eſſe maiores.

At ſi ambo anguli ſeorſim ſumpti ſunt minores angulo reliqoo factis omniom aogulorum æqualibus cruribus, & ſuis baſibus DE HI, FO ductis, lo triangulo reliquo HCI detruncetur aogulus LCH æqualis aogulo A; remanebit angulus reſiduus LCI minor altero EBG, cùm duo A, & B hoc toto HCI præſupponaotur maiores ex Theſi.

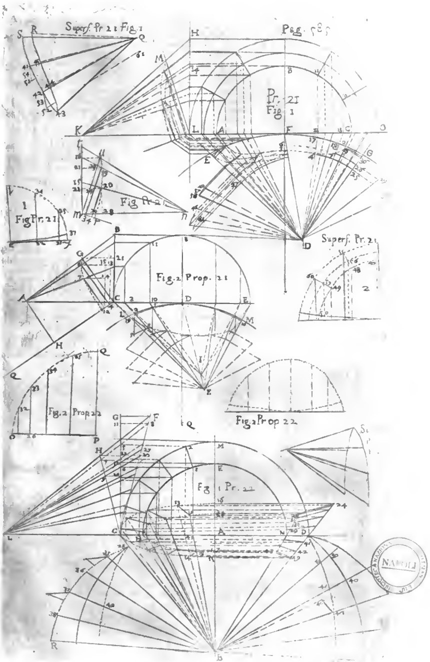
Baſis verò HI baſi DE, & LI baſi mioor erit eò, quòd HL ſit æqualis DE ex prop. 22. primi ob latera æqualia HC, & CL lateribus DA, & AE, & angulum compreheoſum ab ipſis æqualem, at baſis LI ex 25. lib. 1. minor baſi FG ob aogulum minorem LCI angulo FAG, & latera æqualia LC, & CI lateribus FA, & BO. At baſis HI eſt minor cruribus HL, & LI ex 20. lib. 1. Ergo HI erit minor baſibus DE, & FG ſimul ſomptis. Vnde ex illis angulis aogulus ſolidos conſtitui poterit.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocumque aſſumpti reliquo ſint maiores, ſolidum angulum conſtituere; oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

*SInt tres anguli in fig. A, B, C minores quatuor rectis, & qoorom duo, vt vt aſſompti reliquo ſint maiores, & fiant ei crura æqualia ſubductis baſibus DE, FG, & HI. Electo verò quolibet triangulo, ad eius baſim V. g. ab baſim FG in triangulo FBG ducatur perpendicularis BT. Deinde ex

baſibus



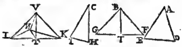
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

baſibus DE, FG, & HI conſtituatur triangulum KNL, & diuiſo KL, vt eſt æqualis baſis FG in T, ducatur NT, fiatque triangulum NTV ex perpendiculari TB cruræ EA, & baſi NT, cuius latus TV perpendiculariter inſiſtat lateri KL, & ſecet in NT ex prop. 31. Tract. 25. Deinde iungatur KV, & VL. Dico quòd ſit factus angulus ſolidus conſtans tribus angulis planis datis A. B, & C.

Probatur. Nam, quòd ex tribus baſibus poſſit triangulum conſtitui, conſtat ex hypotheſi, in qua ſupponitur duos angulos fuiſſe datos maiores reliquo; Quare, & baſes, vt prop. anteced. probatum eſt; Quòd autem ex tribus quoq; nimirum perpendiculari TB latere EA, vel quolibet illi æquali, & NT poſſit triangulum componi.



Probatur. Nam aut NT eſt maior, quàm TL, vel minor, vel æqualis. Sit primò maior Quia ergo ex TV, LV, & LT cōponitur LVT triangulū, LV, & LT erunt maiora latera, quā VT, vnde tantò maiora erunt TN maius ex Hyp. quā TL, & NV ęqualis ipſi VL ſc. ipſi AE, vel ęqualis GE, Aut NT erit minor, quā TL, at TV, & LV ſunt maiora, quam TL, ergo tantò maiora latera erunt ipſa VT, & NV æqualis ipſi VL reliquo NT, Aut erit ęqualis NT, & LT, & ita ſi TL, & LV eſt maior, quā VT, etiā maior erit NT cū ipſa NV ęquali VL, quam TV, vnde ex ipſis NT, TV, & NV poterit componi triangulum NVT. Quod verò ita ſuper NT conſtituendum ſit, vt TV cum KL faciat angulos rectos docuimus prop. 21. tr. 22. interſectionum.

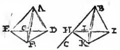
Quod tandem omnes anguli ad V nimirū KVL, & KVN, & NVL ſint ęquales, ſinguli ſingulis aſſignatis C, B, A, oſtenditur. Nam baſis KN eſt æqualis ex conſtructione baſi HI, & crus NV item ex conſtructione cruri BA, & ideo æquali HC. Crus quoque alterū KV eſt ęquale itē cruri FB. Quod oſtenditur, nam TV crus perpendiculare ex cōſtructione eſt æquale perpendiculari TB, & KT cruri FT, & anguli apud T comprehenſi à dictis cruribus ęqualibus ex cōſtruct. ambo recti; Ergo ex pr. 23. lib. 1. baſis KV baſi FB, & æquali IC erit æqualis, vnde triangulum KNV erit æquale triangulo HCI, & triangulum KTV triangulo FBT, & altera medietas TVL alteri medietati TBG, & crus LV cruri GB, vel æquali EA ſecundi trianguli. Baſis verò NL baſi DE ex hypotheſi eſt ęqualis, & crus NV cruri BA, vel æquali DA. Ergo triangulum ex 23. l. 1. NVL triangulo DAE æquale, & ſic omnia triangula KVN & NVL, & KVL ſingula ſingulis aſſignatis erūt ęqualia, quare, & anguli ad V ſinguli ſingulis B, A, C æquales erunt.

PROBL. II. PROPOS. V.

Ad datam rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIt angulus ſolidus A, cui coſtituēdus ſit ęqualis angulus ſolidus B in data linea BC. Ad triangulum planum ADE ab aliquo puncto lineę AF V.g. ab F deducatur perpendicularis FO, & per G punctum tranſeat recta DE.

Deinde ex BC detruncetur BH, æqualis AF, & ad punctū B ex pr. 24. l. 1. conſtituatur angulus planus IBH æqualis angulo plano DAE; fiant verò æquales IB, & AD, connectaturque IH, & in HI ſumatur ſegmentum æquale ſegmento GE, quod ſit LH, ducaturq; BL, & à puncto L educatur plano triāgulo IBH perpendicularis LK, æqualis ipſi GF; connectaturque recta BK. Dico *angulum ſolidum* B *tribus planis contentum* IKB, *&* IBH, *&* BHK *eſſe æqualem angulo ſolido dato* A.



Probatur, quia angulus IBH eſt æqualis angulo DAE, cruſque BH cruri AE, necnon, & crus IB cruri AD, ex prop. 24. lib. 1. baſis IH erit æqualis baſi DE, totumque triangulum IBH toti DAE æquale. Cùmque LH ex effectione ſit æquale ſegmentum parti GE, erit etiam LB ex propoſ. eadem 24. lib. 1. æquale crus cruri GA; aſt LK eſt æquale ex conſtructione cruri GF, & comprehendunt crus BL, & LK angulum rectum ex def. 2. tr. 22. Interſectionum, erit quoque ex prop. 22. eadem lib. 1. baſis BK baſi AF æqualis; ſic quia crus IL, vtpote reſiduum ex LH ſit æquale reſiduo cruri GD, & LK cruri GF ex effectione equale; anguluſq; cōprehenſus rectus ſit, erit baſis IK baſi DF æqualis ex dicta propoſ. 24. lib. 1. & eadem ratione AH baſis baſi FE. Cùm itaque triangulum IAK habeat latera ſingula ſingulis lateribus trianguli FAD æqualia, erunt IBK triangulum DAF triangulo, & KBH triangulo FAE æquale ex propoſ. 23. lib. 1. ſed iam oſtenſum eſt triangulum IBH triangulo DAE æquale; Ergo omnes anguli plani conſtituti ad verticem B ſinguli ſingulis erunt æquales angulis planis apud A, & ſic angulus ſolidus B angulo A ſolido erit æqualis.

COROLLARIVM.

HInc autem non erit difficile conſtituere, & angulum ſolidum pluribus ſuperficiebus, quàm tribus contentum. Quia poteſt diuidi in tot angulos tribus ſuperficiebus conſtantes, & illis exhiberi queunt alij anguli ſolidi æquales, qui deinde ſimul compoſiti ęqualem angulum ſolidum pluribus, quàm tribus ſuperficiebus conſtantem efficiant.

EXPENSIO III.

De deſcriptione Tetaedri in ſphæra, & proportione laterum ipſius ad diametrum.

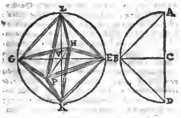
TEtaedrum eſt pyramis quædam quatuor ſuperficiebus æqualibus, & ſimilibus contenta habens quatuor ſolidos angulos tribus angulis planis clauſos, & latera ſex, de qua volumus ex Euclide docere, quomodo inſcribatur ſpęræ, & quænam ſit proportio laterum, quibus continetur ad diametrum ipſius ſphærę.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VII.

Octaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius Octaedri.

SIt AD datæ ſphærę diameter, quæ in C puncto bifariam ſecta ſit; erectaque perpendiculari CB, facto centro in C ſemicirculus deſcribatur; coniungáturque AB, & DB rectis, eritque factum ſemiquadratũ ADB, quod ſufficit. Seorſim autem aliud quadratum fiat EHPG, cuius latera EP, & PG, GH, & HE lateri AB ſiue æqualia, & diametri EG & PH diametro AD æqualia. A puncto verò V excitetur perpendicularis KVL, ſintque portiones VK, & VL æquales AC, connectanturque eorum extrema octo rectis EL, & PL, & PK, & cæt. Dico primò eſſe conſtitutum Octaedrum.



Quod probatur oſtendendo omnia eius latera æqualia: quia triangula tum iacentium ſuperiora, tum inferiora ad centrum V. g. EVK, & LVP, & cęt. ſunt æqualia ob æqualia crura EV, & VH, & VL ex effectione, & angulum rectum ad V; Vnde baſes erunt æquales EL, & EP, & cæt. ſicque omnis triangula ſuperficialia, vt ELP, & cæt. æqualia latera poſſident, ſcilicet baſes triangulorum ad centrum, & ideo æquales angulos ex 23. lib. 1.

Probatur ſecundò, quòd ſphęra complectatur. Nam radij EV, & VG, & VL ſunt ęquales rectę AC ex effectione; Ergo circumferentia quælibet interuallo VG centro V per eorum extrema tranſibit.

Probatur tertiò, quòd eius lateri ſit duplus in potentia diameter EG, quia ex 13. lib. 2. ęquat in ELG rectangulo ex 28. lib. 3. quadratum baſis EG quadrata laterum æqualium EL, & LG, vnde quadratum EG erit duplum quadrati lateris LG.

COROLLARIVM.

HInc educitur; quod ſi in eadem ſpęra deſcriptum ſit Octaedrum, & Tetraedrum latus Tetraedri ſua potentia comprehendere lateris octaedri potentiam, ideſt quadratum, quod poteſt efficere vna vice cum tertia parte, nam quadratum lateris pyramidis eſt 4. qualium 6. eſt quadratum diametri, & octaedri lateris quadratum talium partium 3. pyramidis lateris quadrati erit 4. earundem partium, octaedri vero lateris quadratum 3, nempe Pyramidis latus comprehendet latus octaedri potentiâ ſemel, & inſuper $\frac{1}{3}$ ipſius lateris octaedri.

EXPENSIO V.

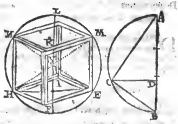
De Cubi in ſphæra deſcriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.

CVbus eſt figura ſolida ſex ſuperficiebus quadratis æqualibus conſtans, habens angulos ſolidos octo tribus planis angulis rectis concluſos, & latera duodecim.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Cubum conſtituere, & ſphæra complecti, & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIt ſphęræ diameter quicumque AB; diuidaturq; in tres partes, & ſit tertia pars AD, & à puncto extremo D excitetur perpendicularis, quam abſcindat in C ſemicirculus ſuper AB, connectanturq; AC, & CB.



Seorſum verò in aliquo plano fiat quadratum EFHI, cuius latera ſint æqualia rectę CB & ab angulis eius excitentur perpendiculares ipſis lateribus ęquales, quorũ extrema L, M, K, N rectis connexa efficient cubum EHML de quo loquitur prop.

Nam, quod ſit cubus patet. Etenim ex effectione habet omnia latera ęqualia, cum enim erectę, vt KF ſint perpendiculares plano, erunt quoq; parallelę, vnde, & angulos rectos efficient cum lateribus in plano extenſis FE, & c. ex prop. 7. Tract. 22. Quia verò ſunt ęquales latera quoque ſuprema M K erunt parallela, & ęqualia lateribus EF, & perpendiculares lateribus erectis, vt FK: quare cùm omnia latera ſint ęqualia, parallelaque, & omnes anguli recti cubus conſtitutus eſt.

Prob. ſecundò, quòd ſphæra cóplecti poſſit. Quia dimidia omnium diagonalium, vt MH ſunt ęqualia, cum ipſę diagonales ſint ęquales. Vnde facto centro in communi eorum puncto medio V poterit ad interuallum VH deſcribi circulus. Qui tranſibit per extremos angulos V. g. per H, & M, & cęt ita etiam alius per L, I, & cęt.

Probatur tertia pars. Nam diameter ſphęrę MH continet in ſuo quadrato duo quadrata lateris EM ęquali quadrato lateris ſibi ęqualis EF, & diagonalis EH: diagonalis verò EH continet quadrata lateris EF, & FH ex 11. lib. 2. ob angulum rectum EFH. Ergo quadratum diametri continet tria quadrata trium laterum ęqualium ME, & EH, & EF, quare vni eorum triplum eſt.

Eſt autem MH equalis AB diametro. Quia quadratum AB ad quadratum CB, eſt quoque triplum. Siquidem eſt ad quadratum ex CA, ideſt ME, vt AB ad DB prima ad tertiam proportionalem ex Coroll. prop 21. lib 6. quę AB tripla eſt ad BD. Quare erit quadratum AB triplum quadrati CB, & ideo ęquale diametro MH, cuius quadratum triplum eſt quoque quadrati EF, ideſt CB equalis lineę.

COROLLARIVM.

Hinc autem habetur diametrum cubi, ſeu ſphęrę poſſe efficere quadratum ęquale quadrato lateris cubi, & quadrato lateris pyramidis. Nam cùm; quadratum diametri ſphęrę eiuſdem continet pyramidis quadratum vna vice, & dimidia erit vt 9. ad 6. & cùm idem contineat lateria cubi quadratum tribus vicibus erit, vt 9. ad 3. Quare compoſita hęc duo quadrata partium 6. & partium 3. efficient quadratum partium 9. quale eſt quadratum ſphęrę, ſeu cubi: Vnde AC erit latus Pyramidis, & CB cubi, cuius diameter ſit AB.

EXPENSIO VI.

De inſcriptione dodecaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

Dodecaedrũ eſt corpus duodecim pentagonis ęqualibus equilateris, & ęquiangulis conſtans, ſimulque angulos ſolidos 20 comprehenſus angulis planis tribus, & latera 30. conſequitur.

PRORL. I. PROPOS. IX.

Dodecaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, & demonſtrare, quòd dodecaedri latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

Cvm dodecaedrum duodecim facies habeat, & cubus 12. latera hinc eſt, quod conſtruatur delineando ſuper vnum quodque latus, dodecaedri aliquam ſuperficiem Fiat itaque quadratum b y baſis electę ad placitum cubi, circa quem dodecaedrum conſtituendum eſt, ſecerurque eius ſemilatus r o ſecundum extemam, & mediam rationem in puncto n, ducaturque linea, m e, & u t perpendiculares, abſcindatur n m, & g t equalis maiori ſegmento n o, deinde conlungatur t r, & extendatur. Nam dico pro. 1. progreſſ. quod impingit in punctum m.

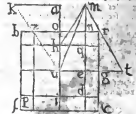
Probatur. Nam quia ſemilatus o r eſt ſectum eatrema, & media ratione, ita eſt r o, vel r g ad t g, maius extremum, vt n m idem maius extremum ad minus r n; ſed talia quoque erunt latera triangulorum t g r, & n r m, quia erit ob angulũ rectum apud n, & g, & angulos ad verticem apud r, & m æquales, ita r g ad t g, vt n m ad n r. Ergo t r debebit tranſire per punctum m. Nam ſi tranſiret aliunde, non haberet eandem proportionem, quam habet r g ad t g ſiquidè ſi trãſiret ſupra, vel infra, eſſet maius, aut minus illud crus trianguli r n m, quã n m, & ideo linea n m, licet maior, aut minor, quã n m eidem r n eandem proportionem diceret, quam r g ad t g, quod eſſe nequit, ex 7. lib. 5.

Progreſſ. 2. Dico t m in r eſſe lineam ſectam ſecundùm medium, & extremam rationem, quod pari modo oſtenditur. Quia eadem proportione referuntur t r ad m r, qua t g maius ſegmentum ad n r, vel e g minus. Ergo componendo, vt t r ad t r cum m r, ſc. t m: ſic t g ad t g cum e g, ideſt t e, vel æqualis n e tota linea extrema, & media ratione ſecta, ſc. e g ad t g, quæ eſt, vt m r ad r t, cum ſit, vt n r ad g t; quare cũ minus extremũ m r ſe habeat ad maius t r, vt maius ad totam t m, quadratum maioris ſegmenti ex prop. 11. lib 6. erit æquale rectangulo minoris ſegmenti; & totius, vnde extrema, & media ratione ſecta erit.

Dico Progreſſ. 3. Quod ſi ducta h m ex ea, & e m fiat triangulum rectangulum u a x, quòd baſis u x æqualis erit lateri quadrati r b; quod ſic probo. Nam eſt æquale eius quadratum ex 47. lib. 1. quadratis crurum a u, & a x: hæc verò duo quadrata ſunt æqualia quadrato lateris r b; Ergo quadrata lateris r b, & cruris u x æqualia ſunt, & conſequenter ipſa latera æqualia.

Probatur minor, nempe quadrata linearum a x, & a u eſſe æqualia quadrato lateris r b. Nam quadratum u a eſt æquale quadrato n b p d cum d n, & e m, ex conſtr. ſint æquales; Quadratum verò ex a k, quadrato ex m h, quod ęquale eſt quadratis ex m q, & q h; Quadratum verò ex q m eſt æquale quadrato g r o n, & quadratum q h æquat q e u h, quæ ſunt ęqualia gnomoni r d f, ſiquidem ex hypotheſi quadrata duo e q u h æqualia exiſtunt rectãgulis duobus y i, & i f, quod ſint quadrata maioris ſegmenti n o. Rectangulũ verò q o eſt æquale rectangulo d g, vt patet, & rectangulum r e eſt pars quadrati g u. Vnde totus gnomon r d f ſecundum ſingulas partes ęquat quadratum r u habens latus u o, vel q m, & quadratum lateris q h; quę duo quadrata ęquant quadratum baſis m h, vel a k, & hæc cum quadrato q a, vel æqualia b n æquant quadratum baſis u k, & ideo erit æqualis lateri r b.

Dico Progreſſ. 4. Quod ſi ex toto latere r b, & maiori eius ſegmento n z. Fiat triangulum iſoſcelles f a 3, & in puncto 4. & 8 ſecentur eius latera extrema, & media ratione, ideſt fiant 4 f, & a 8 æquales baſi f a, ducaturque perpendicu-



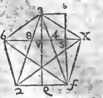
laris Q 3. & ei perpendicularis per puncta mediæ ſectionis 4 8 æqualis hinc inde à puncto v medietati lateris f 3, quod ſecabitur in puncto 4. extrema, & media ratione, minuſque ſegmentum erit x 4. Nam ducta f b, parallela perpendiculari 3 Q, & b 3 baſi f a parallela. Erit primo v 5 dimidium ſegmentum maius, vtpote æquale dimidio f Q, deinde probo 5 4 eſſe illud dimidium minoris ſegmenti 43 & ideo duplum ipſorum ęquari ipſi 3. f vel x 6. In triangulo b 3 f, ita f 3 eſt ad 4 f, vt baſis b 3. ad parallelam 54. ſed vt tota f 3 ad maius ſegmendum f 4 ita eſt f 4 maius ſegmentum ad minus 43, ergo vt eſt f 4 maius ſegmentum ad

43, minus ita eſt b 3. baſis ad 5 4 ſibi parallelam: ſed b 3 eſt æqualis ſemibaſi f Q, ideſt maioris ſegmenti f 4 medietati, ergo 5 4 erit æqualis medietati minoris ſegmenti 43, vnde cum dupla 4 f fiet tota linea æqualis lateri 43. & cũ dupla V S æquali 4 f tota x 6 æqualis lateri quadrati r b in 1. fig:

Progreſſ. 5. Et hinc patet, quod poſſit fieri pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex 11. lib. 4. quia f 3 2 triangulum eſt quale repoſcit prop. 10. lib 4. cuius baſis f 2 ſit ſegmentum maius lateris 23. extrema, & media ratione ſecti. Nam quia 46 æquat f 2 parallelã, & f 2, æquat f 4 erit 46 f 2 parallelogrammum æquilaterum. Vnde diagonali f 6 angulus 4 f Q erit diuiſus bifariam & ita erunt tres anguli æquales f 32. 3 f 6. & 8 6 f & ita fare in parallelogrammo x 8 f 2. Vnde omnes anguli erunt æquales, cum oſtendentur æquales angulo f 32. Latera quoque æquabuntur. Quoniã iam tria 2 f, & f x, & 26 in parallelogrammis 28 f x, & 46 2 f ſuper eandem baſim exiſtentibus oſtenſa ſunt æqualia. Vnde remanet de duobus x 3 & 36. Quod patet, nam ſegmentum 38. & dictis progr. 4. æquat ſegmentum 86. Vnde, & anguli 6 3 8. & 3 6 8. ſubtenſi ex prop. 14. lib. 1. æquabuntur, æquales autem ſunt f 3 2, & 8 6 f ex dictis. Ergo toti anguli 436, & 36 f æquales erunt, ſed inuicem 3 f 6 æquat f 3 2. Ergo reliqui æquales trianguli 3 f 6 reliquis inuicem æqualibus trianguli f 3 2; quare erit æquiangulũ, & iſoſceles; ſed f 3 eſt idem in vtroque triangulo. Ergo ex 4. lib. 6. f 6 æquat 3 2. & 3 6 latus f 2. & eadem dicas de triangulo 3 x 2.

Dico progr. 6. Quod ſi ducatur m u hæc erit æqualis in prædicto quadrato ſemidiametro cubi, cuius latus ſit r b. Nam erit eius quadratum triplo maius, quam quadratum ſemilateris cubi r o. Cumq; quadratum diametri cubi ſit triplò maius, quam quadratum lateris ex prop. 10. b. Coroll. etiam ſemidiametri erit triplo maius, quàm eius ſemilateris; Vnde u m tripla potentiâ r o æquabit ſemidiametrum cubi, cuius ſemilatus eſt r o.

Quod autẽ ſit triplo maius u m baſis quadratũ, quam ſemilateris o r oſtenditur. Nam eſt æquale quadrato ex e m, vel æquali n d, & quadrato ex e u facto in rectangulo triangulo m e u, hæc verò duo quadrata ſimul ſunt triplo maiora, quã quadratũ r u ex ſemilatere r o; quoniã primò ub eſt iam æquale quadrato u t ſecundò ſi aliam partem accipiamus d o, cum occupet idem ſpatium quadrato e h quadrati r n, & rectãgulo h u erit idem quadrato u r, at cum e i quadratum æquetur rectãgulo e r etiam parallelogrammum d o æquabitur quadrato



u r. Tertio u p eſt æquale rectangulo u n, cui ſi addamus quadratum alterius cruris e u æquale reliquo rectangulo r e quadrati prædicti r u fiet quãtitas omnis p e r u quadrato tertiò æqualis. Iam ergo ter adæquauimus duobus quadratis ex cruribus e m, & e n quadratum r u factum ex ſemilatere r o. Vnde, & quadratum u m iſtis duobus ex m e,

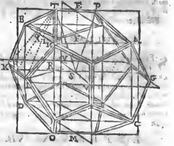
& eu æquale erit triplo maius, quã quadratũ ex r o; Vnde erit ſemidiameter cubi, cuius ſemilatus r o.

Iſtis præſuppoſitis fiat cubus ABCD, ſecenturq; eius ſingulæ ſuperficies bifariam planis, ſeu rectis GH, & cæt. quæ plana excedant plana cubi exceſſu n m, vel quantùm eſt ſegmentum n o; quod interuallũ notetur, quoq; à linea R verſùs T, & ſit RT. Sic fiat vtrinquè omnibus ſuperficiebus à puncto, in quo ſe decuſſant V. g. ab R in T ab M in O, ab H in L, & X, & cæt. Deinde coniungantur puncta KB, & LN, & NT, & TB, eritque factum pentagonum, & ſi idem fiat ſingulis duodecim lateribus cubi, vt factum eſt in latere NB. Dico factum eſſe dodecaedrum.

Progreſſ. 7. Quod vt oſtendatur multa ſingulatim ſunt demonſtranda, & primò, quod pentagonum TNBLK ſit in eodem plano. Nam ſic non eſſet eadem figura, cùm non eſſet in eadem ſuperficie. Nam ducta HT, quæ tranſeat per Q deſinet in T ex progr. 1. Ergo erit in eodẽ plano cũ latere cubi ex pr. 2. tr. 22. vtpote, quia, cum eo in Q ſe ſecat; linea verò LK lateri NB parallela eſt ex effectione, propteraque erit in eodem plano cum illa.

Quare, & latera TN, & NL, & cæt. prædictis coniungentes erunt in eodem plano, totumque pentagonum LNTXB in eodem plano erit ex pr. 2. T. 22.

Progreſſ. 8. Probatur quod ſit pentagonum æquiangulum, & æquilaterum. Nam, ſi ducantur TL, & TK, & NB ſunt inuicem æquales, & ſe inuicem ſecant extrema, & media ratione. Vnde ſunt lineę æquianguli, & æquilateri trianguli lateribus, anguliſque ſubtenſæ.



Demonſtroque primo TL eſſe æqualem NB. Nam ducta TR perpendiculari plano RLK, ductaque RL, hęc erit æqualis lineæ h m, vel à K, cum ſit baſis trianguli RHL æqualis triangulo h q m ob LH æqualem h q, & RH ipſi q m. At RT lineę u a ex conſtructione; anguluſque apud R rectus. Quare, & baſis TL erit æqualis baſis u x vel r b, & conſequenter lateri cubi NB ex 3. prog. & 5. & eadem probatio eſt de linea TK. Deinde probatur, quod ſe ſecant extrema, & media ratione in I. Nam ex 2. prog. TH, vel mt, ſic cũ latere NB ſe ſecat in Q: Ergo etiam TL, cum enim NB ſit parallela lateri KL ita erit TH ad TQ. vt TL ad TI, ſed TQ eſt minus ſegmentum ex prædicto progr. Ergo etiam TI, & conſequenter IL maius. Cùm ergo NB ſit æqualis lineæ TL, & diuiſa bifariam Q, parallelaque lateri LK, ipſa quoque ſecabitur ſecundum mediam, & extremam rationem, minuſq; ſegmentũ erit NI ex 4. progr. Quare ex 5. pentagonum æquilaterum, & æquiangulum conſtituetur. Quod ſi replicetur ſingulis in lateribus cubi, cum in omnibus ſit capacitas, conſtituentur duodecim

pentagona conficientia Dodecaedrum.

Progreſſ. 9. Probatur. Quod ſphæra poſſit amplecti. Nempe, quòd omnium horum pentagonorum anguli tangant ſphęram amplectentem. Nam ſupra oſtenſum eſt progr. 6. m u eſſe æqualẽ ſemidiametro, quę nectit punctum m cum centro cubi u. Quod punctum diſtat, tum ab a, tum ab n ſecundùm interuallum maioris ſegmenti; talis autem eſt linea PS, & TS, & cęt. quę angulos pentagoni cum centro nectunt, nam P, & T ex conſtructione diſtant à medio E, tum à ſuperficie cubi quantùm eſt maius ſegmentum dimidij lateris extrema, & media ratione ſecti, & ſic dicas de omnibus alijs, vt conſiderare eſt, quod etiam verificabitur de angulis, qui cubi angulis coincidunt cum, & cubi ſit ſemidiameter.

Probatur quarto, quod latus horum pentagonorum ſit Apotome, nam ſphęrę diameter cum latere cubi eſt rationalis linea ſolùm potentia, vt ſupra oſtenſum eſt, cum triplum maius quadratum, quam latus poſſit efficere, & ideo ei ſit, vt numerus ad numerum. Cum ergo latus cubi rationalis linea ſit maius ſegmentum KL latus ex propoſ. 47. lib. 9. erit Apotome, vt ibi oſtenſum eſt.

COROLLARIVM I.

Hinc elicitur, quod ſi latus Cubi coniungatur cum maiori ſegmento ex propoſ. 47. lib. 6 element. efficietur minus ſegmentum, & latus cubi aſſumet ſibi vices maioris, vnde fit, quod ſi aliqua linea ſecetur ſecundum mediam, & extremam rationem maius ſegmentum poterit deſeruire pro latere cubi, ſegmentum autem minus pro latere dodecaedri.

COROLLARIVM II.

Secundo elicitur, quòd linea coniungens ſex oppoſita latera paraljela, qualia PT, & MO, ſic LK alteri apud G, ſic quòd eſt apud V alteri apud y, vt eſt linea GH, vel a M, ſecta ſit ſecundum extremam, & mediam rationem cum contineat ex conſtruct. latus cubi, & maius ſegmentũ nẽpe medietatem hinc medietatẽ inde, vt eſt FE, qua cubum excedit.

EXPENSIO VII.

Icoſaedrum ſphæra inſcribere, ſimulque omnium corporum regularium proportiones exponere, & numerum eorum demonſtrare.

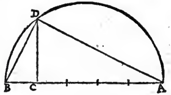
Icoſaedrum viginti triãgulis planis cõſtat ęqualibus, & ſimilibus obtinens angulos ſolidos 12. quinq; angulis planis conſtantes, & latera 30.

PROBL. I. PROPOS. X.

Icoſadrum conſtituere, & ſphæra complecti, & oſtendere, quod Icoſaedri latus irrationalis linea ſit.

Facilior eſt hæc propoſitio, quàm præcedens, licet corpus pluribus ſuperficiebus circumſeptum ſit. Ad hoc ergo, vt Icoſaedrum conſtituamus; detur diameter alicuius ſphæræ, quæ illud volumus amplecti, & ſit AB, & diuidatur in 5. partes, vnaque ex ipſis ſit CB, à quo puncto C erigatur perpendicularis, quæ terminet in circulum in D; Ducanturque AD, & DB.

Nam dico AB poſſe quintuplum magis, quàm DB. Ratio eſt; quia quadratum totius AB eſt 25. partium quarum vna eſt quadratum ex CB factum: Verùm ex quadratis planis, quæ ſint menſura quadrati AB, ex CB linea quadratum ſolùm 5. poſſidet. Siquidem, cùm ita ſit AC crus maius ad CD crus minus in maiori triangulo ADC, vt idem crus CD maius in minori ad CB minus ex Coroll. prop. 16. lib. 6. erit CD media proportionalis, & ſic eius quadratum erit æquale rectangulo ex AC, & CB quatuor partium, vnde vna cum quadrato CB faciet 5. quadrata: Iſtis verò duobus quadratis æquale eſt quadratum ex DB ex 11. lib. 2. Ergo hoc quadratum erit 5. partium reſpectu quadrati totius AB 25. partium quadratarum: Vnde cum duo harum linearum quadrata ſe habeant tamquam numerus ad numerum ipſæ lineæ AB, & BD erunt rationales potentia tantùm commenſurabiles.

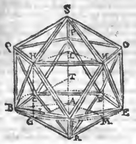


Quo ſuppoſito ſic conficitur Icoſaedrum. Semidiametro DB, fiat circulus BEDC, in eoque fiat pentagonũ æquilaterum, & æquiangulũ DCABP ex dictis lib. 4. prop. 11. diuiſaque circumferentia DB biſfariam in G ducãtur ad planum circuli facti perpendiculares GH, LA, & MN, & cęt. æquales ipſi DB primæ figuræ, vel GA radio illi æquali. Et harum vertices iungantur N, O, Q, H rectis, Fiatq; triangulum NLH parallelum plano circuli iam factis, extendaturque eius planum, & triangulis 4. ipſi NLH æqualibus à centro H additis compleatur pentagonum NOPQH ęquale pentagono inferiori, cum triangulum NLH ſit æquale triangulo MAC, & conſequenter ęquali triangulo FAB pentagoni primo conſtituti, quibus præſtitis iungantur anguli, & puncta pentagoni ſuperioris cum inferioris angulis FH, & FN, & EN & HB, & cæt. Habebimusq; 10. triangula æquiangula, & æquilatera. Decem quidem, quia decem latera duorum pentagonorum æqualium perhibent baſes; æquiangula verò, quia æquilatera ob hanc rationem, quæ de vno oſtenſa pro omnibus ob paritatem inſeruiet.

Probatur verò ex eo, quod ſingula omnium latera ſint ęqualia lateri FB. Nam vt diximus propoſ. 4. Tractat. 20. huius latus pentagoni V. g. FB, vel NH efficere quadratum æquale quadrato decagoni FG, & exagoni, nempe ſemidiametri

tri BA: Sed crus HF poteſt efficere quadratum æquale quadratis FG, & GH æqualis radio BA, ex conſtruct. vt docet prop.11. lib.1. ob angulum rectum apud G, ergo iſtæ lineæ FH, & FS, quæ æqualiter poſſunt, erunt æquales, & idē valet de cęteris.

Iſtis iam 10. triangulis conſtitutis prolungetur AL in vtramq; partem in R. & S, vt pars addita LS, hinc, & AR. inde fiut æquales lateri decagoni FG; Vertexque earum R., & S coniungatur cū angulis ſuppoſitorum pentagonorum, & erunt quinque triangula, vt NHS, & cæt. ſupra; quinque infra. vt FRB, aut DCR, & cæt. ſimulque decem, quæ habebunt omnia latera prædictis æqualia, & ideo illis omnino æqualia erunt ex propoſ. 23. lib.1.



Probatur GH eſt ex conſtructione æqualis lineę GA, & ideo lineæ LH: verū SL: & AR lineę decagoni FG; angulus verò apud L, aut A rectus, vt āgulus apud G. Ergo triangula LSH, & ARG, & FHG æqualia erunt. Quare baſes quoque erunt æquales SH, & RB, & FH. & ſic dicas de alijs. Cùm ergo omnia latera omnium triangulorum ſint ęqualia erit conſtitutum Icoſaedrum.

Probatur modo, quod ſphęra poſſit amplecti, quod conſequemur, ſi probauerimus lineas TS, & TB, & cęteras à puncto T bifariam SR partiēte procedentes ad angulos Icoſaedri, eſſe æquales. Nam tunc ſphæra omnes angulos continget.

Portio AL eſt latus Exagoni, quia radio ex AS æqualis, & LS decagoni ex conſtructione. Ergo ex prop.3. Tract.20. de circulo inſcriptis, erit diuiſa tota SA extrema, & media ratione, & LS minus ſegmentum, & medietas maioris TL. At ex pr.35. lib.6. Eucl. minus ſegmentum cum dimidio maioris poteſt efficere quadratum quintuplo maius, quam dimidium maioris. Linea verò TS eſt eiuſdem proprietatis. Nam quadratū AS, vtpote, quod ſit dimidio AT linea maior, vtpote æqualis ipſi AL eſt quadruplex ad quadratum lineæ AT. Vnde TB baſis rectanguli TAB poterit efficere quadratum æquale quinque quadratis, quatuor cruris AS, & vni cruris AT. Quare poterit quintuplo magis, quàm AT. Vnde cum TS, & TB poſſint æqualia quadrata, nempe quintuplo maiora, quàm quadratum lineæ AT, inuicem erunt æquales.

Probatur deinde, quod tota RS æquet diametrum primæ fig. AX, & circuli ADS. Nam illa poteſt, vt in notabili quintuplo magis, quam DB; talis verò conditionis eſt SR. Nam vt dictum eſt eius medietas poteſt quintuplo magis, quam medietas TL, & ideo tota SR quintuplò poterit magis, quam tota LA æqualis ex conſtruct. ipſi DB, & ideo eorum quadrata erunt æqualia, vnde, & ipſæ æquales.

Probatur tandem, quod latus Icoſaedri ſit linea irrationalis, quod ſufficit ſcire ne fruſtra laboremus ex nota diametro in inquirendo longitudinē illius adamuſſim, cum id fieri nequeat, quòd ſit, & potentia, & longitudine incommenſurabilis.

Nā vt probaui pr.19. tr.20. Latus pentagoni eſt incommenſurabile diametro, tùm longitudine, tùm potentiā; ſed diameter ſphæræ RS eſt potentia commenſurabilis diametro AB circuli, in quo inſcriptum eſt pētagonum, vt dixi, ergo latus pentagoni FB erit incommenſurabile quoque ne dum diametro AB circuli; ſed etiam ſphęrę SR, tum longitudine, tum potentia ex prop.7. lib.10. Elem.

COROLLARIVM I.

Hinc educitur ſphæræ circumſcribentis Icoſaedrum diametrum eſſe potentis quintuplum diametri circuli pentagonum ambientis ex cuius lateribus Icoſaedrum eſt conſtitutum.

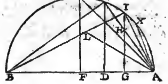
COROLLARIVM II.

Item colligitur ſphæræ Icoſaedrum ambientis diametrum eſſe compoſitum ex exagoni, & decagoni duobus lateribus circulo inſcriptis eodem, cùm AL ſit latus exagoni, at LS, & AR latera decagoni.

PROBL. II. PROP. XI.

Omnium latera corporum regularium eadem ſphæra deſcriptibilium exponere, & inuicem comparare.

Detur diameter ſphæræ AB, & ſemicirculus circa illum deſcriptus ACB; diuidaturque AB in tres partes, & ſit tertia pars AD, ex qua ducta ad diametrum perpendiculari DE, ducatur AE, & BE. Nam. Dico *primo* BE *latus eſſe pyramidis ſphæra deſcriptibilis*, cuius diameter AB.



Probatur. Quia ſit eadem conſtructio, quæ prop.6 h. & fig.1. conſequenter BE lineę quadratum erit ſeſquialterum ad quadratum AD, vt ex probat. tertiæ partis illius propoſ. conſtat.

Secundo ducatur à centro F perpendicularis FC, & ducatur AC, quam dico *eſſe latus Octaedri inſcriptibilis eadem ſphæra, cuius radius* FC.

Probatur. Quia eius quadratum ſubduplum eſt ad diametrum, & quadratum diametri duplum ei eſt, vt 14. propoſ. lib. 2. diximus. Ergo eſt latus octaedri, vt ex probat. tertiæ partis propoſ.7. h. conſtat.

Tertio dico AB *eſſe cubi latus eiuſdem ſphæræ inſcriptibilis*. Probatur. Quia potentia diameter

eſt

eſt triplus ad quadratum AE; Cùm enim ita ſit baſis AB ad latus minus AE, vt ipſa AB baſis ad latus minus AD ob ſimilitudinem triangulorũ ex prop. 16. ex 21. lib. 6. erit quadratum diametri AB ad quadratum lateris AE, vt AB ipſa diameter ad AD; Eſt autem diameter AB triplus ad portionem AD; quare quadratum quoq; diametri triplum erit ad quadratum AE: quare AE erit latus cubi, cui triplus eſt diameter ſphæræ circumſcribentis, vt conſtat ex prop. 8. progr. 3. huius.

Quarto ſecetur latus AE extrema, & media ratione in H, eritq; maior ſegmentum latus AH dodecaedri, vt ex decima prop. 9. huius conſtat.

Tandem quintò diuidatur AB in quinque partes, & ſit quinta pars AG, & à puncto G ducatur ad diametrum normalis GI, nectaturque AI, & IB, aſſumaturque latus decagoni, & ei lateri decagoni ſit æqualis IL, & ducatur AL, *quam dico eſſe latus Icoſaedri eadem ſphæra inſcribendi.* Quia enim ex Coroll. propoſ. 4. lib. 6. AI, eſt media proportionalis inter AB, & GA, quod ita ſit baſis AB ad latus minus AI, vt ipſum latus, & baſis AI ad latus minus AG, erit quoque quadratum primæ, & diametri AB ad quadratum mediæ AI, vt ipſe diameter eſt quintupla lineæ AG; Ergo, & quadr. diametri AB ad quadr lateris AI quintuplũ. Vnde AI erit diameter circuli, in quo pentagonum deſcribere oportet neceſſarium ad Icoſaedrum conſtituendum in ſphæra, cuius diameter AB, vt ex Coroll. propoſ. 5. huius conſtat, & quia latus Icoſaedri ea æqualis quadrati potens; tum quadrato prædicti diametri AI, cuius circulus debet ambire pentagonum, tùm quadrato decagoni, conſequenter baſis AL in rectangulo AIL; potens, & quadratũ ex AI, & quadratũ IL erit latus Icoſaedri.

Quod verò attinet ad comparationem, non poſſumus comparare; niſi trium figurarum latera ad diametrum cum Icoſaedri, & Dodecaedri latera ſint omninò irrationalia: quare poſita diametro partium 6. in potẽtia, ideſt eius quadratum partium 6. Tetraedri latus erit partium 4. item in potentia; Octaedri lateris quadratum partium 3. Cubi verò lateris quadratum partium 2. quæ ex præcedentibus ſatis conſtant. Ideoque poſita diametro rationali, cætera quoque latera trium prędictorum corporum erunt rationalia; ſed quia eorum quadrata non adipiſcuntur eam proportionem, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, eum reſpectu numeri 6. nec 4. nec 3. nec 2. ſit numerus quadratus, ideo omnia erunt longitudine incommenſurabilia, nimirum latus Tetraedri, Octaedri, & Cubi; cęterorum verò corporum latera irrationalia.

THEOR. I. PROP. XII.

Præter prædicta quinque corpora non poteſt aliud corpus in ſphæra inſcribi, quod conſtet ſuperficiebus æqualium; tum angulorum, tum laterum.

PRobator ad ſolidi anguli conſtitutionem, tres ſaltem anguli plani requiruntur, qui tamen ſimul minores ſint quatuor rectis, vt propoſ. 2. huius. Illi ergo anguli, qui ad angulum ſolidum alicuius figuræ circulo inſcriptæ conſtituendum concurrunt, vel ſunt triangularis ſuperficiei, vel alterius ſuperficiei V. g. quadratæ, pentagonæ, ſexagonæ.

Si ſunt triangularis, vel tres anguli concurrunt, & triangulum habent pro baſi, & fit Pyramis, Triangula verò ęquilatera, & æquiangula angulos habent, qui ſunt $\frac{2}{3}$ vnius recti, ex pr. 17. l. 1. Cor. vnde tres compoſiti, vt in Tetraedro faciunt $\frac{6}{3}$, ideſt duos rectos vnde angulũ ſolidum conſtituere poſſunt, cũ ſint minores, quã quatuor recti. Si quatuor ſint erunt $\frac{8}{3}$, ideſt duo recti cum $\frac{2}{3}$, vt in octaedro; Si quinque erunt $\frac{10}{3}$, ideſt tres recti cum $\frac{1}{3}$ vnius recti, vt in icoſaedro erunt minores adhuc quatuor rectis, vnde ad anguli ſolidi conſtitutionem poterunt deſeruire, at ſi ſint ſex triangula, ęquilatera, & æquiangula eſſet $\frac{12}{3}$ anguli omnes in vnum ſolidum conuenientes cum ſint ſex, & ſinguli æquant $\frac{2}{3}$ vnius recti, vnde ſimul erunt $\frac{12}{3}$, nimirum quatuor rectos æquabunt, vnde ſolidum angulum non conſtituent ampliùs, & tanto minùs ſi ſint ſeptem, vel octo.

At ſi ſint anguli alterius figuræ cum minus, quam tres plani eſſe nequeant, qui ſolidum componant, oportebit videre an anguli illi ſimul ſint minores quatuor rectis angulis, ergo rectus quadrati poterit deſeruire, vt in cubo pro angulo ſolido, quia tres anguli recti non ęquant quatuor rector. Sic tres anguli pẽtagoni, quia illi nõ ſunt ex 11. l. 4. niſi $\frac{6}{5}$ vnius recti, vnde ſimul tres cõpoſiti facient $\frac{18}{5}$, nimirum tres rectos integros, & $\frac{3}{5}$ at ſi plures horum angulorum, quam tres vellemus componere æquarent, vel excederent quatuor rectos, vt in pentagoni angulis; eſſent etenim quatuor anguli $\frac{24}{5}$ nimirum quatuor recti, vnde angulum ſolidum non conſtituerent.

At angulus ſexagoni triplex non poteſt concurrere ad angulum rectum conſtituendum, neque alterius figurę habentis plura latera, quam quinque quis angulus ſexagoni æquat vnum rectum cum $\frac{1}{3}$, vnde tres compoſiti quatuor rectos æquarent, angulos verò heptagoni tantò eſt obtuſior, vnde tantò minus tres eius anguli ſolidum angulum conſtituent.

Quare poterunt quidem alia corpora ſphęra inſcribi, ſed diuerſis ſuperficiebus conſtantia V. g. quadratis, & triangulis. Triangulis, & pentagonis, & cęt. de quibus ſuo loco cum prędictorum corporum conſtitutione fundentur, non videtur hic locus de iis agendi ſed ſingulari tractatu.

EXPENSIO VIII.

De corpore multarum facierum in ſphæra inſcribendo.

AD eobandam ſphęram Euclidiano modo oportet oſtendere, quod ſit poſſibile corpus inſcribere ſphęrę, quod non tangat intimæ ſphęræ ſuperficiem, quod alio pacto, ac Euclides præſtabimus, ſimulque oſtendemus ſegmentorum inſcriptionem, quod videtur pręſupponere Archimedeę ſphæræ cubatio.

PROBL.

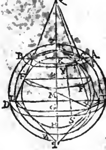
PROBL. I. PROPOS. XIII.

Inſcribere in ſphæra conorum ſegmenta, deinde tale multilaterum planis ſuperficiebus conſtans, vt ſolum tangant, ſaltem iuxta aliquas ſuperficies alterius ſphæræ concluſæ ſuperficiem.

SPæra exhibeatur ABFC, quæ concludat aliam ſphæram EHF, & oporteat in ea deſcribere corpus planis ſuperficiebus opertum, quod tangat ſphęrę cõcluſæ KSHF ſuperficiem. Diuidatur illud ſpatium in duas partes quaſcumque, & deſcribatur OVLN intermedia ſphęra radio maiori, quàm MX, deinde in hac intermedia ſphęre OVLN, ſegmenta tangentia intimã ſphęram conorũ deſcribantur. Hoc autem facilè fiet; ſi ducamus MF radium ad intimiorem ſphęrã EFH, & ei erigamus tangentẽ LV, & ĩ punctis V, & L ducamus quoſcumque parallelos OV, & TL inuicem inæquales, & per centrum ſphęræ, eorumque polos ex prop. 6. Tr. 21. p. 1. tranſeat axis MQ. Nam cum vnus parallelorum ſit maior alter minor tangens VL ad axem eorũ inclinabit, & cum illo coibit in Q cũ non poſſit ipſi parallelã eſſe ob parallelorum, & ideo radiorum ipſorum inęqualitatem. Si ergo è puncto Q tanquam vertice linea QL intelligatur circumuerti circa parallelos VO, & LT, ex def. 1. tract. 24. deſcribet conum, cuius fruſtum erit ſphęre mediæ ORVLN interceptum, & tanget in circulo EF parallelo ſphęram intimiorem, vt oſtendam.

Sic fiat de cęteris ſphęrę partibus ducendo ęquales ipſi VL, vt eſt LN, & deſcribantur per extrema L, & N paralleli prędictis LT, vel VO, & cętera fiant, vt priùs. Et ſic agatur de reliquis ſpatijs, donec LV accõmodari poteſt in ſemicirculo RVLN ab axe diuiſo: quod ſi ſpatium reſiduum ſit minus, tunc ducetur quęcumque V. g. RV, quę conũ pariter deſcribet, ſed non contingentẽ ſphęrę intimioris ſuperficiem, vtpote, quod VR minor ponatur, quàm LV, quę tangit.

Iſtis pręſtitis intelligantur ſingulorum ſegmentorum conicorum baſes, & paralleli VO, LT, & cęt. extenti ſecare quoq; ſuperficiem ſphęrę exterioris, & deſcribere eam ſecando ex propoſ. 3. Tr. 21. p. 1. parallelos maiores DSC, & BYA. Deſcribatur ergo circa quodlibet fruſtum coni multilaterum cõtingens, ſaltem quoad plures ſuperficies, quod extimę ſphęrę includatur ſuperficie tali modo.



Ducatur MX radius ad ſphęrę mediæ ſuperficiem, & ei tangens CS. Per contactum autem X, & axem RP ducatur maximus circulus ex 16. Tract. 23. per. 1. & vbi ſecat parallelum VO in I erigatur alteri puncto I altera tangens YA, quę tangentes erunt parallelę, vtpote normales eidem plano circuli maximi BIS ex 7. tract. 22. Quare per illas planum AA tranſire poterit. Ductis itaque ſimiliter alijs planis per tangentes cęteras ſibi ęquales, vel minores, quando ęquales capere nequeunt in circulis parallelis ſingulis, donec in omnibus ſint ductę, erit corpus circa quodlibet fruſtum conicum circumſcriptum. Quod dico *tangere ad ſummum ſphæræ intimioris KHFF ſuperficiem.*

Probatur. Conicum fruſtum OVTL tangit ad ſummum ſphęrę intimioris ſuperficiẽ KEHF. Nam VL fruſtũ recta circumducta formatur, quę circa parallelos VO, & TL gyratur, ſed illa tangit in puncto E. Ergo etiam cęterę omnes ęquales interceptę inter parallelos circulos OV, & TL ſimiliter tangent, cùm ęqualiter diſtent à centro M ex 16 lib. 3. omnium maximorum circulorum, & ideo ipſius ſphęrę. Quod oſtenditur alio modo. Nam per contactum E ducto parallelo FS ex axe QM deſcripto, hic erit in ſuperficie conica, quę ęqualiter diſtat interuallo EE radij à centro E, & axe ſuo MQ. & in ſuperficie ſphęrę, quę, & eodem radio EE diſtat ab axe ſuo ZM. Quare erit parallelus EF in contactu conicę ſuperficiei etiam intimioris ſphęrę KFHH. Non poteſt autem tangere alibi, quia Conica ſuperficies ex def. 1. Tract. 24. recta VL circumgyrata contexitur, quę tangit ſphæram ſolùm in puncto F ex effectione.

Cum itaque ſuperficies plana circumſcripta Conicis ſegmentis ex 11. Tract. 24. non tangat conum, niſi penes lineam XT, quæ tendit à Q vertice, & tangit ſphæram intimam tantùm ex effectione in puncto F ſequitur, quod planum EA contingat ſphæram intimiorem KFHS tantùm in puncto E, quod de alijs planis æqualibus fatendum eſt. Alia autem plane contingentia minora fruſta conica, quę non contingunt ſphæram intimam, neque ipſe contingent, & tantò minùs, ſi ea plana, neque contingant ipſa fruſta conica, quę ſphæram intimam, aut tantùm contingunt, aut nullatenùs contingunt.

COROLLARIVM.

COlligitur, quod eodem artificio poterunt ſphæræ circumſcribi tum conorum ſegmenta, tum corpus quodlibet planis ſuperficiebus conſtans, quod non tangat alterius ſphæræ circumambientis ſuperficiem. Nam ſphæra PHE eſt talibus ſuperficiebus circumdata, vnde ſi inter ſphæram eam circumdantem duæ ſphæræ ZBPC, & RLXO intercipi intelligantur, & eadem operatio præſtetur corpus circumſcriptum non tanget amplexentis ſphæræ maioris, quam ZDC ſuperficiem cum illam tantùm tangat. Corpus verò conicum circumſcribatur eodem modo, ac in propoſ. & ſi debeant ſegmenta conica adeo multiplicari, vt relinquant quantitatem qualibet date minorem id efficietur, vt ſequenti propoſ.

EXPEN-

EXPENSIO IX.

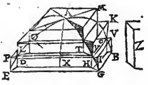
De inſcriptione, & circumſcriptione cylindrorum, vel quorumcumque aliorum corporum; donec relinquant quantitatem omni data minorem.

CYlindrorum, vel Parallelepidorum corporibus globoſis ſolidis circumſcriptio, vel inſcriptio neceſſaria eſt ad cubanda multa corpora talis rationis: quare hoc loco nacti ſumus opportunam occaſionem hanc doctrinam tractandi, in quo agitur de inſcriptione corporum regularium in ſphæra.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Cuicumque figuræ ſolidæ curuilineæ, vel mixtilineæ tot ſolida inſcribi poſſunt, vel circumſcribi, vt relinquant ſolidas partes omni aſſignata ſoliditate minores, ſi tamen concedatur illam ſoliditatem ad ad quamcumque baſim redigi poſſe.

SIt figura ſolida curuilinea ABGE. Dico illi tot parallelepipeda poſſe circumſcribi, vel inſcribi donec relinquant quantitatem omni data minorem. Sit data quantitas Z, quæ ſit eiuſdem baſis, ac BE, vel ad eam redigi poſſit, & diuidatur altitudo XA dati corporis BGAE in tot partes donec parallelepipedũ maius omnibus SV ſit minus quãtitate Z. Quod facile fiet ſi altitudo AX ſubdiuidatur in tot partes donec remaneat altitudo ſolidi SV, minor quàm altitudo quantitatis datæ Z, quæ conceditur eiuſdem baſis, vel ad eandem baſim redacta ſit, ac baſis EB. Quadere erit minus parallepipedum SV, quam quantitas data Z. Sed omnia ſolida parallepipedia cõſtantia, quę intus vacua ſunt, & ambiuntur circumſcriptis ſuperficiebus CP, & CV, & ex inſcriptis HD, & HO, & circumdant partim intra parti extra corpus ſolidum datum ABGE, vt EHV, cuius baſis EH, & HB, & LTK, & QTH ex conſtructione æquant SV ſolidum primum, ſiquidem vbi deſinit primum ſolidum maioris ambitus incipit ſecundi ambitus minor, & vnum intra aliud adaptari poteſt, Ergo omnia ſolida talia ſunt minora quantitate Z. Quamobrem tantò erunt minora quantitate Z ſolida, quæ tantùm circumambiunt, vel intus inſcripta ſunt, & corpori dato globoſo BACG extra remanent, vt extrinſeca GIV EPG, vel GHO EHD intrinſeca: quæ proximè dimidio minora, quam tota GHIYEDLP. Quod intelligitur etiam ſi corpora ſolida circumſcripta annulis cylindricis conſtent, aut alterius cuiuſcumque figurę, vt ex te videre poteris.



TRAC-

TRACTATVS XXXIV.

DE SOLIDIS PARS PRIMA.

De ſolidis planis ſuperficiebus contentis.

Viſis corporum ſuperficiebus, & eorum inſcriptibilitate, modo ad ipſam corporum ſoliditatem eſt accedendum. Ordinique doctrinæ conſentaneum fuit, vt priùs lineas, ſuperficies, ſingulaſque exteriores corporum figuras, quæ oculis ſtatim obijciuntur, animaduerſioni quoque primæ occurrerent, quàm corpora, quæ iſtis inuolucris contecta ſolæ menti peruios ſinus admittunt, de quibus agit Euclid. 11. & 12. cuius præcipuas; & neceſſarias propoſitiones hoc Tractatu exponemus.

EXPENSIO I.

De Parallelepipedis.

PRima inter figuras ſolidas, & magis obuia eſt parallelepipedum; quod obtinet oppoſitos angulos æquales, & plane oppoſita æqualia, eſtque veluti fruſtum trabis parallelis ſectionibus abſciſum. Cùm ergo à notioribus omnis cognitio incipiat, per huius ſolidi cognitionem ad aliorum corporum ſoliditates hauriendas acceſſus erit.

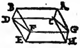
THEOR. I. PROPOS. I.

Si ſolidum parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana parallelogramma ſunt æqualia, & ſimilia.

SIt planum ſolidum contentum parallelis ſex planis, nempe quatuor planis EG, FD, BC, & AH, & ſuperficie ſuperiori AF inferiorique CE. Dico primo *omnia plana; quibus ambitur eſſe parallela.*

Probatur. Terminantur etenim ex theſi planis parallelis ſuperficiebus, ideoque ſectiones ipſæ erunt parallelæ ex propoſ.14. Tract.32. Sic planum GE terminatur parallelis planis AF, & CE, necnon, & parallelis planis AH, & EE, cum ergo ſectiones iſtæ terminent ſuperficies ſolidum ambientes ipſæ ex def.35. Tr.3. erunt parallelográma.

Dico 2. Quòd erunt æqualia parallelogramma aduerſa. Quod patet: Nam cum aduerſa plana vt GE, & AD parallelis ſecentur, & terminentur, & parallelogramma ſint, oportet margines interceptos HG, & CE, ſicut, & FE, BD eſſe æquales ex prop. 34. Elem.1. necnon eadem ratione GF, & AB ſicut, & EX HA, & GD: ſunt autem quoque eiuſdem altitudinis: quod ſint inter parallelas æquales HG, & CA, ergo ex propoſ.37.lib.1 erunt parallelogramma æqualia.



Dico 3. Eſſe quoque ſimilia. Quia enim latus CH eſt æquale lateri ED, & HG lateri FA: Ergo vt CH ad HG, ſic DE ad FE proportionatum erit: Angulus autem H æquatur angulo E. Nam ductis GC, & FD diagonalibus diuident bifariam parallelogramma æqualia GC, & FD, ex 34. lib. 1 quare diagonales GC, & GD erunt æquales. Quapropter triangula CGH, & FED erunt æqualia, cum latera, & baſes, ideſt diagonales obtineāt æquales. Ideoq; angulus H æquabitur angulo E. Proptereaque ipſa plana aduerſa V. g. AH, & EA erunt ſimilia, cum conſequantur latera circa æquales angulos proportionalia.

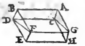
THEOR. II. PROPOS. II.

Si parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum; biſariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIt ſolidum AE, cuius duo aduerſa plana, vt GC, & FD plano GD ſecundùm lineas diagonales GC, &

& FD ſecta ſint. Dico biſarlam illud parallelepipedum ſectum eſſe.

Probatur. Duo priſmata GFAD ſuperius, & GECD inferius habeot plana ſimilia magnitudine, & multitudioe equalia. Ergo ex def. 3. Tr.33. erunt inuicem æqualia.



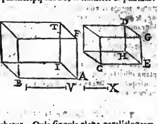
Patet autem Priſmata obtinere plana ſimilia. Quia triagula GCA huius, & HCG alterius ſunt æqualia, & ſimilia, & alia duo triangula FBD, & FED oppoſita ſimiliter æqualia, ſimiliaque ſoor ex pr. 34. primi, vtpote, quæ in doo diuidant parallelogramma ſimilia, & æqualia, vt ſupra oſtenſum eſt. Reliqua verò plana aduerſa iam oſtenſa ſunt æqualia, & ſimilia GF plano AD, & AF plano CE; planum verò FDCG eſt cómuoe: Ergo priſmata erunt equalia, & ſimilia CFAD, & GECD; cum conſtent plaois æqualibus, & ſimilibus.

PROBL. I. PROPOS. III.

A data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedum deſcribere.

DEbeat à data linea AB deſcribi parallelepipedum dato parallelepipedo CO ſimile, ſimiliterque poſitum.

Fiat ad punctum A angulus ſolidus ex 5. Tr. 33. æquale ſolido aogulo E, ita vt tres plani aoguli apud A ſint æquales tribus angulis planis apud E; deinde ex 12. lib. 6. Elem. fiat, vt CE ad EG ita ſit in proportione ad aliam quãdam V latus AB; fiatq; lineæ V æquale latus FA: deinde fiat, vt EG ad EH; ita proportionatum ſit latus AF ad aliam quandã X cui fiat æquale AI, habebitque ex *æquo* AI eam proportionem cum AB, quam EH cum EC. Reliqua verò latera aduerſa iſtis fiant æqualia, & parallela & compleatur parallelepipedum; Quod dico eſſe ſimile parallelepipedo DC, & ſimiliter ei poſitum.

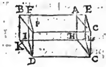


Probatur. Quia ſingula plana parallelogramma ſingulis ſunt ſimilia ob æqualitatem angulorum, & laterum proportionem eandem, ſic angulus GEC eſt æquale angulo FAB, & latus EC eiuſdem proportionis eſt lateri EG, ac latus AB lateri FA, quare ex def. 1. lib. 6. erunt hæc duo parallelogramma GC, & FB ſimilia, & idem argumentum eſt de parallelogrammo HC, & IB ob angulos æquales ex conſtructione HEC, & IAB, & latera proportionalia; quia enim EC eſt ad EG, vt AB refertur ad AF, & vt EG ad EH ita proportionatur AF ad AI argumentando ex *æquo* ita quoque EC proportionem dicit ad EH, vt AB ad AI. Quare etiam hoc planum HC erit ſimile plano IB, & ſic dicas de plano GH, quod eadem ratione aſſimilatur plano FI. Propter hoc & reliqua plana aduerſa iſtis æqualia, & ſimilia ex propoſ. 6. huius in parallelepipedo conſtructo erunt æqualia, & ſimilia parallelepipedo dato CD.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Solida parallelepipeda ſuper eadem baſi conſtituta, & eadem altitudine prædita, quorum inſiſtentes lineæ in eaſdem rectas lineas terminent, ſunt inter ſe æqualia.

EXibeantur duo parallelepipeda ABCD, & EFCD, quorũ baſis ſit eadẽ CD, & inſiſteotes in baſi lineæ GE, & OA, FB, & PF, &c. in eodem rectã EB terminẽt: Dico hæc parallelepipeda eſſe æqualia.



Probatur. Nam ex 35. lib. 1. Element. parallelogramma GAFB, & EGPF ſunt æqualia, erunt ablato communi trapezio AGPF æqualia triangula GEA & PFB, quæ & ſunt æqualia triangulis aduerſis DIK, & LCH, vtpote reſidua æqualia trapezij HICD ab equalibus parallelogrammis aduerſis; ſic KF æquale HE eſt ablato rectangulo IA cõmuni. Quare cũ & planum DPBK ſit æquale plano CG AH, & planum GLCS plano DPIF priſmata FK, & GH concluſa dictis planis erunt æqualia ex defin. addatur ergo vtriſq; commune ſolidum trapezijs clauſum AFCD, eritq; parallelepipedum ANCS, æquale parallelepipedo CDEF.

COROLLARIVM.

HInc emergit modus, quo facilè aliquod parallelepipedum æquale io baſi, & in altitudine, ſed diſſimilis poſitioois ob inæquales angulos alterius angoli ad eaodem poſitionem reducas nimirum faciendo eoſdem angulos ſuper eãdem baſim intra eãdem altitudioem, ſic parallelepipedum HKGD reducetur ad parallelepipedum EIGD; ſi pro angulo AGP fiat angulus EGP, & pro angulo AGC fiat EGC angulus.
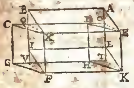
Quod ſi detur parallelepipedum equalis quidem ſed diſſimilis baſis ob angulos parallelepipedo inæquales; ſed omnino eiuſdem altitudinis; eodem modo ad ſimilem baſim reducetur. Nempe intra eaſdem parallelas EB, & GP mutando angulos. Sic parallelepipedi HKCD baſis ſtatuatur HCDK æqualis baſi LCDI; ſed diſſimilium angulorum, ad hoc, vt fiat ſimilis baſi LCDI, opportebit trahere latera HC, & KD; ita quod cum CD faciant eoſdem ãgulos hocq; modo totum parallelepipedum æquale ſim alteri quantitate, fiet etiam illi æquale in angulis.

THEOR.

PROB. IV. PROPOS. V.

Solida parallelepipeda ſuper eandem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia.

SInt duo parallelepipeda AKBF, & DGEF, quorum baſi eidem plano EF inſiſtant latera SA, & ED, & cæt. licet in diuerſas parallelas AB, & DC terminent. Dico adhuc AKBF, & DGEF hæc eſſe inuicem æqualia.

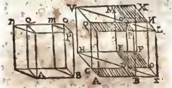


Probatur. Quia productis parallelis, ita vt ſe interſecent in T, V, O, Q punctis, & ductis lateribus punctatis fiet aliud parallelepipedum OVTF per inſiſtentes rectas punctatas, quod erit æquale parallelepipedo AKBF ex præced. quod hæc duo ſuper eandem baſim EF inſiſtant, & eorum latera vt FV, & EI, & cæt in eaſdem parallelas terminent, nempe in VB, ſic KT, & KL terminat in TA. Rurſus hoc parallelepipedum modo factum, erit æquale exhibito alteri DGEF, quòd quoque eius latera punctata, vt FV, & ET eiſdem parallelis VG inſiſtant, vt faciunt KH, & FO, & ſic de alijs. Ergo duo parallelepipeda exhibita parallelepipedo effecto eidem OVTF erunt æqualia, & conſequenter inuicem. Quod verò punctata latera faciant parallelepipedum, patet, quia in parallelarum communem interſectionem terminent, vt ſatis ex ſe quilibet comprehendere poteſt.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & æqualis altitudinis æqualia ſunt inuicem.

BAſes æquales, quæ exibentur, vel ſunt diuerſę quidem figuræ, & inęqualium angulorum, vel ſunt omninò eiuſdem, vel ſunt diuerſæ figuræ, ſed æqualium angulorum. Si ſunt omninò ſimilis, & æqualis figuræ, id iam patet ex propoſ. 4. & 5. idem enim eſt, quod ſit æqualis omnino, & ſimilis, & quod eadem. Quæſtio ergo eſt differentis figurę, quę ſi eſt, & inęqualium angulorum, vt ſunt GDEF, & AB mn reducetur ad eoſdē angulos ex Cor pr.4. vt OP, & ſuper eam fiet parallelepipedum eiuſdem altitudinis, vt eſt ABOQ parallelepipedum, quod erit æquale exhibito iuxta ibi tradita. Collocentur ergo baſes CE, & EO æquales, & iam ſimilium angulorum tali modo, vt in angulo D ſe tangant, & latera CD, & DG in vnam rectam conueniant, & fiant rectæ CG. Nam, & in eadem rectam conuenient latera BD, & DE ob angulos æquales CDB, & EDG ex 15. lib. 1. compleaturque parallelogrammum ABIF, quòd poterit fieri ex prop. 24 lib. 6. cum baſes nigræ ſint, & æquales, & ſimiles quoque ob æquales angulos: Deinde ſuper eas compleatur totum parallelepipedum, vt vides, ducaturque planum VHIL per diagonios, & ex prop. 2. h. erit diuiſum totum parallelepipedum in duo priſmata æqualia VAL, & VBL: ſic etiam vt ex pr. eadem colligi poteſt priſmata VCO, & VEO ſunt æqualia, ob æqualia triāgula VHO, VQO, quibos ſunt, planaque HEVM æquale plano QOCD, & QVCH æquale plano ODEM; planumque VHCO commune vtriſque priſmatibus.



Idem dicas de priſmate OIL, & OGL, quæ item ſunt æqualia: Si ergo à priſmatibus magnis VAL, & VEL æqualibus auferas primo duo priſmata æqualia minora VCO, & VEO illud ab illo alterum ab altero, & rurſus duo alia priſmata reliqua, quę item ſunt ęqualia OIL, & OGL hoc ab iſto, aliud ab alio, reliqua ablatis ęqualibus remanebunt ęqualia, vt erant priùs, & ſic parallelepipedum OQAB remanet ęquale parallelepipedo DENX ſuper ęquales baſes, ſed diuerſę figurę, & ſub eadem altitudine conſtituta, licet ęqualium angulorum. Sed parallelepipedum OQAB eſt ęquale parallelepipedo ABmn, cuius baſis eſt inęqualium angulorum baſi DEFG iuxta Coroll. prop. 9. Ergo parallelepipeda habentia baſes ęquales, licet inęqualium angulorum, & differentis figurę, & altitudines ęquales, ſunt quoque inuicem ęqualia.

THEOR. VI. PROPOS. VII.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur aduerſis planis parallelo, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidū.

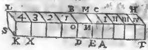
VSque modo egimus primo de proprietatibus parallelepipedorum, exinde de illorum erectione, & conſtructione, & tandem de eorum ęqualitate, & inequalitate, modo de eorum proportione agimus.

Sit itaque ſolidum parallelepipedum ACBD, quod plano ME ſecetur parallelo aduerſis planis CA, & DB. Dico, quod ſicut baſis NC ad baſim MO, ita ſolidum ſuper primam baſim conſtitutum AECM, ad ſolidum ſuper alteram baſim erectum EBMD.

Probatur. Quia ita eſt prima quantitas ad ſecundam, vt tertia ad quartam in proportione ex 9. def. tr. 9. elem. cum primę, & tertię ęquè multiplicia à ſecondę, & quartę ęquè multiplicibus in qualicumque multiplicatione, vel vna deficiunt, vel vna ęqualia ſunt, vel vna excedunt.

Sit ergo prima magnitudo baſis NC ſecunda altera baſis MO tertia parallelepipedum AECM quarta parallelepipedum EBMD; multiplicemuſq;

primam magnitudinem, nempe baſim CN in baſes I, II, III, IV ęquales, & faciamus ſuper eas eiuſdem altitudinis parallelepipeda, quę ęqualia erunt parallelepipedo AECM ex propoſ. 4. & 5. h. Sic ſecundam magnitudinem, nempe baſim MO multiplicemus, faciamuſque ei baſes ęquales 1. 2. 3.



& ſuper eas parallelepipeda eiuſdem altitudinis, nimirum æqualia quartæ magnitudini, & parallelepipedo EBMD. Cum ergo ſint æquales baſes I. II. III. IV. ſingulæ baſi CN, & 1. 2. 3. ſingulæ baſi NMBO, ſi ita multiplicentur, vt omnes baſes I. II. III. IV. cum CN, ideſt NH euadant æquales baſibus 1. 2. 3. cum MO baſi acceptis, ideſt 3N parallelogrammum. Etiam parallelepipeda I. II. III. IV. ea tertia magnitudo æquè, ac prima magnitudo baſium ſuarum I. II. III. IV. multiplicata, ideſt parallelepipedum HE æquatur parallelepipedis 1. 2. 3. MD quarta magnitudo æquè, ac ſecunda baſium 1. 2. 3. multiplicata, ideſt parallelepipedo XM ex prop. 4. & 5. h. cum parallelepipedum HK ſit æqualis baſis HN baſi N3, & æqualis altitudinis parallelepipedi MX.

Ecce quomodò ſi æqquales ſint magnitudines æqualia quoque eſt multiplex primæ, & tertiæ, ac ſecundæ, & quartę. Verum ſi minor ſit baſis primæ multiplex NH, quam baſis NL ſecundæ magnitudinis multiplex, talis quoque erit tertia reſpectu quartę, nempe parallelepipedorum. Sic multiplicata prima baſis producit baſim I. II. III. IV. minorem, quam baſis 1. 2. 3. 4. & parallelepipedum quoque EH nempe tertia quantitas AECM, vt prima baſis multiplicata, producet parallelepipedum minus, quàm parallelepipedum EL ex multiplicatione quartę magnitudinis parallelepipedi EBMD conſurgens.

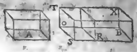
Et ecce quomodo multiplex primæ, nempe baſes ſimul ſumptæ NH vna cum parallelepipedis ſimul ſumptis EH multiplici tertiæ ſimul deficiunt, baſes nimirum à baſibus multiplicibus ſecundæ NL, & parallelepipeda à parallelepipedis bus MK multiplicibus quartæ magnitudinis. Et idem dicas de augmento. Quapropter eandem dicent proportionem baſis CN baſi MO, ſicut parallelepipedum AECM conſtitutum ſuper primam baſim CN parallelepipedo EBMD conſtituto ſuper ſecundam baſim MO.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

Parallelepipeda ſub eadem altitudine conſtituta ſunt inter ſe, vt baſes.

SIt ſolidum cuius baſis A, & ſolidum, cuius baſis RB, quæ ſolida ſint eiuſdem altitudinis. Dico, *eadem proportione referri baſis* A *ad baſim* BR, *vt ſolidum ſuper* A *ad ſolidum ſuper* BR.

Quod vt probetur ſuper rectam RS ex 45. lib. 1. baſis RO ſtatuatur, ita angulata, vt baſis BR, & æqualis baſi A, erigaturque ſuper eam parallelepipedum RT eiuſdem altitudinis, ac parallelepipedum ſuper BR, vel quæ eſt eadem ſuper A, & iam ex præcedenti 6. propoſ. patet, quod parallelepipedum ſuper baſim RO eſt æquale parallelepipedo ſuper baſim A. Vnde



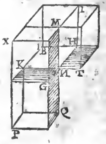
Oſtenditur propoſitio. Ita ſe habet parallelepipedum RT ad parallelepipedum RX ipſi annexum, & faciens vnum parallelepipedum integrum SX cum ipſo, ac baſis RO ipſius RT ad baſim BR ex præcedenti propoſ. Sed parallelepipedum RT eſt æquale parallelepipedo A, ſicut, & baſis RO baſi ipſius A. Ergo ita eſt parallelepipedum A ad parallelepipedum XR, vt baſis A ipſius ad baſim BR parallelepipedi RX.

THEOR VIII. PROP. IX.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SInt ſimilia parallelepipeda TI, PN ex def. 2. Tr. 22. planis ſimilibus concluſa, ideoque etiam baſes KG huius, & TH alterius ſimiles ſint, & habeant homologa latera, ſitque NT ad NH, vt NK ad NG. Dico *ea habere proportionem laterum* NT *ad* NK, *vel* NH *ad* NG *triplicatam*, quam explicauimus expenſ. 5. tract. 9. part. 1.

Parallelepipeda ſe tangant in angulo N, ita vt in vnam rectam conueniant latera MN, & NQ, & latera HN, & NG, quod ob ſimilitudinem baſium ex contextu prop. 10. lib. 6. eueniet, ſiquidem anguli ad verticem N erunt æquales. Deinde compleatur baſis BN, & ſuper baſim ſit parallelepipedum eiuſdem altitudinis XI, ac TI, & idem fiat ſuper baſim nigram KG. Eruntque quatuor parallelepipeda, nempe iſtud erectum ſuper baſim TH aliud ſuper baſim NB, tertium, & quartum habentia baſim GK, quorum quodlibet ſuo collaterali erit, vt baſis ad baſim, cum ſint eiuſdem altitudinis, & baſim habeant continuatam, & ideo, vt latus ad latus baſium æquè altarum.



Prob. Latus NT ob ſimilitudinem baſium dicit proportionem ad NH, quam NK ad NG, ideoque

permutando

permutando T N erit ad NK, vt N H ad NG. At ex 1. l. 6. quam proportionem dicit latus T N ad latus NK illam dicit parallelogrammum, ſeu baſis TH ad aliã NB, & quam latus N ad NG latus, eam dicit NB baſis ad GX nigram baſim. Verùm ex 7. h. quam dicit HT baſis ad baſim NB eam dicit parallelepipedum I T ſuper HT ad parallelepipedũ KI ſuper NB, & quam dicit baſis NB ad baſim nigram GX, eam dicit parallelepipedum KI ſuper NB ad parallelepipedum NX ſuper XG, & quam dicit parallelepipedum KI ſuper BN ad aliud NX ſuper OX, eam dicit HM altera baſis eiuſdem ad nigram GM ex 7. huius, & quam dicit HM baſis ad GM nigram, eam ipſam dicit HN ad NG, & conſequenter latus MN ad NQ latus, ex hypotheſi. Quarè & eamdem dicit baſis nigra MG ad baſim nigram QG, & conſequenter parallelepipedum NX ſuper GM ad parallelepipedum NP ſuper GQ.

Igitur parallelepipedum NI ſuper TH dicit eam proportionem ad parallelepipedum NP ſuper baſim OX, quam latus N T ad NK latus; ſed non immediatam, ſed triplicatã, nempe ter repetitã. Nam parallelepipedum IT ſuper HT dicit ipſam proportionem ad aliud KI ſuper NB, & ecce prima repetitio, & hoc ad aliud NX ſuper GX, cuius altera baſis eſt GM, & ecce ſecunda, & hoc tandem ſuper MG ad parallelepipedũ NP ſuper baſim QG, cuius altera eſt GA, & ecce tertia repetitio. Ergo parallelepipeda habent laterum TN ad NK triplicatam rationem, ſer ter continuè repetitã, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

EX hoc fit manifeſtum, quod ſi fuerint quatuor rectę lineę proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe ſolidum ſuper primam ad ſolidum ſuper ſecondam ſimile, ſimiliterq; poſitum; Quia prima linea ad quartam habet rationem triplicatam ea def. 10. lib. 5. vt ſolidum habet ad ſolidum, & hinc etiam eſt, quod obtineant duplicatam rationem baſium, cum baſes ſint, vt prima ad tertiam.

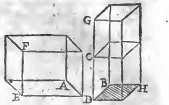
THEOR. IX. PROP. X.

Æqualium parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur illa ſunt æqualia.

SOlida, quę exhibentur æqualia, ſi non ſunt æquiangula, reducantur prius iuxta Coroll. propoſ. 9. ad æquales angulos, & tunc exhibeantur.

Sint itaque duo parallelepipeda ęqualia, nempe vnum ſuper baſim AE, alterum ſuper baſim nigram DH æquiãgula, quę ſint inęqualis altitudinis. Dematur altiori DG altitudo CD ęqualis minori altitudini EF, & fiat parallelepipedum depreſſius ſupra baſim nigram DH nunc

Progreſſ. 1. Probatur aſſumptum. Parallelepipedum ſuper baſim AE eſt ęquale altiori parallelepipedo GH ſuper baſim DH. Ergo ex 7. lib. 5. eodem modo in proportione ſe gerunt eidem parallelepipedo depreſſiori CH. Sed parallelepipedũ GH erectius dicit eam proportionẽ depreſſiorẽ CH, quam baſis GB baſi CB ex 8. huius prop. & baſis GB alteri baſi CB eam proportionem, quam altitudo DG altitudini DC ex 1. lib. 6. Ergo ita erit quoque parallelepipedum erectius GH parallelepipedo HC; velut altitudo GD altitudini DC.



Progr. 2. ſed vt ſolidum ad ſolidum, ita eſt ex propoſ. 8. huius baſis ad baſim, ſi ſolida ſub eadem altitudine exiſtant. Ergo ita erit baſis AE ad baſim DH, vt parallelepipedum AF ſuper AE ad parallelepipedum ſuper DH eiuſdem altitudinis, quæ eſt CB. Sed vt dixi in principio probationis parallelepipedi AF ſuper AE ad parallelepipedum depreſſius CH ſuper DH ratio eſt illa ipſa, quàm parallelepipedi erectioris GH ſuper DH ad idem depreſſius ſolidum CH. Ergo eſt illa ipſa, quam habet altitudo DG altitudini DC, vel æquali ex conſtructione altitudini FE, vt probaui in primo progreſſu; Ideoque reciprocè AE baſis erit ad DH baſim, vt GD huius altitudo ad EF altitudinem alterius.

Progr. 1. ſecunda pars. Nam dato parallelepipedo ſuper baſim AE, quæ ſit ad baſim alterius nigram DH, vt altitudo GD huius ad altitudinem FE alterius, & altitudines ſint inęquales, abſcindatur altitudo GD in C, & fiat ęqualis DC altitudini EF.

Prob. pr. ita eſt altitudo GD ad DC, vel ęquale EF, vt baſis EA ad baſim DH ex Theſi. Vt verò proportione refertur baſis EA ad baſim DH, ita ſolidum ſuper AE ad ſolidum HC ſuper baſim DH cùm ęqualia ſint effecta altitudinis.

Progr. 2. Ex alia autem parte, vt eſt altitudo GD ad altitudinem DC, ita eſt baſis GB ad baſim CB ex 1. lib 6. Elem. & vt baſis GB ad baſim CB, ita ſolidum GH ſuper GB baſim ad ſolidum ſuper CB alteram baſim ex 7. huius, quia ſunt eiuſdem altitudinis; Ideoque iam eidem parallelepipedo CH ſuper DH baſim duo parallelepipeda eandem dicunt proportionem AE baſis ad DH baſim, parallelepipedum AF ſuper baſim AE ex 1. progr. & parallelepipedum GH ſuper DH ex 2. progreſſ. Ideoque ex 7. lib. 5. inter ſe erunt ęqualia.

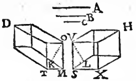
THEOR. X. PROPOS. XI.

Si tres rectæ proportionales fuerint; quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum æquale eſt deſcripto à media linea parallelepipedo, quòd æquilaterum quidem ſit in ſe, æquiangulum verò prædicto.

SInt datę tres rectę A, B, C, & ex iſtis componantur parallelepipedum ND, in quo media B ęqualis ſit NO. Ex qua huic ęquiangulum aliud parallelepipedum conſtituatur SH, cuius omnia

latera

letera ſint ęqualia medię B. Dico *quod hoc Parallelepipedum eſt æquale alteri* ND *ex tribus datis prius conſtructo.*



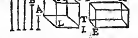
Probatur ex eo, quòd habeant baſim VX baſi OD ęqualem ex 14 lib. 6. quòd VX baſis continetur ſub media B, at OD ſub extremis A, & C ex effectione. Et etiam ex eo quod habeāt altitudinē, quę menſuratur punctata VL ad angulos rectos ab V cadente in L altitudini alterius perpendiculari DK punctata in K angulos rectos efficiente dimetitæ æqualem. Quod enim perpendiculares punctatæ V, & O ſint æquales patet ex 26. lib. 1. quoniam angulus N eſt æqualis ex effectione angulo S, & K, & L recti, baſis verò ex hypotheſi VS baſi NO eſt æqualis, quare triangula XON, VSL ęqualia, & ideo baſes XO, & VL.

Cum ergo hæc parallelepipeda habeant baſes, & altitudines æquales ex 11. huius erunt æqualia.

THEOR. XI. PROPOS. XII.

Si ſint quatuor lineæ continuè proportionales parallelepipedum ſub quadrato vnius extremæ, & altitudine alterius eſt æquale cubo mediæ proportionalis, quæ extremæ baſim ſubſternenti propinquior eſt.

SInt quatuor continuè proportionales ex prop. 2. Tr. 15. A, B, C, D. Dico parallelepipedum EH ſcilicet ex EF, quadrato ex A, & altitudine D eſſe æquale cubo AO ex B. Vel ſi maius parallelepipedum ex quadrato D, & altitudine A lineę æquale eſſe Cubo ex quadrato lineæ C.



Probatur. Quoniam quadratum EF, ex A eſt ad quadratum OL ex B, vt A ad C ex 21. lib. 6. ob ſimilitudinem eorum, idest ex 11. tract. 16. vt B ad D, ſic IO ęqualis ipſi B ad HF, erūt iſtis duobus ſolidis baſes altitudibus reciprocè proportionales. Vnde ex ipſis A quadrato, & D altitudine conſtitutum parallelepipedum erit æquale AO cubo erecto ex B ex 10. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XIII.

Si ſint quinque lineæ continuè proportionales parallelepipedum erectum ex quadrato vnius extremæ tamquam baſi, & altitudine alterius æquatur. Parallelepipedo erecto ex quadrato ſecundæ, & altitudine tertiæ.

SInt quinq; continuè proportionales A, B, C, D, X, & ex A quadrato eleuetur parallelepipedū ad altitudinem X, & ex B quadrato, & altitudine C aliud conſtituatur. Dico ea eſſe æqualia.

Pr. Baſis A eſt ad baſim B, vtpote, quod ſint quadrata, & ideo ſimilia plana, vt A ad C tertiam proportionalem, vt autem A ad C ſic eſt C altitudo huius, cuius baſis B ad X altitudinem eius, cuius baſis A. ergo. Baſes, & altitudines reciprocantur. Ergo ex prop. 10. h. erunt parallelepipeda æqualia.

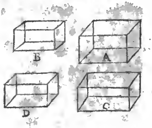
COROLLARIVM.

HInc autem etiam eſt, quod, & ſi parallelepipeda non obtineant baſes ex A, & B quadratis, ſed ex quocumque alio rectangulo, dummodo ſint rectangula ſimilia, & ſimiliter poſita idem ſequetur, quia etiam baſis A ad baſim B ex prop. 21. lib. 6. erit vt A ad C, vt autem A ad C, ſic eſt C altitudo, cuius baſis B ad altitudinem, eius cuius baſis A, vnde cum reciprocæ ſint baſes, & altitudines erunt æqualia parallelepipeda.

THEOR. XIII. PROPOS. XIV.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis ſimiliter, & ſimilia deſcribuntur proportionalia erunt, & ſi data Parallelepipeda proportionalia ſint ſimilia, & ſimiliter deſcripta, & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, conſtituanturque ſuper A, & B duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta: Item ſuper C, & D duo alia ſimilia inuicem, & ſimiliter poſita licet à primis A, & B ſimilitudine diſcrepent; Dico *ita eſſe ſolidum* A *ad ſolidum* B, *vt*



ſoli-

ſolidum C *ad ſolidum* D.

Probatur. Quia proportio ipſorum ſolidorum ex 54. huius eſt in triplicata ratione ſuorum laterum, cum enim latus A ad latus B, ſit, vt latus C ad latus D etiam triplicata lateris A ad triplicatam lateris B, erit, vt triplicata lateris C ad triplicatam lateris D, quæ proportio triplicata eſt ſolidorum, quæ ſuper latera dicentia proportionem ſimplicem quodlibet erectum eſt.

Probatur ſecunda pars. Ponitur ſolidum A ex hypotheſi dicere eam proportionem ad ſolidum B. quam C ſolidum ad D ſolidum; ſed ſolida ſuorum laterum habent triplicatam proportionem, ideſt ter repetitam, ergo latus ſolidi A ad latus ſolidi B dicet proportionem ſimplicem eandem, quam dicit latus C ad latus D, quod erat oſtendendum.

GOROLLARIVM.

A Modo, quo præcedens propoſit. oſtenſa eſt, ne dum conuenit parallelepipedis, ſed omni generi ſolidorum ſimilium. Nam & ipſa dicunt triplicatã diametrorum aut laterum proportionem nam V. g. Priſma eſt dimidium parallelepipedi: quare, & ipſa erunt in triplicata ratione ſuorum laterum, vtpote dimidia priſmatum, vt infra, ſic, & pyramides, vtpote quod quælibet ſit tertia pars priſmatis. Sic omne corpus ex quinque regularibus, ſimilibus, cum æqualibus pyramidibus conſtet, quæ ſunt in triplicata ratione ſuorum laterum, vnde, & omnes pyramides vnius corporis ſolidi ad omnes alterius erunt in triplicata ratione lateris vnius pyramidis ad latus alterius.

EXPENSIO II.

De Priſmatibus.

BReuis de Priſmatibus Expenſio erit, cum ea ferè omnia, quæ parallelepipedis conueniunt etiam priſmatibus applicari, & de ipſis verificari poſſint, vtpote quod ſint ipſorum dimidium.

DEFINITIO I.

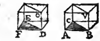
P*Riſma eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum oppoſita ſunt ſimilia, & æqualia parallelogramma, alia verò oppoſita æqualia, & ſimilia triangula, ſeu cuiuſcunque figuræ.*

THEOR. I. PROPOS. XV.

Priſmata triangulares habentes baſes, & eandem altitudinem inter ſe ſunt vt baſes.

SInt duo priſmata VCB, & FEO triangulares ſuper baſes ACB, & DEF, & eiuſdem altitudinis. Dico *eſſe inuicem, vt baſes.*

Probatur. Nam talia ſunt parallelepipeda, quorum medietates ſunt; ſed priſmata ſunt dimidium parallelepipedorum, ſicut, & baſes triangulares ſunt dimidię baſium parallelogrammarum, ſed vt totum ad totum, ita eſt dimidium ad dimidium. Ergo dimidiarę eam dicent proportionem, quam parallelepipedum ad parallelepipedum. Sicut, & dimidium parallelepipedorum ad dimidium eorundem. Ergo eadem quoque erit proportio dimidiatę baſis ABC ad dimidiatam baſim EFO, ideſt triangularis, quam dimidiati parallelepipedi ACBV ad dimidium parallelepipedum EFDO, nempe priſmatis ad priſma.



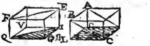
COROLLARIVM.

VNde priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes ſunt æqualia. Sicut & priſmata æqualia ſuper æquales baſes eiuſdem ſunt altitudinis, tandemque Priſmata æqualia, & æqualis altitudinis, æquales quoque poſſident baſes. Quia, & parallelepipeda priſmatum eorum dupla, tales obtinent proprietatea.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Si fuerint duo priſmata æqualis altitudinis; ſed illud ſuper quadrangulam baſim aliud ſuper triangulam, & quadrangula ſit dupla triangularis baſis; æqualia erunt priſmata.

SIt priſma ASCO quadrangulam habens bam OC, & aliud EBFG triangulam habens baſim IGQ, quæ ſit medietas baſis CO. Dico eſſe æqualia ipſa priſmata ſi ſint æqualis altitudinis.



Ex priſmatibus, compleantur parallelepipeda, quę dico eſſe æqualia ex prop. 4. huius. Quia baſes erunt, vt oſtendam ęquales, & altitudo æqualis ea hypotheſi. Baſes autem erunt æquales, quia completo parallelepipedo baſis triangularis GIQ fiet qudrangula GV, & ſic duplicabitur. Vnde erit æqualis baſi CO, quę erit ex hypotheſi dupla triangularis, cum ergo parallelepipeda ſint dupla priſmatum ſuorum in quæ diuidantur, ipſa priſmata ASCO, & ESFV quoque erunt æqualia.

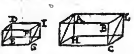
THEOR. III. PROPOS. XVII.

Similia priſmata, quæ triangulares habent baſes in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SInt ſimilia priſmata ABC, & DFB habentia triangulares baſes BCL, & GFI, D.CO, *quod hæc priſmata ſunt in triplicata ſuorum laterum ratione.*

Nam ſi compleantur Parallelepipeda AHBC, & DBFG ſunt in triplicata ſuorũ laterũ homolorum ratione; ſed priſmata ſunt eorum dimidia. Ergo ex prop.

ex prop. 8. lib. 5. Ergo, & ipſa ſunt in triplicata ſuorum laterum ratione.

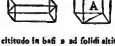


Cum autem priſma ACHB ad priſma DIEG conſequatur proportionem triplicatam lateris LA ad latus IF; etiam conſequetur triplicatam diagonalis LC ad diagonalem EG, quia ob ſimilitudinem triangulorum LCB, & IFG, ita eſt diagonalis LC ad diagonalem IG, vt latus LB ad latus IF.

THEOR. IV. PROP. XVIII.

Æqualium priſmatum reciprocantur bafes, & altitudines; & quorum priſmatum reciprocantur baſes, & altitudines illa ſunt æqualia.

PRobatur ex dictis. Quia baſes, & altitudines parallelepipedorum, quorum ſunt medietates reciprocantur, & ita eſt baſis A ad baſim B, vt hæc



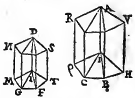
ſolidi altitudo in baſi B ad ſolidi altitudinem in baſi A, ſed ità eſt totum ad totũ, vt dimidium ad dimidium, ergo, & dimidia baſis A erit ad dimidiam baſim B qualea ſunt baſes priſmatum, ſicut altitudo ſolidi B ad altitudinem ſolidi ſuper A. Pars etiam 2. prop. patet eadem ratione.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Omnia, quæ de Priſmatibus triangulares baſes habentibus oſtenta ſunt illa, & de cæteris verificantur.

QVæ dicuntur de priſmatibus triangularibus, ea dicuntur etiam de priſmatibus multilateribus V. g. pentagonis octagonis, & cæt. Quia ea omnia diuidi poſſunt in triangularia priſmata, de quibus ſingulis eedem propoſitiones militabunt. Vnde, & tota iiſdem rationibus erunt obnoxia, vt patet.

Sic priſmata ABH, & DHT pentagona, ſingula reſolui poſſunt in tria priſmata triangularia, quorum vnum eſt BCAI, aut TFGD, quę in eadem proportione erunt; qua baſes, ita vt ſicut ſe habet baſis ad baſim, ſic ſe habet quodlibet priſma ſuper eã baſim, ad aliud ſuper alterã baſim. Nã V. g. baſis HIB eſt ad baſim BIC, vt priſma HIAV ad priſma BICA. Quare ex 18. l. 5. ſi componantur ſimul baſis cum baſi, & fiat baſis HIBC hæc erit ad CIB ſimplicem, vt compoſitum priſma ex duobus HVAC ad ſimplex BICA: & quia baſis ſimplex CIB eſt ad alteram ſimplicem ICQ, vt priſma ſimplex BICA ad aliud ſimplex CQAR; erit quoque ex *æquo* compoſita baſis HIC ad ſimplicem CIQ, vt priſma compoſitum VACIH compoſitæ baſi innixum, ad priſma AR ICQ ſimplici innixum. Quare *componendo* rurſus tota baſis ex tribus iam compoſita pentagona erit ad vnam baſim CIQ, vt priſma pentagonum ad priſma ſimplex QIRC.



Progr. 2. Et idem filoſofandum de altero priſmate pentagono TMD, quod nempe ſit pentagona baſis ad ſimplicem aliquam TIF, vt priſma pentagonum ad ſimplex TFID.

Progr. 3. Iam habemus baſim pentagonam ad ſimplicem triangularem comprehenſam QIC dicere eam proportionem, quam pentagonum priſma ad triangulare comprehenſum CQIR. Sed baſis QIC ad baſim alterius priſmatis triangularis TFI, ita priſma in ipſa innixum ICQR ad priſma in hac ſitum TIFS; Et vt hæc baſis ſimplex ad pentagonam; qua clauditur, ita hoc priſma ſimplex ad pentagonum TMD, cuius eſt pars, ex ſecundo progr. Quare ex *æquo* ita erit pentagona baſis HIQ ad pentagonam baſim TMI. Vt pentagonum priſma AHQ ad pentagonum priſma DTH.

COROLLARIVM.

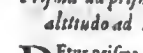
HInc eſt.. Quod ſi daretur priſma pentagonum, & aliud triangulare idem eſſet argumentum. Nam oſtenſum eſt Pentagonam baſim HIQ eſſe ad ſimplicem IQC, vt priſma pentagonũ AHQ ad ſimplex triangulare ICQR, & eſſe baſim ſimplicẽ QIC triangularẽ ad baſim item triangularem TIF, vt priſma in ea ſitum CIQR ad priſma in hac collocatum STLD, quare ex *æquo* ita erit pentagona baſis HQI ad triangularem TLF; vt priſma pentagonum AHQ in pentagona baſi poſitum ad hoc priſma SDTF in triangulari ſitum, quod ſi priſma triangulare ad aliud obtineat triplicatam proportionem etiam multilaterum ad aliud multilaterum, quorum ſunt partes obtinebunt triplicatam proportionem, vt eſt in fig.

EXPEN-

THEOR. VI. PROPOS. XX.

Priſma ad priſma æqualis baſis ſe habet, vt altitudo ad altitudinem.

DEtur priſma AOHT ſi baſis HO non eſt normalis, talis fiat ex Cor. pr 4. h. & alterius DCTB



baſis DBT, ſi non eſt ſimilis baſi AOH ſimilis fiat, & eum ex T baſi ſit æqualis ei erit DTB qualiũ laterum ipſi AOH. Eruntque priſmata eiuſdem altitudinis HO, vel BT. Quare inuicem referentur, vt baſes ex pr. 15. h. AB, & DC. Sed AB ad DC eſt vt latus HB ad BC ob æqualem altitudinem TB. Ergo priſma AOHT ad DBCT erit, vt HB altitudo ad BC altitudinem.

EXPENSIO III.

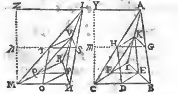
De Pyramidibus.

SOliditas pyramidum parùm captu difficilior, ſed quæ viam ſternit ad ſphæræ corporumque ſphæroicorum ſoliditatem inueniendam.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

Omnis pyramis triangularis diuiditur in duas pyramides triangulares æquales, & ſimiles inter ſe; & etiam toti ſimiles, & in duo priſmata æqualia per biſariationem omnium laterum. Priſmata ſunt æqualia quæque priſmatibus alterius pyramidis in æquali baſi, quoad aream, & vnum latus, quæ ſit eadem altitudine prædita.

SIt pyramis BACI. Dico diuidi in duas pyramides æquales inuicem: ſimiles, tum inter ſe, tum toti: quod ſi diuidendo ſingula latera in G, H, K, D biſariam, & baſis crura in E, & F, ſic enim ductis lateribus puncta connectentibus erunt ſactæ duæ pyramides OKHA, & KEIF, quæ erunt æquales, & ſimiles inter ſe.



Probatur. Quod ſint compoſitæ ex cruribus parallelis cruribus primæ pyramidis, & ideo quod eiuſdem angulis polleant ex propoſ. 30. lib. 1. & æqualibus cruribus; ſic crus HA eſt æquale cruri FK, quod ſit æquale cruri HC, eo quod ſit inter parallelas HK, & FC, quod crus HC, vtpote medietas eſt æquale cruri AH. Sic GH eſt æquale cruri BF: eò quòd ita ſit AH ad HU, vt AC ad CA, & quia AH eſt dimidium cruris AC, etiam OH erit dimidium cruris BC, & tale quoque erit AF eodem argumento, quod ſit IF ad B, vt IC ad CB, at IF eſt ea effectione medietas cruris IC ergo etiam BF cruris BC.

Et ſic argumentare de alijs & idem potes philoſophari de angulis; Sic angulus AKH eſt æqualis angulo KEI ex prop. 30. lib. 1. Elem. ob baſes parallelas GHK, & BIC, & ſic de alijs. Vnde pyramides erunt æquales, & ſimiles inuicem, & etiam toti ſimiles iiſdem argumentis.

Prob. etiam. Quod diuidatur in duo priſmata. Nam diuiſo latere BC in D, & ducta HD, & ED, duo priſmata erunt completa, nempe GHK BDE ſuper baſem triangularem BED, & priſma KEF HDC ſuper baſem quadrangularē FCDE, quæ CDFE eſt dupla baſis BED, & ideo cum ſit eiuſdem altitudinis ea propoſ. 19. h. priſma triangularis baſis erit æquale priſmati quadrangularis baſis.

Dico tandem hæc quoque priſmata BEDGKH, & EDFCKH eſſe æqualia priſmatibus NPOSVT, & POQMVT alterius pyramidis æqualis baſis, quoad aream NRM areæ BIC, & latus NM lateri BC, & eiuſdem altitudinis MZ, ac CY, ſimiliter diuiſæ.

Probatur. Nam triangula BIC & RMN in pyramidibus diſſimilibus, quarum apices A, & L ſunt neceſſariò inter parallelas, cum ex hypotheſi ſint æqualia ex pr. 39. l. 1. Cor. & habeant æqualem baſim. Quare ſi diuidantur latera RN, & RM, & NO biſariam in P, Q, & O linea PQ erit æqualis lineæ EF ea ratione præcedenti, eo quòd DC, & OM ſint æquales, vtpote dimidiæ æqualium BC, & MN, & EF, & BQ ſint eis æquales, vtpote inter parallelas ED, & FC, & inter OP, & MQ: Quare ex 12. Tract. 29. trapezium OPQM erit æquale trapezio EDFC: quare erunt eiuſdem altitudinis. Quapropter triangulares quoque baſes NPO, & BED erunt eiuſdem altitudinis; baſis verò BD æquatur baſi NO æqualium BC, & NM dimidiæ. Quamobrem ſunt quoque æqualia triangula NPO BED. Altitudo quoque priſmatum eſt eadem ob triangula DHC, & OTM æqualia ob æquales baſes DC, & OM. & æqualem eleuationem, vtpote eleuationis dimidiæ Pyramidum æquè altarum. Ergo Priſmata GKHBED, & SVTNPO, OTQMVT, & EDCFHK, & PQMVT erunt inuicem æqualia ex prop. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Pyramides triangulares æquali baſi prædita vt prius, & in eadem altitudinem eleuatæ ſunt inter ſe æquales.

SInt duæ pyramides, in præced. fig. quarum vertices æqualis perpendicularis altitudinis ſint A, & L; baſes verò æquales, & triangulares etiamſi diſſimiles BIC, & RNM, Dico pyramides eſſe quoque æquales.

Probatur. Nam ſi differunt hæc erit maior altera. Minor aſſignetur, & ſit A minor pyramide L quantitate V. g. X. Ablatis ab ea priſmatibus duobus, & ab L etiam priſmatibus ſuis prædictis æqualibus remanebunt duæ pyramides AGEH, & KEIF in A æquales inuicem, ſimileſque toti A duæ pyramides in L ſimiles toti, & item æquales inuicem LSVT, & VRPQ. Ab eis ergo priſmata æqualia quatuor hinc à pyramidibus in A, & quatuor inde à pyramidibus in L demantur, quæ ob eandem rationem præc. prop. erunt æqualia inuicem. Et reſiduæ erunt Pyramides eiuſdem ſpeciei, ac priores à quibus æqualia item priſmata poterunt reſecari.

Id ergo fiat demendo à ſingulis æquis vicibus, donec in minore A remaneant adeo paruæ pyramides, vt omnes ſimul ſint proximè minores differentia Z, ita quod reſiduum in L quod ſemper eſt maius reſiduo in A, ablatis vtrique æqualibus ſit, aut maius, aut æquale differentiæ X. Quod ſi ablatio omnium priſmatum ab omnibus pyramidibus eſſet nimis ab vna, aut duabus pyramidibus, tum reſiduis pyramidis A, tam reſiduis Pyramidis L de-

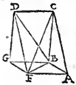
trahantur, aut priſma, vel dimidium, vel trien? priſmatis vtrinque. Ab iſtis itaque pyramidibus mainribus differentia x reliqua priſmata auferantur, donec priſmata tot ſint, vt æquent differentiam ɪ, vel ſuperent. Id enim fieri poteſt, cum hę pyramides in ʟ reſiduæ fuerint maiores, vel ęquales differentiæ ɪ. Quia itaque à pyramidis minoris ᴀ reſiduis pyramidibus tot priſmata prædictis pyramidis ʟ ęqualia priſmatibus auferri poſſone ex prǫe. demantur tot vicibus quot à reſiduis pyramidibus pyramidis maioris ʟ ablatum eſt. Et tunc à pyramidibus minoribus, quam quantitas x Auferretur, aut magis, quàm quantitas x, aut quid ei æquale, quod eſt abſurdum, non erit ergo minor pyramidis ᴀ pyramide ʟ, ſed equalis.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Omne Priſma triangulari baſi innixum diuiditur in tres pyramides æquales triangularibus baſibus fultæ.

*SIt priſma ᴄᴅ ʙꜰ triangulares poſſidens baſes ᴀʙᴄ, & ꜰɢᴅ: cuius parallelogramma ambientia tribus diametris ʙꜰ, & ᴄꜰ, & ᴅʙ ſecentur. Dico in tres pyramides eſſe diuiſum ᴀʙᴄꜰ, & ʙᴅꜰɢ, ʙᴅᴄꜰ, quas dico æquales eſſe inuicem.

Probatur. Quia Pyramis ᴀʙꜰᴄ habet æqualem baſem ᴀʙꜰ, baſi ʙꜰɢ pyramidis ꜰʙɢᴅ ex 34. lib. 1. El. ob diagonalem ʙꜰ, æqualem verò altitudinem, quòd terminent in eandem parallelā ᴅᴄ baſi ᴄʙ. Ergo erunt ex prǫc. inuicem ęquales.



Progr. ɪ. Pyramis verò ᴄᴅꜰʙ habet quoque verticem in eodem puncto ꜰ, quo altera prædicta ꜰʙɢᴄ & habet baſem ᴄᴅʙ illius ʙ ſi ꜰɢᴅ ob diagonalem ꜰᴅ ex 34. lib. 1 æqualem. Ergo, & iſtæ ſunt æquales nimirum ꜰʙᴅɢ, & ᴄꜰʙᴅ; ſed ꜰʙᴅɢ erat æqualis primo propoſitæ ᴄʙ ᴀ. Ergo omnes ſunt æquales.

COROLLARIVM.

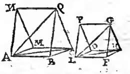
HInc enaſcitur quamlibet pyramidē eſſe tertiā partem priſmatis, quod eandem cum ea habeat baſim, & altitudinem, ſeu priſma tale pyramidis in illo contentæ triplum eſſe.

THEOR IV. PROPOS. XXIII.

Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

*SInt pyramides ᴀᴄᴀǫ, & ꜰʟʜɢ ſimiles, ſitæ in baſibus triangularibus ʙᴄǫ; & ꜰʜɢ. Dico pyramides ipſas eſſe in triplicata homologorum laterum ʙǫ, & ꜰɢ ratione.

Fiant ex illis priſmata ᴍᴀɴ ʙᴄǫ, & ᴏʟᴘ ꜰʜɢ, quę ob pyramides ſimiles erunt, & ipſa ſimilia. Nam planum ꜰᴍᴀᴄ, & ʟᴜꜰʜ faciet cum ʙǫᴄ, vel ꜰᴏʜ plano eundem angulum, vt faciebat priùs, cùm erat triangulare, & idem dicas de alijs; quare ſimilia omninò erunt priſmata ʙᴄɴ, & ꜰʜᴘ, propter oppoſitos angulos æquales oppoſitis ob laterum equalitatem, & paralleliſmum denuò ductorum priùs ductis lateribus:

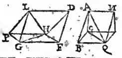


Probatur propoſ. priſmata ſunt ex dictis in triplicata ſuorum laterum ratione. cùm ſint ſimilia; ſed pyramides in eadem proportione ſunt, cùm priſmatum tertia pars ſint ex propoſ. 18. lib. 5. El. Ergo erunt, & ipſę in triplicata ſuorum homologorum laterum ratione.

THEOR. V. PROP. XXIIII.

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangularibus baſibus præditæ inuicem ſunt, vt baſes.

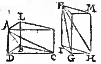
*PRob. Nā ſūt tertia pars priſmatis, quod ſuper earū baſim inſcriberetur. ᴘꜰᴅ ᴄǫɴ, habent verò eandem altitudinem, & eandem baſim, vt in pyramide ᴀʙᴄǫ, & ɢᴘʜʟ patet. Quare cum tertia pars ad tertiam partem habeat eandem proportionem, quam totum ad totum ex prop. 18. lib. 5. quę tunc priſmata ſub eadem altitudine eorum baſibus innixa ɴᴄǫ, & ᴅꜰᴘ, & priſmata inuicem ſint ex prop. 15 h. vt baſes; Pyramidea quoque eandem proportionē; quam baſes conſequentur ex 18. l. 5.



THEOR. VI. PROPOS. XXV.

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium reciprocantur baſes, & altitudines.

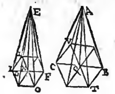
*SInt duæ pyramides ᴀʙᴄᴅ, & ꜰɢʜɪ, quæ habeant baſes triangulares ᴄʙᴅ, & ɢʜɪ. Dico earū baſes, & altitudines reciprocari. Nam poſſident eandem altitudinem, & baſim, quam priſmata ɢᴍꜰɪ, & ᴄᴅᴀʟ. Sed priſmatum propoſ. 18. h. vt dictum eſt baſes, & altitudines reciprocantur. Ergo pyramidum quoque, quæ ſunt tertia pars priſmatis ex 21. h. baſes, & altitudines reciprocabuntur: & ita erit baſis ᴄʙᴅ ad baſim ɢʜɪ, vt altitudo ɪꜰ ad altitudinem ᴅᴀ.



CO-

COROLLARIVM.

HInc elicitur nempe à tota expenſ. paſſim quòd idem dicendum ſit de pyramidibus, quorum baſes plura latera numero æqualia poſſideant, quàm tria. Nam ea reſolui poſſunt in tot pyramides triãgolares V.g. pyramis ſexagona reſolui poteſt in ſex pyramides, quę erũt tertia pars ſuorum priſmatum; quare pyramis ad pyramidem æqualis altitudinis eam habebit proportionem, quam baſis ad baſim, & ſi baſis erit ęqualis, & æ-



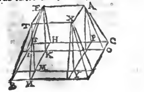
qualis altitudo pyramides quoque erunt æquales, et ſi ſint inæquales baſi ſolùm, eſſent vt baſes, ſi altitudine tantùm, erunt vt altitudines ſi prorſùs inęquales, et ſimiles in triplicata ſuorũ homologorum laterum ratione. At ęquales, ſi altitudines, & baſes reciprocentur. Quod verò omnes pyramides reſolui poſſint in pyramides triangulares patet, quia baſes poſſunt diuidi in triãgula V g. VQC, ILX, & in triangula TQB, & FXO, & per lineas rectas, eru aque triangulorum QB, & QT, vel XF, & XO, & per vertices E, & A plana agi queunt. quæ vtique pyramides triangulares efficient QIDA EXOF, & reliquas.

THEOR. VII. PROP. XXV.

Fruſtum quadrangulæ pyramidis parallelis baſibus abſciſum, eſt æquale parallelepipedo baſim habens comprehenſam duobus lateribus, quæ ſingula conſtent ex latere minoris baſis, & ſemidifferentia homologorum laterum, & trienti parallelepipedi in baſi ſiti à ſemidifferentia eorundem laterum comprehenſa, quæ omnia ſint eiuſdem altitudinis.

SIt fruſtum pyramidis AB, cuius baſes quadrangolæ ſemibaſis ſuperior AT, inferior, BC; differentia homologi lateris AE ab homologo latere CS ſit SH, & tota ſit CP eum HS: Sic ſemidifferentia homologi lateris EY ab homologo latere HN ſit KH, & tota ſit KH eum MN.

Dico igitur. Quod parallelepipedom ea baſi YS, ea vno latere HP, & HS; alio NK, KH & altitudine XE pyramidis conſtans vnà cum triente parallelepipedi in baſi MB ſiti, & eiuſdem altitudinis eſt æquale fruſto pyramidis BA. Cadant igitur ſuperficies FM, & KA, & aliç normales ipſi in planum CB, & faciant parallelepipedum MA, iorelliganturque exteoſæ, vt ſecent ſuperficies fruſti pyramidia, & ſint HETN, & IBAO, & cęt. Igitur diuideur fruſtum pyramidis in parallelepipedom AM exiſtens in medio, & duo priſmata æqualia KA, & NA, quæ ſimul vnita conſtituent parallelepipedum baſia KP, & altitudinia YX, & duo EY, & YA ęqualia tũ inuicẽ, tum prędictis, quod ſint ſuper baſea æquales MI ipſi KP, vtpote complementa circa diametrum, & XO ipſi YN, vnde & ipſa vnita conſtituent parallelepipedum æquale priori baſis MI, & altitudinis YX. Tandem conſtituent quatuor pyramides, vt MNBT, & alias ex angulis conſtitutas, quarũ ſingulæ eſſent duo triẽtes priſmatis, ex baſi MB in altitudine MY conſurgentia ex Cor. propoſ 22. p. I., & ideo triena parallelepipedi eadẽ baſi MB ſiti eandẽ altitudinem habentis. Itaque tres pyramides facient parallelepipedum HS in altitudinẽ XE, vel YA: Duo priſmata EP, & NX efficient parallelepipedũ ex baſi EP, & altitudine XE. Duo autem priſmata OX, & ME conſtituent parallelepipedum ex baſi MI, & altitudine XY Ideoque eum parallelepipedo medio YE conficient totum parallelepipedum BA ſitum ſuper baſim parallelogrammũ YS, quę eſt ex latere PH vna eum ſemidifferentia HS pro vno latere, & pro alio MK eum ſemidifferentia KH pro alio latere, cui ſi addas pyramidem MBT, ideſt trieos parallelepipedi ſuper baſim MB altitudinis MT erit fruſtum pyramidis parallelis baſibus conſtantis æquale illi parallelepipedo ex baſi YS ad altitudinem XE erecto vna eum triente parallelepipedi baſia MB ad altitudinem eandem MT eleuato, quod erat probandum.



COROLLARIVM.

PYramidis triangolaris fruſtom eſt æquale priſmati triangularia baſis V.g ſemibaſis SY, quæ conſtituatur ex latere PH minori, & ſemidifferentia SH pro vno latere, & pro alio ex alio minori MK, & ſemidifferentia KH, & triente priſmatis ex baſi, cui ſemidifferentię prędictę KH, & HS latera pręſtent. Quia fruſtum illud Pyramidis erit dimidium fruſti baſi quadrata ſub iiſdem lateribus, & angulo comprehenſi, ſicut priſma baſi triangulari ſitum eſt dimidium parallelepipedi baſis quadratę ſub eodem angulo, & lateribus comprehenſæ, dummodo omnia in æqualem altitudinem ſint eleuata.

TRACTATVS XXXIV.

PARS SECVNDA.

De ſoliditate corporum curuorum.

EXpedita ſoliditate corporum planis ſuperficiebus contentorum reſtat, vt curuis planis contenta corpora videamus illa verò ſunt in triplici differentia alia, quæ continentur, curuis quidem, ſed rectilineam habent baſim, vt fornices quadrati, alia quæ curuis ſuperficiebus, ſed rotundam, & planam baſim continent, vt coni, & cylindri, alia ſunt, quæ ſuperficie omnino curua abſque vlla admixtione planitiei conſequuntur, vt ſphæræ, & ſphæroides.

EXPENSIO I.

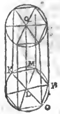
De Cylindris, & Conis.

POſt corpora, qoe planis ſuperficiebus continentur, ſuccedunt mixta, quæ ſuperficie curua altera, aut duabus planis conſtant, inter quæ præcipoa ſunt coni, & cylindri, de quibus, & ſoliditates, & ſoliditatum proportiones ſunt indagandæ.

THEOR. I. PROPOS. I.

Sicut ſe habet baſis triangularis inſcripta ſectori in proportione ad ſectorem, ita priſma rectè in baſi collocatum ad corpus ſolidum in ſectore normaliter exiſtens, eandemque cum priſmate altitudinem poſſidens.

SIt baſis triangularis KML inſcripta ſectori KML ſuper quam ſit priſma KLMQ, ſectorq; KML, ſuper quem ad eandem altitudinem corpus ſit triangulare velut priſma, ſed rotūdæ ſoperficiei LMKQ, quod apellabimus ſectorem ſolidum. Dico, quòd ſicut eſt baſis triangularis LMK ad ſectorem planum LMK, ita eſt priſma LKMQ in baſi prædicta ad ſectorem ſolidum LMKQ.



* Probatur. Nam, ſi ſumantur æque multiplices baſis, vt LMN, NOL, & ſectoris item LNO, LMN, ſuperque baſes fiant priſmata ſua, & ſuper ſectores planos ſectores ſolidi ſub eadem altitudine. Priſmata erunt æqualia inuicem ex pr.15.cor.par.1 h nec non, & ſectores ſolidi MNLQ, NOLQ, KLMQ; quia, vt patet, continentur, tum priſmata inuicem, tum ſectores ſolidi inuicem ſuperficiebus æqualibus, & ſimilibus planitie, & numero ex def. Tract.33.

Si ergo creſcant baſes triangulares prima quantitas magis, quam ſectores plani ſecunda, creſcet & tertia, nempe creſcent priſmata magis, quam ſectores ſolidi quarta quantitas. Si verò vtlibet multiplicentur baſes triangulares prima quantitas, & æquet ſecundam quantitatem ſecto es; priſmata quoque tertia quantitas, nempe veluti baſes baſibus, reperientur æquales quartæ quantitati, nempe ſectoribus ſolidis, quod ſi prima quantitas multiplicata ſit minor nempe baſes, quam ſint ſectores plani ſecunda quantitas, vt vt multiplicati, erunt quoq; æque, ac baſes ſuę multiplicata priſmata tertia quantitas maiora, quā ſectores ſolidi quarta quātitas multiplicata, vt ſectores.

Creſcentibus itaque baſibus creſcunt priſmata decreſcentibus decreſcunt, & cum æquales ſunt æquantur illæ cum ſectoribus planis, hæc cum ſectoribus ſolidis, vnde ex 9. def. Tr 9. inuicem dicent proportionem, & ita erit baſis triangularis ad ſectorem planum, vt priſma ad ſectorem ſolidum.

THEOR. II. PROP. II.

Sicut ſe habet baſis triangularis ad ſectorem planum, ita ſe habet pyramis in baſi ſita ad portionem coni in ſectore conſtitutam; dummodo æqualem poſſideant altitudinem, & coni ſint recti.

* HÆc propoſitio oſtenditur, vt antecedens. Nam ſoppoſito cono recto portiones omnes coni, quę ſuper ſectorem planum fiunt, ſunt ſimiles, & æquales V.g. IMKQ, INMQ, OINQ, &c. quod ex def. ſuperficiebus ſimilibus, æqualibusq; & numero ęquali contineantur; ſicque pyramides QIMK, MINQ, NIOQ. & cęt. factæ ſuper baſes triangulares in ſectoribus inſcriptas inuicem erunt æquales ex prop.20. Tr.h. pa. 1. quare ſi baſes multiplicentur, ita quod ſuperent ſectores, pyramides

quoque

quoque ita creſcent, vt ſuperent portionta conorum: Si verò baſes triangulares ita multiplicentur, vt minus ſint, quàm ſectores, erunt quoque pyramides, minus quàm portiones conorum: Si tandem ita augeantur ęquè multiplices baſes, vt adęquent ſectores; pyramides quoque æquabunt portiones coni: quare vt eſt baſis pyramidis ad ſectorem planum, ita pyramis ipſa ad portionem coni recti ſuper ſectorem eleuatam in æqualem altitudinem.



COROLLARIVM.

* HInc eruitur ita eſſe circulum ad multilaterũ ſibi inſcriptũ, ſicut conus in ipſo locatum ad pyramidem in multilatero conſtitutam, nam, cum diuiſo circulo in tot ſectores inuicem ęquales in quot triãgula æqualia baſis multilateri inſcripti diuiſa eſt, ita erit quodlibet triangulum IMK ad quemlibet ſectorem circuli, vt quęlibet pyramis colocata in triangulo ad quemlibet ſectorẽ conicum æquè, ac pyramides eleuatum. Ergo etiam omnes ita ſe habebunt ad omnes ex 17. lib 5. & omnia triangula multilateri, ideſt multilaterum ipſum ita ſe habebit ad omnes ſectores numero ęquales, vt pyramides in triangulis ſitas ad ſectores ſolidos conicos in ſectoribus planis locatos.

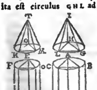
Et idem dicendum eſt de priſmatibus, quæ ſint ad cylindros, quibus inſcripta ſint, vt baſes triangulares priſmatum in ſectoribus inſcriptę ad circulum qui baſis cylindri eſt, vt ex pręc. propoſ. eodem argumento colligitur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Coni recti, ſeu Cylindri eiuſdem altitudinis, & diuerſæ baſis ſunt inuicem, vt baſes.

SInt Coni GILH. & MDNT, vel cylindri BACGHL, & OFEMON recti ſub eadem altitudine, ſed diuerſę baſis GHL, & MON. Dico eſſe ad inuicem in proportione, vt baſes. & ita referri conus GHLI ad conum MTON, vel cylindrus BACGHL ad cylindrum DFEMON, vt baſis GHL ad baſim MON.

* Probatur. Nam ex propoſ. 40. & 41. lib. 6. ita eſt circulus GHL ad circulum MON, vt multilaterum OHL ad multilaterum MON, ideoque *conuertendo* circulus GHL erit ad multilaterum GHL, vt circulus MON ad multilaterũ MON, ſed vt circulus GAL eſt ad multilaterũ GHL, ſic cylindrus CABLHG, ſeu conus ILHG ad priſma AGHL, ſeu pyramidẽ IGHL ex a. b. &



vt baſis circulus MON ad multilaterũ MON, ſic Cylindrus DFE MON, ſeu conus TOMN ad priſma E MON. vel pyramidem inſcriptam TOMN: Ergo ex propoſ. 16. lib. 5. ita erit cylindrus BACGHL ad ſibi inſcriptũ priſma AGHL, vt cylindrus DFE MON ad priſma ſibi inſcriptum EMON. Quare *conuertendo* ita erit cylindrus BAC GHL ad cylindrum OFE MON, vt priſma inſcriptum AGHL ad priſma inſcriptum ENOM; ſed priſmata ſe habent ad inuicem, vt baſes ex prop. 23. par. 1. h. Ergo etiam cylindri.

Et ſic quoque erit conus IGHL ad pyramidem inſcriptam ſibi IGHL, vt conus MTON ad inſcriptam ſibi pyramidem TMON. Quare pari modo *conuertendo* ita erit conus IGHL ad conum MTON, vt inſcripta pyramis IGHL ad inſcriptã pyramidem TNOM: ſed inſcriptę pyramides ſunt inuicem, vt baſes ex prop. 23. p. 1. h. Ergo etiam coni ſe habebunt ad inuicem, vt baſes.

COROLLARIVM.

* HInc eſt. Quod ſi Conus, & Cylindrus ſit pyramidi, & priſmati æqualis baſis, & eiuſdem altitudinis ſit ei ęqualis. Quod patet ex Cor. p. 2. h. Nã ita eſt cylindrus, & conus ad priſma, & pyramidẽ ſibi inſcriptã, vt baſis coni, vel cylindri ad baſim priſmatis, vel pyramidis inſcriptę, ſi ſint ęqualis altitudinis; ſed priſma, vel pyramis inſcripta ad priſma aliud, vel pyramidẽ Z eiuſdem altitudinis, & æqualis baſis O illi circulo, qui baſis eſt coni, vel cylindri, eſt vt baſis ſua inſcripta circulo coni, vel cylindri ad baſim O ęqualẽ circulo qui eſt baſis cylindri, vel coni Z. Baſis autem inſcripta ad baſim coni, vel cylindri, & ad baſim O huic æqualẽ eandẽ vtpote ad ęquales dicit proportionem. Ergo etiam priſma inſcriptum cylindro, vel pyramis cono inſcripta ad conum, vel cylindrum ſuum. & ad priſma, pyramidemq; Z æqualiũ baſiũ eandẽ proportionem dicet; quare ex 7. lib. 5. erunt priſma, vel cylindrus æqualium baſium, & eiuſdem altitudinis, ſicut etiam pyramis, & conus æqualia.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

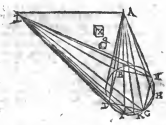
Coni, ſeu recti, ſeu ſcaleni, ſicut, & cylindri in æqualibus, ſeu in eadem baſi conſtituti, & in eandem altitudine ſunt æquales.

* SInt coni, ſeu cylindri ſuper eandem baſem rotundam CN, quorum vertices A, & L, hos dico eſſe æquales; quod ſi quis neget; alterũ maiorẽ altero neceſſe eſt eſſe, aſſignet conum, vel cylindrũ maiorem, & ſit L, ideoque A conus, ſeu cylindrus minor erit V. g. quantitate X. Auferantur ab vtriſque pyramides quadratę æquales, ſeu priſmata ob eandem altitudinem, & eandem baſim ex 1. r. h, propoſ. 1. & 29. NBCOL, & ABCON. & remanebunt ſegmenta conorum, vel cylindrorum quatuor, qualia ſunt CDIL, & COIA, a quibus ſegmentis auferantur, rurſus pyramides triangulares CIDL, & CIDA æquales, aut priſmata æqualia ob eandem altitudinem, & æqualem baſim, & reſidua erunt ſegmenta conorum CIKL CKIA, & cętera, vel cylindrorum, ſi pro conis cylindri aſſumpti fuerint à principio: Sed ad vitandam confuſionem loquamur de ſolis conis, quod, & de cylindris intelligetur, à quibus ablatis rurſus pyramidibus triangularibus IKCL, & IKCA æqualibus remanebunt adhuc ſectiones conorum minores. Id ergo

toties

Digitized by Google

totics fiat; donec remaneant ſegmenta conorum ſimul in cono minori A minora quantitate,& differentia X proximè (auferendo, vel omnia eorum, quæ ſimul auferenda ſunt. vel aliqua, ſed ſemper æquo numero ab vtraque pyramide. Ideoque ſegenta conorum reſidua in pyramide maiori L erunt maiora, vel æqualia differẽtiæ X, ſint ergo æqualia primò, & à cono L auferantur tot pyramides triangulares, donec exequent ſegmenta conorum minora quantitate X reſidua coni A, aut proximè ſuperent, Nam cum deinde, & à ſegmentia ipſis coni A tot pyramides æquales auferri poſſint, aut nihil remaneret ſegmenti conici, quòd eſt abſurdum, cùm pyramis ſit minor ſegmento conico, quod eam continet, aut à minori auferetur maius, ſcilicet aliquod ęquale differentiæ X) quod item abſurdum eſt.



Quod ſi ſint maiora hæc ſegmenta coni L, quàm differentia X. Auferantur à cono ipſo L tot pyramides æqualea triangulares; donec ipſę pyramides ablatę exequent, vel proximè ſuperent differentiam X, & eodem modo cum, & à ſegmentis coni A reſiduis æquales tot pyramidea auferri poſſint, auferreretur à minoribus conicis ſegmentis differentia X, aliquid, aut æquale, aut maius Differentia X; quod item eſt abſurdum.

COROLLARIVM.

HInc ellicitur idem dicendum eſſe de ſegmentis conorum, & cylindrorum. Siquidem idem argumẽtum valet etiam de ſegmentis CIDL, & CIDA. Nam auferatur primo ab vtriſque pyramis triangularis CDIA, & CIDL. Deinde triangularis CAIL, & CKIA, & ſic conſequenter; donec reſtana ſegmentũ à CIDA minoris coni remaneat minus differentia Q proximè, qua differt minus à maiori, deinde à reſiduo maioris deducentur tot partes ſolidæ, donec ſuperent ablatæ differentiam Q, & auferrerentur etiam tot pyramidea à reſiduis ſegmenti conici minoris, quod eſt abſurdum.

THEOR. V. PROPOS. V.

Sub eadem altitudine exiſtentes Coni, & Cylindri inuicem ſunt, vt baſes.

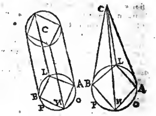
SIt conus, vel cylindrus eiuſdem altitudinis A, & alius B, ſiue obliqui ſint, ſiue recti, dico, quod ad inuicem ſunt, vt baſes.

* Probatur. Nam cum obliqui ſint ęquales rectis ex pręced. & recti ſint ad inuicem, vt baſes ex prop 3. b. dummodo in eamdem perpendicularem altitudinem extollantur, etiam obliqui eiuſdem altitudinis erunt inuicem, vt baſes.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Coni, & Cylindri obliqui ita referuntur ad pyramides inſcriptas, vel priſmata inſcripta, vt circulus, in quo ſunt, refertur ad multilaterum baſis pyramidis, vel priſmatis ſeu rectæ, ſeu ſint obliquæ figuræ ſolidæ.

SIt conus, ſeu cylindrus CLOP, in quo inſcribatur pyramis, vel priſma ABC LN ſuper baſim multilateram LAN. Dico, quod, vt eſt circulus LOP ad multilaterum baſis ASLN; ſic conus, ſeu cylindrus LOCP ad pyramidem, ſeu priſma ABLNC.



Prob. Nam ſi ſit conus, ſeu cylindrus rectus ſuper baſim circulum LOP erit æqualis obliquo æquèalto ex præced. 4. ſic ſi ſuper multilaterũ, baſimque LNAS ſit pyramis, ſeu priſma ALSNC erunt æqualia rectum obliquo ęquèalto ex prop. 18. Cor. & ex 21. par. 1. h. ſed conus, ſeu cylindrus rectus eſt ad pyramidem, vel priſma inſcriptum *conuertendo* pr. 1. h & 2. Cor. vt baſis circulus LOP ad multilaterum ANSL. Ergo etiam obliquus conus, ſeu cylindrus LCOP refertur ad pyramidem, ſeu priſma inſcriptum, vt baſis circulus LOP refertur ad ASLNC multilaterum. baſimque ANSL.

THEOR VII. PROP. VII.

Omnis conus eſt tertia pars Cylindri eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem.

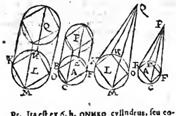
*PRobatur. Nam ita priſma eſt ad cylindrum ſicut baſis multilatera priſmatis eſt ad circulum circumſcriptum, qui cylindri eſt baſis, & ita quoque eſt pyramis in ea baſi multilatera ad conum, qui in circulo eodem collocatus eſt ex pręced, ſed ex 11. lib. 5. quę eidem rationi ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eędem rationes. Ergo ita erit priſma ad cylindrum, vt pyramis ad conũ; Ergo *permutãdo* ita erit Priſma ad pyramidẽ quantitatea eiuſdem generis, vt cylindrus ad conum eiuſdem item generis. Sed priſma comprehendit ter pyramidem, illiuſque eſt triplum, dummodo eadem baſi ſita, ad eademque altitudinem ſit eleuata: Ergo ita quoque erit cylindrus reſpectu coni, & conum ter continebit, quòd erat oſtendendum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Coni, & Cylindri ſunt inuicem, vt Pyramides, & Priſmata in illis inſcriptas.

SIt cylindrus, ſeu conus PEBCP, & alius ONMKQ, inſcribsoturque conis pyramides, & cylindris priſmata ſimiliũ baſiũ. Dico ita eſſe ONMKQ cylindrus, ſeu conus ad PEBCP cylindrũ, ſeu conum, vt eſt priſma, ſeu pyramis inſcripta ONMKQ ad priſma, vel pyramidem inſcriptam PEBCP.



Pr. Ita eſt ex 6. h. ONMKQ cylindrus, ſeu conus ad priſma, ſeu Pyramidem ſibi inſcriptam, vt circulus L baſis ad baſim multilaterã OMKN, vt autem circulus L ad ONMK baſim inſcriptã ſib; permutando propoſitionem 40. & 41. lib 6. ita circulus altera baſis A ad baſim multilaterã inſcriptam ſibi FEBC, vt autem circulus A ad multilaterã baſim FEBC ſibi inſcriptam, ita eſt cylindrus, ſeu conus FEBCP in circulo A ſitus ad priſma, ſeu pyramidem in FEBC multilatero ſitam. Ergo ꝗx prop. 12. lib. 5. ita erit cylindrus, ſeu conus ONMKQ ad priſma, ſeu pyramidẽ ſibi inſcriptam, velut cylindrus, ſeu conus FEBCP ad priſma, vel pyramidem ſibi inſcriptam, vt etiam dixi prop. 7. h. Quare permutando ita erit cylindrus, ſeu conus ONMKQ ad cylindrum, ſeu conum FEBCP, vt priſma, vel pyramis inſcripta ONMKQ cylindri, vel coni ad priſma, vel pyramidem cylindro, ſeu cono FEBCP inſcriptam.

THEOR. IX. PROP. IX.

Similes Coni, & Cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, qui in baſibus.

SInt duo coni, & cylindri ſimiles, quorum altitudines Q, & P, quarum baſes OMNK, & FEBC. Dico hos conos, ſeu cylindros eſſe inuicem in triplicata ratione diametrorum. Inſcribantur in cylindris priſmata. In conis pyramides quotliber laterum æqualium V. g. quadrangulæ ſed ſimiliũ baſium, vt in fig. præc. propoſ. Priſma ONMKQ, ſeu pyramis ad priſma, ſeu pyramidem FEBCF habet proportionem triplicatam lateris MK ad latus BC ex prop. 14. & 15. & Cor. prop. 26. Sed vt ex prop. ant. P. L. ita eſt pyramis, ſeu priſma Q inſcriptum ad pyramidem, ſeu priſma P inſcriptam, vt eſt conus, ſeu cylindrus Q circumſcribens ad cylindrum, ſeu conum P circumſcribẽtem, ergo cylindrus, ſeu conus erit ad conũ, ſeu cylindrum P in triplicata ratione KM ad BC eadẽ ex 41. l. 6 diametri circuli L ad diametrum circuli A.

COROLLARIVM.

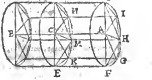
QVare patet, quod etiam erunt in duplicata ratione baſium ſuarum.

THEOR. X. PROPOS. X.

Si Cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo erit, Cylindrus ad Cylindrum, vt axis ad axem.

SIt Cylindrus AB ſectus plano DME parallelo planis PHF, vel illi aduerſo. Dico ita cylindrum ſuper axem AC eſſe ad cylindrum ſuper axem CB, vt axis AC ad axem CB.

* Diuidatur circulus baſis PHGF in partes æquales, & per eas partes, & per axem ductis planis, & per ſubtenſas PH, & HF, DM, & ME conſtituantur priſmata inſcripta PHAC, & DMCB, & cæt. vſque dum inſcribant totum cylindrum. Quæ in cylindro AC erunt omnia æqualis altitudinis, ſicut & omnia, quæ inſcribunt cylindrum CB, & æqualium baſium AHF, & CMB. Et ideo erunt inuicem, vt altitudines, nempe quæ ſunt in cylindro AC ad ea, quæ ſunt in cylindro CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 20. par. 1. h.



Ruſus inſcribantur alia, vt ſunt AGFC AGHC, & cęt. dimidiatis arcubus priorum in cylindro AC, & CBKE, & CEMB in cylindro CB, & hæc etiam ſecundò inſcripta in cylindro AC ad ea, quę inſcripta ſunt ſecundò in cylindro CB erunt, vt altitudo AC ad altitudinem CB, vtpote, quod omnia ſint æqualium baſium AGF, & CKE, ſicut AGH, & CMK, & cęt. ex effectione.

Rurſúſq; idem replicetur toties, donec inſcripta priſmata adeo multiplicentur, vt omne ſpatium abſumant, quòd poſſibile eſt abſumi remanens inter ſuperficiem rotundam cylindri, & ſubtenſas planas priſmatum ſuperficies. Satis enim conſtat ſine oſtenſione particulari, quòd quantò magis priſmata multiplicantur, tantò minus ſpatium remanet inter ſuperficiem globoſam cylindri, & priſmatũ ſuperficiem planam. Quia ergo omne ſpatium, quod abſumi poteſt à priſmatibus inſcriptis, & quantum fieri poteſt multiplicatis abſumptum eſt. Ergo illa priſmata æquabunt cylindros AC, & CB, & ea quidem, quę inſcripta ſunt in cylindro AC ipſum æquabunt, ſicut quæ inſcripta ſunt in CB cylindro ipſum ęquabunt quoque. Siquidem ſi non ęquarent, remaneręt aliquis locus nouę inſcriptioni contra pręſuppoſitum. Verùm ea omnia priſmata in AG ſunt ſemper ob ęquales baſes, in quibus ſunt, ad ea omnia, quę in CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 21. h. p. 1. Ergo etiam cylindrus AC erit ad cylindrum CB, & altitudo AC ad altitudinem CB.

THEOR.

Quod autem baſis AML æquetur baſi REA: Ita, vt QT diameter ad RA diametrum, ita eſt altitudo YX ad altitudinē ZX in triangulis per axē æquiangulis RAX QXT, ſed vt YX ad altitudinem ZX, ſic eſt SV altitudo ad GV altitudinē, quod ſint æquales. Vt autem SV ad GV, ſic eſt CV ad MV ob ſimilitudinē triangulorum SVC, & MVG; vt autem CV ad VM, ſic NC ad KM ob ſimilitudinē triangulorū NVC KVM. Ergo ex 16. l. 5. vt QT ad RA, ſic NC ad MK: ſed QT, & NC ſunt æquales: Ergo ex 12. lib. 5. RA, & KM erunt æquales. Rurſùs eodem arg. ex 42. l. 6. peripheria QDT eſt ad peripheriam REA, vt diameter QT ad diametrum RA; Iam verò oſtenſum eſt QT eſſe ad RA, vt NC ad AM, nempe vt CV ad MV, & in triangulis ſimilibus CKV, & MLV, vt CS ad ML: Quare ex prop. 16. lib. 5. ob ſimilitudinem rationum QDT peripheria erit ad AER peripheriā, vt CB crus ad ML, ſed QDT peripheria, & CB crus ex effectione ſunt æqualis. Ergò ex 12. lib. 5. AER peripheria, & ML crus erunt æqualia. Propterea que ex 3. Tract. 30. baſis KML æquabitur circulo RSA ob KM æquale diametro RA, & ML æquale crus peripheriæ RSA. Igitur pyramis KMLV, & conus REAX æquabuntur ob baſes, & altitudines æquales ex prop. 3. h. Coroll.

Si ergo à cono QDTA, & pyramide NC BV ex effectè æqualibus auferatur hinc pyramis KMLV, inde conus AERX, quę æqualia oſtanſa ſunt, reſtabit fruſtum coni RAQTU æquale fruſto pyramidis NCBAML: ſed fruſtum pyramidis KMX NCB æquat priſma, cuius baſis duo latera ſint conſtituta vnum ea diametro KM minori, & ſemidifferentia, vt idem latusq; alterum ex crure ML peripheriam minorem æquante, & ſemidifferentia eorundem, & inſuper trienti priſmatis, cuius baſis crura efficiant vnum ſemidifferentia diametrorum NC ab MK, & alterum ſemidifferentia CB ab ML, quę eſt peripheriarum ex Cor. prop. 35. p. 1. h. Ergo etiam illi æquale priſmati erit fruſtum conicum QDTRA.

EXPENSIO II.

De ſoliditate Annulorum, & Rhomborum ſolidorum.

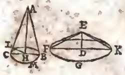
CVm quandoque annuli ſoliditas perquiri oporteat, hinc corpus annulare inter cętera corpora rotunda tetragoniſmo ſupponimus maximè; quia ad ſphęrę ſoliditatem perſcrutandam apprimè deſeruiat.

THEOR. I. PROPOS. IX.

Duo Coni Iſoſceles; cuius vnus habeat baſim ſuperficiei alterius æqualem, & altitudinē alterius lineæ ductæ orthogonaliter à centro baſis ad latus coni primi, erunt inuicem ſoliditate æquales.

SIt conus ABC, in quo à centro baſis ſit ducta HL perpendicularis ad latus AC, & huic lineę ſit ęqualis altitudo DE coni KEF: ſicut ſuperficies curua coni ABC baſi circuli KGFK ſit ęqualis. Dico *hos duos conos eſſe inuicem æquales.*

Quia ſuperficies BAC æquatur baſi KFG, & æqualia ad idem relata eandem habent proportionē fiet, vt ſicut KFG baſis eſt ad baſim BMC; ita ſuperficies BAC ad baſim eandem ſuam BCM; vt verò ſuperficies BAC ad baſim BCM, ita vt oſtendimus tr. 31. propoſ. 30. AC ad CH, & ſicut AC ad CH, ita AH ad AL ob triangulorum ſimilitudinem, quæ eſt æ-



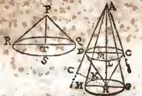
qualis DE, igitur ſicut baſis KGF ad baſim BMC; ita Altitudo HA ad altitudinem HL, vel DE; Quare reciprocam baſes altitudinibus habent proportionem; vnde ex prop. 12. Tr. 6. coni OAB, FEK erunt æquales.

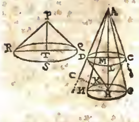
THEOR. II. PROPOS. XV.

Si ex duobus conis Iſoſcelibus Rhombus ſolidus componatur, æquatur cono illi, qui baſim habet æqualem baſi compoſitorum conorum, & altitudinem æqualem altitudini vtriuſque.

SIt Rhombus ex duobus conis integratus ADHO; Sitque alter conus, cuius baſis GKN baſi OLD æquetur, & altitudo HA ſit eadem. Dico *Rhombum, & conum eſſe æquales.*

Probatur. Sicut AH ad AM; ſic Rhombus ſolidus OADH ad conum OAD, quia coni compoſiti eandem habent baſim. quare ſunt inuicem, vt altitudines, vt autem AH ad AM, ita quoque ob æqualitatem baſium GKN, OLD eſt conus AON ad conum OAD. Ergo cum eidem cono OAD eandem dicant proportionem inuicem ſunt ęquales Rhombus OADH, & conus GNA. Quod intelligitur etiam ſi coni OAD, OHD inuicem non ſint æquales.





THEOR. III. PROPOS. XVI.

Si ſit Rhombus, ut ſuperiùs, & ſit conus alterius conorum Rhombi ſuperficies baſem poſſidens æqualem, & altitudinem æqualem lineæ à vertice coni Rhombum componentium perpendiculariter in latus productum cadenti, conus iſte prædicto Rhombo ſolido æquatur.

SIt Rhombus HOAD conicus, & à vertice H in latus AC productum, ſi oportet cadat perpendicularis HC, & fiat QPR conus altitudinem TP æqualem perpendiculari HC, & baſim QSR æqualem ſuperficiei OAD coni poſſidens. Dico *Rhombum* HCAD *huic cono* QPR *eſſe æqualem*.

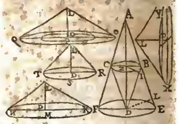
Probatur. Quia ſuperficies coni OAD æquatur baſi QSR, erit ſuperficies OAD ad propriā baſim GLD, ſic baſis QSR ad baſim GSM, OLD baſi equalem. Sed vt ſuperficies AOD ad propriam baſim DLO; ſic AD ad DM ex dictis prop. 30. Tract. 31. cùm circulus æqualis ſuperficiei conicę ſit ex radio TQ media proportionali inter latus, & diametrum baſis. & ſicut AD ad DM; ſic ob ſimilitudinem triangulorum AH ad HC; Ideoque etiam baſis QSR ad baſim GBN, ſic AH ad HC, ideſt altitudo AH ad altitudinem PT; quæ æqualis lineę HC eſt effecta. Cum ergo habeant baſes conus GAN, & QPR altitudinibus reciprocè proportionales ex prop. 12. Tract. h. erunt inuicem ęquales coni GAN, & QPR. Quare etiam Rhombus DADH, qui probatus eſt ant. prop. æqualis cono DAN cono RPQ ęquabitur.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Si à Cono Rhombus inſcriptus auferatur, reſiduo conus ille æqualis eſt, cuius altitudo perpendiculari à vertice oppoſita Rhombi ad latus deductæ, & cuius ſuperficies reſiduæ conuexæ ſuperficiei æquetur.

SIt conus FAE, cui inſcriptus Rhombus ABCD, qui ſcilicet verticem in centrum D defigat, & linea LD à vertice D cadens perpendiculariter in latus EA feratur. Fiatque conus, cuius altitudo DL baſis verò KMN; ęquetur ſuperficiei, quę ambit reſiduum coni EBCF, vt ex propoſ. 32. Tract. 31. effici poteſt. Dico *hunc conum* KLN *eſſe æqualem illi reſiduo* EBDCF *ſublata cono* BCD.

Fiant duo alij coni primus maior, cuius baſis OPQ coni AEF toti ſuperficiei conuexę æquetur, & DL ſit altitudo, qui ex dictis ęquabitur cono EAF. Deinde alter conſtituatur, cuius baſis RST ęquet



ſuperficiem BAC coni conuexam, & altitudinem DL, iſte quoque conus æquabitur Rhombo BACD. Baſis verò OPQ æquatur baſibus KMN, & RST, quòd æquetur toti ſuperficiei conuexæ EAF, cui quoque duę baſes KMN, & RST æquantur ex conſtructione, cum quę tres iſti coni LRT; KLN, & OLQ vtpote altitudine ęquali prediti ſe habeant ad inuicem, vt baſes ex prop. 5. Tract. h. Sequitur quod OLQ conus baſis OPQ, cùm ad ambas baſes ſimul KMN, RST dicat proportionem ęqualitatis, quod etiam ad conos KNL, & RLT eadem relatione feratur, & eos equet, & ideo conus EAF duos conos æquabit KLN, & RLT. Vnde ſublatis æqualibus cono RLT, & Rhombo BACD reſidua conus KLN, & EADCF reſiduus annulus triangularis erūt ęqualia.

COROLLARIVM I.

HInc elicitur fruſtum coni ESCFD equale eſſe duobus conis primo, cuius baſis ſit ęqualis ſuperficiei fruſti conici, quam inuenies ex propoſ. 31. tract. 31. & altitudo LD, alterum cuius altitudo IZ, & ſuperficies baſis ipſius coni CDA ſuperficiei ęqualis.

COROLLARIVM II.

HInc elicies, quod ſi fiat conus DLQ æqualis toti cono BAF, & FLR V. g. cono BAC, poſtea fiat conus, cuius baſis circulus æquet reſiduū annulum ſublata baſi RST à baſi OPQ, vt ex 18. tract. 30. potes efficere, & ſuper hunc circulum erigatur conus YLX altitudinis DL iſta æquabit fruſtum coni EBCF.

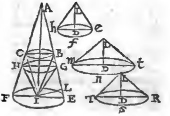
Probatur. Nam cum coni ſint omnes eiuſdem altitudinis, ita erit conus RLT ad conum OLQ, vt baſis RST ad baſim OPQ, ſicque conus XLY ad conum OLQ; vt baſis XY ad baſim OPQ; Ergo ex propoſ. 25. lib. 5. prima quantitas LRT conus cum quinta, nempe cum cono XLY erit ad ſecundam OLQ, vt tertia baſis RST cum ſexta baſi YX ad quartam OPQ baſim; ſed baſis RST, & YX ſunt æquales conicę baſi OPQ. Ergo etiam conus YLX, & LRT ſunt ęquales cono OLQ. ſed LRT æquat conum BAC partem, & OLQ æquat totum conum BAF, ergo reſiduus conus YXL ęquabit fruſtum coni reliquum CBEF.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XVIII.

Si à Rhombo Rhombus auferatur inſcriptus, reſiduo conus ille æqualis eſt, cuius altitudo æquetur perpendiculari à vertice oppoſita Rhomborum deducta ad latus, & ſuperficies reſiduæ conuexæ ſuperficiei.

SIt Rhombus AGIH, in eoque inſcriptus alter Rhombus BACI, & linea à vertice communi conorum I deducta, quæ ſit IL. Sitque eLh altitudinis IL, & baſim efh habeat ſuperficiei conuexæ, quę ambit GBCH, reſiduæ Rhomborum BACI, & AGIH ablato cono BAC æqualem. Dico hunc conum eLh ęqualem eſſe ſoliditati reſiduæ Rhomborum ſi alter ABCI ab altero AGIH Rhombo auferatur. Fiat itaque conus, cuius baſis RLT æque-



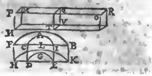
tur BAC coni ſuperficiei cõuexæ, & altitudo DL ſit IL iſte conus erit æqualis Rhombo BACI ex 16. propoſ. h. item ſit tLm, cuius baſis tnm æquet ſuperficiem conuexam coni GAH, & altitudo eadem DL, eritque ex pręhabitis proboſ 16. conus iſte tLm ęqualis Rhombo GIAH. Et quia tota huius baſis æquat ſuperficiem totius coni GAH, & RLT ſuperficiem conuexam coni BAC; & efh. ſuperficiem reſiduã BGHC erit baſis tnm baſibus efh, & RST æqualis, & altitudines DL erunt æquales, cum ergo coni ęqualium altitudinum ex prop. 5. Tr. h. ſe habeant ad inuicem, vt baſes, erit conus tLm æqualis conis eLh, & RLn, & item ex dictis Rhombo GAIH; ſed conus RLT æqualis eſt Rhõbo BACI: Ablatis itaque iſtis æqualibus erunt reſidua æqualia eLh conus, & BGICH reſiduum Rhombi.

THEOR. VI. PROPOS. XIX.

Annulus ſolidus, cuius baſis quadrata, æqualis eſt parallelepipedo, cuius vnum latus ſit æquale annuli altitudini, & baſis æqualis annulo eiuſdem plano.

SIt Annulus ſolidus ABCDEF. Dico hunc eſſe æqualem parallelepipedo NR, cuius vnicæ ſuperficiei QO æquetur ſuperficies annuli HLK BGD, & altitudo NP altitudini LB.

Sit priſma NR quadrãgulę baſis, & æqualis baſis ſuo baſi BAFL cylindri SFAHK, & portio parallelepipedi, ſeu priſmatis æqualis baſi QP cylindri interni CAIDR baſi DGE, & eorũ omnium ſit æqualis altitudo NP cylindrorum ipſorum ęqualis altitudini BE. Iſti cylindrus, & priſma erunt æqualia ex prop. 3. Cor. p. 5. h. quia habent baſes cylindrorum baſibus æquales, & ſunt æqualis quoque altitudinis, ſcilicet cylindrus BAHEK priſmati NR, & cylindrus internus FADE priſmati NQ. Ablato itaque EADI cylindro interno à cylindro maiori BAHEK

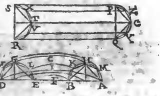


ſicut, & priſma NQ æquans cylindrum à priſmate NR reſidua nimirum priſma TR, & annulus ſolidus EIACN remanebunt æqualia, cuius baſis OQ plana æquabit annulum planum KLHDGS, vtpote, quod ſit quoque reſidua æqualis baſis RP circulo BAFL ablata plana baſi PQ æquante IACL baſim.

THEOR. VII. PROPOS. XX.

Annulus ſolidus rotundus æquatur Cylindro, cuius rectangulum per axem ſit æquale annulo plano, qui per diametrum tranſit, & circulus baſis æquetur annuli circulo.

SIt annulus ſolidus circularis quoad ſuperficiem ABCDGE, & cylindrus, cuius rectangulum per axem SRQP ſit æqualis annulo plano ASFIEO, & SCD circulus circulo baſis QOP. Dico hunc annulum eſſe æqualem cylindro SVRO.



Probatur. Nam inſcribatur primo in cylindro Priſma QOPRTS baſis quadratę, & ſimiliter in annulo priſma æquale, & eiuſdem baſis EGDHAS ex præc. erunt æqualia. Inſcribantur rurſus conicæ ſuperficiei ſegmenta plana SXTPZO, & RVTQYO, & OLEHSK, & DNGAMH in annulo ſolido omnia erũt æqualia inuicem ob æquales baſes DNG, & SXT, &c. & æqualis altitudinis, ac circulus GCH: ſiquidem ex prop 41. Coroll. Tract. 32. quantùm augeſcit extima quelibet, vt GNCMH, tantùm decreſcit intima correſpondens ſuperficies, & ſumpta in æquali remotione à puncto G, vel H: quare ſupplentibus illis, quæ augeſcunt defectum ſuperficierum deficientium, omnes erunt ęqualis altitudinis ac longitudo, quam præbet circulus GCH. Quapropter ſi in cylindro QS figura ſolida tot laterum æqualium inſcribatur, cuius latera æquentur inſcriptarum annulo ſolido ſuperficierum rectis lateribus, vt QY ipſi LE, & alia alijs erunt omnes

ſuperficies ſolidæ figuræ cylindro inſcriptæ eiuſdem altitudinis, ac quę in annulo ſolido inſcriptæ fuere. Siquidē cylindri altitudo ponitur ex Theſi ęqualis annuli circulo NCH, cuius altitudinē mutuò ſe ſupplendo inuicem ęquant ſuperficies ānulo inſcriptæ, ideoque planæ ſuperficies annulo inſcriptę erunt eiuſdem altitudinis ac illæ, quæ in cylindro fuere inſcriptæ. Sunt autem etiam baſes æquales, vtpote triangulorum GNn, & QYO æqualium ex theſi. Quare omnia ſolida priſmata annularia inſcripta annulo ſolido erunt ęqualia priſmatibus inſcriptis in cylindro V. g. GNDCAMH priſma ānulare priſmati recto RVTQYO ex prop. 19 Tract. h. quia ſcilicet ſunt eiuſdem baſis RY, & altitudinis RV.

Si ergo in annulo ſolido tot priſmata annularia inſcribantur, quot poſſunt inſcribi, ſimiliterque in cylindro tot quot poſſunt inſcribi, omne ſpatium annuli priſmata ipſi inſcripta, & cylindri cylindro inſcripta adęquabunt, ſed facta qualibet multiplicatione ſemper perſeuerant ęqualia: Ergo ſoliditas cylindri, & ſoliditas annuli, quas æquant, erunt æquales.

COROLLARIVM.

HInc autem eſt ſuperficies globoſas tum annuli, tum cylindri eſſe æquales, quia omnis plana annulo inſcriptibilis, quę figurā eius quantū poteſt multiplicata æquant, ſunt omnia ſi ſimul ſumantur ſupplentibus Incrementis excreſcentium defectibus deficientium æqualia omnibus planis figuræ cylindri æquali numero laterum ſimiliter inſcriptę, vt patet ex oſtenſione præc. propoſ.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

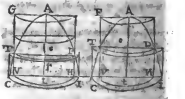
Annulos ſolidos cylindris æquales, vel proportionales reperire.

*DEſcribatur Paraboſicum conoides IAC, & circa eum cylindri deſcribantur æqualis altitudinis DF, & IT inſcribatur quoq; eiſdem ęquè altus DV. Dico reſiduum ablato DV à TI cylindro eſſe annulum ſolidum æqualē ſolido cylindro DF.

Probatur. Quia annuli ſolidi reſidui ablatis cylindris inſcriptis à circumſcriptis omnes ſunt remanentibus ad altitudinem axis reſidui euecti, & circumſcriptis cylindris ęquales.

Quod ſic oſtendo in Parabola AIC eſt EA ad eA ex propoſ. 5. tract. 24. vt quadratum EI ad quadratum eD, ſed EA eſt dupla Ee ex effectione. Ergo etiam quadratum EI duplum erit quadrati De; quare etiam circulus ex EI ſemidiametro duplus erit circuli ex eD radio, & ideo etiam cylindrus IT duplus erit cylindri DF ex prop. 5. tract. h. ſed etiam NF duplus eſt cylindri VD. Ergo cylindrus IT, & NF ſunt æquales, ablato itaque cylindro VD communi annulus reſiduus ſolidus IT remanebit ſolido cylindro DF æqualis.

Eadem ratio, atque oſtenſio erit de cylindris quibuſcumque inſcriptis, & circumſcriptis, alijs. Sic EA eſt ad eA ex prop. 5. Tract. 24 vt quadratum IE ad quadratum Pe, & ita circulus EI radio, & cylindrus IT ad circulum ex Pe, & cylindrum PG, ſed EA ad eA eſt, vt 3. ad 2. Ergo etiam cylindrus IT ad cylindrū PG, vt 3. ad 2. erit, ſed huic HG



cylindrus quoque eſt, vt 3 ad 2. quod ſit, vt altitudo EA ad altitudinem eA. Quare cylindrus ET, & HG erunt æquales ex 9. l. 5. ablato itaque communi cylindro PV remanebunt æquales cylindrus reſiduus VO, & annulus IOHPT, & ſic de cæteris.

COROLLARIVM.

HInc colliges omnes ſuperficies orizontales horum annulorum ęquari cylindricis V. g. EHCV, vel PF. Ratio eſt, quia baſes dicunt eandem proportionem ac cylindri. Vnde ſi cylindri creſcunt per augmenta æqualia etiam baſes annulares eodem modo creſcent.

EXPENSIO III.

De quorumcumque corporum ſoliditate, quorum ſectiones baſi parallelæ ſint ſimiles, aut æquales.

CVm aliquando corpora reperiantur, quæ irregularis quidem figuræ ſunt, ſed tamen cubationem non reſpuunt; hinc de illis agere oportet; quorum multa attulit Ambroſius à Sancto Vincentio agens de Ductibus; ſed nos ab ipſo non niſi vnicum exemplum excerpemus.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

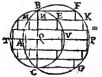
Si dentur tria plana communem habentia altitudinem; in quibus ductæ æquidiſtantes parallelæ ſint continuè proportionales, & ex illis planis corpora formentur, ea corpora erunt æqualia.

DEtur portio circuli BGFC, & BAC ex quibus ſuperficiebus rectangulè in linea CB vnitis intelligatur corpus erectum, quod ex duabus partibus ſuperficie globoſa eorūdem arcuū FPG curuata; vel BAC comprehendetur ex alia parte verò ſuperficiebus planis BFOC, cuius vnicum latus curua terminatur FPG alterum verò plano BAC. Dico hoc corpus eſſe æquale corpori, quod ex duobus ſemicirculis BVC quadratè vnitis exoritur.

Inſcribantur ſingulis planis ęqualis altitudinis rectangula, vt TQ, & VQ, & QA, & cętera ſingulæ lineę in plano BDC ductæ ſingulis in plano BAC exiſtentibus eędem ſint, & ex illis componantur rectangula eas rectangulè vniendo, illa erunt æqualia quadratis ex lineis in BAC conſtitutis. Siquidem ex prop. 35. lib. 3. Rectangulum ex PQ, &

QA

QA æquale eſt quadrato QA, ſed QS æquatur VQ, ideoque quadratum VQ æquabitur rectangulo ex PQ, & QA. Sic ex eadem prop.35.lib.3. rectanguli ex KN, & NM æquatur rectangulo ex BN, & NC, quod æquatur quadrato NE ex eadem propoſ. vnde rectangulum KN, & MN æquale erit quadrato NE, ſic dicas de alijs. Si ergo ex iſtis baſibus parallelepipeda intelligãtur erecta æqualis altitudinis omnia erunt æqualia illis ex prop.19. Tract.23. quæ quadratis baſibus æqualis altitudinis eriguntur V.g. parallelepipedum PQ ſuper rectangulum ex PQ, & QA erectum erit æquale parallelepipedo ex VQ quadrato erecto in altitudinem eandem P m, & ſic dicas de alijs.



Si ergo hęc duo corpora alterũ ex AFGC ſuperficiebus, & BAC; alterum ex ſemicirculo AVC dicantur inęqualia. Dicatur V. g. corpus ex AFC conſtitutum maius quantitate e. Et inſcribantur tot parallelepipeda in vtroque modo prędicto, vt ex prop.17. Tract.23. fieri poſſe oſtendimus donec ſolida in vtroque inſcripta relinquant minorem quantitatem, quam e, tunc rectangula ſolida in corpore ex ſemicirculis AVC, quod dicitur maius conſtituta, eſſent adhuc æqualia illis, quæ in corpore minori ex planis AFGC, & BAC conſtituto inſcripta ſunt, hęc itaque eſſent maiora corpore, in quo inſcripta ſunt. Siquidem ſuperarẽt differentiam e, quę inter corpus, & corpus inuenitur, quod omnino abſurdum eſt.

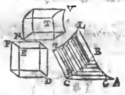
COROLLARIVM.

ERit autem eadem oſtenſio etiam ſi SVC non ſit ſemicirculus, ſed portio circuli. Quamobrem generaliter quando dantur tria, aut quatuor plana, in quibos ductę ſingulę, aut ſint tres continuę proportionales, aut quatuor proportionales, ex quibus nimirum medijs fiant rectangula ęqualia extremis, illa plana rectangulè compoſita, & ſecundùm alia latera ſuperficiebus rectangulè ſe coniungentibus, ſeu curuis, ſeu rectis circumueſtita prout latera curua ſont, ſed recta conſtitoent corpora ęqualia illis, quę ſuperficiebus operiuntur, quorum parallelæ æquè diuiſę inſcriptę ęquè poſſunt, ſic propoſ. 70. Tract. 24. ſemielipſis FNG cum altera eiuſdem portione rectangulè vnita, & ſuperficiebus ſibi inuicem inſidentibus veſtita conſtitoent corpus ęquale triangulo ſemiparallelogrammi FG ſi ſecundum diametrum FG rectangulè vniãtur, & ſimiliter rectangulis ſibi inuicem ſuperficiebus terminentur: idem aſſeres de prop.69. eiuſdem Tract. & ſic de ceteris.

THEOR. II. PROP. XXIII.

Duo corpora quaſcumque habentes baſes in eandem altitudinem ſubuecta parallelo ductu baſis, inuicem erunt, vt ipſæ baſes.

AD perfectam corporum cubationem pręter conos, & cylindros videtur etiam neceſſarium noſcere omnia ea corpora, quę cylindri naturam ſapiunt, & ſunt ea, quę parallelis lateribus inuicem à quacumque baſi, ſeu elliptica, ſeu cuiuſcumque incertę figurę in altum eleuentur, ſiue obliquè, ſiue rectè, dummodò in alteram, ęqualem, & ſimilem baſim terminent: ea verò cylindracea dicemus.



Sint duo corpora ABCL, & DEF, quorum baſes ſint BAC, & DE altera quidem quęcumque BAC V.g. curuis AB, & BC, altera verò quadrata DE. Dico, quod ſicut BAC eſt ad DE: ita corpus SACL ſuper primam baſim ad corpus DEF ſi ſint æquealta.

Inſcribantur tot rectangula in baſi ABC ex propoſ. 1. Tr. 30. donec minus euadat ſpatium, quòd inter curuas AB, & BC intercipitur, & rectangula inſcripta, omni data poſſibili quantitate, & ſuper illis parallelogrammis, vt GH erigantur parallelepipeda GHI, æquè eleuata, ac ſolidum DEF ob eandem altitudinem datorum ſolidorum ABCL, & DEF, quę omne quoque ſpatiũ poſſibile inter circ. curuam ſuperficiem, & ſuperficies ſolidorum inſcriptorum occupabunt: Quare parallelepipeda inſcripta ipſa tandem ABCL ſoliditatem adęquabunt: Nam ſi non ęquarent, nonę inſcriptioni parallelepipedorum, & ideo ſuarum baſium daretur locus in baſi ABC, & ſic contra Theſim omni poſſibili quantitate minus ſpatiom non remanſiſſet. Verùm parallelepipeda ſingula inſcripta, vt GHI ſunt ad ſolidum eiuſdem altitudinis DEF, vt baſes V. g. GHI ad DF, vt baſis GH ad baſim DE, & ſic de alija.

Quare ex prepoſ. 17. lib 5. omnia quoque ſolida inſcripta in ABCL erunt ad ſolidum DEF, vt baſes omnes parallelogrammę GH, & cet. inſcriptę in ABC baſi ad baſim DE: ſed illę ęquant ABC baſim ſolidi ABCL, ſicut & parllelepipeda inſcripta ſolidum ABCL, vt dixi, ergo ſolidum ABCL erit ad ſolidum DEF ex 7. prop. lib.5. vt baſis ABC ad baſim DE.

Sit deinde aliud corpus MVT ęquęaltum, vt ABCL. Dico iterum, quod corpus ABCL erit ad MTV corpus, vt baſis ABC ad baſim MT. Quoniã ABCL corpus eſt ad DEF corpus eſt, vt ABC baſis ad DE baſim, & ob eandem rationem *conuertendoque* DEF corpus MTV corpus, vt DE ad MT erit ex *æquo* ABCL corpus ad MV corpus; vt ABC baſis ad MT baſim.

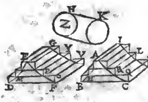
COROLLARIVM.

HInc patet, quod ſi hęc ſolida ęquales habue-eint baſes, & altitudines ęqualia ſint, quia eum referantor, vt baſes, & baſes referantur proportione æqualitatia, ſequitur, vt etiam ipſa corpora eadem ęqualitatis ratione inuicem ceſpondeant.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si corpora cylindracea æqualium ſimilium, & ſimiliter poſitarum baſium ſint diuerſæ altitudinis inuicem correſpondebunt, proportione, vt altitudines.

SInt corpora cylindracea AXCI, BDFG, quæ obtineant baſes omninò æquales quoad latera oresm, & poſitionem. Dico ea eſſe inuicem, vt altitudines.



Probitur. Nam cum baſes ponantur omninò ſimiles, ſi diuidantor parallelia in partes æquales erunt omnia rectangula ciecumſcripta baſibua æqualia V. g. BQ rectangulo DO, & alis ſingula in BAC ſingulis in DBF. Quare, & parallelepipeda ſuper eas baſes erecta ſolida ipſa circomſcribentia erunt ad inuicē, vt altitudinea V. g. BCT ſolidū erit ad DFV ſolidū, vt altitudo QC ad altitudinē OV. Sic rectangulū ſolidum NRL ad ſolidū MPY ob æquales baſes NR, & MP eſt, vt altitudo RL ad altitudinē PY ideſt vt ſolidum BT ad EV ſolidum, & ita dicaa de omnibus alijs. Quare ea prop. 17. lib. 5. ita erunt omnia ſolida BCT, & NRL, & cęt. parallelepipeda in corpore ſolido BCAT circumſcripta ad omnia ſolida parallelepipeda DFV, MPY, & cęt. in corpore DFFG circumſcripta, vt altitudo QT ad OV. Ergo & ipſa corpora talia erunt, cùm omnis poſſibilis circumſcriptio tandem ipſa ſolida caęquet, vt toties diximus.

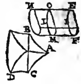
COROLLARIVM.

HInc autem colligitur, quod etiam ſi baſes non ſint ſimiles, idem tamen ſequi. Nam detur ſolidum KZ, cuius baſis Z non ſit ſimilis baſi CABI ſed tamen ęqualis, & ideo baſi FBD, ſitq; eleuatum ſuper illam cylindraceum, quoddam corpus ad eandem eleuationem cylindracei DFG ex pręc. Coroll. erunt ęqualia cylindraceum DAFG, & ſuper Z, ſed CABI cylindraceū refertur ad FDXG, vt altitudo AI ad altitudinem EG. Ergo etiam ad corpus in Z locatum æquale ipſi FDBG referetur, vt AI ad EG, ideſt vt AI ad æqualem XH altitudinem corporis Z.

THEOR. IV. PROP. XXV.

Cylindracea Corpora, quorum reciprocantur baſes, & altitudines ſunt æqualia, & æqualium cylindraceorum reciprocantur baſes, & altitudines.

SIt corpus cylindraceum ABCD, & aliud EFIO: Sitque baſis ABC ad baſim FEI, vt altitudo EO ad altitudinem CD. Dico hęc corpora eſſe ęqualia. Quod oſtenditur eodem modo, ac prop. 12. Tract. b. fiant enim OLMN eiuſdem altitudinis



ON, ac CD, eritque ex pręced. IFO ſolidum cylindraceum ad NOLM corpus eiuſdem baſia, vt altitudo EO ad altitudinem ON, ſed vt EO ad ON ex hypotheſi, ita eſt baſis ABC ad baſim EIF vel OLM, vt autem ABC ad baſim OLM, ita eſt ex prop. præced. ſolidum AXCD ad ſolidum OLMN. Ergo eidem ſolido OLMN ſolidum EIFO, & AXCD eadem dicunt proportionem altitudinia EO ad ON altitudinem. Quadere ex 7. lib. 5. erunt hęc ſolida cylindracea inuicem æqualia. Secunda quoque pars eodem modo probatur ac prop. 12 h.

COROLLARIVM.

HInc enaſcitur omnes cylindros Ellipticos nimirum quorum baſis Ellipſis eſt eſſe ęquales ſi obtineant, vel baſes, & altitudines æquales, vel baſes altitudinibus reciprocè proportionales: Item eſſe ad inuicem in ea proportione quà baſes ſi fuerint tantum æquales altitudine, quod ſi fuerint æquales baſibos tantùm ſe inuicem referre, vt altitudines. Quibus poteſt addi quod ſi fuerint ſimiles habeant triplicatam ſoorum diametrorum, ſeu axium proportionem. Quia omnes portiones axis ad applicatas ad diametrum eandem proportionem dicunt ex def. ellipſium ſimilium prop. 51. Tract. 24. Ideoque omnia priſmata, ſeu parallelepida in eis inſcripta ſimilia. Vnde, &c.

EXPENSIO IV.

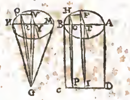
De Conis Ellipticis, atque conis in lineam rectam terminantibus.

SVnt coni diuerſæ rationis ob diuerſam baſim, quod ſit elliptica, vel hyperbolica, de quibus ſoliditas prętereunda non eſt; vnde ſit.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Conus in rectam lineam terminans eſt ad conum in punctum terminantem eiuſdem baſis, & altitudinis, vt 3. ad 2.

*SIt conus ABCD, quem deſcripſimus pr. 8. tr. 25. in lineam rectam terminans. Dico, quod ad conum MNG eiuſdem baſis, & altitudinis ſe habet, vt 3. ad 2.



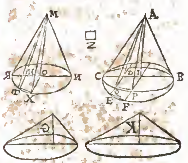
Probatur. Inſcribantur enim in cono in lineam terminante priſmata hoc modo. Ducantur per ſubtenſam FH, & OT parallelas planum FP, PT. Rurſuſq; per PT, HO parallelas plana PTI, OHP, eritq; priſma baſis quadratæ FHTOIP, fiat verò in baſi æquali, & ſimili ex Theſi coni MNG eadem operatio conſtituendo ſuper æqualem baſim, & ſimilem QVSY pyramidem, quæ erit æqualis altitudinis. Cum itaque priſma, & pyramis ſint æqualis altitudinis, & baſis erunt ad inuicem, vt priſma ad pyramidem. At verò priſma baſis quadratæ ſe habet ad pyramidem eiuſdem baſis, vt 3. ad 2.. Si ergo in cono in rectam terminante inſcribantur talia priſmata, quo vſque deſcribi poſſint, & in cono item acuto æqualis numerus pyramidum ſuper æqualem ſimileq; baſem, omne ſpatium tum huius, tum illius coni abſorbebitur, & occupabitur, quare cum ſemper omnis inſcriptibilis multitudo priſmatum in cono in rectam terminante, & in cono in punctum finiente ſe habeant, vt 3. ad 2. nimirum, vt priſma quadratæ baſis ad pyramidem, erit ipſe conus in rectam terminans ad conum in punctum finientem, vt 3. ad 2.

Quod verò priſma quadratæ baſis ſit ad pyramidē eiuſdem baſis, & altitudinis, vt numerus 3. ad numerum 2. patet. Nam priſma, quod ſemper obtinet quadratam baſim eſt triplum pyramidis triangularem baſim habentis ex pr. 22. p. 1. h. at vero pyramidis quadratæ baſis ex prop. 5. par. 1. h. eſt dupla pyramidis triangularis baſis. vnde priſma ad talem quadratæ baſis pyramidem ſe habebit, vt 3. ad 2.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Conus Ellipticæ baſis, & eiuſdem normalis altitudinis, ſeu rectus, ſeu obliquus eſt æqualis cono eiuſdem normalis eleuationis baſis circularis; quæ tamen ſit æqualis Ellipſi cono Elliptico baſim ſubſternenti.

*PRobatur. Nam ſi aſſumantur in baſi coni circularis partes æquales peripheriæ circuli NYR; ſubtendanturq; rectæ. vt XT, & ab iiſdē punctis perpendiculares ad diametrum ducatur XO, & TH, & cæt. Deinde ad ellipticā baſis coni elliptici BAC circūſcribatur circulus BFC, cui diuiſo in æquales numero partes, vt circulus NYR eodē modo rectæ ſubtrahantur EF, & ſegmentis peripheriæ ab iiſdemque punctis in axem BC normales ferantur, vt ED, & FI, & ducatur ſubtenſa ambitus elliptici PQ & fiat prorſus eadem operatio, quam



exhibuimus prop 24. tract. 30. erunt ſpatia elliptica PTQD æqualia ſpatijs circularibus XTOH, vt ibi oſtenditur. Si ergo ſuper hæc ſpatia Pyramides eleuentur, cum in eandem eleuationem extollantur, erunt æquales; quamobrem, & ipſi coni erunt æquales. Si enim coni eſſent inæquales ſequeretur illud idem abſurdum, quod in pyramidibus aſſignauimus pr. 21. p. 1. h. nempe ſi circularis V. g. eſſet minor quantitate Z; quòd ab eo tot pyramides inſcriptæ auferri poſſent, donec remaneret aliquid minus quantitate Z proximè, & tunc facta æquali numero ablatione Pyramidum inſcriptarum continuè æqualium quantitate pyramidibus à cono circulari minori ablatis; remaneret aliquid maius in cono elliptico BAC, vtpote maiori quam reſiduum coni circularis NMR. Si ergo auferatur adhuc ab hoc cono elliptico BAC aliquid æquale, vel maius proximè differentiæ Z, cùm & à cono circulari MNR idem numerus pyramidum æqualium deduci poſſet, auferretur aliquid maius differentia Z à reſiduo coni NMR minore, quam differentia Z, quod eſſet abſurdum.

CO-

COROLLARIVM I.

*HInc primo enaſcitur conos ellipticos, ſi ſint ęqualium baſium, & ęqualis altitudinis eſſe inuicem ęquales; quia tertiò circularis baſis ęquabuntur.

COROLLARIVM II.

*QVod ſi habeant baſes altitudinibus reciprocè proportionales, quod ſint ęquales. Nam ſit coni altitudo IA ad altidudinem coni K, vt baſis coni K ad baſim coni BAC, ſitque coni K elliptici ęqualis baſis coni G, & ęqualis altitudo, & ideo conus circularis G, cono K elliptico æquetur; ſicut conus NMR circularis, ęqualis baſi, & altitudine æquatur cono BAC: Erunt ergo iſti coni circulares G, & NMR ex prop. 12. h. ęquales, quod & reciprocentur baſes, & altitudines, quod ſint ęquales baſis coni G ipſi baſi coni K, & altitudo altitudini ſicut; & ęqualis baſis coni NMR baſi coni BAC, & altitudo altitudini.

Quare ſicut illę reciprocantur, ſic & iſtę, erit q; baſis coni NMR ad baſim coni G, & altitudo coni G ad altitudinem coni MNR. Ideo coni NMR & G ęquabuntur ex h. Propterea que BAC ęqualis cono NMR, & K conus cono G ęqualis, inuicem ęquales erunt.

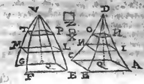
COROLLARIVM III.

*DEducitur quoque conos Ellipticos æqualis baſis, & diuerſę altitudinis eſſe ad inuicem, vt altitudines; quia conus circularis NMR ęqualis altitudine, & baſi, & ſoliditate cono BAC, V. g. eſt ad conum G, vt altitudo ad altitudinem, qui conus cono K ſoliditate baſi, & altitudine ſit ęqualis quare elliptici CAB, & K ad inuicem referentur, vt altitudines, & idem dicendum de baſibus inęqualibus, ſi altitudines fuerint ęquales.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Duo corpora coniformia, quorum omnia plana baſi ipſorũ parallela ſimilia ſint, & inuicem plana huius planis alterius, erunt ad inuicem, vt baſes: dummodo in æqualem altitudinem aſſurgant.

SInt duo corpora ADBC, & EVGF; quæ in eandem altitudinem VQ vel DQ normalem eleuentur, in quibus ſi ducantur plana æquidiſtantia, ea inueniantur ſimilia inuicem, & baſi, cui parallela ſunt, & etiam æque eleuatis ſecantibus planis in alio corpore ductis; ita vt ne dum IN V. g. planum ipſi AC, & NO ipſi IN, vel AC; ſed etiam AC baſis huius ADC ſit ad EG baſim alterius, vt planum ſecans NI ad ſecantem LM, & NO ad PT. Dico, quód eadem proportione referentur, vt baſes.



Probatur. Nam ſi intelligantur circumſcripta cylindracea corpora æquealta: tum inuicem, tum & cylindraceis corporibus alterius, erunt hæc ad inuicem, vt baſes ex prop. 23 huius. Si ergo hæc corpora CABD, & EFGV aſſerantur non ad inuicem referri, vt baſes, ſit minor proportio ABCD corporis ad EVGF corpus, quam ABC baſis ad EFG baſim, ſit ea minor quantitate Z. Itaque tot cylindracea corpora circumſcribantur donec differẽtia, quæ inter ABDC corpus, & ipſa ſit X minor differentia, quàm Z, & tunc omnia iſta cylindracea corpora corpori ABCD circumſcripta dicent minorem proportionem ad EVGF, quam baſis ABC ad baſim EFG, quod contra oſtenſa eſt. Siquidem cum ſingula referãtur in ABCD ad ſingula in EVGF, vt baſes ſingulæ ſingulis. Singulæ verò baſes obtinent ex theſi eam proportionem, quæ AC ad EG; etiam omnia parallelepipedũ referentur, vt ABC baſis ad EG baſim, & tamen minorem dicerent cum enim coniforme corpus ABCD eſſet ad EVGF in minori proportione quantitate Z, & circumſcripta corpora cylindracea nõ addant quantitatem a corpori ABCD, ſed ſolùm quantitatem minorẽ, vtique dicent ad EVGF minorem proportionem baſis ABC ad baſim EFG.

Quòd ſi dicas, ſi ABCD corpus aſſeratur maius in proportione, nam tunc EFGF minus erit, quam EFG ad ABC baſim, vnde eodem argumento vti poteris; cùm itaque ABCD ad EVFG non poſſit obtinere, neque maiorem, neque minorem proportionem baſis ABC ad baſim EGF, conſequetur eandem.

COROLLARIVM I.

*HInc enaſcitur; quòd, ſi hæc corpora fuerint æqualium baſium, quòd ſe referent, vt altitudines: quia plana quæque huius ad plana ſecantia alterius in eaſdem numero partes erunt æqualia: Quare, & cylindracea corpora huic circumſcripta, ad cylindracea alteri circumſcripta erunt, vt altitudines huius ad altitudines alterius, & cæt. vt eodem argumento perſuadere tibi poterit.

COROLLARIVM II.

HInc rurſus eſt, quod ſint æqualia, ſi ſint ęquales, tum altitudines, tum baſes.

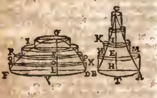
THEOR. V. PROPOS. XXIX.

Solida corpora, quorum omnes baſes baſi parallelæ ſimiles ſint, & altitudines obtineant baſibus reciprocè proportionales æqualia ſunt.

*SIt ABC corpus quoddam, cuius altitudo normalis HC ſe habeat ad altitudinem alterius corporis GL; vt baſis DYF ad baſim ATB reciprocè. Omnes verò ſectiones, quæ parallelæ baſi fiunt, ſint ſimiles ipſi baſi. Dico hæc corpora eſſe ęqualia.

Probatur. Nam circumſcribantur vtrinque ſolida cylindracea eodem numero multiplicata. Diuidantque altitudines in partes proportionales ex 18. lib. 5. & in ſingulis corporibus V. g. in ACBT inuicem æquales, ſicut, & in OOFY vnde erit altitudo EH ad altitudinem LO, vt HC ad GL, ideſt ex Theſi, vt baſis DYF ad baſim ATB. Vnde ex

pr.25. cum hæc cylindracea ATSN, & OYPQ habeant altitudines baſibus reciprocè proportionales erũt



æqualia. Idem aſſerendum de cylindraceo MENK, & POQR, nam altitudo TI, ideſt æqualis SH ad OS, aut æqualem OL, vt baſis POQ ad baſim NSM reciprocè, erit quoque ſolidum MENK ſolido POQR æquale, & idem aſſeras de omnibus alijs circumſcriptibilibus. Quapropter cum omnia cylindracea ſolido AEST circumſcriptibilia ſint æqualia ſolidis cylindraceis ſolido DOFY circumſcriptibilibus, ſi hæc multiplicentur quantùm multiplicari poſſunt, occupabũt ex pr.14 Tr.33. omnẽ quantitatem poſſibilem, quæ inter ſolida exhibita, & cylindracea circumſcripta intercipi queat. Vnde nulla quantitate poſſibili illa excedẽt, quare etiam ipſa corpora, quorũ omnia plana baſi parallela ſint ſimilia, & habeant altitudines baſibus reciprocè proportionales inuicem erunt æqualia.

EXPENSIO V.

De Conoidibus Hyperbolicis.

Conoides Hyperbolicum efficitur ab hyperbola circa ſuum axem verſata. Quare ſi ſecetur à plano rectangulo ad axem illa ſectio erit circulus.

At ſi à plano ad axem obliquo, ſectio erit ellipſis, vt ſupra oſtendimus Tract. 25. Expenſ 5.

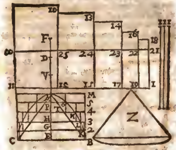
THEOR. I. PROPOS. XXX.

Conus inſcriptus ad quodlibet Hyperbolicum Conoidem eam proportionem habet, quam diameter cum tranſuerſa diametro tota, ad diametrum, & diametrum tranſuerſam cum dimidio eiuſdem.

Sit quodlibet Conoides, ſeu rectangulè, ſeu obliquè ſectum ABC Dico conum inſcriptum item ABC habere eam proportionem ad conoidem, quam diameter BA cum diametro tranſuerſa AD, tota inquam BD ex iſtis compacta habet ad duas, nimirum diametrum BA, cum diametro tranſuerſa AO, & huius dimidio FO, ideſt EF.

Progreſſ. 1. Sit itaque conus Z; cui conus BAC habeat eam proportionem, qua BO reſpicit FB. Dico huic cono conoidem hyperbolicum eſſe æquale; quod ſi tale non eſt, erit aut maius conoides, aut minus, ſed neutrum eſſe poteſt; Ergo erit æquale.

Progr. 2 Nam maius ſit, ſi id eſſe poteſt, & inſcribatur in conoide figura inſcripta, & circumſcripta, ex multis cylindris conſtans eiuſdem altitudinis. Quales inſcripti ſunt RE, LG, & quales circumſcripti RG, KH, adeoque multiplicentur ex propoſ.14.tract.33. vt figura circumſcripta ſuper inſcriptam minus addat, quam conoides ſuper conum Z. Fiatque CM cylindrus ex fruſtis cylindrorum 1 2, 2 3. & cæt. conſtans æqualis, tum altitudinis, vt priores. & æqualis baſis. Quia ergo circũſcripti cylindri minus excedunt inſcriptos, quàm conoides conum Z. & hæc circumſcripta cylindrorum multitudo eſt maior, quam conoides erunt etiam inſcripti cylindri maiores cono Z.



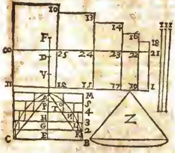
Progr. 3. Et quia vt diximus ſupra propoſ. 7. tract h. Cylindrus MC ad conum ABC inſcriptum habet proportionem, triplam habebit eam, quam tripla OE, vt sũt lineę III ad OI, & vt FE ad TV, quia TA eſt tertia pars diametri AB, & AV tertia pars totius AF. Quia itaque cylindrus CM eſt ad conum inſcriptum BAC, vt III ad OB, at conus inſcriptus BAC ad conum Z habet eam proportionem, quam BO ad FB ex *æquo* cylindrus CM ad conum Z erit, vt III ad FB. Verum illæ III lineæ habent eam proportionem ad OB, quam BF ad VT, vt dixi. Ergo *permutando* DB ad VT eam habebit proportionem, quam III lineæ ad BF, ideſt quam cylindrus MC ad conum Z, ideſt DA ad VA, ideſt 2. ad 1. & EA ad AT, ideſt 3. ad 1. quoniam OA, & BA componunt BD: at AV, & AT componunt VT.

Progr. 4. Cylindrus itaque primus B S pars magni cylindri, cuius altitudo MB ad primum inſcriptorum EK eiuſdem altitudinis es habet proportionem, quam baſes circuli, & circuli, quam quadrata eorum, & quadrata, quam quarta pars quæ tandem pro latere habent applicatas SE, & GK, itaque cylindrus E S ad cylindrum KE habet eam proportionem, quam applicatæ quadratum SE, quę etiam radius eſt ad quadratum applicatæ EG ijſdem muneribus fungentis; Quadratum verò BE ad quadratum GE habet eam proportionem, quam rectangulum ex DE, EA quale eſt 10. 11. ad rectangulum DG, GA quale eſt 12. 13. ex 6. Tract.24. Propterea que cylindrus E B. ad EK cylindrum erit, vt rectangulum 11. 10. ex DE, & EA ad rectangulum 12. 13. ex GO, & GA lateribus. Eodem argumento vteris ad oſtendendum cylindrum C3. vel quod idẽ B 2. ad cylindrũ GL habere proportionẽ, quam rectangulũ ex DE EA, ſc.1011. ad rectãgulũ ex HD, HA, quod eſt 14.15. & ſic de alijs; Quare omnes V.g. ex 19. Tr.17. quatuor cylindri æquales B E. 2 3. 4. 5. ad õnes V.g. cylindros inſcriptos EK, GL, HL, PO habebũt eã proportionẽ, quã quatuor rectangula æqualia 11.10. ad quatuor 12 13. 15 14. 16 17. 18 19. Dixi autẽ quatuor V.g. tot .n. erunt quot cylindri

 inſcripti

inſcripti, & tot inſcribentur, quot oportet.

Progr. 5. Ducta itaque 21. 8. internallo 25 12 quantum eſt AE habebimus ſeriem quadratorum decreſcentium 8. 10. & 25. 13. & cęt. vſque ad 21 18. & rectangulorum item decreſcentium 11.25 vſque ad 21 19. quæ decreſcunt: rectangula quidem vnico decremento arithmetico quoad latitudinem, at quadrata duplici decremento arithmetico ſecundùm vtrumque latus longitudinem, latitudinem; Quare ex 12. tract. 27. erunt integra rectangula V. g. quatuor ad deficientia eiuſdem numeri, & altitudinis dupla, vt etiam potes videre, Nam deficientia 15 24. 15 23. 17 21. 19 21. includunt decem partes rectanguli quale eſt 19. 21. At quatuor æqualia primo 11 25 maiori, viginti partes includût. Vnde ſi vtriſque addatur rectangulum 11 25 erit proportio quinque ęqualium ad quinque decreſcentes minus, quam dupla.



Sic omnis quadrata V. g. quatuor æqualia comparata 4. quadratis decreſcentibus ſunt magis, quam tripla, vt ex prop. 14. Tract. 27. vt & etiam ex calculo colligere licet, nam quatuor quadrata æqualia ad decreſcentes ſe habent, vt 100. ad 30. At ſi vtrinque addas idem quadratum ſunt minus, quam tripla cum ſe habeant, vt 125. ad 55.

Vnde ſimul quadrata æqualia cum rectangulis æqualibus ad quadrata decreſcentia cum rectangulis decreſcentibus habebunt proportionem 2. ad 1. & magis, quam 3. ad 1. quæ proportiones aggregatę ex 32. Tract. 17. ſunt, vt 12. ad 5. & ideo habebunt proportionem magis, quam 12. ad 5. Vel pluſquam diametri DE ad partem eius VT, quæ ex progr. 3. eſt, vt 2. ad 1. ſcilicet DA ad AV, & 3. ad 1. ideſt AE ad AT, ſi tamen ab vtriſque quadratis, rectanguliſque æqualibus, & quadratis, rectanguliſque inæqualibus decreſcentibus excludas maximum. At ſi includas iam quadrata, rectangulaq; integra, & maxima erunt reſpectu quadratorum decreſcentium, minùs quam 2. ad 1. & quam 3. ad 1, ſcilicet minus, quam 12. ad 5. vel DE ad VT.

Progr. 6. Propter hoc cylindri quoque æquales, ſi compares V. g. quatuor ęquos quatuor decreſcentibus exclusis maximis V. g. E 2. G 3. H 4. T 5. ipſis EK GL HN TO qualis comparatio eſt inſcriptorum erit eorum æqualium proportio ad decreſcentes inſcriptos plùs, quam 12. ad 5. quam DE ad VT. At ſi compares multitudinem cylindrorum, æqualem æqualium numero cylindris decreſcentibus, ſed incluſis maximis V. g. 5. qui faciunt cylindrum CM ad quinque K KH LT NP OA veluti comparantur æquales cum circumſcriptis, eorum proportio eſt minus, quam 12. ad 5. ideſt minus, quam DE ad VT; Eò quia, referantur, ita cylindri MC ad cylindros inſcriptos conoidi, & circumſcriptos decreſcentes, vt rectangula æqualia rectangulo 10. 11. reſpiciunt rectangula decreſcentia, dummodo æqualia numero ſumantur, vt progr. 4. oſtenſum eſt.

Prog. 7. Cum ergo cylindri 2 2. & cæt. ideſt totus MC ad figuram cylindrorum inſcriptam maiorem habeant proportionem, quam DE ad VT habebit quoque maiorem proportionem ad illam inſcriptorum cylindrorum figuram, quam ad conū Z: Siquidem progr. 3. ad conum Z oſtenſus eſt cylindrus MC habere proportionem, quam DE ad VT. ideſt quam 12. ad 5, ſi enim quatuor cylindri, E 2. G 3. & cæt. quatuor decreſcentibus comparati minoribus illis KE, CL, HN, & cæt. dicunt maiorem proportionem, quam DE ad VT, quantò magis, ſi omnes, quibus conſtat cylindrus CM, comparentur omnibus inſcriptis, qui ſemper minores numero ſunt, nempe vna vnitate minus cum vltimus cylindrus in conoide inſcribi nequeat, qui habeat altitudinem PA.

Progr. 8. Hinc autem ſequitur conum Z figura inſcripta eſſe maiorem, cum illi cylindrus totus MC, quia figuræ inſcriptæ dicit maiorem proportionem, quòd eam ſecundùm plures eius partes contineat, quàm ad conū Z; hoc autem eſſe nequit, cum oſtenſum ſit progr. 2. figuram cylindrorum inſcriptam cono Z eſſe maiorem.

Progr. 9. Si verò ſit conoides minus cono Z circumſcribatur, & inſcribatur talis figura ſolida ex multiplicatis cylindris, vt circumſcripta addat ſuper inſcriptam quantitatem talem, quæ ſit minor quantitate illa, qua conoides à cono Z, in quantitate deficit. Itaque circumſcripta cylindrica figura erit minus cono Z, quia enim conoides cono Z eſt minus, & inſcripti cylindri minus ſunt, quam conoides, & minus circumſcripti cylindri excedunt inſcriptos, quam conus, conoidem, vtriq; conus circumſcriptis cylindris maior erit, & ipſi erunt illo minus.

Progr. 2. Deinde ea omnia conſiderentur, quæ prog. 3. 4 5. dicta ſunt.

Progr. 10. Cum ergo omnes cylindri æquales MC cylindrum magnum componentes ad quinque cylindros circumſcriptos minorem habeant proportionem, quam DE ad VT, ſiquidem probatum eſt progr. 4. rectangula æqualia quale eſt primum 10. 11. ad rectangula decreſcentia 21 18. minorem habere proportionem, quam tripla, & dupla ſcilicet 5. ad 12. nimirum quam DE ad VT ſi vtriſq; addantur maximo quale 10. 11. & ideo cylindri quoque æquales cylindrum CM componentes, qui ex progr. 3. cylindris decreſcentibus eadem proportionem dicunt, quam rectangula ęqualia decreſcentibus, ſi vtriſque addantur maximi, vt hic facere oportet, quia primus E 2 cylindri CM eſt etiā circumſcriptus, dicent proportionem minorem ad cylindros decreſcentes, quam DE ad TV.

Et hinc eſt quod cylindri circumſcripti ſimul ſumpti erunt maiores cono Z, ad quem cylindrus MC dicit eandem proportionem, quàm DE ad TV ex progreſſ. 3. Sed ex progreſſ. 9. maior conus Z, probatus eſt. quam cylindri circumſcripti ſimul ergo eſſet maior, & minor, quod eſt abſurdum.

Cum itaq; conus Z, neque maior, neq; minor eſſe poſſit conoide hyperbolico conus Z, & conoidea erunt æqualia, ideoque quam proportionem dicat conus inſcriptus, BAC ad conum Z eam dicet ad conoidem; ſed ad conum Z dicit proportionem

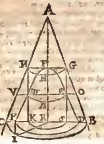
quam;

quam BA ad BE: Ergo conus inſcriptus BAC dicet ad coooidem Hyperbolicum eam proportionem, quam BA ad BE; nimirum quam diameter BA, & tranſuerſa diameter AD habet ad diametrum eandem FA, & tranſuerſã diametrum AD cum dimidio eiuſdem tranſuerſæ diametri, nimirum DF.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Quæcumque rectæ ducuntur in conoide hyperbolico rectangulæ ad planum hyperbolæ generantis uſque ad ambitum coni Aſymptotici ſunt æquales inuicem.

SIt conus ABC rectus, Aſymptoticus ſectus plano per axem exhibente ſectionem hyperbolicam DAB, quæ conoidem generet, & ſior Aſymptoti eiuſdem AB, & AC, fiant ſectiones OHN rectę ad axem KA, quę per verticem hyperbolicum tranſeat, & aliæ, vt AIC, quæ ei æquidiſtent, & à puncto B, quo ſecat Hyperbolam generantem normales ad B C erigantur, vt BI. Dico BI, & aliæ ſimilea ſi adſint eſſe ſingulę æquales lineę FN, & ideo inuicem.



Probatur. Nam rectangula FE, & EC ſingula ſunt æqualia quadrato FN, vt ex prop. 46. Tract. 24. de conicis, ſed etiam quadrata ex AE, & EC ſunt æqualia quadrato AI. Erguquadratum ex BI, & FN ſunt æqualia; Vnde & latera eorum BI, & FN erunt æqualia.

THEOR.. III. PROPOS. XXXII.

Solidum fruſtum aſymptotici coni conoidem Hyperbolicum cingens æquat cylindrum, cuius axis æquet axem Hyperbolæ generantis, & radius baſis æquet lineam tangentem eius verticem, & in ambitum Aſymptotici coni terminantem.

SIt vt ſupra conus Aſymptoticus BAC cingens coooidem hyperbolicum DFE, ſitque cylindrus SKGHN, cuius baſis GHN habeat pro radio FN verticem hyperbolę generantis tangentem, & in conum aſymptoticum BAC terminantē. Altitudo verò, ſeu axis ſit RF idem, qui etiam eſt axis conoidis; Dico ſpatium NCIS DF fruſtum ſolidum aſymptotici coni, cingens conoidem cylindro deſcripto SKGHN eſſe æqualem.

Prob. Solidi cylindri cylindrum KG diuidentes, & fruſto KNAB annuli circūſcripti æqualis altitudinis ſemper erunt æquales ex prop. 23. h. Cor. vt baſes. Quamobrem ex propoſ. 22. Tract. h. & corpora etiam ipſa erunt æqualia.

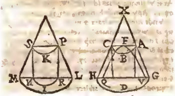
Quod autem baſes ſint æquales oſtenditur. Nã annulus quicumque CIBDB baſis corporis cingentis æquat NHE quẽcumque baſim cylindri; eo quis ex præc. EI æquet NF. Ex prop. verò 18. tract 30. XE EI circulū æquat annulum CIBOB: ſiquidem circulus ex EI radio, & circulus ex EB radio æquant ex IR circulum, ideſt ex CR: ablato itaque ex ER circulo reſtant circulus ex EI, ſeu ex FN ex præced. ęquales lineę, & annulus CIBDE baſis corporis conoidem cingentis æquales.

Idem verò dicas de quolibet alio ſpatio, ſiue maiori, ſiue minori, vt de ſpatio FNVMHEOGF, qui eadem ratione æquatur cylindro MG.

THEOR. IV. PROP. XXXIII.

Conoides Hyperbolicum iiſdem poſitis æquatur ſpatio, quod Cylindrum prædictum circumcingit.

PRobatur. Fruſtum coni ACBGH, in quo conoides, æquatur fruſto coni KSPLM, in quo cylindrus ex hypoth. & ſpatiũ FAGVQHCF cylindro BKSNR æquatur P ex 31. h. Aufer ergo à fruſto coni PXSMIL cylindrũ KPSRN, & à fruſto coni GABCHD ſpatiũ circumcingens conoidem ęquale cylindro, remanebitque conoides FVQ æquale ſpatio ſolido circumcingenti cylindrum PKSMNIL.



COROLLARIVM.

QVare colligitur, quod habita cognitione Aſymptotos conoidis hyperbolici, & baſis eiuſdem, facilè deueniemus in cognitionem eius ſoliditatis. Aſymptotos autem reperiemus ex propoſ. 47. Tract 24. de conicis ſectionibus, Habita autem diametro GH habebimus quoque ex propoſ. 12. Tract. 25. baſim ODH datis verò aſymptotis ſoliditatem quoque coni venabimur ex prop 7. h. inquirendo ſoliditatem cylindri illum conum comprehendis, cuius conus GDHX eſt tertia pars. Pariter id efficiemus de cono ABCX ſublata altitudine conoidis, & ablato hoc cono ABCX ab illo GDHX erit fruſtum ABCGDH ex quo auferemus cylindrum PSKRIN, & reſiduum ex præced. erit ſoliditas Hyperbolæ.

EXPENSIO VI.

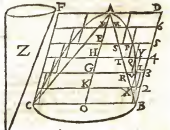
De Conoidis Parabolici proportionibus.

SOlidum Parabolicum efficitur, à parabola circa ſuum axem verſata vſque dum ad terminum vnde diſceſſit redeat, vt diximus Tr 25. in def. Ex. 4. Quare ſi ſecetur plano rectangulo ad axem illa ſectio erit circulus, ſi ſecetur plano obliquo illa ſectio erit Ellipſis, vt probauimus Tract 25. Expēl. 4. ſed modo de eorum ſoliditate agendum eſt.

THEOR. I. PROPOS. XXXIV.

Conoidale Parabolicum quomodocumque ſectum, ſeu rectè, ſeu obliquè habet proportionem ſeſquialteram ad conum inſcriptum.

ESto conoidale parabolicum ABC, in eoque inſcriptus conus item ABC, ſitque ſuperficiei ſecantis diameter BC, in qua tum conus, tum conoides exiſtat. Axis verò AO, & A erit vertex, tum trianguli, tum conoidalis: Circa verò conoidem cylindrus ſit eiuſdem altitudinis, ac conoides, conuſque inſcriptus habens latera AD, & FC parallela axi AO; baſim verò BC, cono, conoidique communem.



Sitque conus Z ſeſquialter cono BAC. Huic cylindrus erit duplus, quia eſt triplus coni inſcripti, eſt ſicut numerus 3. ex 7 h ſeſquialter numero 2. ſed triplo numeri 2. nempe 6. eſt ſubduplus, numeruſq; ipſe 6. duplus numeri 3.

Dico itaque hunc conum Z ſeſquialterum cono BAC eſſe æqualem conoidi prædicto.

Progr. 1. Quod ſi talia non eſt, erit conus Z, aut maior, aut minor conoide, ſed nec maior, nec minor eſſe poteſt; Ergo æquale erit cono ipſi conoides nam ſi eſt maius, ſit maius quantitate P.

Et Probabitur. Quod non poſſit eſſe maius conoides cono Z ſine implicantia, & abſurdo. Circumſcribatur itaq; & inſcribatur conoidi figura ex fruſtis cylindrorum conſtans, ita vt quodlibet fruſtum habeat baſim aliquam ex applicatis ordinatim ad axem AO, & ſint æqualis altitudinis, vt eſt cylindrus IO inſcriptus, LX circumſcriptus, habens pro diametro baſis ſuæ circularis applicatam IK; Tot verò inſcribātur, & circumſcribantur: donec ſpatium, quo figura circumſcripta ſuperat inſcriptam ex prop. 14 Tract. 33. minus ſit, quàm quantitas ea, qua conoides ſuperat conum, & ſic figura inſcripta erit maior cono Z cum minus diſſecat à quantitate maiori conoide, quam conus 3 à conoide maiori, quàm conus Z.

Progr. 2. Tunc, quia cylindri ſunt omnes æqualis altitudinis ea ad inuicem proportione gaudebunt, qua gaudent baſes ex prop. 5. Tract. h. Proportio verò baſium, quę ſunt circuli eadem eſt, quæ quadratorum ex prop. 40. lib. 6. quarum ſemilatera ſunt applicatæ 10, & XI: quadrata verò applicatarum ex prop. 5. tract. 24. eam habent proportionem, quam interceptæ diametri portiones: Itaque ita eſt cylindrus O 2 ad cylindrum 10, vt baſis, ſeu circulus, cuius diameter, & ſemilatus quadrati ambientis 20 ad circulum ſimilis rationis IXI ſed vt circulus ad circulum, ita quadratus ad quadratum, & ex 18. l. 5. quarta eius pars, quale eſt quadratum, cuius latus eſt 20 ad quadratum, XI, & ita intercepta portio diametri AO longitudine ad AK ex citat. 5. Tract. 24 & ita etiam ob paralleliſmum linearum in triangulo BAO linea 2 K, vel 20 ad KX. Quare ex 16. l. 5. O 2 cylindrus ad cylin. O I erit, vt 2 X ad KX. Idem autem dicendum de alijs cylindris. Nam ita eſt cylindrus 3 X ad cylindrum XV vt quadratum 3 G, vel 20 ad quadratum VG, & ita eſt AO ad AG, & 20 ad EG, & ideo ex 16. l. 5. eſt cylindrus X3 ad cylindrū inſcriptum XV, vt 20, vel æqualem 3 G ad GR. Ex eadem ratione cylindrus G 4 ad cylindrum GQ, vt 20. vel H4 ad TH; ſicque de alijs vſq; ad MN vbi nullus eſt cylindrus inſcriptus.

Progr. 3. Si ergo omnes lineę in vnam colligantur longitudine ęquales, qualis vna ex ipſis 20 ſi comparentur eum lineis omnibus ab axe OA ad coni latus deductis, quarum vna eſt XK habebunt proportionem duplam; quia EA diagonalis ſecat omnes ſimul ſumptas per medium, ita vt omnium linearum ſimul media pars ſit intra BAO alia extra. Cum ergo lineę ęquales qualis 20 habeant ad quinque in cono deductas qualis 2 X eſt vna, proportionem duplam, etiam cylindri ſimul omnes quinque æquales diametris baſium, & altitudine ad quinque cylindros in conoide inſcriptos conſequentur proportionem duplam.

Nam vt OI eſt ad O 2 ſic XX ad OR, & vt KX ad 2, & ſic GR ad OR, ergo ex pr. 25. l. 5. vt OI, & XV ad O 2. & ideo ad duplū O 3 ſic XX, & GR ſimul ad O2, & ideo ad eius duplam OR, X2. & ſic dicas de alijs gradatim procedendo.

Progr. 4. Quare totus cylindrus illis conſtans, & inſuper cylindro DN; nempe cylindrus DC habebit ad inſcriptos quinque proportionem pluſquam duplam: Idem vero cylindrus erat coni X duplus, vt ſupra dictum eſt, quia factus eſt coni BAC ſeſquialter: Figura igitur inſcripta ex cylindris minor eſt cono Z; quod eſt abſurdum, cum poneretur maior, eo quia circumſcripta figura minus adderet ſuper inſcriptam, quam conoides ſuper conum Z, & ideo cum figura circumſcripta ſit maior conoide etiám inſcripta erit maior cono Z, cum tamen probata ſit minor.

Progr. 5. At ſi aliquis aſſerat cono Z eſſe minus conoides. Figura iterum eodem modo inſcribatur & circumſcripta ſuperet inſcriptam tali quantitate quæ ſit minor, ea qua conoides deficit à cono Z, eritque figura circumſcripta minor cono Z, ſiquidem figura inſcripta eſt minor conoide, quæ & exceditur à circumſcripta minus eo, quo conus excedit conoidem, & ideo neceſſariò conus Z eſt maior ipſa figura circumſcripta.

Progr.

Progr. 6. Sit itaque primus xylindrus figuræ circumſcriptę O 2, ſecundus XL, tertius GY, & cęt. ſintque fruſta cylindrorum æqualium tot numero O 2, K 3, & G 4, & cęt. Itaque, vt eſt fruſtum O 2 ad cylindrũ O2, vt primus circũſcriptor: Sic baſis circularis, cuius radius BO, vt fruſti cylindri, ex BO ad eundẽ circulũ, vt baſis cylindri circũſcripti vtque circulus ad circulũ, ita quadratum ad quadratum, & ſic quarta pars quadrati, cuius latus eſt radius BO ad quartã partem eiuſdem quadrati ex 18. lib. 5. vt prius, eſt enim eadem ſub duplici conſideratione, vnde habet proportionem æqualitatis. Non ſic verò cętera fruſta cylindrorũ comparata cum cylindris circumſcribentibus. Nam ita eſt X3. cylindrus ad KL cylindrum, vt circulus cuius radius 2 X, idest BO ad circulum 1K, & vt circulus ad circulum, ita quadratus ad quadratum, & eius quarta pars, cuius latus 2 X ad alterius quartam partem, cuius latus IK, vt autem quadratum 3 K ad quadratum TK, ita eſt AO ad AK, & ita ob parallelas K 3. vel BU ad XX, & ita in quibuſcumque arguendum: quare omnia fruſta cylindrorum æqualium inter BO ad omnes cylindros circumſcriptos eam obtinebunt proportionem, quam latera æqualia omnia qualia 2O 2X ipſorum cylindrorum radij ad ductas 2O, KX, RG, & cęt. ab axe ad latus coni inſcripti vt ſupra pr. 5 ex prop. 25. l. 5.

Progr. 7. Lineæ verò æquales A 2 incluſiuè vſque ad 6. ſunt duplæ ad alias ab X vſque ad N ſi ſimul in vnam longitudinem redigantur, vt dixi. Si vero addamus vtriſque BO propter cylindrum primum 2X, qui vnus ex circumſcriptis eſt, & vnus ex æqualibus cylindri DC, erunt omnes à 2 & NO vſq; ad 6. ſex lineę ſex lineis inter 2N minus quàm duplæ, cum hę poſtremæ non dimidio creſcant per additionem BO, ſed æqualiter. Quare cylindri quoque æquales fruſta cylindri DC ad cylindros circumſcriptos erunt minus, quam dupli.

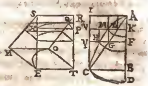
Progr. 8. Sed cylindrus DC ex illis ſex cylindris æqualibus conſtans eſt duplus coni Z, ergo ex prop. 7. lib 5. figura circumſcripta eſt maior cono Z, cum cylindrus maior CO ad figuram circumſcriptam dicat minorẽ proportionem, quod eſt cõtra id, quod ſupra dictum eſt prog. 5. conum Z eſſe maiorem ipſa figura circumſcripta. Cum ergo conus Z, nec maior, nec minor ſit conoide erit æqualis ipſi conoidi. Quare cum ſit triangulo inſcripto SAC ſeſquialter, etiam conoides cono inſcripto erit ſeſquialterum.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Conoides parabolicum, & ſingulæ partes ipſius æquantur partibus coni priſmatici eandem altitudinem, & eandem baſim obtinentis.

SIt ſemiparabola ABC, quæ ſufficit ad demonſtrationẽ, & intelligatur efformare corpus parabolicum ABCO, cuius partes ſint AXM, & FAH, deinde ſit priſma TNRS, ex rectangulo CABS, & ex triangulo SAC, in quo ſit conus priſmaticus ex pr. 26. h. KSOTE. Dico, quod & totum ABCD ęquatur priſmatico cono RSTE, & ſingulæ eius partes XAM partibus PQSXR intercipientibus eandem altitudinem.

Pr. Nam ex pr. 59. tr. 24. Applicata SKI tH, & MK & quęcũq; alia dãs pũcta in parabola M, H eſt media proportionalis inter KL, & XV inter, & FG, FY, & ideo ex pr. 19. l. 6. rectangulum KL, KV æquat quadratũ XM, & ita dicas de rectangulo FG, & FY, quod ęquat AH quadratum, & de quocumq; alio. Omnia verò rectangula ex XL, & KV, & XY, FG, & cęt. ideſt parallelepipeda æquealta ſuper eas baſes erecta ex propoſ. 8. Tract. h. æquantur parallelepipedis æquęaltis ex quadratis HF, & MK ſingula ſingulis, & ita quartę ellipſium in illis inſcriptæ quartis circulorum in quadratis inſcriptis ex prop. 26. tr. 30.



& ideo ſolidę quartæ cylindrorum ſolidis quartis ellipſium æquabuntur, ſingulæ ſingulis æquęaltis ex propoſ. 37. Cor. tr. h. Ideoque ex prop. 19. l. 5. quadrans cylindri ex quadrante XM ęquabitur quartæ cylindri PQX, & cęteris cæteri, quia æquealti extolluntur ſuper æquales baſes quadrante, nimirum ex radio KM, & quadrante ellipſis deſcriptæ in rectangulo PQX, quis ſcilicet dicunt eandem proportionẽ tũ baſes, tũ ſolida ſuper KM, & QPX baſes erecta, quam quadratum ex KM, & rectangulum ex PX, ideſt SV, & PQ, ideſt KL ęqualis.

Cum itaque omnia ſolida æquealta inſcripta, vel circumſcripta quartæ parti conoidis ACBD æquent omnia ſolida inſcripta in priſmatico cono KOTS, & hęc ſi omni poſſibili numeroſitate multiplicentur tandem acceſſura ſint ad æqualitatem quadrantes quidem ſolidi quartæ parti conoidis; Parallelepipeda verò ex quartis ellipſium priſmatico cono RSOTS ſequitur, vt etiam quarta pars conoidis AHCBO, & priſmaticus conus RSOTS ſint ęqualia. Vnde ſi, & priſmaticus conus quadruplicetur ſuper quatuor quadrantes TOE ellipſis integræ, vel circuli integri deſcribendo, & ſic quoq; parabolicum conoides. Etiam quadruplicatum conoides Parabolicum, & priſmaticus conus æquabuntur ex prop. 18. lib. 5.

Quod, & de ſingulis partibus intelligitur, cum valeat idem argumentum quocumque loco æquèalto tamen, ducantur plana ſecantia, tum conum priſmaticum, tum conoides parabolicum. Poſſemus hanc propoſ. reducere ad impoſſibile. Sed hæc ſufficiet ne hoc argumentum reductionis ad impoſſibile continua iteratione replicetur.

EXPENSIO VII.

De ſphæroidibus.

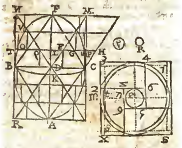
VSus ſphæroicorum corporũ frequentior eſt in comercijs humanis, ideo eius cubicatio magis quoque vrgens eſt, talia verò eſt ex noſtro ingenio, lumine tamen deſumpto à Luca Valerio, quod idem aliter probat.

THEOR.

THEOR. I. PROP. XXXVI.

Semiſphæroide ſi ſit conus inſcriptus eiuſdem baſis, ac circulus ſemiaxe ſphæroidis ductus, & altitudo ſit eadẽ ac alterius ſemiaxis, hic conus erit æqualis reſiduo cylindri eiuſdem baſis, ac altitudinis deducto ipſo ſphæroide.

Sit ſphæroides ABCF, & ſit eius dimidio CFB inſcriptus conus BFC, cuius baſis CEB, ex diametro axis V. g. minoris, at altitudo, vt DF alterius ſemiaxis maioris (quod, & è contra eſſe poteſt baſis ex axe maiori, & altitudo ſemiaxis minoris) Sit deinde cylindrus MB eiuſdem baſis CEB, & eiuſdem altitudinis FD; à quo ſit ablatum, ſemiſphæroides CIFOB, & remaneat ſcaphium CI POBMN. Dico conum CFB eſſe æqualem reſiduo ſcaphio CIFOBMN.



Prodatur, & Progr. 1. In Ellipſi rectangulum HL, LG eſt æquale quadrato LI ex prop. 19 lib. 6. eo quòd LI ſit ex prop. 60. Tract. 24. media proportionalis inter LH & LG. Sed LH æquatur ipſi QP, & LG reſiduum reſiduo QT; ſiquidem tota HL, LG, vel LO æquatur toti PT ob parallelas CH, & FB, & CM, & BN: Ergo rectangulum QT, & QP æquatur quadrato LT: Vnde etiam quatuor quadrata ex LP, & quatuor rectangula TQ, & QP æquabuntur. Fiat itaque quadratum 38. ex diametro CB, ſitque in eo quatuor rectangula ex TQ, & QP cuilibet lateri applicata ſecundùm latus maius QP, ſcilicet x 8 reſtabit x3. æquale fruſtum lateri Z 8. ideſt QT, quare ſi aliud rectangulum el 38. applicetur ſecundum latus QT æquabitur ipſi 32. vnde latus maius occupabit lõgitudinem 34. ideſt QP, & remanebit portio æqualis ipſi QT, & ſic agea de omnibus quatuor rectangulis, relinquentq; quadratũ 25 69 cuius latus 6 z æquabitur lineæ 8 Q. à qua ad adæquandum PT æqualem 3 x, duæ longitudines ablatæ ſunt æquales inuicem EP, & QT nimirum 3 Z, & 64. ab x 3 quare reſiduabitur 6 z æqualis lineæ EQ. Deſcribãtur rurſus quadrata quatuor ex LT, ideſt quadratum totum OT ex 6 1. 2. vt remaneant rectãgula æqualia circumquaq; nempe quatuor rectangula ex PI, & ST qualia ſunt rectangulum 37. & & 83. & cæter. Quia itaque quatuor quadrata 7 e quatuor rectangulis æquantur x4. X Z, & cæt. ſi hæc, & illa intelligantur auferri à quadrato toto 3 x 8, reſtabunt æqualis quadratum 69. & telarium. circumquaque nempe quatuor ambientis rectangula 37. & 78. & 88. & 83 Et idem ſemper ſequetur quoquo puncto trahas parallelam HT.

Progr. 2. Cum itaque ex 41. lib 6 Eucl. ita ſit quadratum ex 3 x ad quadratum 69. vt circulus inſcriptus quadrato 3 x, ideſt baſis coni CEB ad circulum inſcriptum quadrato 69. ideſt ſectionis EQ coni: ita *diuidendo* erit quadratum ex 3 x ad quatuor rectangula 36. &c. reſidua, vt circulus in quadrato 3 x inſcriptus, ideſt CKB ad annulum reſiduum, cuius latitudinis menſura eſt n m, vel 23, vel TQ, qui circumambit conum. Vt autem quadratum ex 3 x ad telarium, vel quadratum annulum m n, vel TQ, ita eſt quadratum ex 3 x idem ad quatuor quadrata ex IL qualis ſunt 8 e, ob eorum ſupra oſtenſam æqualitatem, & vt quadratum 3. x ad quatuor quadrata ex LT: ita circulus inſcriptus in quadrato ex 3 x, ideſt baſis coni CKB ad circulum ex diametro e t, ideſt LI, & *diuidendo* erit quadratum ex 3 x ad telarium reſiduũ ex quatuor rectangulis 37. 83. & cæt. vt circulus inſcriptus in 3 x ad annulum reſiduum, cuius latitudo t m, vel Ps, qui circumambit ſphæroidem. Quadratum autem ex 3 x ad quadratum 6 9. dicit eandem proportionem, ac ad tellarium ex quatuor rectangulis ſc. 37. & cæt. ob eorum æqualitatem ſupra oſtenſam. Ergo etiam circulus inſcriptus in quadrato ex 3 x ad circulum inſcriptum in 6 9. dicet eandem proportionem ac ad annulum, cuius latitudo t m, vel IP. Quapropter ex 7. lib. 5. æquabuntur annulus planus t m, & circulus in 6 9 inſcriptus, ideſt circulus QS, qui eſt ſectio coni baſi parallela, ideoque ablatis æqualibus 6 9. & annulus, cuius latitudo t m remanebunt æqualia circulus radio e t, vel LS, & annulus, cuius latitudo n m, vel E P, ſicut æquantur annulus SP circumambiens ſphæroidem ac circulus baſis coni, vel ſectio, quæcumque eius QS quæ per idem planum ſecans ſphæroidem, conum, & cylindrum ſit facta.

Progr. 3. Cogitentur itaque cylindrus, conus, & ſphæroides ſecti planis PT æquidiſtantibus, quæ diuidant cylindrum in ſegmenta æqualis altitudinis, & in cylindros circumambientes æquealtos in eadem numeroſitate. Quia itaque, vt circulus ad circulum, ita cylindrus eiuſdem altitudinis ad cylindrum, qui in illis ſint collocati ex propoſ. 5. h. circulus PT ad circulum QS erit, vt cylindrus DP ad cylindrum QD. Quare *diuidendo* erit circulus PT ad annulum reſiduum planum ex QS ambientem conum, cuius latitudo XP, vel TQ, vt cylindrus PCTB ad annulũ reſiduum æquealtũ ſimiliter ambientem conũ EPCTQ: ſed circulus PT habet eandem proportionem ad annulum planum EP, QT, quam ad circulum IO ex applicata LI tamquam radio, quia ſupra progr. 2. oſtenſi ſunt æquales talis circulus ex IO, & annulus ex EP, QT ambiens conum. Ergo etiam cylindrus PB ad annulum ſolidum PECDST, & ad cylindrum IV ex baſi IO eamdem dicent proportionem. Ergo annulus ſolidus DEPTQS, & cylindrus IV ex baſi IO ex 7 l. 5. æquabuntur. Ablatis itaque iſtis æqualibus cylindrus IV ex baſi IO, & annulus ſolidus EPDSQT æqualia reſtabunt cylindrus æquealtus QD ſuper baſim QS circumſcriptus cono HMD, & annulus SPVTO reſiduus à cylindro TVO.

Progr. 4. Semper igitur perſeuerant æquales quicumque cylindri circumſcripti cono, & quicumque circumſcripti annuli ſcaphico reſiduo ſphæroidis ſc. QD cylindrus, & annulus ſolidus ſphæroidem circumcingens PIOVT. Fiãt itaq; tot

cylindri

cylindri circumſcripti ſpheroidi,& cuno ęquealti, donec omne ſpatiom puſſibile, quod inter cunum eiuſdem, & vltimam eorum ſuperficiem expleant; ita quod nullum ſpatium poſſibile remaneat inter ov ſuperficiem annuli ,& ſphęroidia ſob ſuperficiem; ſicut nec inter ſuperficiem cyliudri, circumſcripti,& coni ; Iam æquabitur multitudo cylindrorũ cono circumſcriptorũ ipſi, & ſphæroidi annulorum ſphęruidem ambientium; cum cuim omne ſpatium poſſibile remanens inter ipſoa , & corpora , quæ veſtiunt, abolitum ſit, iam ipſa æquabunt: Quare cum multitudo cylindrorum omnia poſſibilia æquetur multitudini annulorum, eom data quacumque multiplicatione perſeuerent æqualia,etiam cunus ſfc,& inuulucrum ſolidũ cnm sofi ſphæroidem circumcingens æquabuntur.

Quod eſt oſteudetur tedigendo oſtenſionem ad impoſſibile. Nam ſi couus cfa,& ſcaphiom cmnsofi ſunt inæqualia, ſit minot cunus cfb. & deſcribatur circa ipſum talia multitudo cylindrorum donec differentia x inter ipſoa,& cunum ſit minor, quam differentia inter ſcaphium, & cunum, quæ ſit y. Itaque figora cuno circũſcripta minot erit ſcaphio cmnsofi cum minus differat à cono mini eī,quam ſcaphium; Ergo etiam minor,quam cylindri ſolidi pt vot ſcaphio circumſcripti, quia minus differt à quautitate minori , quod contra præcedentem demonſtr. eſt , In qua cylindri ſolidi coni,& annuli ſolidi ſca h.j oſtenſi ſunt æqualea. At ſi aliquis aſſerat ſcaphium cono eſſe m uus. Iſte inſcribat tot ſolidos annulos in ſcaphio,tot cyliudros in cono donec differentia x inter ipſos , & conum ſit minor, quam inter conum,& ſcaphium. Tunc, quia maior eſt conus , & cyliudri coni inſcripti minus differuut ab eo, quam ipſe à ſcaphio erunt maiores , quam ſcaphiom . Ergo multò maiores erunt ipſa figora cylindrorum ſcaphio inſcripta, quòd probatum eſt ſupra impoſſibile. Ergo conua cfb ſcaphio cmnbofi, neque erit maior,neque erit minor.

THEOR II. PROP. XXXVII.

Semicylindrus ſemiſphæroide circumſcriptus ſe habet ad ſemiſphæroidem , vt 3. ad 2. ad conum verò inſcriptum , vt 2. ad 1.

PRobatur. Nam ſemicilindrus bm ſe habet ad conum cfb. vt 3. ad 1. ex propoſ. 7. Tr. h. Quare ad reſiduũ ablato cono ſe habebit,vt 3.ad 2. ſed inuolucrum ſphæroidis ſolidum cmnsofi eſt ęquale conu cfb ex dictis ; Ergo erit ad ipſum cylindrus , vt 3. ad 1. ſicut eſt ad conum , quare ad reliquum , ſcilicet ſphæroidem ablato ſcaphico ſe habebit , vt 3. ad 2. Sic dicas de alia medietate ſphæroidis,& cylindri eam circumſcribentis; quare ex prop.18. lib.5. erit duplus cylindrus bm ad ſphęroidem totam fcba, vt 3. ad 2. Quapropter ad conum inſcriptum, qui eſt 1 reſpectu cylindri ſe habebit, vt 2. ad 1., ex propoſ. 29. & 30. Tr. 17.

COROLLARIVM I.

HInc eſt,quod idpnteris aſſerere etiam ſi ſectiones, non ſint per axes , & cylindrus obliquua,& conus ſcalenus,& baſes ellipſes. Nam erunt ellipſea ſimiles, vtpote, qoia ſuot parallelæ, tum quę fiunt à cono, tum quæ fiunt à cylindro, tum quæ ſunt ſectiones ſphæroidis ex propoſ 4. & 12. & 22. Tract. 25. Vnde eodem prorſus argumento poteris concludere cum ſit, vt rectangulum ad rectangulum ex axibus ellipſium, ita ellipſis ad ellipſim; ſufficit innuiſſe. Tu ex tuo ingenio argumentum ſi placet, diſpone.

COROLLARIVM II.

HInc patet, quæ dicta ſont de ſphęruide, de ſphęra quoque verificari ; ſiquidem oi eſt etiam in circulo media proportionalis inter vt, vel na, & ta cum on æquetur ipſi po ob rectangulum æquicrurum nop, & na reſiduo oh , & oa radio pb, & ob parallelas pt, & sx , lineæ tx: Rectangulum verò bo, & oh æquatur qoadrato oi ex propoſ. 35. lib. 3. Quare ex propoſ. 19. 1 6. oi ; vt in prop. 36. erit media proportionalis inter tv,& at, quia ot æquat no, vel op, ſicut ao ęquat pb, ſcilicet tota at totam ob, vel æqualem ox, quæ etiam ob ſuas partes ęquales lineę ob ipſam æquat ſicut oh reſiduum reſiduum vt.



COROLLARIVM III.

HInc etiam ſequitur, idem dicendum de ſphęroidibus, quæ obtineant ſectiones per axem vtraſque ellipſim ; quod ſcilicet ſit conu , cuius baſia ſit ipſa ellipſis, quæ per axem tranſit , & alter axis altitudo ipſius, dupla . Nam omnea ellipſea, vtpute parallelę in ipſu ſphęroide erunt ſimilea , & ideo rectangula ipſam circumambientia ſimilia, ſicut in ellipſi circulari ſunt quadrata . Vnde id quod cuncluſimus de circulis circulo maximo parallelis eodem pacto concludetur de ellipſibus ellipſi maximę parallelis tranſeunti per axem. Omnes autem ellipſes baſi parallelę ſimiles erũt, quia tale corpus ellipticum madnc intelligitur formari ellipſibus axi parallelia, vt ako & ſuo ambitu per ambitũ alterius ellipſis per axem ductę ckp tranſeuntibus. Sit ergo talis ellipſis dam, & ęllipſis axi parallela akao, & in ipſo ellipſia fra parallelæ alteri ellipſi per axem fkc. Dico hanc brf ellipſim eſſe ſimilem cap ellipſi. Quod oſtenditur. Nam oia rectangulum eſt ad dga rectangulum ex propoſ. 6. Tract. 24. vt ik quadratum ad gk quadratum in ellipſi oka, ſed vt oia rectangulum ad oga rectangulum, ita eſt cip rectangulum ad bgf rectangulum ex prop 48. Tract. 24. Ergo cip rectangulum eſt ad buf rectangulum, vt ik quadratum ad gk quadratum. Vnde, & ipſa latera erunt proportionalia cum quadrata, & rectangula ſiot ſimilia. Vnde ex propoſ. 7. de ſimilitudine ſectionum con. Tract. 24. in præfatione Ellipſes ckp, & brf erunt ſimiles.

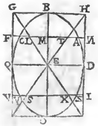


THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XXXVIII.

Fruſtum ſphæroidis æquat duas tertias partes cylindri ambientis fruſtum deducta portione coni eiuſdem altitudinis fruſti ſphæroidis eodemque plano reſecti, qui tamen conus integer habeat pro baſi ſectionem ſphæroidis per axem, & altitudinem alterum axem.

SIt fruſtum ſphæroidis ABC, cuius centrum E, & fruſtum cylindri eiuſdem altitudinis ME ſit FH, & detrahatur ei fruſtum coni HTLG eiuſdem altitudinis ME, qui cylindrus, & conus conſequantur eandem baſim circulum, qui ductus ſit radio ſemiaxe DE, & pro altitudine ſemiaxem alterum BE conſequatur. Dico, quod ſi fruſtum coni HTLG deducatur à fruſto cylindri HF remanſurum concauum inuolucrum quoddam, cui portio ABC ſphæroidis æqualis, erit.



Probatur. Nam ex propoſ. 36. h. reliquum ſolidi FH deducto fruſto ſphęroidis ABC eſt æquale fruſto HTLG; Ideo ſphęroidis fruſtum ABC remanens ab eodem corpore FH ęquabit TNHLGF concauum ſoliditatem cylindri, deducto ipſo fruſto coni HTLG.

COROLLARIVM.

HInc dato fruſto ſphæroidis minori verſus verticem CBS poterit eius quantitas inueniri ſi data ſit eius ſectio elliptica per axem, nam poterit inueniri axis minor, & maior, & ſic haberi baſis cylindri, & coni, & ex his inuenta ſoliditate coni HGS, ab ea demes ſoliditatem coni TSL, & reſiduum HTLG demes ab inuenta ſoliditate cylindri FH, & reſiduum HNTLFG æquabit portionem ſphęroidis CSA.

Si verò detur pars ſphęroidis verſus centrum ACDQ demes ſoliditatem fruſti conici TLE à ſolido DF cylindri, & reliquum NOS TELQF ſolidum erit æquale ſphęroidis fruſto ADCQ.

Si verò detur etiam DSQ demes à cylindro HQ conum GEH, & reſiduum erit ęquale ſphęroidi dimidię; ſi verò detur fruſtum centrum includens ACZY; inuentas ſoliditates conorum XES, & TSL ſubduces à cylindri fruſto NV, & quod remanet erit æquale fruſto ſphæroidis AZYC.

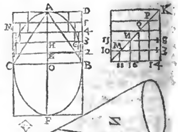
Quę etiam poſſent fieri, quamuis ſectio non eſſet rectangula ad axem; ſi tamen conorum, & cylindrorum baſes, quæ tunc eſſent ellipſes, eſſent notæ, & ideo etiam alio modo fruſtorum ſphęroicorum ſoliditatem venabimur.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIX.

Hemiſphæroides duplum eſt coni inſcripti.

SIt dimidium ſphęroidis ABC plano BC per centrum tranſeunte, ſeu normale axi, ſeu non reſecti. Dico, quod eſt duplum coni inſcripti BAC.

Præaſſumpt. Dictum eſt propoſ. 14. Tract. 28. quadrata dupiici arithmetico decremento minuta excluſo vtrique maximo ad maxima, & integra eiuſdem numeri eſſe minus, quam 1. ad 3. Quare Gnomones, qui ipſis ſucceſſiuè auferuntur, erunt ad integra eiuſdem numeri magis, quam 2. ad 3. quoniam, ſi ea adeſſent iam decreſcentis ex Theſi maximis eſſent æqualia. Quare maxima quadrata ad illos gnomones excluſo vtrinque maximo erunt minus, quàm 3. ad 2. & ſi vtrinque addas maximum, cum ſit augumentum æqualitatis quadrata ad gnomones ſucceſſiuè ablatos erunt multò minus, quam 3. ad 2. cum minus comprehendant maxima de gnomonibus, quàm quod priùs quandò non erant addita maxima. At ſi ſolùm quadratis maximis vnicum addas quadratum maximum, tunc maxima ad gnomones erunt magis, quam 3. ad 2. Ratio deſumitur ex prop. 14. Tract. 28. Dimidium enim rectangulum FP in fig illius prop. deficit ad hoc vt decreſcentia quadrata æquent $\frac{2}{3}$ integrorum; Quare gnomones ſucceſſiuè ablati erunt magis, quàm $\frac{2}{3}$ integrorum, rectangulo dimidio eodem. Rectangulum autem illud FP eſt minus, quam dimidium quadrati maximi ex prop. 15 contextu Tract. 28. quare dimidium eius erit minus, quam $\frac{1}{4}$ vnius integri. Ad hoc, vt ergo ſe habeant integra ad gnomones remanentes, vt 3. ad 2. eſſet aut auferendum dimidium rectangulum FP, ideſt minus, quam $\frac{1}{4}$ integri, aut addendū integris ipſum rectanguli dimidium & inſuper dimidiū dimidij, vel $\frac{1}{4}$ totius, ideſt $\frac{1}{4}$ illius rectāguli, ideſt minus, quam dimidium integri. Additur autem maximis maximum vnicum totum. Ergo integra vnico maximo adaucta ad gnomones reſiduos erunt magis, quam 3. ad 2. his notatis.



Probatur Progr. 1. Sit enim conus Z duplum coni inſcripti BAC. Dico hunc conum ſpheroidi dimidię eſſe æqualem, quod ſi non eſt æqualis ſit minor conus Z, ſi id euenire poteſt, & tunc (vt ſupra fecimus) inſcribatur, & circumſcribatur multitudo cylindrorum æqualem altitudinem habentium talis,, vt id, in quo circumſcripta figura inſcriptam excedit ſit minus eo, quò ſpheroidea dimidium excedit conum Z; Cum ergo figura ſolida circumſcripta ſit maior ſpheroidis dimidio BAC, & minus excedat inſcriptam, quam ſpheroides conum Z, erit maior figura inſcripta ipſo cono Z.

Cylindrus autem CD conſtat ex tot numero cylindris, quot ſunt circumſcripti, eſtque ad conum inſcriptum BAC, vt 3. ad 1. quare ad conum Z, qui eſt duplus coni inſcripti ſe habebit, vt 3. ad 2. & cylindrus CD dicet minorem proportionem ad figuram inſcriptam, quam ad conum ea minorē Z.

Progr. 2 Itaq; cylindrus primus AO ad cylindrū primum inſcriptorum OE habet proportionem, quam baſes; cum ſint æqualis altitudinis ex prop. 5. Tract. 34. qui ſunt circuli, quorum radius maioris eſt BO, minoris eſt AI. Circuli autem habent eam proportionem, quam quadrata circumſcripta ex prop. 40. lib. 6. & quadrata eam, quam quartæ eorum partes ex prop. 18 lib. 5, nempe quadratum, cuius latus eſt BO ad quadratum, cuius latus eſt EI. Quadratum autem BO ad quadratum EA Et eam poſſidet proportionem; quam rectangulum ex OF, OA ad rectangulum ex FE, & EA ex 6. Tr. 24. idem quam quadratum OF ad gnomonem 10. MK 11. ſiquidem 10. E 13. addito rectangulo 11. 13. eiuſdem altitudinis 11. 14. ac 13. a æquat rectangulū ex FE, & EA, cum latus 13 14. cū latere 13 10 æquet latus FE, & 13 11 æquet lineā EA. Itaq; ablato quadrato 11. M 10. à quadrato toto ex DE efficitur gnomon 11. MK 10. æquans rectangulum FE, EA.

Ita quoque dicendum de alijs. Cylindrus enim E 3. eſt ad inſcriptum EG, eadem ratione vt circulares baſes, & ideo vt quadrata baſium, & ideo, vt quartæ partes, nempe vt quadratum E 3. ad quadratū ex HG, & ideo ex 6. Tr. 24. vt rectangulum FO, OA ad rectangulum FH, HA, & ideo vt quadratum ex OF ad gnomonem 15. NK 16. qui fit ablato quadrato toto ex OH. Siquidem gnumon prędictus eſt æqualis rectangulo FH, & HA, quia latus 15. a eſt æquale ſegmento HA, & 15. 18. addito 18. 14 latere parallelogrammi eiuſdem altitudinis 16. 18 eſt ęquale lateri FH, cum latus 18. 34. ſit æquale ſegmento OH, & ita diſcurre de alijs.

Itaque tot cylindri æquales tot cylindris decreſcentibus comparati circumſcriptis, vel inſcriptis eam habent proportionem, quam quadrata eiuſdem numeri ęqualia, quorum vnum eſt OF gnomonibus decreſcentibus, ſed numero æquis qualia ſunt V. g. ea in quibus M, N, Q, P literæ ſunt.

Progr. 3. Nunc videndum, quàm proportionem quadrata ęqualia, dicant decreſcentibus gnomonibus. Et iam ex præaſſ. notum eſt, quadrata maxima ad decreſcentes gnomones, ſi maxima, & ęqualia ſuperent tantùm gnomones vnico maximo & ſibi æquali quadrato, dicere maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cum itaque quadrata quinque maxima ad decreſcentes gnomones quatuor M, N, Q, P habeant maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cylindrus quoque magnus habens eandem proportionem iuxta omnes quinque ſuos cylindros æquales inuicem ad cylindros quatuor dimidio ſphęroidi inſcriptos, quam quadrata quinque æqualia inuicem ad decreſcentes gnomones dicet ad illos maiorem proportionem, quam 3. ad 2. Et ideo cum ille cylindrus magnus ad conum Z ex Theſi ſit, vt 3. ad 2. Erit minor figura inſcripta in ſphęroide cono Z ex prop. 7. lib. 5. quod eſt contra demonſtrata progr. 1. oſtendimus enim figuram inſcriptam cono Z eſſe maiorem.

Progr. 4. Si verò aliquis contendat dimidium ſphęroidem Cono Z eſſe minus. Rurſus eadem inſcriptio, & circumſcriptio cylindrorum fiat adeo multiplicatis cylindris; vt id, in quo figura inſcripta exceditur à circumſcripta ſit minus, quam id in quo ſphæroides dimidiū exceditur à cono, ideſt minor differentia ea, in qua ſphæroides ipſū cono minus eſt, & tunc quia figura inſcripta minor eſt ipſo ſphæroide, quod cono minus eſt, & circumſcripta minus addit ſuper inſcriptam, quam ſuper ſphęroidem conus Z, etiam circumſcripta minor erit cono Z, & ſic cylindrus CD dicet maiorem proportionem ad circumſcriptam figuram, quam ad conum Z.

Progreſſ. 5. Conſideretur rurſus cylindrus magnus CD, eodemque modo probetur, ita eſſe cylindrum primum O 3 in ipſo, cuius ſemidiameter OB ad cylindrum circumſcriptum ei æqualem O 2, vt baſis ad baſim nempe, vt quadratum, ad quadratum, & vt quarta pars ad quartam partem; nempe quadratum OB ad idem quadratum OB, & vt quadratum ad ipſum quadratum, ita rectangulum ex FO OA, nempe quadratum ex OF ad illud ipſum rectangulum ex FO, OA, ideſt æquale quadratum ex OF. Sic quoque comparentur alij cylindri æquales portiones cylindri magni ad cylindros circumſcriptos; eritque E 3, ideſt O A ad EG, vt rectangulum ex FO, & OA ad rectangulum ex FE, & EA, & ſic dicas de alijs.

Rectangulum verò ex FO, & OA eſt quadratum, at ex FE, EA rectangulum eſt gnomon M, & ex FH, & HA eſt gnomon N, & ſic de alijs, vt ſupra explicaui progr. 2.

Et ideo omnes cylindri, qui in toto cylindro CD exiſtunt ad omnes cylindros circumſcriptos habebunt eam proportionem, quam quadrata omnia ad omnes gnomones maximo etiam quadrato addito.

Progreſſ. 6. Quadrata autem omnia maxima incluſo vtrinque maximo ad decreſcentes æquali numero gnomones reſiduos ex præaſſumpto dicunt minorem proportionē, quā ſeſquialteram, ideſt quā 3 ad 2. quare cylindrus quoque maximus ęqualibus conſtans cylindris ad cylindros decreſcentes circumſcriptos eiuſdem numeri habet minorem proportionem, quam ſeſquialterā. Quare maior erit multitudo cylindrorū circūſcriptorū ex pr. 7. l. 5. cono Z; cum cylindrus CD ad conum Z dicit maiorem proportionem, nempe eam, quam 3 ad 2. quàm ad circumſcriptam cylindrorum multitudinem. Hoc autem eſſe nequit cum hæc multitudo progr. 4. oſtenſa ſit minor cono Z.

Nota verò, quod idē ſemper ſequitur ſiue ſphęroides per centrum detruncatū ſit, ſiue rectangulè per axem, ſiue non, vnde non ſunt multiplicanda argumenta.

Cū ergo ſphęroides CBA cono Z, non ſit maius, neque minus erit æquale, & conſequenter erit duplum coni inſcripti BAC, prout etiam conum Z duplum effecimus, vel ſuppoſuimus factum.

COROLLARIVM.

Hinc emanat, quod ſphæroidides ſit æquale cono, qui habeat baſim, cuius diameter ſit duplus diametri baſis coni inſcripti, & eiuſdem altitudinis, hic enim erit quadruplus coni inſcripti, & ideo duplus hemiſphæroidi, & ideo æqualis ipſi ſphæroidi.

THEOR. VI. PROP. XL.

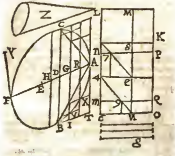
Cuiuſcumque ſphæroidis fruſtum ſiue maius, ſiue minus habet eandem proportionem ad conum inſcriptum, quam axis dimidium cum ſegmento alterius axis portionis ad ſegmentum remanentis illius alterius portionis, quæ eſt in fruſto reliquo.

Sit ſegmentum ſphæroidis quodcumque, ſeu axi rectum, ſiue non ABC, Axis AF, centrum H fruſtum, ſeu ſegmentum alterius portionis DF. Oſtendendum eſt ſphæroidis partem BAC ad conum inſcriptum BAC eam dicere proportionem, quam FD, FH, ſeu æqualem DFY ad FD.

Sit conus itaque Z, qui habeat eam proportionem ad conum CAB, quam FD, FH, ideſt YFD ad FD: Dico huic fore æqualem ſoliditatem portionis ipſius ſphæroidis.

Progr. 1. Quod ſi non ſit æqualis erit, aut maior, aut minor ſphæroidis portio cono Z ſit itaque ſi id eſſe poteſt primo ſphæroidis portio maior cono Z.

Progr. 2. Inſcribatur, circumſcribaturque pr. 84. Tract. 33. portioni ſphæroidis multitudo Cylindrorum æqualem altitudinem habentium, adeoque multiplicentur, vt à circumſcripta cylindrorum multitudine inſcripta minus differat, quā conus, qui poſitus eſt minor ſphæroidis portione ab ipſa differt, cum autem circumſcripti cylindri ſint maiores ipſo ſphæroide, & ipſum maius cono Z, erit etiam inſcripta conorum multitudo maior cono Z.



Progreſſ. 3. Secetur deinde DA in tres partes, & ſit tertia pars RA, quia YFA eſt tripla HA, & DA ipſius RA: ſi auferatur tota DA ab YFA, & RA ab DA reliquum YFD ad reliquum DR erit vt totum YFA ad totum HA.

Quoniam vt eſt YFA ad HA, ita DA ad RA, ergo vt AYF ad DA permutando, ita HA ad RA, nimirū vt YFA totum ad DA partem ita HA totum ad RA partem: Quare & reliquum YFD ad reliquum DR ſe habebit, vt YFA totum ad totum HA nempe in proportione tripla.

Tres autem lineæ æquales ipſi FO dicent ad FD proportionem triplam, quam YFO ad HR: Quare *permutando*, tres lineæ ad YFD erunt in eadem proportione, qua FD ad HR; at cylindrus circumſcriptus CT ad inſcriptū conum CAB eſt, vt tres lineæ ad FD. Conus verò CAB eſt ad conum Z *inuertendo* vt FD ad YFD, & ideo ex *æquo* cylindrus ad conum Z erit, vt tres lineæ æquales ipſi FD ad YFD, cum ergo tres lineæ prædictæ ad YFD ſint, vt FD ad HR; etiam cylindrus circumſcriptus CT ad conum Z erit, vt FO ad HR.

Progreſſ. 4. Sint ergo parallelogramma æqualia contenta ſub FO, DA, quorum primus LK tot, quot ſunt in figura circumſcripti cylindri, ſitque ON dupla DH, ideſt DE, & remanebunt DA, EP & ideo conſtituent quadratum reliquum N4. Poſtmodum a ſingulis excepto primo auferatur gnomon latitudinem habens AR quale eſt K74. & a ſequente gnomon latitudinem habens AG, vt eſt Q46. & ſic ſi alij adſint, eritque totus gnomon Q46. æqualis rectangulo FG, & GA, quod Q4 cū 96 æquent longitudinem FG eſt enim Qm6. æqualis lateri FG, & m9. lineæ AG. ſic totus gnomon F874 æqualis rectangulo ſub RA, & RF contento; nam rectāgulum an cū 74 æquat longitudinem RF: eſt enim F o 4 æqualis lateri FR, & 7 n lateri RA, & ſic dicas de alijs gnomonibus, ſi adſint.

Progr. 5. Cylindri autem æquales, vt CS, ex quibus componitur cylindrus CT magnus altitudinem eandem habentes, ac ſegmentum axis portionis ſphæroidalis, & baſis, cuius radius DB, ita eſt ad VG primum cylindrorum inſcriptorū, vt baſis nempe circulus, cuius radius DB ad circulum, cuius radius GV, & ideo ex pr. 5. h. quā quadratū circūſcriptū circulo maiori ex radio BD ad quadratū circumſcriptum circulo minori ex radio GV, & quam quarta horum quadratorum pars ad quartam partem, & ideo quam quadratum BD ad quadratum GV, & ideo quam rectangulum FD, & DA ad rectangulū FG, GA ex prop. 6. tr 24. nimirū quā rectangulum O 4. ad gnomonem Q46. & ita dicas de alijs æqualibus cylindris reſpectu cylindrorum decreſcentium, V. g. cylindrus ID erit ad cylindrum GA, vt rectangulum K 4. ad gnomonem K 74. nimirum FR, & RA, & ita ſi alij adſint.

Progr. 6. Modo videndum eſt, quam proportionem obtineant rectangula æqualia ex FD, & DA ad gnomones decreſcentes. Et primò certum eſt ex pr. 12. tr. 18. quod rectangula integra MK ad decreſcentia vnico decremento Arith. e P ſunt, vt 2. ad 1. ſed addito maximo tantùm maximis, & æqualibus ſunt magis, quam 2. ad 1. Quadrata verò maxima 8 L, & inuicem æqualia ad decreſcentia 7 e, & 9 N quadrata duplici decremento arithmetico illis numero æqualia ſunt magis, quam 3. ad ad 1. Quare ad gnomones reſiduos 8 7 4 & e 9 6. erunt minus, quam 3. ad 2. quia gnomones cum quadratis incluſis æquant maxima, at ſi addas integris maximum quadratum ex præaſſ. prop. 39. h. erunt magis, quam 3. ad 2. Ideoque rectangula tria KM æqualia ad decreſcentia V. g. duo P e, & Q e erunt magis, quam 2. ad 1. & quadrata item tria maxima 8 L ad gnomones 8 7 4. & e 96 decreſcentes duplici decremento magis, quam 3. ad 2. Ideoque ſimul ex prop. 19. Tract. 27. erunt magis, quam

quam 6. ad 5. nempe quam oN æqualis ipſi BD ad dimidiam HD, & N 6. ideſt DA ad DB, nimirum quam tota O 6. vel æqualis FD ad totam HK, quæ eſt illa, quam poſſidet cylindrus circumſcriptus ad conum Z, vt ex tertio progr. conſtat: quare cylindrus ad multitudinem conorum inſcriptam habebit proportionem maiorem, quam LB cylindrus circumſcriptus ad conum Z, & ideo multitudo conorum inſcripta erit minor cono Z, & tamen progr. 2. hæc multitudo cono Z oſtenſa eſt maior.

Quod ſi aliquis aſſerat eſſe ſphæroidem minus cono Z. Eodem modo inſcribatur, & circumſcribatur multitudo cylindrorum æqualem habentium altitudinem ex prop. 14. Tract. 23. ita vt circumſcripta multitudo cylindrorum minus differat ab inſcripta, quam ſphæroides differt à cono Z. Quia ergo inſcripti cylindri ſunt minores ipſo conoide, & ipſum minus cono Z, etiam circumſcripta figura erit minor cono Z.

Progreſſ. 7. Diſponantur deinde, cætera vt 3. & 4. progr. factum eſt, & eodem modo argumentandi vtemur. Quia ergo ex 5. progr. cylindrus æqualium primus in cylindro CT exiſtentium habet eam proportionem ad cylindrum ID eundem circumſcriptum, quam quadratum ex DB ad quadratum ex DS idem erit, vt rectangulum FD, DA, vel æquale KL ad rectangulum idem, vel æquale KL. Sic cylindrus, cuius baſis radius OI ad GV eam habet proportionem, quam quadratum ex DI ad quadratum ex GV ob rationem allatam progr 5. ſuperioris partis huius, & ideo ex expen. 1. Conic. quam FD, & DA rectangulum ad rectangulum FG, & GA, & ideo quam rectangulum O 4. ad gnomonem Q 4 S dicto rectangulo æqualẽ ex 4. progr. præced. & ita effare de alijs: quare omnes cylindri æquales ad decreſcentes cylindros circumſcriptos eam habebunt proportionem, quam omnia rectangula æqualia ad omnes gnomones incluſo maximo rectangulo, nimirum, quam KL, K4, O 4. ad SL, K 74. & Q 46.

Progr. 8. Certum eſt ex præhabitis prop. 12. Tract. 28. quòd rectangula æqualia K e. C O ad rectangula F e. & Q N habent proportionem duplam, & ideo ad reſidua rectangula, & portiones gnomonum K 8. & e Q duplam quoque, quibus ſi vtrinque addas maximum cum id, quod additur non ſit vt 2. ad 1. ſed æqualitatis habebunt maxima tria ad tria decreſcentia, incluſo maximo proportionem minus, quam duplam. Sic quadrata interga 4 8. & e 6. ad decreſcentia *conuertenda* propoſ. 14. Tr. 28. habent proportionem magis, quam 3. ad 1. & eo iò magis incluſo maximo. Quare ablatis e 7. & N 9. ad reſiduos gnomones 8 7 4. & c 9 6. & 8 L. qui ſimul cum quadratis, quę includunt, ęquant quadrata ęqualia eiuſdem numeri non decreſcentia erunt minus, quam 3. ad 1 quare KL, S 4. 40. tria rectangula æqualia ex prędictis integrata ad K L, ad gnomones reſiduos ex gnomonibus prędictis confectos obtinebunt proportionem minorem, quam ex dupla, & ſeſquialtera conſtitutam, quę eſt 6. ad 5. nempe, quam ON ad dimidiam ON, vel ęqualẽ DH, & N6. ideſt DA ad duas tertias partes DB ideſt quam tota FD æqualis lateri O 6 ad totam HK, quæ eſt ex 3. progr. præced. quam cylindrus circumſcriptus CT habet ad conum Z. Quare cylindrus circumſcriptus ad cylindrorum inſcriptorum multitudinem decreſcentem habet minorem proportionem, quam ad conum Z, & ideo erit maior ea cylindrorum multitudo cono Z, cum tamen oſtenderimus minorem, quam conus Z.

Cum itaque, nec maior eſſe poſſit, nec minor conus Z ſphæroide, ipſi erit ęqualis: ſed conus Z ad conum inſcriptum ABC eſt, vt YFD ad FD ex effectione: Ergo ſphęroides ad conum inſcriptum habebit eam proportionem YFD ad FD, nimirum, quam dimidia diameter cum maiori ſegmento, ad ipſum maius diametri ſegmentum.

EXPENSIO VIII.

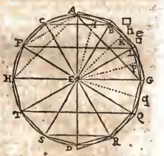
De Sphæra.

Soliditatis ſphærę cognitio; cum ſit vſibus humanis omninò neceſſaria prętereunda non eſt, & præter ea, quæ diximus in pręced. quęſt. hic principaliter modus Archimedis magis dilucidè tradendus eſt.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

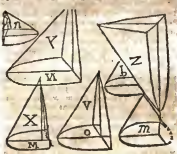
Figura ſolida ſphæræ inſcripta, quæ conicis ſuperficiebus æquè altis continetur illi cono æqualis eſt, qui baſim obtinet circulum æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ, & altitudinem normali ad aliquod latus perpendiculariter demiſſæ.

Sit figura ſolida, quæ ſolidis conorum contineatur ſegmentis V. g. cono BAC; & oppoſito BTC, circaque hunc conum circumuolutum intelligatur corpus LBACF; ita vt LBCF ſuperficies annulus intelligatur planus ſphęra inſcriptus. Sic aſſeras de corpore LGEHF, & cæt. Deinde ſit conus rectus Z, cuius baſis circulus æquet ſua planitie ſubtēſas planities omnium corporum ſphęra inſcriptorũ, & altitudo ſit radius. Dico hunc conũ Z eſſe ęqualem inſcripto corpori ſphęra GAHD.



Probatur ex prop. 16. huius. Rhombus conicus BAC a ex duobus conis aduerſis ſuper eandem baſim CB ęquatur cono X altitudinem EI obtinēti, quę eſt linea à vertice coni in latus normaliter demiſſa, & etiam baſim M ſuperficiei coni BAC ęqualem. Item conus V erit æqualis cono concauo LBECF altitudinem habens lineam EK normalem ad latus eius LA à vertice deductam, & baſim O ſuperficiei LBCF annuli plani ex prop 18. huius ęqualem, tandem idem dicas de cono concauo LGAFH, quod habeat æqualem conum y eiuſdem altitudi-

nis ac lineæ EP normaliter à vertice E in eius latus demiſſa, & baſim N æqualē ſuperficiei planæ GLHF ſphęrę ſuperficiei ſubtenſę ex 17.b. Et eadem aſſerenda de Rhombo ESDF, & concauis QRETS, & GEQTH, ſunt vtpote cō ſinguli ſint ſingulis prędictis ęquales; Erūt igitur V. g. ſex coni, duo x duo y duo



v, qui totam ſoliditatem corporis inſcripti æquabunt. At baſis coni z eſt æqualis omnibus ſimul baſibus horum conorum; quia baſis eius æquat, ex hypotheſi ſuperficiem totius corporis inſcripti, quam, & baſes omnium conorum ſimiliter æquant altitudo verò eſt æqualis eorum altitudini. Ergo cum conus z ad omnes illos conos, vt baſis ad baſim referatur ex 5. h. cum baſis ipſius ad omnes baſes proportione ęqualitatis referatur, etiam conus z conis ſex erit æqualis. Quare, & corpori ſolido ſphæræ inſcripto æquabitur.

COROLLARIVM I.

IDem etiam dicendum de ſectore aliquo ſolido V. g. LAEF, quod ſcilicet ſit factus ex Rhōbo conico BAGE, & reſiduo LBECF. Nam ſi detur conus aliquis n, qui ſuperficiei illius LBACF ſua baſi æquetur, & habeat altitudinem KE, iſte æquabitur prædicto ſectori: Siquidem habebit baſem ęqualem baſibus M, &, O conorum X, V eiuſdem altitudinis; quam ES; quia baſis M æquat ſuperficiem BAC, & baſis O ſuperficiem LBCF, & has duas ſuperficies æquat coni baſis n, quare coni baſis æquabit baſim M, & O, quare cum ſit eiuſdem altitudinis conus n æquabit etiam conos x, & v, vnde, & ſectorem LAFE.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Corpori ex conicis ſegmentis ſphæræ inſcripto conus æqualis, eſt minor recto cono, cuius baſis ſuperficiem ſphæræ exæquet, & altitudinem obtineat radium: Conus autem æqualis eidem corpori, ſed ſphæræ circumſcripto eſt maior illo cono recto, cuius baſis æquet ſuperficiem ſphæræ, & altitudo ſit radius.

PRob. Nā conus ęqualis corpori ſphæræ inſcripto habet altitudinem ES minorem, quam diameter EA, & baſim vtpote æquantem ſuperficiem corporis inſcripti obtinet minorem, quàm baſis, quæ æquat ſuperficiem ſphærę, vtpotè, quod ſuperficies inſcripti corporis minor ſit ſuperficie ſphæræ circumambientis.

Eodemque modo Prob. 2. pars, quis ille conus, qui ęquat corpus circumſcriptum ſua baſi æquat ſuperficiem maiorem corporis circumſcribentis ſuperficie ſphæræ, & altitudo eſt EP æqualis radio EA; baſis verò æquans ſuperficiem ſphærę, & altitudo radius EA conum minorem conſtituet cono, qui æqualis ſit baſis corporis ſphęram circumſcribentis ſuperficiei, & altitudinis eiuſdem.

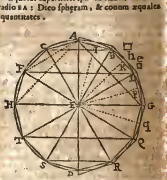
COROLLARIVM I.

ELicitur etiam. Quod ſi detur conus habens pro baſi circulum ęqualem ſuperficiei ſectoris ſphærę LAF, & alius habens pro baſi circulum æqualem ſectoris corporis circumſcripti eidem ſuperficiei; quod item conus hic poſterior maior eſt primo; ſi habeant eandem altitudinem EA; quia ſuperficies circumſcripta ſectori eſt maior ſuperficie ipſius ſectoris.

THEOR. III. PROPOS. XLIII.

Quælibet ſphæra eſt æqualis cono habenti baſim ſuperficiei ſphæræ æqualem, & altitudinem radio.

DEtur ſphæra AGDH, & conus m, cuius baſis æquetur ſuperficiei ſphæræ AGDH, & altitudo radio EA: Dico ſphęram, & conum æquales eſſe quantitates.



Prob. Nam ſphęra non erit, aut maior, aut minor ipſo cono m: Ergo illi æquabitur.

Si verò aliquis aſſerat eſſe ſphæram cono maiorem, ſic oſtendetur id eſſe impoſſibile.

Progreſſ. 1. Inſcribatur enim, & circumſcribatur figura ex propoſ. 14. Tract. 23. adeo multiplicatis lateribus, vt ſpatium, quod inter ſpæram, & figuram inſcriptam intercluditur ſit minus, quàm differentia illis V. g. h, quæ inter conum m, & ſphæram reperitur: Itaque hæc conica figura ſolida, vt IKP, & cæt. erit maior cono m; quia magis accedit ad ſphæram, quæ ponitur maior, quam conus m, cum minor ſi differentia inter ſphæram, & inſcriptam conicam figuram, quam inter conum.

Progreſſ. 2. conſideretur deinde conus aliquis z, qui ex præc. obtineat baſim æqualem ſuperficiei corporis conici inſcripti, altitudinemq; ES; iſte conus vtique ex præced æquabit ſua ſolidita-

te

te corpus conicum inſcriptum: Verùm iſte conus ex Coroll. prop. præc. minor eſt cono m ergo corpus quoque conicum ſphæra inſcriptum prog. 1. cono m minus erit: ſed oſtenſum eſt maius igitur, maius, & minus, quod eſt impoſſibile.

Progreſſ. 3. Dicat deinde aliquia ſphęram cono m eſſe minorem, & circumſctibatur aliqua conica fig. ex pr. 13. Tr. 33. quæ adeo conſtet multiplicatis lateribus, vt differẽtia ſolida e, quæ eſt inter ſphęram, & ſe ſit minor, quam differentia, quę eſt inter conum m, & ſphæram, & iam fig. conica circumſcripta minor erit cono m: ſiquidem minori differentia à minori ſphæra differt. quam conus m prædictus.

Sit deinde conus z, qui conſtet altitudine E Q, & obtineat baſim ſuperficiei conici corporis circumſcripti æqualem; vt prop. 41. h. Hic itaque conus æquiabtur corpori conico circumſcripto maiorque erit, quàm conus m ex propoſ. 45. cum ſuam baſim conſequator maiorem. Ergo etiam figura conica circũſcripta, quæ ei æquatur maior eſt cono m, ſed ſupra oſtenſa eſt minor: ideoque abſurdè eſſet maior, & minor, quod eſſe nequit. Cum itaque conus obtinens baſim ſuperficiei ſphæræ æqualem & altitudinem radio non poſſit eſſe aut maior, aut minor ipſa ſphæra, illi omninò ęquabitur.

COROLLARIVM.

Hinc eſt quod cum ſuperficies ſphærę ex oſtenſione prop. 43. *Tract* 31 ſit quadrupla maximi circuli in ſphęra inſcripti: quod etiam conus iſte æqualis ſphęrę habeat baſim huic circulo quadruplo maximi circuli ęqualem, & ideo conſequetur baſim obtinentem diametrum duplo maiorem, quam diameter ſphæræ: nam ſic area circuli ex prop. 36. lib 6. & 6. lib. 2. erit quadrupla circuli maximi in ſphęra inſcripti. Vnde etiam patet. Quod ſphęra eſt ad conum GAH ſibi inſcriptum, vt conus qui conſequatur diametrum GH, pro radio ſuę baſis, & altitudinem radiũ EA cum enim iſte conus æquet ſphæram. ad eundem conum referetur eadem proportione, ac ipſa ſphęra.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam eſt ſphæram eſſe ad conum ſibi inſcripum, vt circulus ex radio GH ad circulum ex radio HE: nam conus ex radio GH ad conum ex radio EH habentium eandem altitudinem EA ita referuntur, vt baſes, conus autem ex diametro GH, & altitudine EA æquatur ſphærę.

THEOR. IV. PROPOS. XLIV.

Cuiuſcunque ſectoris ſphæræ ſoliditati æquatur illa conus, qui baſim obtineat æqualem ſuperficiei portionis ſphæræ, & altitudinem æqualem radio.

Sit ſector LBACDFE, & conus reperiatur aliquis n, qui baſim conſequatur æqualem ſuperficiei LBACF portionis ſphęrę, nempe ex prop. 46. Tr. 31, ductam radio ſubtenſa arcui FA, & altitudine EI. Dico hunc conum eſſe æqualem ſoliditati ſectoris LBACFE.

Probatur. Nam ſector ſolidus ſphęræ, nec maior erit, nec minor prędicto cono n. Ergo ei ęquabitur.

Quod verò cono ſector non ſit maior, oſtenditur: ſi enim ſector cono maior eſt figura conica ſectori ſphęrę inſcribatur, adeo multiplicatis lateribus, vt differentia b, quæ inter ipſam eſt ſphęræ ſectorem mediat ſit minor, quam illa, quæ inter conum n, & ſectorem reperitur: Itaque iſta figura cono n maior erit cum magis in quantitate ad ſphęrę rectorem maiorem ipſo cono accedat ob minorem differentiam inter ſe, & ſphęram.

Prog. 2. Fiat deinde conus aliquis æqualis ſoliditati corporis conici in ſphęra inſcripti, iſte conus erit minor cono n; cum conſtet baſi minori vtpote quod æquetur ſuperficiei corporis ſectori inſcripti; coni vero n baſis ſuperficiei portionis ſphęrę maioris: habeat quoque altitudinem minorem EA, quam conus n obtinens altitudinem EL. Quamobrem cum iſte conus ſit minor cono n, etiam figura conica inſcripta ſectori LAFE ipſi cono ęqualis erit minor cono n. Itaque eſſet figura conica inſcripta ſectori maior quidem ex primo progr. minor ex ſecundo cono n, quod eſt abſurdum.

Progr. 3. At ſi aliquis putet ſphęram cono eſſe minorem; Tunc circumſcribatur ſectori LAFE figura conica, adeo multiplicatis lateribus, vt ſit differentia e inter ipſam, & ſphæram minor, quam ea, quę eſt inter conum n, & ipſam ſphęram. & iam iſta figura conica cono n minor erit; cum minor differentia interponatur inter ſphęram minorem cono n, & ſeipſam.

Progr. 5. At fiat conus alter ęqualis figurę conicę circumſcriptę; iſte conus maior vtique erit cono n: ſiquidem conſtat ex altitudine ęquali EQ, & baſi maiori, quę eſt ęqualis ſuperficiei figurę conicę circumſcriptę ſectori, & ideo maior ſuperficie LAF ſphęrę, cui ęquatur ex theſi baſis coni n, & ideo cum conſtet conus hic ęqualis ſoliditati ſphęrę conicę circumſcriptę ſectori baſi maiori, eademque altitudine, maior erit. Cum itaque ſit maior conus iſte cono n, etiam figura conica huic ęqualis ſphęrę ſectori circumſcripta cono n maior erit; ſed progr. 3. oſtenſa eſt minor: Ergo eſſet maior figura conica circumſcripta ſectori cono n, & ſimul minor, quod eſſe nequit. Cum itaque ſine abſurdo ſector LAFE, nec maior, nec minor eſſe poſſit cono n, ipſi ęquabitur.

COROLLARIVM I.

Hinc patet quomodo poſſit cognoſci quantitas LAFE ſectoris ſphęrę data ſectione LF, & ſubtenſa AF, nam cùm iam cognoſcamus baſim coni n ea prop. 46. Tr. 31. quę ducitur radio ſubtenſa AF, & altitudine AE ſi conſtituamus conum, ex hac baſi radio AF, & altitudine AE iſtius coni cognita ſoliditas, quæ eſt pars tertia cylindri eiuſdem altitudinis, & baſis ex prop. 7. b. etiam ſectoris ſphęrę quantitas inoteſcet.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque exeret quantitas portionis ſphæræ. Nam cum habeamus notum diametrũ LF, etiam obtinemus baſim eius diametro ductam ex prop. 3. tract. 30. datur quoque altitudo coni linea in FL terminans educta à centro E; vnde conus conſtituetur tertia ſc. pars cylindri eiuſdem baſis, & altitudinis; Si ergo hunc conum à

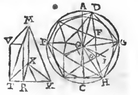
ſecto-

ſectore LAFE ſubducamus, erit nota ſphęricę portionis LAF ſoliditas; ea qua etiam venabimur ſoliditatē reſidui LGHF, & ſi ſit ſegmentum RLFS ſubductis duabus portionibus LAF, & RDS idem conſequemur.

THEOR. IV. PROPOS. XLV.

Omne corpus circa ſphæram circumſcriptibile æquale eſt Parallelepipedo, cuius altitudo ſit ſemidiameter, baſis verò ſit æqualis tertiæ parti ſuperficiei ipſius figuræ circumſcriptæ.

SIt ſphęra in ABCG, eique circūſcribatur corpus quoddam V. g. triangularibus ſuperficiebus conſtans, vt ſunt circumſcriptæ eius medietati quę ſunt GDF, & QGF, & GQH, & cæt. Dico, quòd hoc eſt ęquale parallelepipedo, quod habeat pro baſi tertiam partem eius ſuperficiei, & pro altitudine ſemidiametrum.



Probatur. Nam corpus circumſcriptibile ſphęræ eſt illud, quòd habet ſuperficies tangētes ſphęram; à puncto verò contactus ad centrum ſphęrę, linea ducta eſt radius, & ex nr.2.tr.23.eſt perpēdicularis illi ſuperficiei, vnde ſi ab angulis alicuius ſuperficiei illius corporis V. g. GHO ducātur rectę ad centrū ſphęrę Q fiet pyramis GOHQ, cuius altitudo erit ſemidiameter IQ. Omnis verò pyramis eſt tertia pars priſmatis ea dictis ad eādē altitudinē & in eadē baſi: Quare ſi tertia pars baſis GHO aſſumatur, & ad eādē altitudinē QI fiat priſma MVTRX hoc erit æquale toti pyramidi TMNX, quam ſuppono ęqualem, & ſimilem pyramidi OOHQ. At ſi baſes omnes, vt TRX redigantur ad vnam baſim ęqualem quadrangulam ex prop.18.Tract.19. quę ſunt tertię partes baſium pyramidalium, erit illa baſis ęqualis tertię quadrangulę parti baſium omnium ſimul, quę ſubtendunt omnes pyramides polygoni circumſcribentis ſphęram, & ſi conſtituatur ſuper eam baſim parallelogrammam Parallelepipedum ad eleuationem priſmatis TRXVM erit omnibus priſmatibus quale eſt vnum ex ipſis TRVMX quę ſingulas pyramides ęquant ex pr. 22. part.1.b.ęquale, & conſequenter erit ęquale omnibus pyramidibus. Vnde etiam ipſi polygono circà ſphęram deſcripto, quare parallelepipedum, cuius baſis ęquet tertiam partem ſuperficiei polygoni, & ſemidiameter eius altitudinem menſuret, erit ęquale ipſi polygono, quod erat oſtendendum.

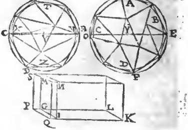
THEOR. V. PROPOS. XLVI.

Sphæra qualibet æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.

SIt ſphęra ABCD, & ſolidum rectangulum LKMN cuius baſia LKGI, ęquet tertiam partem ſuperficiei ſphęrę propoſitę, altitudinem verò IN menſuret eius radius CX. Dico quòd ſphęra propoſita eſt ęqualis rectangulo ſolido LKMN.

Probatur. Nam, ſi non eſt ęqualis ſphęra ſolido, erit, aut maius illud ſolidum, aut minus ipsā ſphęrā: ſed nec maius, nec minus eſſe poteſt. Ergo ęquale ſolidum erit ipſi ſphęrę.

Nam ſi maius eſt, erit ergo ęquale alicui alteri ſphęrę maiori ea propoſita BACD, vel ſi contendas æqualem aſſignari non poſſe, aſſignabitur ſaltem aliqua maior propoſita, quæ nec ſolidum omninò



exęquet, ſed inter vtramque magnitudinem conſiſtat: Sit ergo hæc ſphęra HEFO, quæ in aliquo ſuperet ſphæram propoſitam BADC, & ideo ambiet illam, & tamen ſit minor ſolido LKMN. Quo poſito circumſcribatur ſphæræ minori Polygonum, quod ſphæram maiorem non excedat; id enim poſſe fieri ſupra oſtendimus propoſ.13. Tract.33. fiatque ſolidum rectangulum LKQS, cuius baſis LKPQ, ſit æqualis tertiæ parti ſuperficiei illius polygoni, & altitudinem eius menſuret ſphæræ radius, quod ea præmiſſa erit æquale ipſi polygono.

Parallelepipedum itaque LKSQ æquale polygono, habebit baſim maiorem LKPQ, quam LKGI baſis illius ſolidi, quod nos dicimus ſphęrę æquale eū illa ſit æqualis tertiæ parti polygoni; hæc tertiæ parti ſphæræ in polygono exiſtentis, vnde cum ſit maius continens, quā contentū erit etiā maior ſuperficies poligoni continentis, quam ſphærę ABDC cōtentę, & cōſequēter maior erit tertia pars ſuperficiei polygonę, quā ſuperficiei globoſæ ſphæræ, & baſis LKPQ æqualis tertiæ parti polygonæ ſuperficiei maior erit, quam baſis LKGI tertiæ parti ſuperficiei globoſæ æqualis, & tandem ſolidum ſub eadem altitudine SK ſuper baſem maiorem LKPQ maius erit, quam ſolidum KMLK ſuper baſem minorem LKGI, ſed hoc ſolidum dicebatur ab aduerſarijs aut maius, aut æquale ſphæræ maiori EHOF: Ergo ſphęra maior erit minor, quā ſolidum LKSQ rectangulum ſuper baſem maiorem LKPQ; ſed hoc ex conſtructione eſt æquale polygono contento in ſphæra maiori, ergo eſſet ſphæra continens minor contento polygono, quod eſt abſurdum.

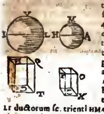
Pro-

Probatur quoque, quod minus eſſe nequeat ſolidum prædictum LKMN ſphæra propoſita ABCD. Circa idem centrum Y deſcribatur ſphæra, aut æqualis, aut non minor ipſo ſolido LKMN, nec maior ſphæra propoſita BACD, ſed inter vtramq; magnitudinem conſiſtens, & ſit TVXZ per aduerſarios. Huicque ſphæræ aſſignatę XVXZ circumſcribatur rurſus polygonum non excedens ſphæram primo propoſitam BACD ex Cor pr. 11. tr. 33. fiatque deinde ex præced. baſis æqualis tertiæ parti ſuperficiei polygonæ, quæ ſit LKPQ. & ſuper eam ad altitudinem radij YC parallelepipedum LKS. Cum ergo ſuperficies polygoni huius ſit minor, quam ſuperficies ſphæræ continentis ABCD, etiam eius tertia pars erit minor, quam tertia pars eiuſdem ſphæræ continentis, & ideo erit quoque minor LKPQ æqualis tertiæ parti ſuperficiei polygonæ, quam baſis LKGI, quæ æqualis ex hypotheſi eſt tertiæ parti ſuperficiei conuexæ ſphęrę CABD vnde parallelepipedum LKS licet maius eſſet, vt æquans KTVZ maiorem, quam KMLN eſſet minus parallelepipedo LKMN ſuper illam baſim ad eandem altitudinem erecto, quod in illo continetur, quæ omnia abſurda ſunt, cum ergo parallelepipedum LKMN, nec minus eſſe poſſit, nec maius ſphæra BACD illi erit æquale.

THEOR. VI. PROPOS. XLVII.

Sphæræ ſunt inter ſe in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum.

INſpiciantur duæ ſphæræ AMH, & LVI. Dico eas ad inuicem referri in triplicata ratione diametri AH ad LI, vel radij, vel peripheriæ AMH, LVI, fiant eis parallelepipeda æqualia C, & D; quorum latera OP, & QN ſunt æqualia ſemidiametris AH, LI. Certum eſt hæc eſſe ſimilia ob baſium rectangula trienti ſuperficierum ſphericarū æqualia ex 46 h. ſc. circulis ex diametris AH, & LI, tamquam radijs ex 43. tr. 31. & ideo ex tr. 31. prop. 3. triangulis ex ambitu, & radio eorum AH, & LI, ſc. comprehenſa à ſextante ambituum ex radijs HA, & LI ductorum ſc. trienti HMA, & LVI peripheriarum, quæ ſunt dimidium ambituum ductorum radijs HA, LI ex 43. lib. 6. Quare ex eadem 43 & 18. lib. 5. OP, OX, XD erunt proportionalia lateribus QN, QT, TD, vtpote radij diametri AH, LI, & trientes peripheriarum AMH, LVI. Ergo ex def. 3. tr. 34. parallelepipeda erunt ſimilia, ideo ex 14. p. 8 h. in triplicata ratione laterum, id eſt radij PO ad radiū QN, vel trientis peripherię OX ad QT, & ideo peripheriarum ex 18. l. 5. vel diametri OX ad diametrum TD. Quare etiam ſphęrę ęquales parallelepipedis HMA, & LVI erunt in triplicata ratione peripheriarum ex 7. l. 5. vel radiorum, vel diametrorum.



EXPENSIO XI.

De ſphæra, vel ſphæroidis quadriformis, & vngulæ Cylindricæ ſoliditate.

SPhęra quadriformis eſt figura ſolida, quæ formatur à plano quadrato, vel rectangulo: ſed deinde omnia plana, quæ parallela lateri, & baſi perpendicularia ipſi plano per corpus illud ducuntur, aut circuli ſunt, aut Ellipſes. V. g ſuper quadratum AIOB, ſit formatum tale corpus AIOBD, cuius ſectio KDL normalis baſi AIOB, & parallela lateri AB ſit circulus, vel ellipſis, illud corpus erit ſphæra quadriformis, ſi ſectiones ſint circuli, vel ſphæroides quadriforme, ſi ſectio ſit ellipſis; de quo corpore ſoliditas cubica quærenda eſt.

THEOR I. PROP. XLVIII.

Sphæra ita eſt ad ſphæram quadriformem, vel ſphæroides ad ſphæroidem quadriforme, vt circulus aliquis, vel ellipſis ad quadratum, vel rectangulum ambiens baſes ipſorum corporum.

SIt ſphęroides quadriforme AIDOB, vel eius medietas ſupra deſcripta, cuius baſis rectangula AIOB, & in ea hemiſpherium KLGD, cuius baſis circulus KGL. Dico, quod ſphæra KGLD, ita eſt ad ſphæram quadriformem AIOBD, vt circulus AGL ad quadratum AIOB.

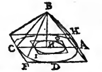


Probatur. Inſcribantur enim tum in hemiſphærio, tum in hemiſphæra quadriformi in hac parallelepipeda in illa cylindri ęqualis inuicem altitudinis V. g. parallelepipedum MNY, & cylindros HEPR per continuam ſubdiuiſionem radij DQ; eritque quicumque circulus ad circumſcriptum ſibi quadratum in eadem proportione V. g. circulus KGL erit ad quadratū AO, vt circulus HFP ad quadratū MN, & ſic dicas de omnibus alijs quibuſcumque, cum omnis circulus ad alium circulum, vt ex propoſ 40. lib. 1. conſtat, V. g. circulus KGL ſit ad circulum quemcumque HFP, vt quadratum AO, ex diametro HL ad quadratū MN ex diametro HP, quod eſt etiam dicendum de Ellipſibus ex propoſ. 27. Tract. 30. vnde *permutanda* ſequitur, quod ſit circulus KGL ad quadratum AO, vt circulus HFP ad quadratum MN, vel Ellipſis KGL ad rectangulum ambiens AO, vt Ellipſis HFP ad rectangulum ſe circundās MN, & cæt. Cum ergo cylindri ſuper circulos, vel ſuper Ellipſes erecti ſint æqualis altitudinis; ac parallelepipeda ſuper quadrata, vel rectangula ex diametris ex Theſi dicent eam proportionem, quàm baſes; ideoque omnes cylindri, qui ſphęra, vel ſphæroide inſcriptibiles ſunt ad omnia parallelepipeda ſphęra, vel ſphæroide quadriformi inſcriptibilia dicent eādem proportionem, quam circulus, & baſis, cui cylindri inituntur, dicit ad baſes rectangulas parallelepipedorum ex prop. 5. h. Omni itaque inſcriptione poſſibili tum Parallelepipeda in ſphæra, vel ſphæroide quadriformi, tum cylindri in ſphæra, vel ſphæroide multiplicentur, neceſſe eſt, vt adæquent parallelepipeda, quidem ſphæram, vel ſphęroidem quadriformem

mẽ; Cylindri autẽ ſphæram, vel ſphæroidẽ alioquin, ſi non omninò implerent, noua, & minutior inſcriptio poſſet inſtitui contra hypotheſim, quã poſuimus, omnia eſſe inſcripta, quæ potuerunt inſcribi. Cum ergo omnes cylindri ſphæram, vel ſphæroidem æquent, omniaque parallelepipeda ſphęram, vel ſphæroidem quadriformem, & omnes cylindri inſcripti ſint ad omnia parallelepipeda inſcripta, vt baſes circulares ad baſes rectangulas, illæque circulares habeant ad rectangulas eam proportionem, quam aliquis circulus ad aliquod quadratũ ambiens, vel aliqua ellipſis ad rectangulum circumſcriptum. Erit etiam proportio ſphæræ, vel ſphæroidis ad ſphæram, vel ſphæroidem quadriformem rectãgula baſi ſitam, quę maximum circulum, vel maximam ellipſim ſphęroidis ambiat, vt ipſe circulus, vel ellipſis, ad quadratum, vel rectangulum ambiens.

COROLLARIVM.

*ELicitur. Quod cum ex pr.43.Cor.h.conus, qui ſit eiuſdem altitudinis, ac radius, & habeat diametrum ſphæræ pro radio æquet ipſam ſphæram: Quod etiam Pyramis eiuſdem altitudinis, ac radius ſphæræ, quę habeat baſim, cuius latus ſit duplus diametri erit ęqualis ſphęræ quadriformi. Nã ex 6 h. conus quadruplus coni ſphæra inſcripti ABCD erit ad pyramidem HFB eiuſdem altitudinis in baſi HF circulum ADC ambientẽ, vt circulus ADC ad quadratum HF; ſed vt ADC circulus ad quadratum HF, ita eſt OI circulus ad quadratum inſcriptũ OI ex 40.l.6. & ita eſt ſphęra in circulo ſita ad ſphęram quadriformem in quadrato OI ſitam ex præc. Ergo conus ADCA erit ad pyramidem HBF, vt ſphæra in circulo OI ſita ad ſphęram quadriformẽ in quadrato OI collocatam ex 16.l.5. Verùm conus ADCA ęquat ſphæram, cuius circulus maximus OI, ergo ex 18. lib.5. etiam pyramis HFB æquabit ſphęram quadriformem in OI ſitam.

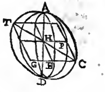


Idem dicendum de ſphęroide, & de ſphęroide quadriformi; Nam ſicut ſphęroides æquat conum cuius baſis quadruplum ſit baſis coni inſcripti; & eadem altitudo; ſic, & ſphæroides quadriforme ęquat talem pyramidem. Quod etiam intelligendum eſt ſi ſit baſis ellipticę, & ideo ſphæroidis quadriformis baſis non ſit quadratum, ſed rectangulum; vt quilibet per ſe poterit arguere cum oſtenderimus quodlibet ſphęroidem eſſe ex propoſ.37. Tract.h. Cor.2. ęqualem cono, cuius baſis ſit quadrupla baſis ſuę, & eadem altitudo.

THEOR I. PROPOS. XLIX.

Vngula Cylindrica eſt octaua pars ſphæræ, vel ſphæroidis quadriformis.

VNgula Cylindrica eſt portio cylindri abſciſſa ſemicirculo ſemiellipſi, & portione ſuperficiei cylindricę contenta. Sit itaque hemiſphęrium quadriforme ATDC, & diuidatur acto per aſẽ diagonalẽq; CT plano, iam illud planum erit ellipſis ACDT ex prop 13. tract.25. cum ſuperficies AB-DC perpendiculares ſint circuli plano AED; Ergo fruſtũ ſphæræ quadriformis ACEDH continebitur ab ellipſi CAD portione cylindrica CADE, & circulo AEO: Ergo erit vngula cylindrica: Eſt autem CAED cylindri ſuperficies; quia eſt normalis circulari plano AED: Ergo ſoliditas vngulę æquabit octauam partem ſphęrę quadriformis: ſiquidem triangulum EHC, ſuper quod inititur CAEDH corpus vngulare eſt octaua pars totius baſis, & maximi ſphęrę quadriformis quadrati TC, & ſingulæ cæteræ partes ſolidæ, quæ reliquis



triangulis collocatę ſunt, habeant omnes ſuperficies ſimiles, & ęquales huic, vt ex definitione ſphęræ quadriformis ſatis apparet. Quod & oſtenditur nam ex prop.28.Tract. huius corpora coniformia æqualis altitudinis inuicem ſunt, vt baſes, ſed baſes hic ſunt æquales HEC, HFC, & cęt. & altitudo omnium æqualis HA, HD, ergo & corpora coniformia erunt æqualia. Sed ſunt octo in quæ ſphæra quadriformis diuiditur, vt ſunt octo triangula ex quatuor quadratis HC, HG, & cæt. conſurgentia biſariam diuiſa. Ergo quodlibet corpus vngulare erit octaua pars ſphæræ quadriformis, quod, & poteris aſſerere proportionaliter de vngula alicuius cylindri, qui baſim conſequatur ellipticam, & ipſius vngulæ altitudo ſit, aut maior, aut minor, quam diametri: nam eodem pacto erit octaua pars ſphæroidis quadriformis talem baſim, & altitudinem obtinentis.

COROLLARIVM.

*HInc elicitur vngulam cylindricam eſſe octauam partem pyramidis quadrangulæ, cuius altitudo ſit eadem, ac radius, & latera cõſequatur dupla baſis ſphęrę quadriformis, cuius pars eſt, ideoque AC EDH vngulam eſſe æqualem pyramidi, cuius altitudo HA, & baſis TGC: nam baſis TGC triãgularis eſt ſubdupla baſis TC quadrãgulæ, quæ eſt ſubquadrupla baſis illius, cuius latus ſit duplus lateris GC, & alius duplus lateris TG, & ideo CGT erit ſuboctupla baſis illius pyramidis, quæ ſphæram quadriformem æquat; ideoque, rũm, & hæc pyramis in CGT baſi ſita, & altitudinis HA ſit vt vngula cylindrica ACDEH ipſi ſphęrę quadriformi,

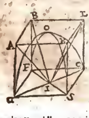
Idest

ideſt eidem, vt 1. ad 8. hæc pyramis baſis CGT altitudinis HA; & vngula cylindrica CAEDH æquabuntur ex 7. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. L.

Sphæræ quadriformis medietas æquat parallelepipedum eiuſdem altitudinis, & eiuſdem quadratæ baſis, cui dempta ſit pyramis eiuſdem baſis, & altitudinis.

COgita in baſi CSFD quacumque rectangula ſphæræ quadriformis DCFOS medietatem, cuius altitudo ſit DA in parallelepipedo CS exiſtentem. Ex præc. cum tota æquet pyramidem, cuius baſis ſit quadrupla ipſius baſi CFSD, & altitudo DA ideſt quadruplum pyramidis BAHIL, dimidia æquabit pyramidem, cuius baſis ſit dupla baſi CFSD: & altitudo eadem; nam hæc item erit

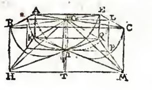


dimidia quadruplæ pyramidis ex 24. par. 1 h. & ideo duplum pyramidis LHBAI Cubus verò, vel parallelepipedum vacuatum pyramide LSAHI eſt duplũ pyramidis ipſius LHSAI, quia parallelepipedum eſt duplum priſmatis eiuſdem baſis, & altitudinis, & priſma tale eſt triplũ baſis triangularis, & ideo vt 3. ad 2. vel ſeſquialter pyramidi duplæ, quæ habet quadrangulam baſim; vnde parallelepipedũ LSBD duplum priſmatis, erit ad pyramidem LSAHI, vt 6. ad 2. ablata ergo ipſa pyramide, quæ eſt 2. erit reliquum ad ipſum 2. vt 4. ad 2. nempe duplum. Quare ex 7. l. 5. cubus, & ſphæra æquabuntur cum eidem pyramidi LSHAI ſint, vt 2. ad 1.

THEOR. IV. PROPOS. LI.

Inuolucrum ſemiſphæræ, vel ſemiſphæroidis quadriformis eſt æquale pyramidi quadratum eius maximùm pro baſi habenti, & altitudinem eandem.

SIt ſemiſphæræ, vel ſemiſphæroidis quadriformis inuolucrum ASICMQSSH, quod naſcitur dempta ipſa ſphæra, vel ſphæroide quadriformi à parallelepipedo circumſcribente CQAX. & pyramis quadrata GMQKH, ſuper maximam baſim QH,



& altitudinem eandem TG. Dico hanc pyramidem inuolucro prædicto eſſe æqualem.

Probatur. Nam hæc pyramis MQKHG eſt ad cubum, vel parallelepipedum CAQH, vt 1 ad 3. ex prop. 22. huius, cum ſit dupla pyramidis triangularis, quæ eſt priſmati, nempe dimidiato parallelepipedo, vt 1. ad 3. & ideo parallelepipedo, vt 1. ad 6. Sphæra verò vel ſphæroides quadriforme eſt ad hanc pyramidem ex oſtenſis, vt 4. ad 1. cum ſit vt pyramidis æquealta ſuper baſim quadruplo maiorem, ideſt pyramis quadruplo maior ad ipſam pyramidem inſcriptam GQMKH, & hinc hemiſphærium quadriforme, vel hemiſphæroides erit ad MQKMH, vt 2. ad 1. vtpote dimidium corporis integri.

Ideoq; ex 2. pr. tr 17 parallelepipedo, cui inſcriptum eſt ſubſeſquialterum, ſc. vt 2. ad 3. Si igitur ipſu hemiſphæra, vel hemiſphæroides, quæ eſt, vt 2. ad 3. ad ipſum parallelepipedum auferatur, remanebit parallelepipedum $\frac{1}{3}$ nempe corpus quoddam æquale pyramidi KMQHG baſim habentis in baſi maxima hemiſphærii, & altitudinem eandem, quæ & ipſa parallelepipedi eiuſdem AMEH eſt $\frac{1}{3}$.

COROLLARIVM I.

HInc eſt quartam partẽ ioouolueri hemiſphæræ, vel hemiſphæruidis CLMPTI eſſe æqualem quartæ parti pyramidis QMXHG, nempe pyramidi MPTIG æquari. Eſt hoc CLMPTI etiam inuolucrum vngulæ cylindricæ; ſiquidem MIPLC eſt dimidium inuolucrum. Quòd ICLMP ſit dimidia vngula cylindrica, & ex dictis conſtat, quæ tota reſultaret addito alio hemiſphærio, quia contiocetur quartis circuli IL ſuperficiei cylindricæ ILC, & Ellipſis IGC.

Cum ergo pyramidis pars PTMIG ſit quarta pars pyramidis MQGXH & inuolucri pars quarta CLMIPT ſit totius inuolucri æqualis toti pyramidi; inuolucrum prædictum, & pyramis PMTIG æquabuntur.

COROLLARIVM II.

ELlicitur quoque. Reſiduum vngulæ hinc faciliter poſſe cognoſci ſi cylindro, in quo eſt ſit æquale priſma æqualem habens baſim triangulã, & eandem altitudinem, ſi ab hoc priſmatis dimidio auferatur ſoliditas vngulæ nempe pyramis ex dimidio baſis ſphæræ quadriformis eiuſdem baſis, & altitudinis, remanebit ſoliditas reſidui vngulæ. Igitur ſi detur cylindrus DASIHC, & ab eius dimidio DASML auferatur ſoliditas vngulæ DALB remanebit reſiduum vngulæ ACIHB, hoc autem fit prædicto modo vtendo corporibus æqualibus ipſis vice ipſorum.

PROBL. I. PROPOS. LII.

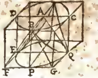
Soliditatem Lunularum, & inuolucri ipſarum reperire.

EX prædictis facilè ſoliditas duorum corporum, quæ in fornicibus maximè in vſum veniunt, reperitur, nempe Lunulæ, & eius inuolucri, eſt autem Lunula; ſolidum corpus quoddam in acutum deſinens ex ablatione duarum ſemiungularum ex dimidio cono per axem enaſcens, ſic corpus ABMC ablatis duabus ſemiungulis MOAC, & OABL erit corpus quoddam in communi vſu loquendi apud Italos Architectos Lunula appellatum, & eſt maximè in vſu in coucameratio nibus cubiculorum.

Noon Hutus



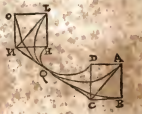
Huius igitur corporis ſolliditas faciliter inuenietur ea præc. Cor. Nam ſemicilindri LAMBHC inueniatur ſoliditas ex prop.3.h. Coroll. & ab ea auferatur vngula integra, ideſt duę ſemiungulę LOBA;& OHCA auferendo pyramidẽ ex pr.49. Cor. æqualem, reſidua erit ſoliditas lunulę BACH.



Inuolucrum autem lunulę eſt illa ſolliditas, quæ enaſcitur ablata lunula à priſmate ea circundante, ſic ſi intelligatur ſemicilindrus CBDQPB,& circa illud parallelepipedum CGFB, & agantur duo plana per BA, & FB alterum, alterum per BA, & GQ ſimul duæ ſemiungulæ ABQ, & ABB formabuntur, & lunula QPBB ex ſectione cylindri, ex ſectione verò parallelepipedi tria priſmata CABGQ, & BAGQFB, & BADVE, quorum duorum duo comprehendent vngulas; ſc. CABGQ, & BAOFB; medium verò ęquale illis duabus lunulam continebit; eiuſque inuolucrum erit. Igitur ſi ab hoc priſmate GQBAEF auferatẽ lunula ABQPB erit inuẽta inuolucri vngulę ſolliditas, eritq; corpus contentum ſemicirculo, vel ſemiellipſi QPB, & ſuperficie cylindrica ex ipſa conſurgente, & planis ſuperficiebus GQB, BFB triangulis mixtilineis, ſicut & GQP, PFF, & tandem triangulo GAF. Si ergo priſma comprehendens inuolucrum vngulæ BAEQFG ſit poſitum ſuper dimidiam baſim BQFG parallelepipedi cylindrum ambientis, & eiuſdem altitudinis DE, erit dimidium dimidij ex pr.8. tract. 24. ideſt quarta pars totius. Quare à quarta parte parallelepipedi cylindrum ambientis à cuius ſectione vngula enaſcitur, auferatur lunula BPBQA reſiduum erit inuolucrum lunulæ, quod exquiritur.

COROLLARIVM I.

*FElicitur, quod ſi duo ex iſtis ſemi-inuolucris ponantur auerſis priſmatum acuminibus efformabitur quarta pars inuolucri fornicis cruciformis, quatuor lunulis in centrum conuenientibus conſtantis, vt eſt in fig. hic appoſita, in qua ABOCQ eſt lunulę inuolucrũ, quo cũponitur ſemi-inuolucrũ ADCQ, ſed auerſis acuminibus C, A priſmatũ ambientium, ità vt acumen huius reperiatur vbi baſis alterius, namque DAC correſpondet plano FPG ſuperioris figuræ QD eſt quarta circuli FQ, & QA eſt quarta ellipſis BQ. ſic ACB refert planũ FBP ſed inuerſo acumine C, vt eueniret ſi GC planum ſuperioris figuræ cylindrica ſuperficie eſſet ſectũ, quę incideret in ellipſim BQ. Vnde QA circulus eſt, qui cum ellipſi QA facit latera curua huius corporis QCA, & QCA, triangulis mixtilineis contentum, triangulo rectilineo CAB, & ſuperficie cylindrica ABQ. Et ita dicas de alia portione NOLHQ.



ſi itaque quatuor ex iſtis QDABC componantur, ita vt in vnam baſim conueniant, cuius quarta pars ſit DACBQ cruciformis fornix erit compoſitus in acuminbus quatuor, quale eſſet acumen Q ſolitum.

COROLLARIVM II.

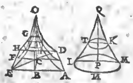
*HInc etiam patet, quod ſi quatuor corpora inuolucri OABCQ componantur; ita vt quatuor quadratę ſuperficies baſim ſternant, vt FCIH, & BCFB, & cęt. & coniungantur in idem acumen O, & pęnes quadrantes OF, OL, OB, OI ęquales, vel ęquales, & ſimiles partes quartas ellipſium in vnũ, vt vides in fig. pr. ſeq. cõponantur, efformabitur corpus acuminatum AHO, ex ſuperficiebus cõcauis conſurgens EOH, EOA curuitate globoſa intus vergente, & ſi coſtę OE, OH, OD, OA intelligantur ablatę, & redactũ in figuram, vel octangulam, vel quãcumque aliam, vel etiam ad figuram prorſũs circularem efformabitur corpus ſolidum. Quod poterit apellari pyramis, ſi rectilinea ſit baſis, vel conus inflexis conſtans ſuperficiebus, ſi ſit circularis.

THEOR. VI. PROPOS. LVI.

Priſma quadrangulæ baſis ſe habet ad conum circularis baſis, quæ inflexis ſuperficiebus veſtiantur, & cuius latus diametro baſis coni æquale ſit, & ſuperficies ſint ſimili, & æquali curuitate flexæ, & ad eandem altitudinem latæ, vt quadratum baſis priſmatis ad circulum baſis coni.

SIt priſma ſupra explicatum Cor. 1. AHO, cuius altitudo CO ęqualis altitudini PQ, baſis BAE, vel LF ęquale diametro ML ęquetur; curuitas verò plani OLF per aream laterum, vt OF, & LO, ducti ſit ęqualis, & ſimilis, nempe deſumpta ab eadem fig. V. g.

V. g. circulo, ſeu ellipſi, ac curuitas MKQ, vel QTL plani MQL per axem ducti, ita quod NMQL corpus intelligatur inſcriptibile in corpore AOH, & ſingula plana circularia, vt KT inſcriptibilia, in quibuſlibet quadratis æquialtis, vt IO. Dico, quod corpus AOH erit ad corpus NMQL, vt quadratum AH ad circulum MNL.



Probatur autem prorſus eodem argumento, quod adduxi ad oſtendendam proportionem ſphæræ circularis ad ſphæram quadriformem, nempe eam, quam habet baſis quadratum circundans ad circulum. nempe eãdem eſſe proportionem omnium quadratorum ad omnes circulos inſcriptos, quam huius quadrati, ad hunc circulum inſcriptum, ideoque eſſe quadratum baſis AH ad circulum baſis inſcriptæ, vel inſcriptibilis LNM, vt KG quadratum ad circulum HT ſibi inſcriptum, vel inſcriptibile ex prop. 41. lib. 6. & ſic de quocumq; alio, & ideo æquealta parallelepipeda in quadratis, ad æquealtos cylindros in circulis inſcriptis ſitos ex propoſ. 22. h. obtinere eandem propoſitionem, quam baſis quadratum AH ad circulum baſis LM: Quare, vt ibi concluſimus, etiam ipſæ figuræ ſolidæ, nempe AOH ad MNQL eandem proportionem dicet; quam AH baſis quadratum ad MNL circolum.

COROLLARIVM I.

Hinc eſt, quod ſi bis accipiatur ſoliditas Lunulæ, & auferatur à duplici priſmate eiuſdem altitudinis, & baſis rectangulæ, quæ ambiat ſemicirculum baſim lunulæ enaſcetur geminũ inuolucrũ; quod præc. Cor. 1. adnotauimus. Vnde etiam enaſcetur ex 2. Cor. pyramis flexis conſtans, qua habita poteris arguere à quadrato baſis HA ad circulum inſcriptum LNM, ita ſoliditas pyramidis flexis conſtans ad aliud, & inuenietur conos prædictus circulatis LQMN.

COROLLARIVM II.

Elicitur etiam, quod dicitur de tota pyramide idem dicendum eſſe de ſingulis ſegmentis ſolidis æquealtis, quod nimirum ſit ad inuicem pyramis ad inſcriptum conum, vt quadratum baſis ad circulum inſcriptum. Quod, & verificatur ſi comparetur quadrangularis ad pyramides cuiuſcumque alterius figuræ inſcriptas.

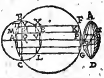
COROLLARIVM III.

Quod ſi priſma flexis contentum non obtineat pro baſi circulum, ſed figuram aliquam ex regularibus eodem argumento, ex 26. lib. 6. concludes eſſe priſma flexis contentum ad conum ex baſi polygona flexis contentum, vt quadratum ad polygonum. Et idem erit ſi HA ſit rectangulum, & LNM ellipſis

THEOR. VII, PROP. LIV.

Sphæra quadriformis eſt ad metam quadriformem quadratam, vt baſis quadrata ſphæræ ad baſim quadratam metæ. Pariterq; ſphæra ad metam circularem, vt ſphæræ baſis circulus ad metæ baſim circulum.

Meta eſt corpus quoddam, vel quadratum, vel rotundum, nempe ſuper baſim quadratum, aut circulum erectum, quod ex duobus ſegmentis circuli per axem baſi normalem ducti formatur, & dicitur meta, eo quod antiquitùs metæ ad quas, qui primi perueniebant curſu victoria potiabantur, illa figura conſtabant. Huius corporis figura eſt ADI cui modulum præbet duplex ſegmentum BAC circoli BACGF, quę ſimul vnita penes ſubtenſam BC vel AD faciunt ſuperficiem APDI, quæ ſecta baſi IO, & ab eius ſingulis lateribus ductis ſuperficiebus quatuor curuatis iuxta ambitum AID formatur. Diximus ergo, quod ſi ex circulo BELC ſit erecta ſphera quadriformis, quod hæc ſe habebit ad metam quadratam, vt quadrata baſis ſphæræ ad quadratam baſim metæ.



Sit igitur ſegmentum BAC dimidium plani metam formantis, & baſis quadratæ quartæ parti ſit latus QA, & BVC circulus ſphæræ quadriformis modulus, cuius quadratæ baſis quartæ parti ſit latus VQ, & APPOC circulus reſiduus ex ſegmento BAC metæ genitore, in quibus plurimæ lineæ parallelæ ducantur, & inuicem æquidiſtantes, & ſuper ſingulas rectangula inſcripta æquèeleuata; Quia itaque ex 48. prop. huius rectangulum PQ. QA eſt æquale quadrato QV, & KN, & XM quadrato NE, & cętera cæteris; erit rectangulum PQ.QA ad rectangulum KN, NM, vt quadratum QV ad quadratum EN; & ita erit KN, & NM rectangulum ad FY, YT rectangulum, vt quadratum EN ad quadratum XY, & ita de omnibus alijs. Sed quadrata omnia ſunt inuicem ſimilia; Ergo etiam rectangula. Quare ex 26. lib. 6. PQ erit ad KN, vt VQ ad EN latera, & QA ad NM, & cęt. ſed QA quadratum ad NM quadratum eſt, vt rectangulum PQ QA ad rectangulum KN NM; quia eum ſint eiuſdem altitudinis ſe referunt, vt baſes PQ ad KN: Ergo ex pr. 26. l. 6. quadratũ VQ erit ad quadratum EN, vt quadratum QA ad quadratum NM, & eadem ratione EN quadratum ad XY quadratum, vt quadratũ NM ad quadratũ YT: ideoque *permutando* erit quadratum VQ ad quadratum QA, vt quadratum EN ad quadratum NM, & XY quadratum ad YT quadratum: Quare ex 17. l. 5. omnia quadrata QA, NM, YT erunt, vt vnum antecedens VQ ad vnum conſequens QA: ſed hęc quadrata VQ, EN, XY ſunt ad quadrata QA, NM, YT ex 5. huius, vt Parallelepipeda eleuata altitudinibus æqualibus QN, YN, & cæt. Ergo omnia hęc paralle-

lepipeda VN, ZY & cęt. ad omnia MQ, NX erunt, vt baſes omnes quadratæ ex VQ, SN ad omnes ex QA, & NM, nempe, vt baſis VQ ex dictis ad baſim QA.

Sed omnia hæc parallelepipeda ſi multiplicentur vſquedum multiplicari, in ſphęra quadriformi queunt inſcripta æquant ipſam ſphærę quadriformis quartam partē, & QA metæ quartā partem.

Alioquin, ſi omne ſpatium inter ipſa, & corpora, in quibus inſcribūtur non implerent, nouę inſcriptioni daretur locus: Ergo quarta pars ſphæræ quadriformis; & ideo eius quadruplū ſphæra quadriformis erit ad quartā partem metæ, & ideo integrā metam, vt quarta pars quadrati baſis ſphæræ ad quartam partem quadrati metæ, & ideo vt baſis ſphæræ ad baſim metę.

Quod ſi baſis ſit circulus eodem argumento, ac in præt. factum eſt, concludes eſſe metam quadratam ad circularem, vt quadrata baſis ad circulum, & ideo ex *æquo* eſſe circulum baſis ſphęrę ad circulum baſis metæ, vt ſphæra ad metam.

COROLLARIVM I.

*Hinc conſtat idem dicendum eſſe de partibus æquealtis, cum idem valeat argumentum v. g. de corpore formato ex ANM ſegmento metę, & ANB ſegmento ſphæræ.

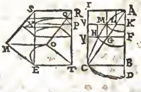
COROLLARIVM II.

*QVod ſi baſis metæ non ſit circulus, ſed aliquod polygonum regulare idem concludes eſſe ſphæram quadriformem ad metam, vt baſis quadrata ad polygonam metæ.

THEOR. VII. PROPOS. LV.

**Conoides parabolicum quadriforme æquatur priſmati eandem altitudinem, & baſim habenti, ſingulæque partes ſingulis æquealtis partibus.*

PRobatur. Nam repetita figura prop. 35. h. pęne eadem demonſtratione propoſitum oſtendemus. Quoniam omnes ductæ parallelæ ad baſim, & applicatæ, vt XM efformantes parabolam generantem conoidem quadriformem, habent ſua quadrata ęqualia rectangulis ex XL lineis, quæ ad eandē altitudinē in triangulo RCA, & ex XV, quę in rectāgulo IA trahūtur, quę ſuperficies quadratè ſimul iunctæ efficiūt priſma TOENRS, & ideo omnia rectangula, vt PQX ex illis XL, & XV conſtantia in eadem altitudine baſes ſunt parallelepipedorum,



quę ſoliditatem priſmatis TOENRS circumſcribunt, quæ æquealta ſunt, vt parallelepipeda æquealta ſuper baſes quadratas ex XM applicatis, quæ circumſcribunt ſoliditatem parabolici corporis. Quare, cum omnia ſolida rectangula priſmati circumſcripta omnibus ſolidis rectangulis conoidi circumſcriptis æquentur, ſequitur ex prop. 22. h. vt priſma ſit æquale conoidi parabolico; ſingulęque priſmatis partes ſingulis partibus eius æquealtis.

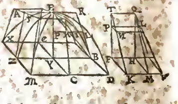
COROLLARIVM.

*Hincque ſit euidens conoidem parabolicum quadriforme eſſe ſubduplum parallelepipedi eandem altitudinem obtinentis, & ſuper eandem baſi collocati: ſingulæque eius partes parallelis abſciſſas, ſingulis eius æquealtis partibus ſubduplas eſſe; quia tale parallelepipedum eſt duplum priſmatis eadem baſi, & altitudine gaudentis.

THEOR. VIII. PROPOS. LVI.

**Conoides Hyperbolicum quadriforme æquat fruſtum pyramidis æquealtum, ac conoides, cui fruſto deficiat parallelepipedum ſuper baſem tangentem verticem conoidis, & eiuſdem altitudinis erectum; Pyramis verò tota eadem baſi ſita in altitudinem tranſuerſæ axis aſſurgit.*

SIt conoides Hyperbolicum quadriforme, ideſt quadratę quidem baſis DX: ſed cui prębeat ſuperficierum à baſi eleuatarum curuitatem Hyperbola BEZ normalis baſi, vt repræſentat corpus tale fig. CEXEMO. Pyramidis autem latus pertingens ad verticem axis tranſuerſæ ſit BR. quæ ſit ſuper baſim DX; & fruſtum eius, vel dimidiū fruſti ſit EMECX: vt perſecimus ad læuam AMC. Dico itaq; in primis antequam demonſtrem propoſitionem; quartam partem corporis hyperbolici quadriformis eſſe æqualem priſmati QTFV; cuius altitudo FT æquet conoidis altitudinem YE; baſis verò ſit rectangula MS ex RE tangente verticis & ZY latere baſis, & pyramidi æquealtæ HQY; cuius baſis VH ſit differentia VM inter RE, vel QT, & MX, vel DC, ita quod QF trapezium æquetur trapezio plano YERB, & triangulum FTR triangulo in illo deſcripto YEB.



Probatur. Nam ex prop. 59. tract. 24. PI applicata quælibet æquat ſuo quadrato rectangulum ex LP, & PN ab eodem puncto P naſcentibus, & protenſis, altera quidem in ſuperficie ZYX, vel æquali TFR ex effectione, altera verò in ſuperficie BKYE, ideſt FQT. Cum ergo ſingula quadrata ſingulis rectāgulis, illis, quę deſcribuntur in conoide hyperpolico quadriformi EXD hæc, quæ in priſ-

mate

mate QTMF, & QVH pyramide, & ſint quoque ęqualia ex 18 h. ęquealta parallelepipeda in illis baſibus ſita. Ex prop.22. tr.h. ipſa corpora, in quibus deſcribuntur erunt æqualia, nempe quarta pars corporis hyperbolici quadriformis, & priſma MQFT, pyramiſque VHQ: quæ pyramis, & priſma: ſi quadruplicentur erunt æqualia toti conoidi quadriformi, ſimulque conficient fruſtum pyramidis, cui parallelepipedum ipſi fruſto æquealtum conſtitutū ſuper minorem baſim, demptum fuerit.

COROLLARIVM I.

HInc videre potes inuolucrum huius corporis, cuius medietas EACMX, cuius ſectio RSFEZ ablata hyperbola BAZ, æquari parallelepipedo, cuius baſis ſit quadratū ex RF, & altitudo YT; Nā ſi demantur à fruſto pyramidis quatuor priſmata, quatuorque pyramides ęquales conoidi, quod conoides, & auferatur ab eodem corpore fruſto pyramidis, remanebit inuolucrum corporis huius, & parallelepipedum illud ęquale.

COROLLARIVM II.

EX ſerie quoque oſtenſionis euidens fit, quod conoidis quadriformis ſingulę aſſignatę partes baſi parallelis planis reſectę ęquatur priſmatis, & pyramidis portioni ad eandem altitudinem à plano baſi parallelo reſecatę; Quia ſcilicet omnia plana parallela baſi ad eandem eleuationem, hinc in ſphæroide, hinc in priſmate, & pyramide ducta ſunt inuicem æqualia; Vnde eodem argumento ex prop.22. huius idem de portionibus concludere poteris; Et hinc ex Coroll.1. eadem de inuolucro portionis concludes, & de parallelepipedo in minori baſi ad eandem altitudinem portionum conoidis hyperbolici erecto. Quod nempe tum partis inuolucrum, tum hoc parallelepipedum ſint æqualia.

EXPENSIO IX.

De Corporibus ſpiralibus.

VIdimus Tract. 30. prop.53. & ſequent. ſuperficies ſpirales; modò ſpiralia corpora ſuper ipſas eleuata breuitèr oportet attingere, & eorum menſuras aperire: Sunt autem ſpiralia corpora in quadruplici differentia; Alia, quæ obtinent baſim circulum, & eleuantur parallelis ſuperficiebus à baſi, ſed ſpiraliter aſſendunt per incrementa ambitus circuli proportionalia, altiorque eſt gyrus in fine, quam in initio; Alia ſunt, quæ ſuper baſem ſpiralem ſunt conſtituta: ſed in æqualem eleuationem terminant, in baſimque ſpirę, à qua eleuantur, æqualem, & ſimilem. Alia ſunt, quę ſuper baſem ſpiralem ſunt collocata. Sed etiam ſecundùm, quòd creſcunt ſpatio baſis ſię, & altitudine eleuantur: Alia tandem è contra; Nam in ipſa ſpirali baſi collocata, ſecundùm quod baſis creſcit amplitudine, illa altitudine decreſcunt.

DEFINITIO.

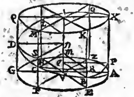
COrpus ſpirale eſt illud, quod in altum ſe eleuando tot partes abſumit altitudinis, quot peripharia circuli ipſum ambientis, & ab eodem centro deſcripti.

Soliditates ſpirales in altitudinem eleuantur proportionaliter ad circulum, ſecundùm quod feruntur in orbem; ita quod, quot partes abſumit circuli in orbem ſe gyrando, tot altitudinis aſſequatur in ſe eleuando: Sicut enim linea ſpiralis, ita decreſcit, vt quot partes abſumit circuli generantis, tot partibus diminuatur, ſic ſpira ABCD, ſi ex ſex partibus circuli ASFG eodem centro ducti efficit AE vnicam, etiam vnica parte ES eleuatur ex ſex, in quas altitudo AR diuiſa ſit, ſi duas ambitus AE, & EF, etiam duas FC: altitudinis occupat, ſi tres AEFG, etiam tres altitudinis abſumit GD, &c.

THEOR. I. PROPOS. LVII.

Corpus ſpirale ſuper circulum ſpiraliter in altum aſcendens, eſt dimidium cylindri ſuper eandem baſem collocati, & in eandem altitudinem eleuati.

SIt ſpirale corpus primi generis, quod ſpiraliter tantùm in altitudinem procedat ſuper baſem circularem AEGHZ, ſpirā ABCDLOQ. Dico, quod hoc eſt ad cylindrum AGQX, vt 1, ad 2.



Probatur. Nam ſpirali corpori ABCD LOXAG circūſcribātur ſectores ſolidi PAEAVE, & EFCMV, & SDFGNV, & cæt. ęqualium baſium, eritque ſector ſolidus PBAEVE ad ſectorē ſolidū XXAEVI, vt altitudo SE ad altitudinē EK ex 13.h. quod ſint ſuper eādem baſim VAE. Sic ſector ſolidus EVFRME erit ad ſectorem ſolidum EKIVMF, idest æqualem XIKAAV, vt altitudo FC ad altitudinem FM, idest EX: ergo ex prop.25. lib.5. prima quantitas SAEFVE ſectoris ſolidi cum quinta AVFCMR ſectoris item alterius ſolidi erit ad ſecundam AEXVIK, & ideo ad duplam ex 18.l.5. XIMAVF, vt tertia ES altitudo cū ſexta FC altitudine ad EK altitudinē, & ideo ad duplā FM, & EX. Cū ergo ſint duo ſectores ſolidi AFESVE, & EFRCVM ad AEIXVA ſectorē ſolidū, vt duę altitudines ES, FC ad altitudinē EK, & ſector quoq; ſolidus creſcens FSG DVN ſit ad ſolidū VFGMIQ, idest æqualē XXAEVI, vt GD altitudo ad GQ; idest æqualē KA ex eadem prop.25. prima quantitas cum quinta, nempe duo ſectores ſolidi APVMFC cum ſectore ſolidos SFVNON erit ad ſecundam quātitatem AXAVXI, & ideo ad triplam XKMQ AEFG ex 18. lib.5. vt tertia duę altitudines ES, FG cum ſexta GD ad quartam EX, & ideo ad triplam AK, & FM, & GQ, & ſic proſequere vſque ad complementum totius ſolidi ſpiralis, & totius cylindri, & tunc erunt omnes ſe-

ctores

ctorex ſolidi ſe augentes ad omnes ſectores ſolidos æquales inuicem. vt omnes altitudines ſe augentes BA, FC, GD ad omnes altitudines æquales: Sed altitudines ſe augentes ſunt dimidium altitudinum æqualium; Siquidem accreſcunt proportione arithmetica. Quia verò rectangula eiuſdem altitudinis ex propoſ. 12. tract. 27. decreſcentia, ſeu creſcentia arithmeticè dimidia ſunt integrorum, etiam baſes lineę, quæ ſunt in eadem proportione, ac rectangula æquealta ex 1. lib 6. erunt dimidium baſium integrarum: Cum ergo altitudines ſe augentes BE, FC, GD, & cęt ſint dimidium integrarum altitudinum EX, FM, GQ, & cæt. æquali numero multiplicatarum; Etiam ſectores ſolidi creſcentes SAP EVC, RVE FCM, & cęt. erunt ad integros ſectores ARI V, KFI V, MGIV, & cęteros eadem numeroſitate altitudinum ſumptos, vt 1. ad 2. ſi autem ſic ſectores circumſcribentes intelligantur multiplicati omni numeroſitate poſſibili iuxta vſitatum modum arguendi adæquabunt corpus ſpirale ABCOLOXAEFG. Ergo hoc corpus ad cylindrum ex ſectoribus æqualibus integratum erit, vt 1. ad 2. dimidiumque eius adęquabit.

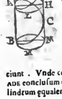
COROLLARIVM I.

QVod dicitur de toto cylindro, & de ſpirali corpore, idem dicendum de eorum partibus V. g. AEBPEV ſectorem eſſe duplum corporis aſcendentis APEVC.

Quia ſi rectangula illi portioni, vt toti circumſcribantur, eodem argumento poterit oſtendi ſingulos ſectores creſcentes eſſe ad ſingulos æquales, vt altitudines creſcentes ad altitudines æquales, & quia creſcentes ſunt dimidium altitudinum æqualium, cum arithmeticę creſcant, etiam creſcentes ſectores eſſe dimidium ſectoris integri.

COROLLARIVM II.

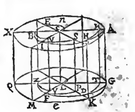
HInc eſt, quod habita primi ſpiralis corporis in altum aſcendentis quantitate, cęterorum corporum ſpiris aſcendentibus comprehenſorum quantitates habeantur. Nam SNMCA ſpirale corpus eſt dimidium cylindri BHL ANM, & ALHOE ſpirale corpus eſt dimidium cylindri ALHTXE: ſed hi ſunt ęquales cylindri; cum eorum ſit æqualis baſis, & altitudo ob ſpiram eandem; quę aſcendit à B vſque ad A, & ab A vſque ad E. Ergo corpus interpoſitum inter duas ſpiras eſt æquale duobus dimidijs cylindrorum ęqualium; duo verò dimidia ęqualium vnum integrum conficiunt. Vnde corpus ſpirale inter duas ſpiras BCADE concluſum ęquat cylindrum BNMALH, vel cylindrum ęqualem ALHTXE.



THEOR. II. PROP. LVIII.

Spirale corpus in æqualem altitudinem eleuatum: ſed ſuper ſpiralem baſim collocatum eſt tertia pars cylindri æqualis eleuationis ſuper circulum ſpiram generantem inſiſtentis.

SIt ſpirale corpus AHIBECOOFZL ſuper baſim ſpiralem GDFZL, & circulus complectens ſit GBQ: cylindruſq; ſuper hunc circulum eleuatus AUBGQ. Dico ſpirale corpus AHIBECGFZL eſſe tertiam partem cylindri OEQANX.



Probatur ex eodem principio, & ferè eodem argumento, vt oſtenſa eſt propoſitio precedens. Quoniam LOT baſis, ſectorque deficiens eſt ad GLK ſectorem, vt ſector deficiēs ſolidus TDLNHC inſcriptus ad ſectorem ſolidum integrum AOCGKL ex 23. prop. h. At vt PLF deficiens ſector baſis ad baſim ſectorem KLM, ſcilicet æqualem GLK, ita eſt ſolidus deficiens SIPFLC ad ſectorem ſolidum ſuper KLM in altitudinem FI erectum, ſeu æqualem ACLGKO: Quapropter ex prop. 25. lib. 5. prima quantitas TDL ſector inſcriptus planus deficientium primus cum quinta quantitate PLF, ſectore plano; obtinebit ad ſecundum GKL, & ideo ad duplum eius ex propoſ. 18. lib. 5. GLM, vt tertia quantitas ſector ſolidus deficiens NHCTOL, cum ſexta PLSSIC ad ſectorem ſolidum integrum LCAGKO; & ideò ad duplum eius GLM baſi erectum æquealtum. Iam ergo ſi ſumantur TDL, & PLF ſimul ſectores plani erunt ad GLK ſectorem planū, vt ſector ſolidus TOCLPFSI ad ſectorem ſolidū GAKOLC, & LYZ ſector planus ad ſectorē planū MLQ, ideſt GLK, vt deficiens ſector ſolidus LYZSVC ad ſectorem ſolidū integrum ſuper LMQ æqualem GACCKL ſectori. Quadere ſimiliter iunctis ſectores TDL, PLF, LYZ ad GLK ſectorem integrum, & ideo ad triplum eius, vt tres ſectores ſolidi deficientes illis baſibus locati NHCLDT, SVCLFP, VSCLZY ad ſectorem ſolidum integrum AOC GKL, & ideo ad triplum eius ęquealtum baſi tripla OKMQL collocatum, & ſic de alijs.

Cum itaque omnes inſcripti ſectores plani ſint ad integros planos, vt omnes ſolidi inſcripti deficientes ad ſolidos integros ſectores, erit etiam ipſum ſpatium ſpirale omnes ſectores ſolidos tandem adęquans iuxta vſitatum argumentum multiplicationis talis, quę omnem poſſibilē differentiā inter inſcriptos ſectores, & corpus ſpirale tollat, & abſumat ad cylindrum ex ſectoribus ſolidis non deficientibus compoſitum, vt tota baſium multitudo, ideſt ipſum ſpirale planum ad circulum generantem

nerantem : ſed ſpirale ſpatium ad circulum generantem eſt, vt 1. ad 3. ex propoſ.53. Tr.30. Ergo etiam ſpirale corpus AHTBECUNFZL ad cylindrum ambientem GMQXNA erit, vt 1. ad 3.

COROLLARIVM I.

*Hinc etiam euidens eſt : id quod dicitur de toto ſolido poſſe oſtendi, de ſingulis partibus ſolidis, nempe, quod ſe habeant ad inuicem, vt portio baſis ſpiralis ad circulum generantis portionem reſpondentem. Portio verò plani baſis eſt ad ſectorem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus cum triente quadrati differentię ad quadratum radij ſectoris ex prop.60. tr.30. Ideoq; ſpiralis ſolidi fruſtum AHCGDL erit ad cylindri partem AOCGKL ambientem, vt ſolidum parallelepipedum ſuper illud rectangulum linearum LD, LC terminantium, & triens aliùs parallelepipedi in quadrato differentiæ DK locati, quæ in parem eleuationem ſubleuata ſint ad parallelepipedum æqueſitum, ex quadrato CL radij baſis ſectoris aſſurgẽs.

COROLLARIVM II.

*Hinc etiam patet, quod idem verificatur de corpore ſituato in ſecunda, & tertia ſpira, & cęteris de quibus locuti ſumus prop.56. & 58. & 59. tract.30. Quod ſcilicet fit ad corpus cylindricum comprehendens, vt ipſa ſpira plana ad circulum eam claudentem. Nam idem argumentum, quod attulimus in oſtenſione propoſitionis, etiam hic valet abſque eo, quod replicetur : cùm etiam ſectores ſolidi deficientes ad primum ſectorem, & alios maximos æquales ſolidos, vt ſectores plani deficientes illorum baſes ad primum ſectorem planum, & alios æquales ob eandem altitudinem ex 23. h. ſint in eadem proportione.

THEOR. II. PROPOS. LIX.

Corpus ſpirale baſi ſpirali inixum, & quoad altitudinem ſpiraliter deficiens eſt ad corpus ſpirale eiuſdem altitudinis ſuper ſpiralem baſim poſitum, vt 5. ad 6.

Sit ſpirale corpus AST ſuper baſim TCI ſpiralem inixum deficiens ſpiraliter, quoad altitudinem AT. Dico, quod hoc corpus eſt ad ſpirale corpus eiuſdem altitudinis ſuper ſpiram TCI collocatum, vt 5. ad 6.

Oſtenſio, quæ noſtra eſt ſicut etiam totius h. expenſionis à multis dependet, quæ priùs declaranda ſunt.



Et primo progreſſ. Obſeruandum eſt ſpirale corpus æqualis altitudinis, de quo præced. prop. 58. locuti ſumus poſſe circumueſtiri portionibus annulorum eiuſdem altitudinis TA, & latitudinis TE, qui à diametro TI, vbi ſpira baſis ſumit initium deducti in ipſam ſpiram terminent, vt ſunt ELTF, PAB, ZKEP, & alię, vt vides in fig. Quia enim ex pr.9. tract.18. & 52. tract.31. ſemidiameter IT diuiditur in partes æquales, ſecundùm quas quilibet ſector arithmeticè, ideſt æqualiter quoad diametrũ decreſcit; qui ſpirę, aut inſcribatur, aut circumſcribatur, ſi omnes illi ſectorum arcus, vſque ad ſpiram à diametro TI deducantur, patet ſe inuicem ſuperare annulorum ęquealtis portionibus, vt ſunt FLK, & YEK, & VYN, & cęt. Nam omnes TE, & EY, VY craſſitudinem menſurantes æquales ſunt.

Diuidatur itaque TI radius (vt huius rei demus exemplum) in octo partes æquales, à quibus ſinguli arcus ducantur, vt TF, EK, YN, &c. Certum eſt ex pręaſſ. Expenſ.7. tract.31. decreſcere ſingulos arcus radijs interceptos TF, & EK, YN, &c. arithmeticè pęnes diuiſionem diametri; ita quod, vt IE deficit à IT octaua parte, ſic arcus EL à TF deficiat octaua parte, & ſicut YI deficit ab TI duabus octauis partibus, ſic YQ ab TF duabus octauis partibus decreſcat; itaque ſi annulus EL duplicatur, deficiet duabus octauis partibus : ſi annulus YQ triplicatur, deficiet tribus octauis partibus ab LE, & cęt.

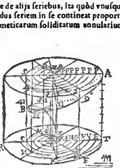
Progreſſ. 2. Itaque ſectorum arcus arithmeticè decreſcent à ſe inuicem æquali arcu deficiendo, nempe ſemper octaua parte earum, in quas primus arcus TF diuiſus eſt. Itaque in ſectore IFT erit arcuũ, & ideo portionũ ãnulariũ ſeries arithmetica, quorum primus annulus LEFT, ſecundus LQEY, & cęt. In ſecundo verò ſectore IKL erit adhuc alia ſeries arcuum, & ideo portionum annulorũ, quorũ primus KL, qui deficiunt, vt illi, qui ſunt in ſectore IFT, ſed incipiendo ab arcu minori LK vnica octaua parte. In ſectore verò NIK erit alia ſeries arcuum, & ideo portionum annulorum eodem decremento arithmetico deficiens, ſed incipiens ab arcu minori duabus partibus ab FT, ſed vnica ab KL. Ita vt etiam ipſę ſeries arithmeticè decreſcant vſque ad finem, totque ſint ſeries, quot arcus in IFT ſectore, vel quot decrementa arithmetica, quæ in ſingulis deficiunt, vel quot partes in arcu maximo FT ſectoris maximi IFT, vel partes in radio IT. Quæ tamen omnes ſeries ſimul ſumptæ componunt ſoliditatem totius corporis ſpiralis baſis; ſed æqualis altitudinis.

Progr. 3. Quod autem annulares portiones, vt arcus arithmeticè deficiant, patet, quia omnes annulares portiones iſtis arcubus comprehenſæ ſunt æquealtæ, vtpote deductæ ob æqualibus partibus ET, & KY, & YV diametri TI erunt ad inuicem, vt baſes, nempe vt ipſi arcus. Siquidem ex propoſ. 14. Tract. 30. æquantur rectangulis ex portionibus intermedijs inter arcum maiorem, & minorem marginalem ipſius portionis annularis plani, ſc. arco intermedio inter LE, & FT, qui in figura expreſſus non eſt, ne generaret confuſionem. Iſti verò arcus intermedij creſcunt ad inuicem etiam arithmeticè, vt ipſi arcus marginales cum ſemidifferentia inter maiorem, & minorem, vel à maiori deficiunt, vel ſuper minorem accreſcunt V.g. arcus inter FT, & LE erit maior, quàm LE ſemidifferentia inter FT, & LE, at arcus intermedius inter QY, & EL erit minor, quam EL ſemidifferentia inter QY, & LE, quæ duæ ſemidifferentiæ æqualium differentiarum, quibus decreſcunt arcus FT, LE,

QY

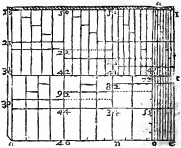
QY additæ ſimul facient differentiam eandem arcus LE ab FT, vel QY ab LE. Exemplum eſt in quatuor lineis in ſeorſim ductis aritbmeticè deficientibus tantùm enim deficit ſecunda à quarta quantum prima à tertia. Cum ergo rectangulorum baſes intermedijs arcubus æquales arithmeticè decreſcant, etiam ipſa rectangula arithmeticè deficient, vt ipſæ baſes, vtpote æquealta, & ideo ipſæ quoque portiones annulares LSFT, & QYEL rectangulis æquales ex 14. Tract. 30. arithmetico defectu extenuabuntur, & ſi ſuper iſtas baſes portiones ſolidæ annulares intelligantur eleuatæ ad eandem altitudinem AT, quæ ſunt illæ ſoliditates, quæ integrant ſpirale corpus quoad baſim ſolummodo TLKCMOI baſi infima, & A 2 3 4 5 6 7 8 baſi ſuprema locatum, etiam ipſæ ſoliditates cum ſint ſouleem, vt baſes ex 23. prop. Tract. 34. par. 2. decremento arithmetico eodem ſemper æquali decreſcent: ideoque ſector ſolidus FIT AP 2 erit diuiſus in portiones annulares ſolidas decreſcentes arithmeticè, vt ipſę baſes, id eſt in ſeriem ſolidam arithmeticam, V. g. FTLSAP 2. erit prima ſoliditas, & ELQYPP2. ſecunda ſoliditas, & ſic dicas de alijs vſque ad axem.

Eodemque modo ſector ſolidus IKL23 diuidetur in ſeriem aritbmeticam ſoliditatum, prout decreſcunt ex 1. progr. ipſæ baſes, eritque ſeries, cuius maximus terminus KLQ a 3 erit minor, quã maximus LEFTPA2 vnica differentia arithmetica, & ſic eſſare de alijs ſeriebus, ita quòd vnuſquiſque ſector ſolidus ſeriem in ſe contineat proportionalium arithmeticarum ſoliditatum annularium.



Progreſſ. 4. Conſiderandum itaque eſt, quod ſpiralis ſuperficies corporis baſi, altitudineque deficientis, hæc omia ſolida æquealta ſecat ab A deſcendendo ſpiraliter per A 9 1 1 B, & cæt. vſque ad centrum I, & arithmetico defectu ſingulas altitudines detruncat, vt ex def. conſtat. ideoque debent intelligi ſpirali ſuperficiei deſcendenti circumſcriptę ſectorum ſolidorum annulares portiones TF 2 APEL, & LKQ 9 1I, & NK 11 21, & cæt. quæ ſingulæ à ſemidiametro APP, & cęt deſcendant arithmeticè deficiendo tamquam quidam gradus altitudine AT in tot partes diuiſa, vt radius TI, quos omnes ſpiralis ſuperficies A9 11 8 I tangat in A in 9 in 11. in 21 in B in 41. & cæt. Ita quod ſingulorum baſes ſint primo LEFT, ſecunda EKY, tertia YVN, quarta VGC, & cæt.

Progreſſ. 5. Quia itaque iſtæ omnes ſoliditates in figura ſine confuſione exprimi nequeunt, ideo ſeorſim ea omnia expreſſimus in rectãgulo I 13 e, vt eorum ordo, & defectus meliùs capiantur, in quo 13 I. ſuperficies nigra exprimit graſſitudi-



nẽ ET ſingularũ baſiũ ETLF, &c. quæ ſemper craſſitudo in omnibus eſt æqualis. At rectangulum e 72. exprimit primam portionem annularem ſolidam LSFT2AP non deſcendentem: ſecundum n. 41. 72 o, in quo partes decreſcant à 72 o. vt deſcendit FIEKS, per vnũ gradũ à a in 9. à ſumma altitudine 72 vel AT, quod rectangulum ſolidum æquet duas ęquealtas annularium ſoliditatũ portiones LEP2. & 23KL, quæ primo decremento arithmetico, eodem deficiunt; Tertium ſit 41. 42 n. 40. in quo tamen partes ab eadem altitudine n 41. deſcendant, vt facit ipſa portio VYN annuli ſolidi, cui æquãtur, quæ deſcendit à P in 21 per duos gradus 2. & 11. quod rectangulum ſolidum ęquetur tribus annularibus portionibus æqualibus inuicem locatis in baſibus EQ, KQ, & KN, & ſic de alijs: Itaque 72 e exprimit, & æquat ſoliditatem in LEFT baſi locatam 72 82 n o æquat eam gradatam, quę in EYK, ſic 41 92 40 n, quę in VYN, ſed 42 30 40 61. quæ in VGC, at 13 31 42 22 eam quę in GVC ſita eſt: rectangula 42 50 23 41 gradatam ſoliditatem, quę GHCM baſi ſtat; rectangula 51 41 43 72. quę in HSMO fundatur; & tandem rectangulum gradatum 43 62 e gradationem, quæ in SKZI locata eſt, quæ accepta, vt æquealta ęquãt quoque annulares portiones æquealtas iiſdem baſibus locatas.

Progreſſ. 6. itaque ſinguli ſectores ſolidi veſtiti in TKF, & LKI, & KIN, & cæt. baſibus locati deficientes arithmeticè ab inuicem in ſingulis rectangulis prædictis habent ſuam partem correſpõdentem, ita quod prima pars omnium rectangulorum V. g. prima, & vnica in 72. e, prima duarum in 72. n prima trium in 41. 40. & ſic omnes primę partes in quolibet rectangulo ſolido æquentur partibus ſectoris ſolidi in baſi ITF locati, & illæ omnes primę ſint æquales portionibus annulorum quæ ſucceſſiuę decreſcunt in LPST, & LEQY baſibus decreſcentibus. Sic quoque concipies de ſecundis partibus in vno quoque rectangulo ſolido, ita quod ſecunda pars duarum in 72. n ſecunda pars trium in 41 40. ſecunda pars quatuor partium in 42 61, & cęt. portiones ſolidas ſectoris KIL baſi ſitas adæquent, & ſic dicas de tertijs in 41 40; 42 61; 13 42. & cęt quæ æquant portiones ſolidas NIK ſectore locatas.

Progreſſ. 7. Ad hoc vt ergo incipiamus oſtendere, quam proportionem habeant hæ omnes ſoliditates ſimul acceptæ ad totum 13 e, id eſt, quam ſpira ſolida altitudide, baſique deficiens habeat ad ſolidam ſpiram baſi tantùm deficientem: Accipiamus in primis minimas ſingularum gradationũ altitudines, & conſideremus, quod hæ ſingulæ minimæ

nimę altitudines, & vltimæ AT, & L 9. & K 11. & N 12. & CB, & cęt. in vnaquaque portione annoli decreſcunt aritmeticè vſque ad 1; ſuntque in rectangulis portiones illis ānulis æquales e71, 82 o, 92 n 30 40, 22 31, 23 42, 43 41. vſque ad nihil t, quæ deficiuot Arithmeticę etiam quoad altitudinem; ſiquidem ex def. vt ſpira appropinquat ad centrum per partes æquales radij decreſcendo, ita ab altitudine per partea ęqoales altitudinia deficit. Itaque in annulo ſolido LEF T 2 A nulla eſt degradatio, ſed altitudo TA, vel e T, at in annulo ſolido YRQL iam eſt primus deſenſus 89 vnius gradus, vt in rectangulis ſolidis n 82. & ſic ſucceſſiuè in alijs vt ex rectangulis ſolidia melius percipies, in quibus vt diximua progr. 6. omnes primæ partea pertinent ad ſectorem ſolidum in TP1 locatum, quorum minimæ, & vltimæ altitudines ſunt, & 72 o, n 82, 40 92. 30 62, 22 42, 34 41, 43 72 vſque ad nihil in t graduatim, & arithmeticę deficientea: Quod autem dicitur de partibus primi ſectoria ſolidi conſideraci ioxta minimas altitudines; hoc item diceudum eſt de partibus ſectoris ſolidi LIK locati iuxta minimas altitudinea accepti t In ſingulis enim rectangulis ſolidia minimæ altitudines partibus omnibus rectāgulorum communea ſunt, & deſignantur per lineas 72 t, 72 82, 82 92, 92 30, & cæt. Itaque iſtæ portiones ſolidorum ſectorum, & rectangulorum ſolidorum illia æqualium duplici decremento arithmetico decreſcunt quoad latitudinem, quidem ſimul cum baſibus decreſcentibus ex progr. 1. & 2. & etiam quoad minimas, & vltimas altitudines: ideoq; rectangulorū ęqualitorum V. g. primorum in vnoquoque rectangulo ſolido in 72 e in 41 o, & cæt. erunt vtpote ęqoeraſſa, duo trientes vt ipſę baſea planę ex contextu propoſ. 14. 15. 26. 27. Tract. 28. Et quia vt dictum eſt prog. 6. prima omnia in vnoquoq; rectāgulo æquant ſectoris primi T t P portiones annul[illegible]a ſolidas; Ideo illę portiones acceptæ, & conſideratæ iuxta vltimaa, & minimas altitudinea erunt duo trientes ſectoria IFTA 2 eiuſdem æquealti, & graſſi, quod deficit qooad ſingulas partes vnico decremento arithmetico, vt dictum eſt progr. 2. & 3. Si aſſeras de omnibus partibus ſecundia rectangulorum ſolidorum, quæ pertinent ad ſolidū in baſi IL2 locatū, & ſic dicas de omnibus alijs. Ideoq; in ſingulis progreſſionibua arithmeticia horum ſectorum vnico decremento arithmetico deficientium ſolū longitudine habemus portiones ſolidaa deficientes ſecundum minimas altitudines arithmeticè, quare in vnoquoqoe ſerits deficientium partium ſolidarom duplici arithmetico decremento ad ſeriem earum ſolùm vnico defectu deficientium ſe habebunt, vt duo ad tria. Ideoque etiam omnes ſimul ex prop. 17 lib. 5. cum ad ſingulas taliter ſint, erunt, vt duo ad tria, & ita omnia minimæ altitudinis rectangula V. g. 72 e, 82 o, 92 n, 30 40, 42 21, 23 42, 41 43 vſq; ad t erunt totius rectangoli ſolidi 13 e, duo trientes cum in vnaquaq; ſerie V. g. primarum partium deficientium altitudine, & latitudine ſint ęquealtarum latitudine deficientium duo trientes, & ſic in ſerie ſecundarum partium, & cęt.

Progreſſ. 8. Nunc quid gradationes ipſæ auferant ab vnoquoque rectangulo ſolido, conſiderandum eſt. Ad quod aduertere oportet ſingulas partes ſingulorum rectangulorum vnicā in 72 t, duas in 41 72, tres in 42 82, & cæt. eſſe inuicem æquales, vtpote illę, quarum latitudines æqoantur arcubus eodem decremento ab eodem maximo diminutis V. g. vnica in 72 e arcui FT duæ in 41 o arcubus LE, & L2 eodem decremento primo ab arcu FT maximo deficientibus. Tres in 42 n tribos arcubus YQ, & QK, & 2N, qui duplici decremento arithmetico eodem deficiunt ab FT maximo eodem. Altitudines verò omnes æquales ſunt 41 82, vel 42 92, vtpote pertinantes ad ſpiram ſolidā altitudine non deficientem. At quatenus terminant in ſpirale corpus decreſcens altitudine quoque, & eius ſpiram deſcendentem; in ſingulis à ſumma altitudine, vt dixi progr. 5. deſcendunt vſque ad minimam altitudinem arithmeticè.

Progreſſ. 9. Cum itaque gradata ſolida rectangula in vnoquoque rectangulo accepto à ſumma vſque ad minimā altitudinem V. g. t72; 72 82 41 92. 42 30. 13 22. 50 23. 51 43. 62 t in ſingulis rectangulis, quorum partes æquelatæ conſtituant progreſſiones arithmeticas vnico decremento arithmetico quoad altitudinem deficientes erunt ſingulorum rectangulorum 72 82, & cęt. dimidium ex prop. 12. Tract. 27. vtpote quod eadem ratio ſit ſolidorum, quorum graſſitudo eadem in omnibus, vt dixi prop. 5. ac baſium, & rectangulorum planorum: Cum ergo ſingula deficientis ſint ad ſua integra, vt 1. ad 2. etiam omnia ex prop. 17. lib. 5. erunt ad omnia ſua integra, vt 1. ad 2.

Prog. 10. Ponatur itaq; quod rectangulum 13 e totum toti ſoliditati ſpiralis, baſis æquale tantū, ſit partium 6. quia oſtendimus progr. 7. rectangula minimarum, & vltimarum altitudinum 72 e, 82 o, 92 n, 33 40. & cæt. eſſe totius 13 e ſoliditatis duo trientes ſe habebunt ad rectangulum totum, vt quatuor ad ſex. Vnde reſiduum integræ ſoliditatis ablatis illis minimarū altitudinum rectangulis remanebit duo. At quia huius reſidui, nēpe rectāgulorum T 72. 72 82, 41 92, 42 30, & cæt. gradationes ſolidę ſunt dimidium, & ideo, vt 1 ad ſex ad totum ex prop. 39. Tr. 17. Ideo cū quantitas minimarum altitudinum poſita ſit, vt quatuor, & hæc ponatur vt 1. ad ſex reſpectu totius ex eadem propoſ. 39. Tract. 17. erunt omnes quantitates rectangulorum ſolidæ, quæ æquant ſectorum ſolidas portiones deficientes ob ſpiram baſi, altitudineque deficientem, cui circumſcribūtur ad omnia rectangula ſolida, quæ æquant ſectorum ſolidas portiones ſpirali corporis baſi tantùm circumſcriptas, vt quinque ad ſex.

Hoc autem totum intelligitur ex prop. 17. tract. 27. ſi hæc rectangu'a ſubdiuidantur omni poſſibili ſubdiuiſione ſubdupla, ſicut nempe ipſi annuli, ſeu portiones annulorum corpori ſpirali circumſcriptæ, vel inſcriptæ, quibus rectangola hęc æquatur omni poſſibili numero multiplicatæ ſimiliter intelligi debent. Vnde etiam ipſum corpus ſpirale deficiens, quoad baſim, & altitudinem iſtis rectangulis inſcriptis, vel circumſcriptis, quę omni poſſibili multiplicatione ſubdubla numeroſa tandem ipſum æquant ad ſpirale corpus ſolùm pęnes baſim deficiens annulis prædictis, & ſimiliter multiplicatis inſcriptum, vel circumſcriptum erit, vt 5. ad 6. quod hæc rectangula inſcripta, vel circumſcripta illud tandem æquent, alioquin nouæ inſcriptioni, vel circumſcriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquatur, molem relinqueret.

COROLLARIVM I.

* Hinc enaſcitur, quod ſit ad cylindrum RA ſuper circulum RT eiuſdem altitudinis, vt

vt 5. ad 18. ſiquidem ſpirale corpus deficiens, quoad altitudinem, & baſim eſt ad ſpirale corpus deficiens tantum quoad baſim, vt 5. ad 6. ſed corpus ſpirale deficiens tantum quoad baſim ad cylindrum RTA eſt ex præced. vt 1. ad 3. Ideſt, vt 6. ad 18. Ergo ex *æquo* erit ſpirale corpus vtrinque deficiens ad cylindrum RTA, vt 5. ad 18.

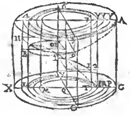
COROLLARIVM II.

* HInc quoque fit, quod reſiduum huius ſpiralis corporis, quod ſcilicet decreſcit altitudine, dùm ſpiralis baſis creſcit latitudine, eſtque corpus APP 9 B 1 2 3 4 5 6 7 8. quartum genus ſpirarum, erit ad corpus ſpirale non deficiens altitudine, vt 1. ad 6. quia compars ſpirale, nempe corpus ATL 9 B C I eſt eiuſdem corporis altitudine non deficientis 5. ex partibus eius 6. vnde reſiduum erit 1. & ad prędictam compartem ſe habebit, vt 1. ad 5.

THEOR. III. PROPOS. LX.

* *Secunda ſpiralia corpora, & baſi, & altitudine ſpiraliter deficientia ſunt ad ſpiralia corpora ſecunda baſim ſpiralem tantùm habentia, vt* $2\frac{1}{3}$ *ad 3.*

PRæter primas ſpiras aſſignauimus Tract. 30. prop. 57. & 58. & 59. ſpiras ſequentes, & ſecundos, tertioſque ambiens poſt primum efficientes, Si ergo intelligantur ſuper has baſes corpora eleuari, alterum, quod ſpiraliter deficiat, etiam quoad altitudinem, vt eſt A 9 B 1 T ſuper baſim COLVT ſpiralem ſecundæ ſpirę: alterum ſuper eandem baſim collocatum COLVT, ſed in ſimilem, & parallelam baſim terminet, quæ incipiant ab eodem puncto A, illud corpus deficiens ſpiraliter baſi, & altitudine erit ad hoc baſi tantùm deficiens, vt $2\frac{1}{3}$ ad 3. vel 7. ad 9.

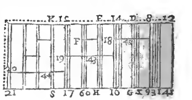


Progreſſ. 1. Quod oſtendetur eodem artificio, quo præcedens. Nam CT ſemiradius, ſi ponatur TQ altera pars, & radius ad primum circulum pertinens diuiſus in quatuor partes æquales; etiam ipſe in quatuor partes diuidetur ex 55. Tract. 30. vnde erunt octo, & ita arcus deficient ſinguli octaua parte, vnde annuli plani erunt æquealti, qui ſpiram baſeos, vel ambiant, vel ipſa ambiantur, decreſcuntque vt arcus ſectorum arithmeticè ex progr. 1. propoſ. anteced. ſinguli octaua parte.

Progr. 2. Ideo ex progr. 2. in ſingulis ſectoribus COO, OQL circumſcribentibus erit inſtituta ſeries arcuum arithmetico decremento deficientiom, & ideo portionum annulorum planarum ęquealtarum PCO, & cęt. vſq; ad T in ſectore CQO, & pari ratione in alio ſectore LQO, & ſic in omnibus alijs, quę ſingulę ſeries continuę incipiant à primo arithmeticè deficiente, V. g. prima CQO ab arcu integro 8. partium, ſecunda LOQ ab arcu ſeptem partium, & ſic de alijs. Sed cum hac differentia à progreſſionibus pręced prop. nam illę deficiebant vſque ad centrum, vſque ad vltimum ſoi; hę verò deficiunt vſque ad circulum TM dimidium circuli XC, vtpote ex dimidio radio QT, vnde etiam arcus quatuor, in quibus diuiſus eſt, vt eſt diuiſus circulus XC ex prop. 39. lib. 6. dimidium erunt quatuor arcuū circuli XC V. g. arcus OC: quare arcus tantū pro dimidio ſui deficient, & aliud dimidium ipſorum integrum remanebit in ſingulis progreſſionibus, in quibus ſectores diſtributi ſunt. Ex 3. verò progr. tales, & etiam erunt portiones annulorum planorum, quos prædicti arcus ambiunt, & idem dicendum de ſolidis portionibus annularibus æque-eleuatis ex eodem progr. & ex 23. prop. Tract 34. p. 2.

Progreſſ. 3. Spirali autem corpori etiam quoad altitudinem deficienti intelligantur circumſcripti annuli, vt prędicti ſuper baſes annulares planas COP LRV, & cęt. quę ſint COYA 3 non deſcendens, & PRL 11 y ab y primo gradu 9 3. deſcendens, & RHV 10. ab y per duos gradus 39. B 11. deſcendens: Sic yHTM 12. per tres gradus 3 9. B 11. I 10. deficiens, & tandem 7 TMT vſque ad vltimum gradum in 12 T poſt omnes gradus alios perueniens, ſed ſemper incipientes à ſumma altitudine Ayyy 7.

In iſtis verò annularibus ſolidis portionibus primò conſiderandę ſunt minimę altitudines O 3. L 11. V 10. T 12. vt diximus progr. 7. quę deficiunt arithmeticè in vnaquaq; portione annulari V. g. minima altitudo O 3 ſolidæ portionis annuli in OC baſi locatę O3. & eius, quę in tota LP annulari baſi eſt L 11. at eius, quę in RLV annulari baſi ſituata eſt V 10. altitudo minima.



Progreſſ. 5. Sed vt fecimus progr. 5. & 6. melius percipies in rectangulis 41. 8. 8 16. & cæt. quorū 8 41. æquare pręſupponatur primā portionē in OC locatam latitudine, vt arcus ipſe, & baſis ipſa non deficientem: ſed nec altitudine cum ſit primū omniū. At rectangula duo 8 16. quę prima diminutione deficiunt latitudine, portioni ſolidę æqualia iudicentur ſitę in PL. At 14. 17. tria rectāgula putentur portioni ſolidæ ſitæ in RLV æqualia, quæ ſecunda diminutione deficiunt, & cęt. Vnde in ſingulis rectangulis primæ partes in ſectore COQ ſitæ intelligantur, ſcilicet 8 41. D 31. E 16. K 17. ſecundæ 14 G, & aliæ ſecundæ in alijs

elijs rectangulis in LQO collocatæ, intelligendæ ſunt ; tertiæ vt 15 60. in OLQV. In ſingulis verò medietas alba rectãguli 8 41. integra latitudine, & altitudine perſeuerat, vt diximus pr.2. perſeuerate integrã medietatẽ arcuum, quæ latitudinẽ eorum menſurant. At altera medietas 8 31. nz ſu ſecũ 'ũ ſuas quatuor partes arithmeticè deficit in ſingulis diminutionibus vnã partem deperdendo : ſi tamen hæc rectangula cogitentur æqualia illis portionibus ſolidis, quæ ſpirale corpus altitudine non deficiens ambiunt ſpirali tantùm baſi ſitum.

Prog. eſſ. 6. At ſi velimus æquari ſolidis partibus ambientibus ſpirale corpus, & altitudine, & latitudine : tunc ſingula rectangula deficient arithmeticè quoad altitudinem, vt diximus progr. 4 deficere portiones ſolidas corpus ſpirale ambientes, itaque 8 41. non deficiet: at 18 93. deficiet primo gradu: 19 16. ſecundo gradu: 20 17. tertio. & cęt. ſi plura ſint, ſi ſumatur ſecundùm minimas altitudines 8 93. 18 16. 19 17. 20 21. gradus, per quos perueniunt ad illas minimas altitudines non conſiderando, in illiſque pars alba vnico decremento tantum deficiet. nempe quoad altitudinem, ad partes nigræ quoad altitudinem, & etiam, vt diximus quoad latitudinem. Vnde in vnoquoque rectangulo primæ partes 8 41. 45 2, 43 16. 44 17. inſtituent vnam progreſſionem arithmeticam rectangulorum quoad medietatem albam altitudine tantùm deficientium, quoad alteram etiam latitudine: Sic quoque ſecundę partes 18 u, 43 60. & cęt. aliam progreſſionem ſimilem inſtituent, ſed minoris numeri quoad terminos, nam primi ſunt quatuor, ſecundi ſunt tres, & ſic dicas de tertijs, vt ſunt in ſectore COQ quatuor annulares partes, in LQO tres, & cęt.

Progr. 7. Cum ergo iſtæ ſingulę progreſſiones quoàd medietatem albam rectangulorum, vt diximus progr. 5. quatenus æquealtę nimirum quatenus æquant ſolidas portiones corporis ſpiralis baſis tantùm circumſcriptas nullo modo deficiant; ſed integrę perſeuerent, ſtatuantur 6. part. Verùm vt æquantia circumſcriptas ſolidas portiones annulorum ſpirali corpori etiam altitudine deficienti quoad minimas altitudines, vt dixi progreſſ. 6. deficient vnico decremento arithmetico. Vnde erunt ad non deficientes vllo modo vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tract. 27. Altera verò medietas: partium in rectangulis 8 41. 8 16. 14 17. & cæt. deficit primo quoad latitudinem, ſumpta ſc. vt æqualia ambientibus portionibus annulorum corpus ſpirale baſi ſolùm deficiens. Ideoque æquealta erunt ad integras partes, vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tr. 27. ſed vt deficientes etiam quoad minimas altitudines erunt, ex pr. 14 vt 2. ad 6. Cõponantur ergo ſimul 3. & 6. rectangulorum partes nempe illę, quæ nullo defectu, & illæ, quæ tantùm latitudinis, & erunt 9. Ponatur etiam ſimul illæ, quæ tantùm vnico altitudinis, & quę duplici altitudinis, & latitudinis, & erunt 5. ideoque hę ad illas ex prop. 29. Tract. 17. erunt, vt 5. ad 9. Et quia hoc contingit in ſingulis primis partibus, quæ quatuor ſunt, & idem in ſecundis, quæ ſunt tres, & idem in tertijs, quæ duæ ſunt, & cæt. vt diximus progr. 6. rectãgulorum 8 41. 16 8. 14 17. & cęt. quę ſingulę ſunt quędam ſeries Arithmeticè, ſed ſemper numero terminorum minores; ideo ex 17. lib. 5. ita omnes progreſſiones erunt ad omnes, vt vna ex ipſis, ad vnam, & ſic omnia rectangula deficientia ſecundùm minimas altitudines, & etiam latitudine pro ſui dimidio, ſc. 8 41. 18 93. 19 16. 20 17. erunt ad omnia latitudine tantùm deficientia 8 41. 16 8. 14 17. 15 21. vt quinque ad nouẽ. Vnde reſiduũ rectangula 8 18. 14 19. 15 20. erunt, vt 4. ad ſuũ totum. Verùm illa ob gradationes à ſumma altitudine ad infimam deſcendentes pro medietate deficiunt, vt prop. 9. præc. prop. cum in ſingulis rectangulis V. g. in 18 8. duæ ſint ęquealtę. & ęquealtæ in 14 19. tres, in 15 20. quatuor in quibus ſingula gradata rectangula inſtituunt ſingulas progreſſiones arithmeticas vnico tantùm decremento in altitudine deficientes : Ideo gradata rectangula ſingulorum æquealtorum, & altorum erunt medietas, ex 12. Tract. 27. Quamobrem ex 17. lib. 5. omnes quoque ſeries gradatæ ad non gradatas nullo modo deficientes erunt duo ad quatuor, quæ ſimul cum rectangulis minimarum altitudinum ex 29. Tract. 27. erunt, vt ſeptem ad nonem, vel vt 2 $\frac{1}{3}$ ad 3. ad omnia rectangula 15 21. ſc. ad totũ, & idem dicẽdum de annulis ſolidis corpori ſpirali altitudine, & baſi in ſpiram ſe flectentia, quorũ graduatum defectum rectangula ex effectione imitãtur, vtpote, quod ſint inuicem eiuſdem latitudinis; ſimiliterque, & per eoſdem arithmeticos gradus deficiant reſpectu annulorum æquealtorum corporis ſpira baſeos tantùm deficientis, vnde multiplicata quantùm multiplicari poſſunt ſicut ipſum corpus ſpirale non excedent; alioquin nouæ inſcriptioni, vel circumſcriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquaretur, molem relinqueret; ſic, & cũ ſemper ſint inuicem in eadem ratione 7. ad 9. ipſum ſpirale corpus, nempe quoad altitudinem, & baſim ad ſpirale corpus tantùm quoad baſim erit vt 2 $\frac{1}{3}$ ad 3. vel vt 7. ad 9.

COROLLARIVM.

Hinc faciliter quis videbit, quam proportionem dicat hoc ſpirale corpus ad cylindrum ambientem, cum enim baſis ſpiralis ad circulum ambientem ſit 7. ad 12. ſi ſuper hanc baſim ſitum ſit corpus æquealtum ſpirale quoad baſim tantùm ex 23. Tract. 34. erit ad cylindrum comprehendentem, vt 7. ad 12. vel vt 63 ad 108. nempe vt ipſę baſes; At ad hoc corpus ſpirale ſe habet corpus altitudine quoque ſpirale, vt 7. ad 9. Ideſt, vt 49. ad 63. ergo ex *æquo* erit corpus ſpirale ad cylindrum ambientem, vt 49. ad 108. ſcilicet vt 7. ad 15. $\frac{3}{7}$.

COROLLARIVM II.

Intelliges quoque, quid dicendum ſit de tertijs ſpiralibus corporibus, nam circumſcriptę ſolidę annulares portiones non deficient pro $\frac{2}{3}$, & pro $\frac{1}{3}$ deficient latitudine, vt ambientes ſpirale corpus baſi tantum, ideoq; ſi non deficientes ponantur ſimul 12. iſtæ deficientes erunt 3. & ideo ſimul 15. Si verò intelligantur ambire corpus ſpirale altitudine quoque, quæ æqualatæ perſeuerant, deficient tamen altitudine. Vnde illarum integrarum, quæ poſitæ ſunt 12. iſtę deficientes altitudine erunt 6. at illarum, quę latitudine deficiunt, & poſitæ ſunt 3. iſtę; quę quoque altitudine deficiunt, erunt $\frac{2}{3}$; ideoque cum illis, quæ ſunt 6. deficientibus altitudine erunt 8. quare ſubductæ ab ijs relinquent 7. quarum gradationes medietatem occupant, nempe 3 $\frac{1}{2}$, ideoque cum reliquis erunt 11 $\frac{1}{2}$ ad 15. ſeu 23. ad 30. Sufficit indicaſſe, eſſet nimis prolixum de ſingulis velle agere.

TRACTATVS XXXV.

De Corporum comparatione.

REſtat vltimus hic labor de Corporum comparatione, Tractatus, in quo, & corpora ſecare, pariterque, augere, minuere, traducere in figuras alias, & tandem menſurare docemus, eſtque quaſi fructus antecedentium Tractatuum, qui de Corporum ſoliditate diſcurrunt, & complementum omnium, quæ de punctis, lineis, figuris, planitiebus, & ſoliditatibus dicta ſunt.

EXPENSIO I.

De ſimilitudine Corporum.

AVgmentum plurium corporum in vnum ex eo maxime dependet, quòd deſcribatur corpus ſimile alteri, & licet id ſupra tetigerimus, cum de parallelepipedo egimus, ea tamen fuit notitia particularis, quæ ſolidi rectanguli non excederet cognitionem; Nos autem hic intendimus tradere notitiam generalem ſimilium corporum deſcribendi, vt nedum ſciamus corpora ſimilia cognoſcere, ſed etiam fabricare.

DEFIITNIO I.

*I*Lla quæcumque ſuperficies plana dicatur ſimiles, in quibus deſcriptibilia ex ordine triangula ab aſſignato puncto erunt ſimilia.*

Hæc Definitio imitatur definitionem ſectionũ conicarũ ſimiliũ, & videtur potiori iure verificari, ſi enim applicatæ ſub eodem angulo ad portiones diametri proportione ſimili gaudentes oſtendunt ſectiones ſimiles, quantò magis triangula, quæ ſecum vehunt laterum proportionem, & angulorum æqualitatem, & multiplicata quantùm opus eſt, totam figuram æquare queunt, ſaltem quoad ſenſum, planitierum quorumcomq; ſimilitudinem exhibebunt. & ſi Euclides circulum definit, in quo omnes ductæ à centro erunt æquales, ſimiliter, & nos definimus ſimilitudinem planitierum, in quibus omnes ductę ab aſſignato puncto ſunt ſimiles. Poteſt quidē eſſe, quod in planitiebus ſimilibus triangula diſſimilia deſcribantur, ſi tamen omnia erunt ſimilia ea ordine ſumpta, ſemper quoque ſimiles planities erunt, quod definitio intendit.

DEFINITIO II.

*Q*Væcumque figura ſimiliter poſita iudicabitur, quæ axem conſequatur, ſi per normalem, & baſim, & axem ductum planũ triãgula efficiat ſimilia.*

Similis autem etiã dicetur, ſi ſuperficiebus ſimilibus conſtet.

Cum ſolidæ figuræ globoſæ ſuperficies, vt plurimum angulos non conſequantur, ideo non poterunt iudicari eodem modo poſitæ, niſi ab axe; ſi ergo in plano IPM ducto per normalem PM, & axem PI, & baſim SX, ex iſtis tribus,



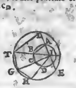
nempe ſectione baſis; MS normali MP ab axis verticæ ductæ, & axe ipſo IP fiat triangulum æquiangulum triangulo QOH ex iiſdem conſtituto dicetur ſolidũ ſimiliter conſtitutũ, vt RT, quod, & verificabitur de parallelepipedis, ſiue axem in ipſis ducas, ſiue latus pro axe ſumas. Similitudo verò ſuperficierum, quibus veſtiuntur, obtinebitur, ſi duplicatam, aut laterum, aut diametrorum, aut axium proportionem conſequantur. Nam, & circuli, qui duplicatam diametrorum proportionem obtinent, ſimiles ſunt ſuperficies.

PROBL. I. PROPOS. I.

**Similem quamcumque ſuperficiem à dato puncto alteri deſcribere.*

SIt data ſuperficies ABCD mixtilinea, vel rectilinea, vel curuilinea, quæcomque, & oporteat ei ſimilem delineare. Eligatur quodcumq; punctũ in ea I, & ab I ad margines planitiei ducantur plurimæ lineę, & ſi habent angulos pręcipuè ad illos illæ vergant, & producantur vſquedum oportet, aut placet, & inter illas aliqua perueniat ad datum punctum L, deinde fiat, vt IA ad IL, ſic IB ad aliud ex prop. 15. lib. 6. & inuenietur IT; ſic iterum fiat, vt IA ad IL, ſic IC ad IG, & ID ad IH, & ſic agatur in omnibus: Deinde per omnia illa puncta multiplicata quantùm ſat eſt, ducatur, vel flexa, vel plurimæ flexæ, vel rectę, ſecundùm, quod figura exhibita imitanda rectis, vel flexis, vel angulis

galis, vel tantùm curua conſtat, & erit factum id, quod deſidaratur. Nam figura deſcripta per omnia illa puncta LTGH, & alia plurima erit ſimilis figuræ exhibitæ ABCD.



Probatur. Nam omnia triangula in fig. ABCD ſunt ſimilia triangulis in figura LTGH, cùm obtineant latera ambientia eundem angulum apud I proportionalia, cùm effecerimus, vt IA V. g. ad SL, ſic IB, & IT, & cæt. Vnde ſubductis baſibus AB, & LT triangula ipſa erunt ſimilia ex 5. l 6 & ſic de alijs: cum ergo omnia triangula in planitie ABCD ſint ſimilia triangulis in planitie LTGHB deſcriptibilibus ex def. ipſę planities erunt ſimiles.

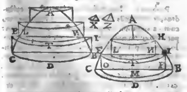
COROLLARIVM.

Elicitur quod latera quęcumque illa ſint, erunt proportionalia. Quoniam enim LT ad SI, vt LT ad AB, & TH ad CB, ex 4 lib. 6. vt GI ad CI, & GI ad CE, vt GH ad CD erit LT ad AB, vt TG ad BC & GH ad DC, vnde ex pr. 17. l. 5. & omnia ſimul antecedentia LT, & TG, & GH ad omnia conſequentia AB BC, & CD eadem proportione gaudebunt, vt vnum antecedens LT ad aliud conſequens AB, quæ eſt eadam, quæ LI ad AI. Quare etiam latera quæcumque formentur ex illa baſium multitudine, vt vt libet multiplicata ſemper erunt proportionalia, & erit vt LT ad BA, ſic LTGH ad ABCD.

THEOR. I. PROPOS. II.

Ad ſuperficiem cuiuſcumque corporis globoſi, cuius omnes ſectiones parallelæ ad axem ſint ſimiles, eam obtinet proportionem planum per axes baſium, & corporis ductum, quam axis baſis, ad circumferentiam baſis.

Sit ſuperficiea globoſa corporis conoidalis alicuius ABCD, & ſuparficies plana ducta per axem CB baſis, & AM corporis ſit ABC. Dico, quod vt eſt ABC planum ad ABDC ſuperficiem globoſam, ſic axis BC ad ambitum BDC corporis ducti, ſeu recti, ſeu obliqui, cuius omnes ſectiones baſi parallelæ ſint ſimiles V. g. Ellipſes ſimilia.



Inſcribantur portiones cylindraceorum corporum OFEI, & LNH, & cęt. æquealtorũ. Singulæ earum ſuperficiea ex propoſ. 4. tract. 31. quæ de quacumque orbita intelligitur, vt conſtat ex demonſtratione, erunt æquales rectangulo ea circumferentia OMF, & altitudine FI, ideoque rectangulum OI per axes dicit ad ſuperficiem cylindracei OFI eam proportionẽ, quam ad rectangulũ illud ex ambitu OMF ellipſis, & altitudine FI, ideſt axis CB ad ellipſim BDC; & ita dicas de ſuperficie cylindracei LNH, cui HL rectãgulũ dicit eã proportionem, quam LN diameter ad ambitũ LTN. Omnes verò Ellipſes BDC, LTN ex theſi ſimiles ſunt; Quare vt OI rectangulum ad OFIM ſuperficiem cylindracei, ſic OF axis ad OMF ambitum, vt autem OF axis ad OMF ambitũ, ſic LN axis ad LTN ambitũ ob ſimilitudinẽ ellipſiũ; vt autẽ LN ad LTN, ſic ex 4. tr. 31. rectãgulũ LH ad LTNH ſuperficiẽ cylindracei; Ergo ex 16. lib. 5. vt OI rectangulum ad OBFIM ſuperficiem cylindracei, ſic LH rectangulum ad LTNH ſuperficiem cylindracei; ideſt vt OF axis ad OMF ambitum, & ita diſcurras de alijs. Ergo ex 57. lib 5. ita erunt omnia rectangula OI, & cæt. ad omnes ſuperficies cylindraceas EOMFI, & cæt. vt vnum rectangulum OI ad vnam ſuperficiem cylindraceam EOMFI. Quo poſito. Aſſero quod etiam ABC planum ad ACDB ſuperficiem eſt, vt BC ad BDC ambitum. Nam ſi non dicit, eandem proportionem ſit maius planum per axem ABC, quàm quod exquirat ratio BC ad BDC quantitate X; ita vt ſi quantitas X abeſſet ab ipſo, tunc ABC planum per axem eſſet ad globoſam ſuperficiem ACDB, vt BC axis ad ambitum BDC, vel OF ad OMF ex theſi.

Inſcribantur itaque tot cylindracea; donec ſuperficies ipſorum rectangulorum à globoſa ſuperficie differat minùs quàm quantitas X. Ergo, quia rectangula inſcripta minùs differunt à CAB plano quã X, & X eſt illa differẽtia quã totaliter ablata CAB planum ad globoſam ſuperficiem ACDB diceret eandẽ proportionem, vt CB ad CDB; etiam rectangula inſcripta OFI; LNH, & cæt. dicent maiorem proportionem ad globoſam ſuperficiem, quam CB axis ad CDB ambitum. Dicunt autem ad ſuperficiem ſuam curuam eandem proportionem. Ergo cum eadem rectangula ad ſuperficiea ad conuexam CABD corporis exhibiti maiorem proportionem dicat quàm ad cylindraceorum ſuperficiem ex 10 lib. 5. erit maior cylindraceorum inſcriptorum ſuperficies, quàm ipſa globoſa ſuperficies AADC: quod eſt abſurdum, cum debeat eſſe maior, vt pote continens.

Quod ſi dicas CAB Planum ad CDBA globoſam ſuperficiem dicere minorem proportionem, quam CB ad CDB. Deficiat illis quantitas X, cum quã eandem diceret proportionem, quã CB ad CDB. Tũc autem circumſcribantur tot rectangula; donec eorum ſuperficies differat à plano CAB minori quantitate, quam X. Quia ergo tota quantitas X deberet addi; rectangula verò non ſuperant CAB quantitate X, ſed minùs; ideo etiam ipſa ad globoſam ſuperficiem CABD dicent minorem proportionem, quam CB diameter ad CDB circumferentiam, dicunt autem ad cylindraceorum circumſcriptorum ſuperficiem, illam proportionem, quam CB ad CDB; Ergo ad ſuperficiem globoſam dicunt minorem proportionem, quam ad ſuperficiem cylindraceorum, quare ex 10. lib. 5. erit maior ſuperficies corporis CABD, quam circumſcriptorum cylindraceorum, quod eſt abſurdum. cùm ergo non poſſit planum CAB ad ſuperficiem globoſam dicere maiorem, aut minorem proportionem, quam CB ad CDB; dicet eandem.

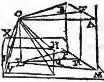
COROLLARIVM.

Hinc modus obtinetur, quò omnium Conorum etiam ſcalenorum ſuperficies inueniátur. Nam cognito ellipſis ambitu, vel circuli peripheria, & axe, & triangulo per axem; etiam eorum globoſa ſuperficies obtinetur; cùm ita ſit, vt axis ad ambitum ellipſis, vel ſi conus ſit circularis, vt diameter ad peripheriam; ſic triangulum per axem ad globoſam eius ſuperficiem, quæ cognitio deficit tractatui 31. expeui.3. & hic aptiùs ponitur.

PROBL. III. PROPOS. III.

Normalem altitudinem corporum perſcrutari, & ſuperficierum intùs latentium, quorum latera in ſuperficie appareant, nec non, & punctum, in quod à vertice cadit normalis inuenire.

AD corpora ſimilia conſtituenda in primis eſt neceſſaria normalis corporum altitudo, quam hoc modo obtinebimus, non obſtante eorum ſoliditate. Sit datum corpus HVO, cuius altitudo velit inueniri. Extendatur baſis HV, & ſit MX, vel ſuppoſito alio plano, vel alia ratione, eique plano aliud planum OCAA parallelum fiat, electoque puncto M ex 11. tract.22. erigatur normalis AM, & erit altitudo, quæ requiritur.



Probatur. Nam ducto per MA plano AOML per intellectum, & per punctum O, cum plana ſint paparallela, ex 14. Tract.22. etiam ſectiones erunt parallelæ AO, & ML, normalis quoque OL corporis dati HO OV, & MA eidẽ plano MX exteuſo normales ſoot, ideoque parallelæ ex 7. Tract. 22. ideo MO erit parallelogrammum; quare ex prop.33. lib.1. MA, & LO erunt æquales.

Sit deinde QOI intus latentis ſuperficiei reperienda normalis, quæ debeat cadere in latus L extendatur latus QI in N, & per NQ, QO, ducatur planum, quod ſecet AOB, in TO in plano itaque TNOQ ſectioni NQ ducatur normalis NT, & equabitur normali LO: Patet ex eadem ratione. Nam TO, & NL ſunt parallelæ ob plana parallela BOA, & XM.

Sunt quoque parallelæ LO, & TN ex prop.28. lib.1. quod in eodem plano TL ſint lateri NL normales altera ex ſuppoſitione altera ex effectione, quare inuicem erunt æquales.

Si tandem debeat reperiri punctum, in quod cadit normalis ab O in baſim HV, non obſtante ſoliditate corporis HVO; Ductis vt priùs planis ABO, & MX parallelis, & plano ABMP per AM normalem; erit quoque, & ipſum planum ex 16.tract.22. normale ipſis planis ABO, & MX.

Sectioneſque parallelæ AB, MP ex 14. tract.22. coniungatur deinde BO, & AO, & ſumpta æquali ipſi AB in MP ſectione ab M, fiat triangulum MPL ex pr.24.lib.1. æquale triangulo ABO, & vertex L erit punctum, in quod cadit normalis.

Probatur. Nam ſi duo plana concipiantur ducta per BO, BP planum PO, & per AO, & AM planum MO erunt normalia plano MX ob normalem MA, & æquidiſtantem PB ob æquales AB, & MP, & ideo normalem ex 15. tract.22 quare, & ex 16. eiuſdem ſectio ipſorum OL normalis erit; & ideo parallela ipſis BP, & AM normalibus. Vnde BO, & PL, nec non, & ML, & AO erunt æquales ex prop.33.lib.1. cum etiam ſint parallelæ ex 14. Tract.22 Quare triangulō PLM equabitur triangulo ABO, & ex 16. lib. 1. & erit triangulum iam factum ſuper PM: ſed triangulum ab iſtis ſectionibus factum incidit in communem planorum ſectionem normalem OL & ideo in L punctum plani, in quo eſt; ergo etiam triangulum effectum PML, quod eſt idem, & cuius omnia latera in eundem ſitum incidunt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Cylindrum ſuper datam baſim ſimilem, & ſimiliter poſitum, ac alius datus ædificare.

SIt cylindrus datus TR, qui ſit imitandus cylindro ſuper SX erecto; Ducatur axis QO, & ab extremo Q demittatur normalis HQ, perque normalem, & axem, quæ ſunt in eodem plano ex prop. 2. tract.22. ducatur planum TR, ſecans baſim; deinde à centro I ducatur IP, quæ faciat eundem angulum cum ſectione TX, ac OQ cum ſectione OR, deinde fiat, vt OR ad OQ, ſic IX ad aliud, & inueniatur IP longitudo, compleatur itaque parallelogrammum SV per axem, ſimileque erit parallelogrammo TR: Vnde ſi axe IP, & baſi AX fiat cylindrus SV ducta per PV altera baſi, erit ſimilis cylindrus SV cylindro TR, & ſimiliter poſitus, vt ipſe eſt.



Probatur. Nam poſitus quidem eſt SV cylindrus, vt cylindrus TR ob axem IP concludentem cum IX angulum I æqualem angulo O ex def 2. At parallelogrammum per axem SV eſt ſimile parallelogrammo per axem TR; vnde ſuperfices cylindros ambientes erunt ſimiles, ſiquidem ex 11.tr.31. dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, ſed ex 11.&40.l.6.baſes quoq; circuli dicunt duplicatam proportionem peripheriarum; Quare erit baſis AX ad baſim NR, vt curua cylindri SXMV ſuperficies ad curuam NRHT cylindri ſuperficiem, cum

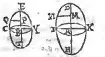
ergo

ergo ſuperficies ſint ſimiles ex def. 2. tract.33. etiam cyliudri ſimiles erunt.

PROBL. V. PROPOS. V.

* *Data ſphæra ſphæroide Parabolico, Hyperbolico, vel Elliptico recto ad axem ſimile aliud corpus componere.*

FAcilis aſt conſtitutio ſphæræ, cum omnes ſphæræ ſint ſimiles, tum poſitioue, tum ſolliditate, cum ſint in tripliata ratione diametrorum, duplicata maximorum circulorum, quibus ſemper eodem modo ſuut collocatæ. Sed vt aliæ corporæ deſcribantur. Super diametrum datæ baſis circularis ſimilis ellipſis ellipſi ductæ per axem ſphæroidis imitandi, & ſimilis poſitionis, vel Hyperbola, vel parabola fiat, quod efficietur ex prop. 52. Tr.24. ſi fiat loqneudo de ellipſi, & hyperbola (nam omnes parabolæ ex 51. Tr.34. ſunt ſimiles) radius, & applicatæ AI ad AD axem, ita BC radius baſis datæ ad aliud, & Inueniatur EB axis, cui applicetur BC rectangulè, vt eſt AI axi AD, deiude ductis plurimis alijs, fiat vt MD ad MN. ſic PE ad PQ, & cæt. Si ergo hęc ſectio intelligatur circum ſuū axem verti; deſcribetur ſphæroides, ſi ſit Ellipſis; Conoides Hyperbolicum ſi ſit Hyperbola: Parabolicum ſi ſit Parabola ex defiuit. tract. 25. Dico Itaque quod ſphæroides CXTY ſimile ſit, & ſimiliter poſitum, ac ſphæroides DIHX.



Probatur quod ſit ſimile. Nam vt eſt XDIH planum Ellipticum ad ſuperficiem ſphæroidis IXDH, ex pr.38 tract.31. ita eſt diameter XI ad peripheriā XAI baſis p centrū, ſed vt XI diameter ad peripheriam XAI, ſic YC diameter ad peripheriam YBC ex lib.6 pr.42. vt autem YC diameter ad peripheriam YBC, ita eſt Ellipſis YECT ex pr.38. tract.31. ad ſuperficiem ſphęroidis YECT. Ergo ex *æquo* vt eſt XDIH planū ad Ellipſim YECT, ita eſt ſuperficies XDIH ſphęroidis ad ſuperficiē ſphęroidis IECT; ſed ellipſis XDIH eſt ſimilis ex effectiona ſuperficiei YECT; ergo etiam ſuperficies XDIH ſphæroidis ſuperficiei ſphęroidis YECT: ſed etiam XAI eſt baſis ſimilis YBC, quod ſint ex effectione circuli, & ideo ſimiles: Ergo ex def. 8. tract 23. ſolida erunt ſimilia eū circumueſtiātur ſimilibus ſuperficiebus. Poſitio verò eadem eſt ob eorum rectitudinem.

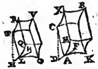
COROLLARIVM.

*HInc eſt conos ſimiles rectos faciliter poſſe conſtitui, ſi fecerimus triangulum per axē deſcribendi coni ſimilem triangulo per axem coni imitandi. Nam ex præcedenti argumento deducto ex prop.38. tract.31. conſtabit illos conos ſimiles eſſe; qui ſuperficies circumuolutas habeant ſimiles, vt ſunt inuicem ſimilia triangula per axē, & idem dicendum de conis ellipticis, dummodo baſes ellipticæ ſimiles ſint.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

* *Cylindraceum corpus alteri ſimile conſtituere ad datam altitudinem.*

SIt Cylindraceum quoddam corpus AB, quod Imitari oporteat. Demittatur à latera AC, quod ſēper rectilineū eſt (illo uice axis vtēdo) normalis CD, & per AC, & CD ducatur planum ACD, quod ſecet baſim productam, & ſectio ſit AD. Eligaturque in ea ſectione quodlibet punctum F, & in altero plano ducta, vtcumque HN, & electa altitudine cylindracei deſcribendi HT; fiat vt DC ad DA, ſic MT ad HL, & p punctū L ad T ducatur latus LT. Deinde fiat, vt AD ad FD, ſic LH ad aliud, & reperiatur HN; ſuper latus itaque LN deſcribatur baſis OQ ſimilis baſi KM. Et ab ea eleuentur latera QR, & cæt. ęqualia inuicem, & parallela ipſi LT; multiplicando illa iuxta exigentiam, vel angulorum, vel curuorum laterum, per quæ ſuperficies, vel planæ, vel curuæ ducantur, quæ ſecētur TV parallelo plano ipſi plano QO per T, & erit conſtitutum cylindraceum corpus ſimile, ſimiliterque poſitum ac AB.



Quod ſit ſimiliter poſitum patet. Nam def. 2. triangulum LTH, & ACD ſunt triangula ſimilia ex effectione. Quod verò ſit etiam ſimilibus ſuperficiebus circundatum; patet eo quod baſim OQ ſimilem baſi KM effecerimus, vnde baſis VT ſuperficiebus æque diſtantibus ex definitione corporis cylindracei circundata, & ideo æqualis, & ſimilis baſi OQ ſimilis baſi MK, & CB, vt autem in baſibus ſimilibus quibuſcumq; ex prop.1.h. Cor. AF ad LN ſic quodcumque latus AB ad LO, eſt autem AF ad LN, vt AC ad LT; Ergo vt latus AB ad latus LO, ſic eſt AC ad LT, & ſic dicas de alijs æqualibus; vnde etiam ſuperficies DT, & aliæ ſimiles erunt ſuperficiebus BC, & alijs. Itaque cylindraceum corpus LV erit ſimile cylindraceo corpori AB.

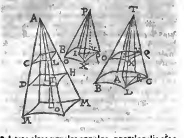
PROBL. VII. PROPOS. VII.

* *Pyramidem Conum, ſeu corpus pyramidem, vel conum referens alteri ſimile, & ſimiliter poſitum ponere ad datam altitudinem.*

COrpus pyramidale mixtilineum appellamus illud, quod ſuperficies rectilineas in acumen tendentes habeant, quę non ſint planæ, ſed curuæ, & à baſi, cuius latera curua ſint eleuatæ. Sit itaq; conus, vel pyramis, vel etiam pyramidale aliquod corpus TCLX, quod oporteat imitari. Inueniatur ex prop.3.h. punctum R, in quod cadit normalis. Deinde ducta aliqua RC, quæ cadat in latus baſis CL à puncto R fiat vt RT ad RC ſic VP data altitudo

ad

ad VQ. & ſimiliter ductis alijs RL, & cæt. fiat, vt RC ad RL, ſic VQ ad VX, & ſic fiat de reliquis, eritq; ex *æquo* TR ad RL, vt PV ad VX, quare baſes erunt ſimiles ex prop. 8. h. & ſic concludes de omnibus alijs: ſimulque triangula omnia CTR, TRL erunt ſimilia quodlibet ſuo correſpondenti: triangulis QVP, & PVX: Siquidem angulo recto gaudent, vt pote à normali VP, vel TR effecto ex def. 2. Tr 22.



& latera circa æquales angulos proportionalia ſũt: Erit itaq; TC ad CR, vt QP ad QV, at CR eſt ad RL, vt QV ad VX ex effectione, & RL ad LT ob ſimilitudinem triangulorum TRL, & VPX, vt VX ad XP. Ergo ex *æquo*, vt TC ad LT, ſic QP ad XP, Eſt autem TC ad CR ob ſimilitudinem triangulorum oſtenſam, vt QP ad QV, & ob ſimilitudinem baſium ſupra oſtenſam CR ad CL latus rectum, vel ſi ſit curuum ſubtenſam CL, vt QV baſis ad QX latus rectum, ſeu ſi ſit curuũ ad ſuam ſubtenſam, quare ex *æquo* CT erit ad CL latus rectum, ſiue ſubtenſam, vt QP ad QX. Ideo triangula omnia CTL triangulis QPX erunt ſimilia, & alia omnibus alijs. Quare ſuperficies omnes pyramidis, vel coni, vel corporis pyramidi ſimilis erunt ſimiles cum omnes planæ ſuperficies inſcriptibiles, vel circumſcriptibiles illis corporibus ſimiles ſint: Baſes autem ſunt ſimiles ex effectione, & ideo eſt idem numerus in baſibus laterum quapropter, & ſuperficierum circũambientium. Ergo duo corpora CLBT, PQSO ſimilia ſunt.

COROLLARIVM.

ELicitur autem hinc; quod ſi corpus aliquod ex prædictis plano parallelo baſi ſecetur V.g. ANM corpus plano DH, quod conus reliquus, vel pyramidale corpus DAH erit ſimile toti corpori DAH. Ratio eſt omnino eadem, quæ propoſitione poſita eſt, quia triangulum ACT eſt ſimile triangulo TVQ ſectione eius, VQ plani OQ cum normali VT, & latere TQ effecto in fig. 8. TC, quia ea ſectio VQ parallela ſectioni RC eſt ex 14. tract. 22. & XQ parallela LC, & cæteræ cæteris, vnde ex propoſ. 4. lib. 6. omnia triangula erunt ſimilia, ſiue in baſibus, ſiue in ſuperficiebus ad apicem tendentibus effecta. Ideoque ipſa corpora ſimilia.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omne corpus regulare in ſphæra deſcriptum eſt alteri ſimile, ſi ſit eiuſdem generis.

ID faciliter oſtenditur. Quia obtinet omnes ſuperficies ſimiles ſunt enim; aut triangula æquilatera, & æquiangula inuicem, quæ ſunt in dato corpore, & ideo ſimilia illis, quæ ſunt in alio corpore, nec dũ inuicem æqualia, ſed & æquiangula triangulis primi corporis, aut quadrata, aut pentagoni, quæ ſunt quoque figuræ ſimiles.

Imo etiam corpora omnia in ſphæra inſcriptibilia, ſed figuris in ſe diuerſis conſtantia eiuſdem generis, ſunt quoque figuræ ſimiles: quod ſint aut triangula æquilatera, & quadrata; aut pentagoni, & triangula æquilatera, & cæt. ideo enim eiuſdem generis ſunt, quia ſimilibus ſuperficiebus licet duarum ſpecierum tum vnum, tum alterum corpus conſtet.

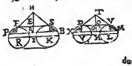
COROLLARIVM.

HInc patet quomodo corpus regulare ſimile alteri deſcribas, in data ſphæra, aut ad datam altitudinem; Sufficit enim pyramidem ſuper datam baſim, aut ad datam altitudinem alteri ſimilem extollere, quæ reperitur in corpore imitando, & illi conſtruere tot pyramides æquales, quæ numerum pyramidum in corpore prototypo exiſtentium exæquent: Nam illæ circa eundem verticem poſitæ conficient corpus exoptatum: quod patet ex tract. 33. de Inſcriptione corporum regularium in ſphæra, Nam omnia conſtant pyramidibus baſim habentibus in ſuperficiem ſphæræ & vertice in centro. In data autẽ ſphæra deſcribemus iuxta ea, quæ diximus Tr. eodẽ deſcribendo corpus eiuſdem generis, ac propoſitum, quod imitandum proponitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

9 Omnes annuli rotundi, vel figurarum regularium ſunt ſimiles.

SIt Annulus rotundus MB, & alius quicumque BP, quorum ſectiones MVN, & BES ſint circuli. Dico eos eſſe ſimiles. Nam ducto per centra ſectionum circularium plano LY, & KR. ducatur ei per ſimiles arcus, plana æquidiſtantia MX, & SP, eruntque circuli ob annuli figuram, erectiſque normalibus ab eorum centris O, & A ab M ducatur MT intercipiens arcum ſimilem arcui BS, quem intercipit S H, eritq; triangulũ MOT ſimile triangulo SAH cum ſit rectãgulũ, & angulũ, M obtineat æquale angulo S ad circũferentiã, & ſic dicas de triangulis VTQ, & SEH: Vnde ſi circũuertantur efformabunt conos ſimiles Cor. pr. h. ideoque ſuperficies coni MTX erit ad VTD coni ſuperficiẽ, vt ſuperficies SHP coni ad ſuperficiem coni SHF, & ideo *diuidendo* MTX ſuperficies coni erit ad ſuperfi-



duum

duum annulum MVDX, vt SH, coni ſuperficies ad reſiduum annulum ASFP; Cum ergo idem argumentum de omnibus ſuperficiebus in annulo inſcriptis fieri poſſit etiam rotundæ ſuperficies, quę ſemper ſimilibus planis ſunt inſcriptibiles ſimiles erunt, ideoque ipſa corpora vnica ſuperficie contenta. Similia erunt.

COROLLARIVM.

OMnes quoque annulos cuiuſcumque figuræ circulo inſcriptibilis eſſe ſimiles; dummodo ipſæ figurę inſcriptæ ſimiles ſint, patet ex præced. cùm quamcumque ſuperficiem circulo inſcriptibilem eundem numerum graduum ſubtendentem ſimilem alteri ſimilem, cum ſubtendenti demonſtrauerimus: Vnde; ſi ſint plures ſimiles ſuperficies, ſed ſemper æquali numero, quæ ſimiles arcus ſubtendant in hoc annulo, vt aliæ in alio ſimiles etiam erunt figurę inſcriptę. Quod, & concludetur de annulis, quorum ſectiones ſimiles quidem ſint; ſed tamen circulo non inſcriptibiles; quia illæ figuræ, ſectioneſque per centrum poterunt diuidi in triangula: quæ ſemper in circulis inſcriptibilia ſunt ex prop. 2. lib:4. elem. quorum latera eundem numerum graduum ſubtendunt cum ponantur figuræ ſimiles; & ideo triangula in quæ diſpartiri queunt, ab vno angulorum ad aliquem alium ductis lineis, ſimilia.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

* *Fruſta conorum, vel pyramidum planis parallelis exciſorum quarumcumque ſimilia efficere ſuper datam baſim ſimilem baſi coni dati.*

SIt datum fruſtum conicum ABCD compleatur, & ſit BEC; ſit deinde data baſis GF ſimilis baſi BC; & ſuper eam erigatur conus, vel pyramis, vel corpus referens conum, vel pyramidem, prout baſis data repoſcit, ſimile cono BEC: Deinde ſiat altitudo TE ad altitudinem TQ, ſic VH ad VI, & per I agatur planum baſi parallelum, eritque GLMF fruſtum ſimile fruſto BADC.



Probatur. BEC ſuperficies corporis imitandi eſt ad ſuperficiem imitantis corporis GHF, vt AED ſuperficies ad ſuperficię LMH ex pr. 7 h. Cor. Si ergo auferantur AED, & LHM *diuidendo* erit BEC ſuperficies ad reliquam ſuperficiem BADC, vt GHF ad reliquam ſuperficiem GLMF, ſed BEC; & GHF ſunt ſimiles, ergo etiam BADC, & GLMF ſuperficies ſimiles erunt; ſunt autem, & baſes ſimiles BC, & GF ex effectione, & AD, & LM, quod AED, & LHM ſint coni ſimiles, ergo fruſta conorum BADC, & GLMF erunt ſimilia.

PROBL. IX. PROPOS. XI.

Priſma, vel Priſmaticum conum, vel corpus cuiuſcumq; baſis ea corpora referens ſimile dato exhibere.

COrpus referens priſma, vel priſmaticum conum eſt corpus à quacumque baſi in lineam rectam terminans parallelam baſi eleuatum.

Sit itaque conſtituendum aliquod ex dictis corporibus V. g. BACD ſimile, & ſimiliter poſitum, ac corpus priſma referens EHTG.

Inueniatur punctum Q in quod ab aliquo puncto T cadit normalis. Deinde p lineã terminantẽ TG ab eius T extremo ducto plano TG, quod faciat ſectionem in baſi EF, & ductis plurimis lineis QO, & cæt. (ſi ſit neceſſe, quod baſis non ſit circulus, aut figura regularis, vel ſaltem rectilinea.) Fiat vt normalis TQ ad QF, & quælibet ex ipſis QO, vel QE, ſic IX normaliter erecta ſuper planum CD ad libitum aſſumpta ad ID, & quælibet aliam IL, & IC, eoſdẽ ãgulos claudẽtes & p extrema C, L, D lineæ ducatur. Itẽ ſiat, vt QT normalis ad TE, ſic IX ad AX, & vt QT ad TH, ſic IX ad XA; Ducantur itaque ſuperficies à baſi CLD, quæ terminẽt in lineã XB, & erit corpus priſmaticũ CXBD ſimile corpori dato FGTE.



Prob. Et primo oſtendemus, quod baſes ſint ſimiles: Siquidem omnes ductæ à puncto Q, & I proportionales ſunt. Nam fecimus TQ ad QF, vt IX ad ID: Ideoque *inuertendo* QF ad TQ, vt ID ad IX: ſed etiam ex effectione TQ ad QO, vt IX ad IL. Quare ex *æquo* QF ad QO, vt ID ad IL, & ſic dicas de alijs.

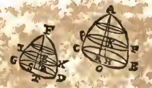
Probatur quoque quod ſuperficies circumambientes ſint ſimiles, ex eo quod in eis tot planæ ſuperficies ſimiles inſcribi poſſint, ſiquidem poterit vtrumque corpus in ſimiles pyramides partiri. Nam ductis EO, & TO, ſic CL, & LX. Iam erit pyramis EOQT ſimilis pyramidi CLXI, eſt enim ex effectione QT ad EQ, vt XI ad CI, & anguli ad Q, & I recti ſemper; vnde triangula EQT, & CIX erunt ſimilia, & ita argue de triangulo OQT; quod ſit ſimilis triangulo LIX. Vnde ex 7. h. pyramis EQTO erit ſimilis pyramidi CLXI; erit enim conſequenter EO ad ET vel OT, vt CL ad CX, vel LX: Sic dicas, quod OQHT ſimilis ſit pyramidi LXVI; Pyramis autem TQNH aſſimilabitur pyramidi XVIA ob eandem rationem, quod triangula TQN, & TQH ſint ſimilia triangulis XIV, & XAI; cùm TH æquetur EQ, & XA ipſi CI ob parallelismum linearum QH, & ET, nec non, & EG, & AI, Quo oſtenſo, etiam QHNP cõſtabit ſimilis pyramidi IVAY, & ſic de alijs. Omnes itaque pyramides in ETGF erunt ſimiles pyramidibus in CXBD. Vnde, & habebunt ſuperficies ſimiles, quæ ſunt in ETGF, ſuperficiebus pyramidum in CXBD, quarum extimæ ſunt inſcriptæ, vt ſunt EOT, & ONT, & THN, vel in alio

enrpore CLX, & LVX: & cæt. & ſic omnes ſuperficies inſcriptæ in EGFT corpore erunt ſimiles ſuperficiebus inſcriptis in CXBD corpore numero æqualibus. Quamobrem ipſa corpora ex def. erunt ſimilia. Non putamus autem neceſſe oſtendere pyramides in iſtis corporibus deſcriptibiles eſſe, nec caſum quo normalis extra cadit replicato argumento oſtēdere, neq; oſtenſionē ſubtiliùs proponere de ſingulis lateribus cuiuſcūq; pyramidis proportiones ſimiles, & angulos æquales demonſtrãdo. Eſſet enim diſcurſus prolixus, qui alioquin patet ex diſcurſo anteced. vel quilibet ex ſe, & caſum fingere, & argumentum texere poteſt.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Dato quocumque corpore Conoidali, ſeu ſit conoides obliquum, ſeu rectum, ſeu portio eorum; ſeu quodcumque aliud corpus; dummodo ad proportionales axis partes planis ſimilibus ſecari poſſit, ſimili corpore imitari, & ſimili poſitione.

SIt corpus aliquod BAC, cuius planum per axem ductum, & per normalem baſi; ſeu ſit conoidec obliquum, ſeu rectum, aut ſphæroidee, ſeu quodcumque aliud corpus ex ſegmentis circulorum, vel etiam ambituum conſtans, & oporteat ei ſimile corpus ponere, fiat ex prop. 1. h. DFG ſimile planum EAG plano per axem HA, & per normalē AR, in quo plano DFC ſit normalis SF, & axis NF, quæ cum DG ſimile faciat triangulū ipſi RHA, quam normalem docuimus reperire prop. 3. h perque DG normaliter altitudini SF, ducatur planum DTG, ſicut altitudini RA ductum eſt planum BOC ſeceturque corpus imitandum in partes planis PQ, & alijs, quæ erunt ſimilia baſi BOC ex theſi. Deinde ad partes NE axis ſimiles partibus axis HX ducantur parallela plana XL, & cæt. ſimilia planis PQ, & cæt. Circa verò plana ſimilia ſuperficies curuæ circumſcribantur: ſi enim plana ſint plurima ſuperficies ductæ circa PQ, & alia plana erunt omninò ſimiles ſuperficiebus corporis imitandi BAC, & ſic ex def. ipſa corpora erunt ſimilia.



Probatur. Nam cum ex prop. 2. huius. Sit BAC ſuperficies plana ad globoſam ſuperficiem BADO corporis exhibiti, vt BC diameter ad BOC ambitum: Sit verò ex effectione BC ad BOC, vt DG diameter ad DTG ambitum. At DG ad DTG, ſit, vt DFG plana ſuperficies ex prop. 2. h. ad DFGT globoſam ſuperficiem corporis conſtituti ex *æquo* erit BAC planum ad DFG planum, vt BOCA globoſa ſuperficies ad DEGT globoſam ſuperficiem. Sed EAC, & DFG ſunt ex effectione ſimilia plana. Ergo etiam globoſæ ſuperficies ſimiles erunt. Itaque ex tract. 34. def. 2. corpora erunt ſimilia cum ſuperficiebus ſimilibus veſtiantur. Poſitio verò ſimilis eo, quod triangulum NSF, ex axe, & normali, & ſectione baſis ſit ſimile triangulo HRA ex axe normali, & ſectione baſis ſimiliter effectū, vt requirit def. 2. h.

EXPENSIO II.

De Transformatione Corporum.

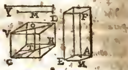
DE Transformatione Corporum doctrina ex dictis facilè eruitur, cum enim Corporum etiam diuerſæ ſpeciei æqualitatem inuenerimus, & proportiones aſſignauerimus, ex illis acciui argumentatione etiam corporum transformatio deriuat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Dato Parallelepipedo, datæ altitudinis æquale parallelepipedum conſtruere.

SIt datum aliquod Parallelepipedum EF, cuius baſis AE, & altitudo NE, dataque ſit linea quędam QT erecta perpendiculariter ſuper aliquod planum, & oporteat circa eam parallelepipedum dato ſe æquale conſtituere.

Fiat itaque, vt altitudo TQ ad altitudinem NF, ita baſis AE ad aliud ſcilicet ad rectangulum ex M,



Quod obtinebimus ex 32 lib. 6. CorolI. faciendo ſcilicet, vt TQ ad NE, ita FN ad Y deinde inueniendo inter NE, & Y mediam proportionalem M, & conſtituendo ſuper eam ex prop. 23. lib. 6. rectangulum ſimile, ſimiliterque poſitum, vt rectangulum EA, diuidaturque in quatuor rectangula æqualia, quorum vni ab T fiat æquale rectangulum TC, duplicēturque ſingula latera ac compleatur rectangulum CH, & erigantur CV, HL parallelæ TQ, & efficiatur parallelepipedum CL. Dico factum eſſe, quod expoſcebatur, & parallelepipedum CL eſſe æquale parallelepipedo EF.

Probatur ex prop. 10. Tr. 34. p. 1. Nam illa ſunt parallelepipeda æqualia, quæ habent baſes altitudinibus reciprocè proportionales; ſed ex effectione TQ altitudo eſt ad NF altitudinē, vt baſis AE ad baſim CH. Ergo parallelepipeda erunt æqualia.

PROBL. II. PROP. XIV.

Dato Parallelepipedo cubum æqualem conſtituere.

SIt parallelepipedum EH, quod conſequatur baſim ex quadratum (quòd ſi talem non conſequatur, fiat baſis quadrata æqualis ipſi EB, & ſuper eam erigatur parallelepipedum æquealtum EH, quod erit æquale dato parallelepipedo ex prop. 16.

Tract.

Tract. 34. Huic igitur conſtitoendus ſit cnbus æqualis: Inter XF, hoc eſt A latus baſis dati parallelepipedi, & altitudinem AH, ſcilicet D duę mediæ proportionales reperiantur B, & C ex prop. 3. tract. 11. & ex B fiat quadratum, ſuper quod erigatur cubus LN, & erit cubus æqualis ipſi parallelepipedo EH.



Prob. ex propoſ. 18. p. 1. Tr. 34. quoniam cubus erectus ex media proximiori ei, quæ conſtituit baſim parallelepipedi, vt eſt B æquator parallelepipedo ipſi ex baſi quadrata A, & altitudine D.

Quod ſi forte eueniat exhibitum parallelepipedum obtinere tres dimentiones continue proportionales, erit cubus ex media conſtitutus æqualis ipſi parallelepipedo ex prop. 11. tract. 34.

PROBL. III. PROP. XVI.

Dato cubo æquale parallelepipedum conſtruere in datam altitudinem, vel ſuper datam baſim.

SIt in præced. figura datus cubus LN, & data altitudo HF, & oporteat eleuare ſolidum, quæſitum in altitudinē FH. Duabus HF, & IO inueniatur tertia proportionalis ET, & TO fiat æquale latus TF, & ET tertia conſtituat aliud latus baſis EF, eleueturque in altitudinem datam HX, & aſſero hoc parallelepidum cubo LN eſſe æquale, quod patet ex propoſ. 11. Tract. 34.

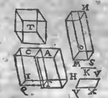
Quod, ſi quis velit parallelepipedum æquale dato cubo ſuper datam baſim fabricari: ſit baſis exhibita FE; quę, ſi non eſt parallelogrammū reuocetur ad æquale parallelogrammū: Deinde fiat, vt baſis FE ad baſim LO, ità latus IO ad FH, & conſtituatur ſuper FX parallelepipedum æqualis altitudinis ipſi AH, & hoc erit æquale cubo dato. Patet quoniam ſunt baſes eff: & ę altitudinibus reciprocè proportionales. Vnde ex prop. 10. tract. 34. erunt ęqualia hæc duo ſolida. Inuenietur autem baſis FX ad baſim LO, vt latus IO ad FH: ſi duabus TE, & LI tertia proportionalis inueniatur, deinde fiat, vt TX ad tertiam proportionalē repertam: ſic IO ad FH: tunc enim quia eſt EB ad baſim IO, vt TX ad tertiam proportionalem repertam ex Cor. prop. 8 a. lib. 6. & TX ad tertiam proportionalem repertam, eſt vt IO ad FH, erit etiam ex 16. lib. 5. FE ad baſim LO, vt IO ad FH altitudo ad altitudinem.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Dato parallelepipedo ſimile parallelepipedum efficere, ſed æquale alteri dato.

SIt parallelepipedum A, cui ſimile oporteat facere parallelepipedum aliquod, ſed æquale cubo X, fiat quodcumque parallelepipedum C æquale cubo T, ſed altitudinis æqualis parallelepipedo A; habebuntque parallelepipeda eandem proportionem; quam baſes ex 8. tract. 34.

Redigatur itaque ex 6. prop. tract. 29. baſis vt ad eandem altitudinem XV plani YV, ac baſis HF, habebuntq; baſes planæ eandem proportionem, ac baſes ipſarum lineæ XY ad HF. Ideoq; ex 7. l. 5. QF erit ad FH, vt XY ad FH. Inter duas itaq; XY, & AH inueniantur duæ mediæ proportionales X, & MS, & fiat ſuper MS ex propoſ. 3. tract. 34. part. 1. parallelepipedum MN ſimile, ſimiliterque poſitum, ac parallelepipedum A, eritq; hoc parallelepipedum æquale etiam cubo T.



Probatur. Nam Parallelepipedum MN ad Parallelepipedum A ſibi ſimile habet proportionem triplicatā laterum SM ad HF homologorum ex 9. tract. 34. ideoque erit vt XY ad HF, cuius proportio eſt triplicata lineę AM ad HF; ſiquidem eſt XY ad K. vt K ad SM, & K ad SM, vt SM ad HF ſed vt XY ad HF, ita eſt baſis eiuſdem altitudinis YV ad AH, & vt VY ad FH, ita eſt FE ad FH, cum ſint æqualés VY, & FE ex conſtruct. ſed vt FE ad FH baſes, ità parallelepipedum C eiuſdem altitudinis ad parallelepipedum A. Ergo vt XY ad HF, ità parallelepipedum C ad parallelepipedum A. Ergo C ad A erit in triplicata proportione SM ad HF, ideſt vt MN parallepipedum ſimile ad A: Cum itaque eidem parallelepedo A eandem dicat proportionem parallelepipedū C, & NM parallelepipedum. Ergo ex 9. lib. 5. erunt æqualia, & tamen MN ſimile ipſi A factum eſt, & ideo cubus T ipſi C, & ideo NM inuento æquabitur.

COROLLARIVM.

HInc poterit quis efformare ne dum parallelepipedum, ſed etiam priſma, & pyramidem imò, & conum, & cylindrum, & ea omnia corpora, quæ ad eandem eleuationem ex dicendis extolli poſſunt, & quorum baſes, in baſes æquales altitudinis rectilineas conuerti.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Priſmati Parallelepipedum æquale conſtruere, vel è contra Priſma æquale parallelepipedo. Sic pyramidem parallelepipedo æqualem, & viciſſim parallelepipedum pyramidi æquale ſtatuere.

HOc faciliter efficietur ex pr. 1. Tr. 29. Fiat parallelogrammū eiuſdem altitudinis, ſed ſuper dimidiam lineam baſim triāguli, quod priſmati baſim planam ſubſternit, hoc æquale erit triangulo baſis. Quadere, ſi parallelepipedo æqualis priſmati altitudinis hoc parallelogrammū pro baſi ſubſternatur, parallelepipedum erit æquale ipſi priſmati Quod ſi fiat triangulū ęquale parallelogrāmo operando è cōtra, priſma ſuper illud triangulū erectū æquabitur parallelepipedo. Fiat deinde Pyramis ſuper baſim parallelepipedi ſextuplo maiorem ex prop. 17. Tract. 29. & erigatur ad eandem eleuationem, & erit pyramis æqualis parallelepipedo.

E contra vero Pyramidis baſis ſexta pars aſſumatur, & ſuper illam erigatur parallelepipedum ad eandem eleuationem, & erit æquale Pyramidi.

Prob. pars 1. Nam priſma eſt dimidium parallelepipedi æqualis altitudinis collocati ſuper eandem baſim ex prop. 2. Tr. 34 p. 1 quare ſi fiat parallelepipedum aliud ſuper dimidiam baſim, cum parallelepipeda æqualis ſint, vt baſes inuicem erit dimidium parallelepipedi integræ baſis. Quare cùm ad priſma ſuper æqualem baſim, & ad parallelepipedum ſuper dimidiam baſim, parallelepipedum ſuper eandem baſim integram ſe habeat, vt 2 ad 1 erunt priſma, & parallelepipedum aliud dimidiæ baſis æqualia ex prop 9. lib. 5.

Patet quoque ſecunda pars eodem argumento.

Tertia, & quarta pars patet, quia Pyramis triangularis baſis eſt tertia pars priſmatis ex prop. 28. Tr. 34. p. 1. & ideo ſexta parallelepipedi duplũ priſmatis ſuper eandem baſim erecti ad eandem eleuationem, & ideo ſi fiat parallelepipedum æquealtum ſuper partem ſextam baſis prædictæ hoc parallelepipedum ad illud erit, vt baſis ad baſem nempe, vt 6. ad 1. Vnde ad pyramidem æquealtam ſuper eam baſim, & ad parallelepipedum ſuper ſextam partem baſis æquealtam eandem habebit proportionem.

Quare æquabuntur ex pr 9. lib. 5. Pyramis eiuſdem baſis, & parallelepipedum ſuper ſextam partem erectum ad eandem eleuationem.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Priſmati cuicumque æqualem cylindrum conſtituere, & viciſſim cylindro æquale priſma ponere; Sicuti, & pyramidem cono, & conum pyramidi erigere.

FIat baſi priſmatis æqualis circulus, ex prop. 13. tract. 30. & ſuper hunc circulum erigatur æqualis eleuationis cylindrus, & hæc erunt æqualia.

Ita quoque fiet ad inueniendum priſma æquale cylindro. Efficietur enim triangulum circulo æquale ex pr. 24. Tr. 30. & 1. Tr. 29 & ſuper hoc Priſma æqualis altitudinis extollatur.

Sic quoque Conus Pyramidi æqualis fabricabitur, & Pyramis cono conſtituendo ſuper æquales baſes æqualis altitudinis Pyramidem cono, vel conum Pyramidi.

Hæc autem omnia oſtenduntur Coroll. prop. 3. p. 1. Tract 34. ſi autem requiratur, quod Priſma, vel pyramis ſit baſis ſimilis alteri datæ baſi: hæc fient ex prop 27. l. 6. redigendo triangulum æquale circulo in figuram datæ figuræ ſimilem.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Dato Cylindro æqualem conum conſtituere, & viciſſim æqualem cono cylindrum exhibere. Sicut, & dato Priſmati æqualem Pyramidem extruere, & è contrà datæ Pyramidi Priſma æquale erigere.

CYlindri baſis tripliceiur ex 19. tract. 30. & ſuper eam conſtituatur conus eiuſdem altitudinis, & erit conus cylindro æqualis.

E contrà baſis dati coni in tres partes diuidatur ex prop. 19. tract. 30. & tertiæ parti fiat circulus æqualis; & exinde ſuper eam ad eandem altitudinem eleuetur cylindrus, & erit cylindrus dato cono æqualis.

Probatur ex pr. 7. Tr. 34. p. 1. Nam Cylindrus ſe habet ad conum ſuper eandem baſim erectum, vt 3. ad 1. ſed etiam Conus ad eandem altitudinem ſuper triplicatam baſim erectus eſt ad illũ conum in baſi cylindri ſitum, vt 3. ad 1. ergo ex prop. 9. lib. 5 ſunt æquales cylindrus, & conus; eùm eidem cono ſito in ſubtripla baſi coni, eadẽ quæ cylindro deſeruit, eandem dicat proportionem, quam 3. ad 1.

Si verò agatur de priſmate pyramidi æquando idem ages: Nam triplicata baſis Priſmatis dabit pyramidem, quæ in eandem altitudinem erecta erit æqualis priſmati; Sicut & baſis pyramidis tertia parte ſitum priſma altum, vt eſt pyramis, ipſam pyramidem exæquabit ſoliditate.

Ratio eſt eadem, quòd Pyramis ſit tertia pars priſmatis in eadem baſi ſita ex prop. 22. Tract. 34. p. 1. Vnde valebit idem argumentum.

PROBL. VIII. PROPOS. XX.

In Cylindrum datam pyramidem, & in pyramidem cylindrum transfundere. Ita Conum exibitum in priſma, & priſma in conum deducere.

FIat Pyramidi datæ æqualis conus ex pr. 28. h. & cono inuẽto cylindrus æqualis conſtruatur ex anteced. Vel è contrà fiat cylindrus æqualis cono, huicque cono inuento æqualis pyramis. Nam erit etiam æqualis cylindro, vt patet. Sic cono dato æqualis pyramis fiat ex prop. 28. h. & pyramidi inuentæ priſma æquale conſtruatur ex prop. anteced.

E contrà autem fiat Priſmati dato æqualis pyramis, & pyramidi inuentæ æqualis conus, & conus Priſmati æqualis erit.

PROB. IX. PROPOS. XXI.

Conum tranſmutare in parallelepipedum, & viciſſim parallelepipedum in conum. Item Cylindrum in parallelepipedum, & è contrariò parallelepipedũ in cylindrum permutare.

COnus in Pyramidem tranſmigret ex propoſ. 28. huius, & pyramis erecta in parallelepipedum tranſeat ex prop. 27. h. Ita Parallelepipedum in Pyramidem transformetur ex prop. 27 h. & Pyramis ex propoſ. 28. h. in conum transfundatur, erit effectum id, quod pars 1. propoſ. poſtulat.

Altera verò pars eodem modo in opus demandabitur. Si namque cylindro dato fiat æquale priſma ex pr. h. 28. & huic priſmati æquale parallelepipedum ex prop. 27. h. Aut parallelepipedo æquale priſma ex p h 27. & priſmati æqualis cylindrus ex h. 28. pr. intentum conſequemur.

PROBL.

PROBL. X. PROPOS. XXII.

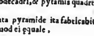
Corpus regulare quodcumque in Pyramidem æqualem traducere, & viciſſim Pyramidem in corpus aliquod regulare tranſmutare.

OMnibus 12. baſibus corporis V. g. dodecaedri pentagonis fiat quadratum æquale tranſformando priùs in rectangulum aliquam ex ipſis ex 5. prop. Tr. 29. & 12. ex eis vniendo, & hoc rectangulum ex 12. pentagonis conflatum reducendo ad quadratum ex 9. eiuſdem, & deinde ſuper hāc baſim extruatur pyramis altitudinis eiuſdem, ac normalis à centro ſuper quamlibet dodecaedri planam baſim deductæ: ſc. altitudinis vnius pyramidis, in quas diuiditur planis à centro deductis corpus dodecaedri. Eritque hęc pyramis æqualis omnibus pyramidibus corporis dodecaedri in centrum vertice ſuo terminantibus.

Probatur Ita Pyramis quadrilatera modo erecta ad vnam Pyramidem in centro terminantem dodecaedri eſt, vt baſis quadrata huius ad baſim illius, cum ſint eiuſdem altitudinis ex effectione, Ideſt vt duodecim pentagoni dodecaedri, quibus æqualis eſt baſis quadrata ad vnum pentagonum ipſius.

Et cum omnes Pyramides dodecaedri ad vnam ipſarum; ita ſint, vtpotè eiuſdem altitudinis, vt omnes baſes duodecim ad vnam ipſarum; ſequitur vt Pyramis quadrilatera, & Pyramides omnes dodecaedri ad vnam pyramidem dicant eandem proportionem, quam 12. ad 1. ſcilicet, quam omnes baſes ad vnam; Vnde ex 9. lib. 5. erunt æquales omnes pyramides dodecadri, & pyramis quadrilatera modo erecta.

E contrà verò data pyramide ita fabricabitur corpus regulare aliquod ei ęquale.



Sit data pyramis, & eius latus A, cui ſit conſtruendum æquale dodecaedrum. Fiat quodcumque dodecaedrum, cuius alicuius baſis pentagonæ latus ſit B, & fiat huic dodecaedro ex B, ex parte primæ prop. h. æqualis pyramis, & huic alia æqualis quidem, ſed ſimilis pyramidi A, ex Coroll. prop. 16. huius, cuius latus C: Fiat autem, vt C ad A latera pyramidum, ſic B latus dodecaedri ad aliud D, & dodecaedrum ex latere D fabricetur, eritque dodecaedrum fabricatum ſuper baſim D æquale pyramidi A.

Probatur, ita eſt pyramis ex latere C ad Pyramidem ex latere A, vt dodecaedrū ex latere B ad dodecaedrum ex latere D ex prop 14. Tr. 34 Cor. ſed pyramis ex latere C eſt æqualis dodecaedro B. Ergo etiam Pyramis A erit æqualis dodecaedro D ex prop. 12. lib. 5. ſi verò quis cupiat datum corpus aliquod ex quinque regularibus æquale, aut cubo, aut parallelepipedo, aut cuicumque alteri figuræ is pyramidem quadrilateram in æqualem, aut cubum, aut parallelepipedum transfundere poterit.

At ſi quis exoptet cubo conſtituere, vel parallelepipedo æquale corpus regulare V. g. Tetaedrū, cuius latus B. Primò ex 1. part. prop. pręc. faciat cubū ęqualē, vel parallelapipedum ęquale alteri dato corpori regulari eius ſpeciei, quæ deſſideratur, nempe Tetaedro ex B, cuius latus ſit A; Deinde conſtituat cubum, vel faciat parallelepipedū ex C latere ſimile illi parallelepipedo A, vt oſtenſ. pr. 6. h. Poſtea faciat, vt A ad C, ita B ad aliud D, & conſtruat Tetaedrum ex illa linea inuenta D, tanquam latere faciendo ex illa quatuor triangula æqualia, & æquilatera, & ſimul vniendo, & erit æquale cubo, vel parallelepipedo dato C.

PROBL. XI. PROPOS. XXIII.

Sphæræ cubum æqualem ponere.

CYlindrus, cuius altitudo diameter ſphęrę, cuius baſis circulus maximus in ſphęra ſit, habet proportionē ad ſphæram ex pr. 37. Cor. 1. & 3. Tr. 24. quā 3. ad 2. Ideo ſi quis hūc cylindrū in tres partes ſecet planis ad axem rectis. & ex tribus huius partibus duas accipiat; erunt hę duę partes ęquales ſphęrę ſoliditati; Quia eidem cylindro ſui mer parti, quę eſt 2. & ſphęrę habet eandem proportionem, quam 3. ad 2. Sic quia ſphęra quadrupla eſt coni eiuſdem altitudinis, ac radii ſphęrę, & eiuſdem baſis ac circulus maximus in ſphęra, vt pr. 43. Cor. Tr. 24. p. 2. ſi ex diametro ſphęrę tanquam radio erigatur conus eiuſdem altitudinis, ac radius ſphęrę erit æqualis ſphęrę ſoliditati.

Si verò huic cylindro, vel cono, aut cubus conſtituatur ęqualis, vel Parallelepipedum, aut pyramis, aut aliquod corpus ex regularibus. Iam illud quodcumque corpus ſphęrę ęquabitur.

PROBL. XII. PROPOS. XXIV.

Annulo ſolido æquale priſma quadratæ baſis inuenire.

QVoniam ex prop. 19. Tr. 34 p. 2. annulus ſolidus quadratus ęquat parallelepipedum, cuius altitudo ęquetur annuli ſolidi altitudini, & baſis annulo plano, cui ineſt: Fiat ex prop. 18. tr. 30. annulo plano, qui pro baſi annulo ſolido ſubſternitur circulus ęqualis, & huic circulo ęquale quadratum, vel rectangulum ex pr 13. tract. 30. ſuper quod erigatur parallelepipedum ęqualis altitudinis & erit factum id, quod expoſcitur.

Patet autem hęc operatio ex prop. 19. tract. 34. quoniam hoc parallelepipedum, vt ibi oſtenditur eſt ęquale annulo ſolido quadrato.

Si verò ſit annulus rotundus, fiat cylindrus, cuius altitudo ſit peripheria per centrum ſoliditatis annuli tranſiens, & baſis ſit circulus eius ſectio, & cylindrus iſte ęquabitur annulo ſolido rotūdo, vt conſtat ex 20. prop. Tract. 34. Quod ſi annuli ſectio non ſit rotunda, ſed polygona, fiet priſma, cui ſubdat baſim illa polygona annuli ſectio; ſed peripheria prędicta ſit altitudo, & iſtud priſma polygono ęquabitur.

PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXV.

Cylindrum conum, vel pyramidem, & priſma in baſibus datis collocare.

SIt V. g. Cylindrus LI, cui facienda ſit baſis ęqualis baſi OB, ita tamen vt ſoliditate, & mole idē perſeueret, fiat, vt OB baſis, LD baſim ad ſic altitudo DI ad aliud, reperiendo ſcilicet duabus OB, & LD tertiam proportionalem N, eritque ex 21. l. 6. vt OB ad LD baſes ſic OB ad N. Poſtea fiat, vt OB ad

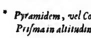


N, ſic DI ad aliud, & reperietur altitudo TH. Fiat itaque Cylindrus ſuper baſim OB altitudinis HT, & æquabitur cylindro IL: cùm baſes effecerimus altitudinibus reciprocè proportionales, & ſit OB, idest TT ad LD ex eff. & vt DI ad HT, vnde ex pr. 12. præc. tract. æquabuntur IL, & IH cylindri. Eadem ages de cono Pyramide, & priſmate, & parallelepipedo quoque.

PROBL. XIV. PROPOS. XXVI.

Pyramidem, vel Conum, Cylindrum, & Priſma in altitudinem datam euehere.

SIt Conus CAB, & oporteat in altitudinē ID illū extollere, ita quòd ſit conus EDG æqualis cono CAB. Fiat vt altitudo ID data ad altitudinem OA dati coni CAB, ſic baſis BC ad baſim EG. Id autem exequetur ſi fiat ID ad OA, ſic BC ad aliud T, & inter CB, & T media proportionalis inueniatur EG. ex qua fiat circulus, qui baſis eſt coni.



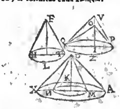
Nam ex 21 Cor. l. 6. erit CB circulus ad EG circulum, vt CB diameter ad tertiam proportionalem T, idest ID ad OA ex effect. & ideo ex pr. 12. Tr. 34. p. I. erunt æquales coni CAB, & DEG, cum obtineant baſes altitudinibus reciprocè proportionales, & idem dicas de pyramide, cylindro, & priſmate.

PROBL. XV. PROPOS. XXVII.

Conum æqualem ſoliditati coni intus euacuati conſtruere.

CAſus I. Sit Conus ADX; qui vacuus ſit intus cauitate coni eiuſdem altitudinis, ſed minoris baſis capaci MDN; oporteatque conſtituere conum æqualem ſoliditati ADXMN.

Fiat circulus THL æqualis annulo AKXMN ex pr. 18. tract. 30. & ſuper illum erigatur conus ęqualis altitudinis; ac conus ADX; Et aſſero hunc conū TFH ſoliditati concauatæ coni ADX eſſe ęqualē. Prob. Ita eſt conus ADX ad conum MDN, ſi adeſſet; vt baſis XKA ad baſim MN ſi extaret: Ergo *diuidendo* ita eſt conus ADX ad reſiduum ADXMN dempto cono MDN, vt baſis AKX ad reſiduum annulum MNXKA dempta baſi MN: ſed vt AKX baſis ad AMKXN annulum ita eſt eadem baſis AKX ad TLH baſim ex 7. lib. 5. vtpote ad æqualia: At vt AKX baſis ad baſim TLH; ita eſt conus ADX ob eandem altitudinem ex pr. 5. tract. 34. p. 2. ex effect. ad conum TFH: Ergo Conus ADX ad ſoliditatem reſiduam euacuatam ADXMN, & ad conum TFHL dicit eandem proportionem baſis AKX ad TLH, ſiue ad annulum AKXNM. Ergo erunt æqualis conus HFLL, & ſoliditas caua XDANM.



Caſus 2. Quod ſi conus ſit vacuus ſpatio, quod impleatur à cono eiuſdem baſis, & minoris altitudinis fiat, vt altitudo OV ad altitudinem OI, ita baſis QP ad aliud, & Inueniatur baſis TLH operando eodem modo, ac prop. 15. h. ſuper quam rectus conus HLFT conſtituatur eiuſdem altitudinis IV, & erit æqualis ſoliditati coni PVQ ablato cono POQ.

Probatur. Nam vt altitudo VI ad OI, ſic conus PVQ ad conū POQ ex pr. tt. Tr. 34. p. 2. ideoq; *conuertendo*, vt VI tota ad compartem OV, ſic PVQ totus conus ad compartem POVQ reſiduam ablato cono POQ. Sed vt IV ad OV, ſic PZQ baſis ad TLH baſim & ita conus PVQ ad conū TFH: Ergo PVQ ad conum TFH ad, & reſiduum POVQ dicet eandem proportionem. Quare erunt æquales ſoliditas POVQ, & conus TFHL.

Caſus 3. Si verò detur aliquis conus cuius vacuum, cono in quo eſt, ſit etiam diſſimile, ſimulq; minoris baſis, & minoris altitudinis illud vacuū tamquam ſi eſſet conus redigatur ad eandem baſim, vel altitudinem, vt docuimus prop. 26. & 27. h. & poſteā perficiatur opus, vt I. vel 2. Caſu.

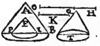
COROLLARIVM.

HInc enaſcitur idem eſſe dicendum de Pyramide, ſi aut vacuum pyramidis pyramide baſis minoris, ſed eiuſdem altitudinis capax exiſtat, aut minoris altitudinis, & eiuſdem baſis. Et idem dicendū eſt etiam de parallelepipedo, vel cylindro ſi vacuo baſis minoris, & eiuſdem altitudinis capax dignoſcatur. Si verò vacuum non impleat totum cylindrum, vel parallelepipedum in duo partiemus in vacuatum, & in plenum, & poſtquam reperimus cylindrum, vel parallelepipedum vacuato æquale ad eandem baſim redigemus, & coniungemus cum cylindro, vel parallelepipedo non excauato.

PROBL. XIII. PROPOS. XXVIII.

Dato cono vacuo capace ſimilis coni, conum æqualem inuenire.

SIt conus ABC, cuius vacuum ſit capax coni æqualis coni EPE, qui eſt ſimilis cono exhibito ABC. Et oporteat æqualem conum eius ſoliditati inuenire. Reperiantur duabus PI, CB duæ proportionales in continua proportione tertia, & quarta, & hæc quarta ſit OH; eſſetque conus PEI, ſi eſſet ſolidus ad conum CAB, ſi eſſet ſolidus totus, vt PI ad OH, ſcilicet in triplicata ratione diametrorum, eo quod vacuum, & ſolidum ponantur coni ſimiles, vt ex propoſ. 9. Tract. 34. conſtat. Auferatur EP ab OH linea, & ſit reſiduum QH, & erit *diuidendo* IPE ad BAC ſublato ipſo PEI, cono, ſcilicet CAB PEI ſoliditatem, vt PI ad OH ſublata ipſa PI, ſcilicet QH. Inter igitur EP, & QH duæ mediæ proportionales interponantur, ita vt PI, T, K, & QH ſint quatuor continuè proportionales ex 3. Tract. 15. fiatque conus ex diametro T immediatè poſt PI ſimilis cono CAB.



Igitur ex propoſ. 9. tract. 24. IPE conus erit ad conum T, vt PI ad HQ; ſed vt EP ad HQ, ſic eſt IPE conus vacuus ad CAB PEI ſoliditatem reſiduam, vt oſtendi. Ergo huic reſiduo CAB PEI, & cono T, idem conus PAT dicit eandem propoſitionem PI ad QH, ſcilicet triplicatam PE ad T diametrorum, ergo erunt ex propoſ. 9. lib. 5. æqualia CAB IPE ſoliditas, & conus T.

COROLLARIVM.

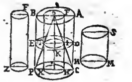
IDem dicendum eſt de pyramide excauata, ſi vacuum eius ſimilis pyramidis ſit capax, & eodem modo eius ſoliditati pyramis æqualis inuenietur.

PROBL. XIV. PROPOS. XXIX.

Cylindrum vacuatum cono, cui cylindro æqualis ſit, reperire.

CAſus primus. Si conus PCO ſit eiuſdem baſis, & æqualis altitudinis cylindri PA. Fiat circulus ex propoſ. 19. Tract. 20 qui ſit PZ duæ tertiæ partes circuli PC; qui baſis eſt coni, vel cylindri, & ſuper hanc erigatur cylindrus ZF, & erit æqualis ſoliditati cylindri ablato prædicto cono. Patet. Nam eſt conus COP tertia pars cylindri, vnde reliquum erit $\frac{2}{3}$ cylindri; Quare ſi erigatur ſuper baſim, quæ $\frac{2}{3}$ ſit baſis CP, cylindrus ZF æqualis altitudinis altitudini CA erit, vt CP baſis ad baſis duo trientes ZP, ita cylindrus AP ad cylindrum ZF ſuper eam erectum. Vnde erit $\frac{2}{3}$ cylindri AP, & & ideo æqualis ſoliditati AP vacuatæ cono COP.

Caſus 2. At ſi ſit coni vacuum TIO eiuſdem altitudinis, & baſis minoris in cylindro BAED, fiat baſis æqualis annulo DEKIT vna cum duobus tertijs circuli IT, & ſit MN, & ſuper eam erigatur cylindrus NS eiuſdem altitudinis, ac EF, & dico SN cylindrum æqualem eſſe ſoliditati cylindri EA ablato cono IOT.



Probatur. Iam ſi fiat cylindrus ex baſi æquali duabus tertijs IT, baſis, & eleuetur ad altitudinem IP erit æqualis ſoliditati coni FT ablato cono IOT; item ſi fiat baſis æqualis annulo DKEIT & ſuper eam eleuetur cylindrus æqualis altitudinis, ac DA æquabitur ipſi cylindro EA ablato cylindro TF ex Coroll. propoſ. 27. huius. Ergo ex propoſ. 39. Tract. 17. Si componantur iſti duo cylindri erit totum EA ad duos cylindros æquantes ſuum ſolidum dempto cono IOT, vt ad SN cylindrum, qui ambos ſimul amplectitur, quare cylindrus SN prædicto ſolido æquabitur.

Pro caſu 3. Conſideretur fig. prop. 25. par. 1. Tract. 34. in qua probauimus fruſtum pyramidis BA æquari parallelepipedo ex baſi YS ad eleuationem MT, & trienti parallelepipedi ex baſi BM ad eleuationem eandem erecto, ideoque ad adæquandum parallelepipedum ex baſi BC tota in eandem altitudinem eleuatum deficient duo parallelepipeda ex baſibus NY, & YN, & duo ex PO, & Y baſibus, & duo trientes ex BM baſi parallelepipedi ad eandem eleuationem extructi. Baſis verò Po, y, & BM æquales ſunt, ſicut & complementa NY, & YO æqualia. Quare ſi eſſet fruſtum triangulare deductum ex priſmate normalium laterum ſuper BC dimidiam baſim à diagonali bipartitum erecto ad eandem eleuationem. eſſet reſiduum eius dimidium vnicum parallelepipedum ex NY, vel YO, & vnicum parallelepipedum BM, & triens eiuſdem nempe dimidium ſupradicti reſidui. Eſt autem ex prop. 13. Tract. 34. p. 2. tale fruſtum coni TIPC æquale pyramidis fruſto, cuius baſis inferior æquet peripheriam, & ſemidiametrū inferioris baſis coni ſuis lateribus, quibus ſeptur, & baſis eiuſdem ſuperior circuli ſuperioris fruſti coni æquet itē ſuis lateribus peripheriam, & ſemidiametrum. At cylindrus EDKPC æquabit ex Cor. prop. 13. Tract 34. par. 2. priſma æque eleuatum, cuius baſis triangularis à peripheriæ, ſemidiametroq; lateribus æqualibus ſtipetur ex Cor. pr. 3. Tr. 34. p. 2.

Siquidem ex propoſ. 3. tract. 30. hæc baſis triangularis ex latere æquante peripheriam, & alio æquante ſemidiametrum circulo eorūdem peripheriæ, & diametri æquatur: Ergo reſiduum IDC TEP æquabit parallelapipedum, cuius baſis ex EN ſemidifferentiæ diametrorum æquali latere, & alio æquali peripheriæ ex TI conſtet, & parallelepipedo ex baſi ſemidifferentia ID diametrorum, & ſemidifferentia peripheriarum conſtituto, & trienti huius ipſius parallelepipedi, quæ omnia parallelepipeda ad eandem eleuationem extollantur. Baſis

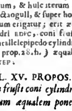
enim

enim NY in fig. prop. 25. Tract. 34. part. 1. ex latere miobri, & ſemidifferentia alterius minoria à maiori homologo conſtituitur, & BM ex ſemidifferentijs homologorum laterum: Ideoque ſi minori peripherię æqualis ponatur pro latere, aliud erit latus ſemidifferentia inter diametros minorem & maiorem: at ſi ſemidiameter minor ponatur pro latere, aliud erit latus ſemidifferentia peripheriarum, cùm hæc duo rectangula ęquentur. Etenim, cum ſit peripheria ad peripheriam; vt diameter ad diametrum, & vt radius ad radiũ ex 42. lib. 6. erit *diuidendo* peripheria minor ad differentiã ſuã à maiori, vt diameter minor ad differẽtiã ſuam à maiori, & ideo ad earum dimidium, quare rectangulum ex medijs æquabitur rectangulo ex extremis ex prop. 18. lib. 6. Si ergo fiat rectangulum, cuius vnum latus æquet peripheriam minorem ex TI aliud ſemidifferentiam diametrorum, vel ex dimidia diametro minori IT, & ſemidifferẽtia peripheriarum, & huic addatur ex pr. 28. Trac. 29. rectangulum ex ſemidifferẽtijs diametrorum, & peripheriarum, & huic iterum addatur triens huius ipſius rectanguli, & ſuper hoc rectangulum parallelepipedum erigatur; erit æquale ſoliditati IDC TEP cylindri EDFC, coni fruſtum TIPC ambientis, cui parallelepipedo cylindrus ęqualis (vt poteſt fieri ex prop. 28. h.) æquabitur ſoliditati prædictæ IDC TEP.

PROBL. XV. PROPOS. XXX.

Soliditati fruſti coni cylindro vacuatæ conum æqualem ponere.

SIt fruſtum coni in præc. fig. TIPC, quod intelligatur vacuatum cono TIXH, & ſit reperiendus conus æqualis ſoliditati PXT IHC. Quoniam propoſ. 13. Tract. 34. p. 2. (vt in illa fig. intueri licet) fruſtum coni RATQ æquat fruſtum pyramidis XLK NCM, & hoc fruſtum ex Cor. prop 25. p. 1. eſt dimidium fruſti pyramidis baſis quadratę, quod ex contextu eius propoſ. æquatur parallelepipedo



à baſi eleuato ex minoribus baſis ſuperioris lateribus, & duobus parallelepipedis, ex minori latere, & ſemidifferentia alterius minoris ab homologo ſibi latere maiori, & inſuper parallelepipedo ex ſemidifferentijs homologorum laterum baſis ſupremæ, & infimæ, & eius trienti omnia æqualis eleuationis HI. Ideo fruſtum pyramidis in hac fig. quod æquet fruſtum conicum TIPC æquabitur horum dimidio nempe priſmati à baſi ex TKI peripheria, & IO radio, quod æquat ex Cor. prop. 3. Tract. 34. par. 2. æquealtum cylindrum ob baſim TKI ex 3. Tract. 30. æqualem, parallelepipedoq; vnico ex radio, & ſemidifferentia peripheriarum minoris à maiori, & parallelepipedo dimidio ex ſemidifferentijs diametrorum, & peripheriarũ minorum à maioribus, & inſuper dimidio trienti eiuſdem, quæ duo faciunt quatuor ſextantes dicti parallelepipedi ex ſemidifferentijs. Subducto itaque priſmate æquante cylindrum XI ex peripheria TKI, & radio OI baſi inixo remanebunt prædicta parallelepipeda, nempe ex radio OI, & ſemidifferentia peripheriarum baſi eleuata, & quatuor ſextantum parallelepipedi ex baſi ex ſemidifferentijs diametrorum, & peripheriarum conſurgentis. Igitur ſi baſis conſtituatur ex OI radio, & ſemidifferentia peripheriarum, & ei addantur quatuor ſextantes baſis ex ſemidifferentijs prædictis diametrorum TT, & PC, & peripheriæ ex TI ab PTC, & ſuper ipſam IO altitudinẽ HI eleuetur parallelepipedum: hoc erit ęquale ſoliditati PTX HIC fruſti coni TIPC vacuati cylindro TIXH. Hoc verò parallelepipedum conus fiat, ex pr. 20. h. & verificabitur aſſumptum.

PROBL. XVI PROPOS. XXXI.

Sectorem, & portionem ſphæræ in conum æqualem commutare.

QVoniam ſector ſphæræ ABED ſolidus ęquat conum, cuius altitudo ſit radius BD, & obtineat pro baſi a radio ſubtenſam AB ex Cor. 1. pr. 44. Tr. 34. ſi fiat circulus radio AB, & ſuper illum extollatur conus habens pro altitudine radiũ ſphęrę DB: hic conus æquabit ſoliditatẽ ſphęrę ſectoris EBAO. Si verò



fiat conus, cuius baſis CA radio ducatur, & altitudo ſit CD reſidua radij DB ſphęræ ablata ſagitta portionis ſphæræ BC, qui ſit EAD, & hic conus DAE auferatur ab illo, qui æquet ſectorem ſphærę, reliqua erit ſoliditas, quæ redacta in conum ęquabit ſoliditatem portionis ſpherę EBAC.

PROBL. XVII. PROPOS. XXII.

Sphæroidi conum æqualem exhibere.

HOc faciliter fit faciendo conum, qui habeat pro radio axem alterum, alterum pro altitudine. Vel cùm ex pr. 26 Tr. 34. oſtenderimus ſemiphęroidem eſſe duplum coni inſcripti, cuius baſis circulus ducitur ex ſemiaxe tamquam radio, & alium ſemiaxem habeat pro altitudine; ſic conficiamus conum duplum faciendo eius duplam baſim (quod fit, ſi inter totum axem, & dimidium media proportionalis inueniatur, & adhibeatur pro radio ex prop. 19. tract. 29.) & eandem altitudinem alterius ſemiaxis conſeruando, erit duplum huius, & ideo æquabit hemiſphæroidem, ſi verò duos conos ſimiles in Rhombũ ſolidũ cõponamus, vt eſt ACHD in illa pr. 16. Tr. præc. p. 2. Huic Rhombo erit æqualis ille conus, qui habeat eandem conorum cõpoſitorum eleuationem, & baſim eandem ex eadem prop. vt eſt ibi GAN: Quare conus habens torũ alterum axem pro radio tum huius, tum alterius conorum compoſitorum æquantium duo hemiſphæroides, & baſim prędictã erit ęqualis Rhombo ex duobus ijſdẽ conis conflato, & ideo toti ſphęroidi.

PROBL. XVIII. PROPOS XXXIII.

Fruſto ſphæroidis, vel ſphæræ æqualem conum exhibere.

FRuſtum ſphęroidis, vel ſphęrę, quod datur in ſe concludit centrum, vel terminat in centrum, vel eſt totum extra centrum, & vt de ſingulis doceamus modum ea reducendi in conos ęquales. Sit primo datum ſegmentum ABC, quod omninò ſit extra centrum. Quoniam ex propoſ. 38. fruſtum ſphæroidis ABC æquat cylindrum IKHG deducto fruſto coni HTLG, ſi fiat ex pr. 29. huius fruſto

ſruſto cylindri HTNLGF, vt in fig. pr. 38. Te. 34. p. 2. remanentis priſma ęquale habebimus Intenū.

Sit deinde data ſectio ſphæroidis, vel ſphæræ, cuius portio terminet In centrum, vt ACDQ, quia hæc ex prop. 38. Tract. 34. æquatur cylindro NDFQ dedu... portione cnoi, ſeu cono TLF, fiat huic cy..ndro ex par. 1. prop. 29. h. Conus æqualis, ſoliditati exeauatæ deducto cono LTS, & obtinebimus intentum.

Quod ſi ſit ſegmentum, quod centrū comprehendat, vt CAIZ vtere eo tamquam ſi duo eſſent, quæ terminatetur in centrum, nimirum ADCQ & DZQY, & in duos conos transformentur, quæ deinde in vnum poterunt conglobari, ex doc. prop. 15. Tract. 34. p. 2. vel ex dicendis.

PROBL. XIX. PROPOS. XXXIV.

Hyperbolicum conoidem in conum æqualem transformare data diametro, & tranſuerſa.

QVoniam ex prop. 30. tract. 34. Hyperbolicum conoides ad conum inſcriptum eam conſequatur proportionem, quam diameter cum diametro tranſuerſa, & huius dimidio, nempe in illa fig. AB diameter cum AN tranſuerſa, & AN tranſuerſę dimidio, quod eſt NF ad diametrū, & tranſuerſam DE. Ideo ſi duæ mediæ proportionales iaciantur inter EF diametrum tranſuerſam, & eius dimidium, vt vnam lineam EF, & Inter DE diametrum. Conus ſimilis cono BAC ex minori, & viciniori ipſi DB erectus erit ad conū CAB, vt EF ad DE, quia ſicut FE ad DE habet proportionē triplicatā eius, quę eſt inuentę lineę proximiori ipſi DE ad ipsā DF; Sic quoque conus ſimilis, ſimiliterque poſitus vt BAC ſuper illam erectus proximiorem ipſi DE dicit proportionem triplicatam ex Cor. prop. 14. Tract. 34 Vnde eidem cono BAC dicet eandem proportionem, quam EF ad DE, nempe quam Hyperbolicum conoides ad conum inſcriptum, vnde erunt æqualia ex 9. lib. 5.

Idem quoque obtinebimus, ſi fiat priſma ęquans annolum ſolidum, quod euaſcitur ablato cylindro eiuſdem altitudinis, ac conoides hyperbolicum, à cono aſymptotico ipſius conoidis, vt prop. 33. Tr. 34. collegimus.

PROBL. XX. PROPOS. XXXV.

Conoidi Parabolico conum æqualem exhibere.

SIt conus in fig. prop. 34. Tract. 34. p. 2. BAC, baſiſque circulus AC ex prop. 19. Tract. 30. fiat maior addita ei ſui ipſius medietate; ita vt circulus inuentus ſe habeat ad baſim coni BAC, vt 3. ad 2. & ſuper hunc circulum erigatur conus eiuſdem altitudinis, ac BAC parabolico conoidi inſcriptus, eritque æqualis iſte conus conoidi.

Proaatur. Quia conus inuentus ad conum inſcriptum obtinet eam proportionem, quam baſis illi ſubſtrata ad baſim coni BAC inſcripti: ſed hęc eſt ſeſquialtera ea ſcilicet proportione gaudet, quā habet conoides parabolicum cono ſibi inſcripto: Ergo eidem cono inſcripto eandem proportionem dicunt conus inuentus, & conoides parabolicum. ex 9. lib. 5. Quadere erunt æqualia.

* Hoc quoq; operi demadabitur faciendo conum priſmaticum eiuſdem baſis, & altitudinis hunc enim conum parabolico corpori æquari oſtendimus prop. 31. tract. 34.

COROLLARIVM.

POſtea verò quod hæc corpora in conum tranſlata ſunt, poterunt In quolibet aliud tranſfundi, ſi iuxta præhabita conus Ipſe cui æquatur, tranſmutetur in aliam quamcumque ſolidam figuram.

PROBL. XXI. PROPOS. XXXVI.

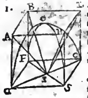
**Sphæram quadriformem, & corpora quæ ex ea naſcuntur in corpora æqualia transfundere.*

SPhæræ quadriformi corpus æquale erit duplū AHFS parallelepipedum circumſcriptum ipſius Hemiſphærio OFCNS: ſed cui demptum fuerit triens ipſius, nēpe gemina Pyramis BLAHI, quæ vt ibi oſtenditur eſt triens BHFS parallelepipedi, & ideo geminata erit triens ipſius dupli: Hoc autem parallelepipedum debet habere eandem quadratam baſim, & eandem altitudinem totius ſphæræ quadriformis, vt ſit duplum BHFS parallelepipedi ex prop. 20. p. 1. Tract 34 Quare ſi fiat baſis, quę obtineat duo trientes baſis ſphæræ quadriformis exhibitæ, & ſuper hanc eleuetur parallelepipedum duplæ altitudinis IO: hoc erit ad parallelepipedum FS baſi ſitum in duplam altitudinem IO vt 2. ad 3. Sed etiam duplum parallelepipedum BSFH vacuatum tamen dupla pyramide BAHLI eſt æquale ſphęroidi quadriformi eſt ad idem duplum Integrum, vt 2. ad 3. Ergo æquantur ex 9. lib. 5. & ideo ſphæra quadriformis æquans parallelepipedū duplum BHFS vacuum dupla pyramide ABLHI parallelepipedo, cuius baſis ipſius ABHL duo trientes & eadem eleuatio ſit, æquabitur.

Inuolucro verò ſphæræ quadriformis Inuenientur pyramis æqualis.

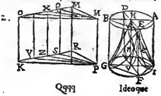
Si fiat ſuper ABHL pyramis duplæ altitudinis, quam ſit OI. Nam ſicut ABLHI pyramis æquat ſemi inuolucrum ſphęræ; ſi ſit pyramis duplę altitudinis, & eiuſdem baſis, ſc. dupla pyramidis ABLHI æquabit totum inuolucrum ex pr. 51. tr. 34.

1.



Vngulæ cylindricæ æqualis pyramis inuenietur, ſi fiat pyramis ſuper baſim eius quater maiorem, quam ſit triangulum, in quo inexiſtit Vngula, & eiuſdem altitudinis, ac eius ſemidiameter, vt conſtat ex prop. 49. Tract. 34. dimidiū enim baſis ſphæræ quadriformis, cuius eſt octaua pars, eſt quater maius, quàm triangulum, cui inexiſtit vngula, quod eſt octaua pars baſis eiuſdem ſphæræ:

2.

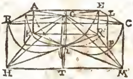


 Ideoque

Ideoque dato cylindro BRAGI; ſi ex baſi AEGI eius ſectiooe erigatur pytamis ABEGI erit æqualis vngulę DBGE: ſiquidem baſis ABGI eſt qoadropla trianguli BHG, cui inſiſtit vngula, & altitudo eſt BH diamerri ED vngulę dimidium.

Lunulę verò pyramia æqualia Inuenietur: Si fiat priſma KMOP, cuius baſia NMO æquet circulum ADBE; Sc. ex prop.3. Tract.30. NM larus baſis triangularis ſit EH ſemidiameter, & MO æquet peripheriam ADBE: Altitudo verò NP ſit eadem, ac GE cylindri: In hoc verò priſmate ſit MQ diametri duo trientes ea quo fiat parallelogrammum MQRS æquale duobus trientibus plani ſecti per axem AEGI cylindri, & ſuper ipſum erigatur priſma NMQRSP, quod erit æquale pyramidi ABEGI æquanti vngulam. Namque erit eiuſdem altitudinis EH: vnde ſe habebit ad priſma ABEGFI, vt 2. ad 3. ſcilicet vt baſis rectangulum MQRS ad baſim AEGI ex propoſ.15. Tract.34. p.1. ſed etiam pyramis ABEGI eſt ad idem priſma ABFGFI, vt 2. ad 3. cum ſit ſuper baſim quadrangulam ex prop.22. Ergo ęquabũtur ex 9 lib.5.: Fiat rurſus priſma XQNPSZ eiuſdem baſia ZQ, vt eſt MS, & eiuſdem altitudinis ęquabit duas pyramides AEBGI & ideo duas vngulas DEAI, & EOBG. Quare reſiduum erit duabus Lunulis ęquale GEBNTF. Diuidatur itaque parallelogrammũ XK medium, & fiat priſma IOKP, & erit æquale vnicę lnoulę IEBNGF.

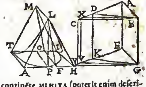
3



Inuoluero vngolę pyramis ęqualis erit. Si fiat pyramis ſuper quartam partem PETM baſis ſphęrę quadriformia in altitudinem GI, vt conſtat ex prop.51. Cor.1. Tract.34. p.2. qoę quarta pars eſt ſemirectangulũ AHVI per axẽ actũ AEIG cyliodri.

At verò, ſi quis cuplat priſma ęquale inuolucro Lunulę, is tranaformet fig.2. NPYO priſmatis ęqualis lunulę baſim YPK obliquam in rectangulum, cuius latus ſit radius BP, & YK aliud latus, & ſuper hoc eleoet priſma ad altitudioem PN: Quod ex 15. tract 34 part 1. ęquabitur priſmati YOPN lunulę ęquali; deſcribatque hoc priſma in priſmatę

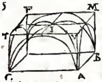
4



Inoulam continẽte MLHITA (poterit enim deſcribi; ſiquidem baſis habet latus PL, idem quod latus IH radio ęquale, & YX minori latere, quam HA, & altitudo radem PQ, quæ priſmatis PL;) Sit verò priſma inſcriptum lunulę ęquale AFTOLM remanebit reliquum priſma HFIOLM ęquale Inuolucro lunulę. Quod patet, abſtolimus enim corpus ęquale lunulę: ipſumque totum priſroa ęquat lunulam, & inuoluerum. Ergo ablato corpore FOTALM ęquali lunulę, ſolùm ipſi inuoluero remanet corpus, & priſma ęquale HFIOLM.

Hinc quoque, & fornicis cruciformis TMCA quantitatem cooſequemur de quo prop. 53. Cor. 1. Tract.34. locutus ſum; Conſtat enim hoc corpus ex quatuor prędictis corporibus lunulam iouoluentibus ex Cor. 1. & 2. prop. 52. componi. Et vt huius rei demus exemplũ ITC

5



erit inuolucrũ lunulę, & quarta pars ſphęrę quadriformis, cui iam docuimus iouenire ęquale priſma. Quare, ſi quatuor priſmata ęqualia cõponãtur obtinebimus totũ fornicẽ TFVMBC, & ita dicas de pyramide ſicais conſtante, vel meta concaua.

COROLLARIVM I.

Hinc patet Vngulam cylindri, in quo eſt, ſi ponitur ipſius cylindri tota ſoliditas 22. eſſe 4. partes, & $\frac{2}{3}$ totius ſoliditatis, & duas vngulas eſſe 9. partes, & $\frac{1}{3}$, & ideo Lunulas eſſe, vt 11. & $\frac{2}{3}$ vtpote reſidua ex Vngulis, & ſingulas eſſe 5. $\frac{1}{3}$ totius cylindri. Ratio eſt; quia, ſi fig.2. latus MD ponatur 22. vt eſt peripheria reſpectu diametri ex pr.3. Tract.18. latus MQ erit totius MD 4 $\frac{2}{3}$ vtpote $\frac{2}{3}$ diametri, qui eſt 7. pars. At vt MO ad MQ latera ſic rectangula æqualia MX ad MS, quæ ſunt baſes, & vt baſes ita æqualia priſmata MOKNPR ad MQRSNP: ergo etiam priſma MOKRNP, ad MQRSNP erit, vt 22 ad 4 $\frac{2}{3}$. Ergo ex pr.19. Tract.17. priſma MOSRNP ad duo æqualia NMXZPR erit, vt 22. ad duplicatos numeros 9 $\frac{1}{3}$. Quare *conuertendo* NMOKRP totum ad reliquũ XOAZPN, erit, vt 22. ad reliquum 11. & $\frac{2}{3}$: quare ad dimidiũ YKONP erit, vt 22. ad dimidiũ prędicti numeri ſc. 5. & $\frac{5}{6}$ proximè.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoq; inuolucrum Vngulæ eſſe ex 28. partibus cylindrũ ambientis parallelepipedi 4 $\frac{2}{3}$, & iouolucrum luoulæ ex iis 28. ſolum æquare $\frac{2}{3}$. Fiat priſma SACGEY in fig 4. cuius baſis ACGY triãgularis æquet baſim cylindrũ ambientis parallelepipedi V. g. ſit dubla baſis THAI, quæ ſemicirculum baſis cylindri ambit, eritque ex pr. 5. tract.29. YS latus æquale quatuor lateribus AH: Quare priſma CABGEY erectum in eadem altitudinem parallelepipedi cylindrum ambientis ipſi æquabitur. Igitur ponatur AC quatuor diametros æquans 28. partiũ tribuendo ſingulis partes ſeptẽ, & eſſe Inſcriptum priſma BADAEG fig. 2. eiuſdem altitudinis AB ſitum ſuper baſim EADS rectangulam; Item eiuſdem altitudinis 84, quæ eſt cylindri, quæ longitudine lateris AH habeat partes 22. ſc. lineam ęquantem peripheriam, id eſt diametros tres cum ſeptima parte, remanebit priſma COSKYG cuius baſis OY habebit DC partium 6., & quia ADBKBG æquat cylindrum, reliquum DACYKG ęquabit iouolucrum cylindri.

Inuolucrum autem vngulę eſt ęquale ex pr.51. Cor.1. pyramidi AHVGE fig 2. (ſiquidem rectangulum HBVG eſt quarta para totius baſis ſphęrę quadriformis, quę vngulis octo conſtat, & ideo cum quodlibet rectaogulũ duas vogulas ferat EGOB, & BAOGO debebit quadruplicari; vt octo vngulas pręſtet) ſed iam dictum eſt; quod pyramis ABGE æquat priſma NMQPRS, cuius baſis habet latus MQ 4 $\frac{2}{3}$; ergo EHFYG dimidium pyramidis ABEIG habebit latus 2 $\frac{1}{3}$ manente in baſi eadem altitudine, ſicut & in priſmate; Quare duo inuolucra ęqua-

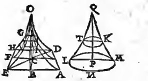
ęqualia erunt priſmati DXVVGB fig.4.cuius latus DX baſis æqualeq;,ac pyramidis, ſit 4 $\frac{4}{7}$. Remanebit ergo pro Inuolucris duobus lunulę priſma XCVYGB, cuius baſis erit XCVY,quę erit partis vnius,& $\frac{4}{7}$, quare ſingula inuolucra erunt $\frac{4}{7}$.

Igitur ſoliditas inuolucri vngulæ equans dimidium priſmatis XCVYBG erit ad totam ſoliditatem priſmatis BACEGY, vt $\frac{4}{7}$ ad 28. quia enim dimidium rectãgulum VXCY eſt ad rectangulum ABYC, vt dimidium XC ad AC, vtpote quod ſint eiuſdem altitudinis,erit etiam priſmatis dimidium XCBYVG ad priſma BACBEY, vtpote eiuſdem altitudinis,vt dimidium XC ad CA, ſcilicet, vt $\frac{4}{7}$ ad 28. vel 4. ad 168. vel vt 1. ad 42.

PROBL. XIV. PROPOS. XXXVII.

* *Pyramidem æqualẽ pyramidi flexis ſuperficiebus conſtanti, & conum æqualem eiuſdem generis cono conſtituere.*

SIt fig. prop.43. & detur pyramis flexis conſtans HOA, cui æqualis rectis ſuperficiebus ſecta facienda ſit. Fiat rectangulum ex prop.30. Tract.29. quod ſe habeat ad rectangulum HA, vt 24. ad 42. vel 4. ad 7. & ſuper illud erigatur pyramis,quę appelletur u ęquè eleuata,&hęc pyramis X æquabitur pyramidi flexis conſtanti HOA.



Probatur. Nam ſit pyramis quadrata HOA flexis conſtans,hæc ex 53. tract.34. quatuor inuolucris lunulæ æquabitur. Eritq; parallelepipedum, ex quo ablatis lunulis,& vngulis duabus,& harum inuolucris duobus formatur concluſum lateribus EB altitudine cylindri, AI, & dupla CO diametris eiuſdem cylindri ab eo comprehenſi ex Coroll. prop.53. Tract.34 & ECBO erit dimidiatæ lunulæ inuolucrum, cuius vertex E, & BFCO aliud dimidium, ex Cor.1. prop.52. Ideoque ſi baſis aliqua parallelepipedi V. g. quæ continetur lateribus EA, & AI in 42. partes diuidatur,parallelepipedum ſuper $\frac{2}{4}\frac{3}{2}$ eleuatum in altitudinem duplæ CO,ex Cor. 2. præced. æquabit lunulæ inuolucrum totum ECBAO; & quadruplum $\frac{2}{4}\frac{4}{2}$ totam pyramidem flexis conſtantem,vtpote quatuor inuolucris lunularum confectam. Sed hoc parallelepipedum fiat Pyramis eiuſdem eleuationis duplę CO,& occupabit triplum maioris baſis ex prop.17.Tract h.$\frac{2}{4}\frac{3}{2}$ rurſus diminuatur vſque ad dimidium eleuationis, quæ eſt CO,& erit ex prop.25. Tr.34. $\frac{2}{4}\frac{3}{2}$, vel $\frac{4}{7}$,nempe fiet duplæ baſis, ideoque pyramis u æquans pyramidem flexis conſtantem erit ſituata ſuper $\frac{4}{7}$ baſis, & eleuata vſque ad eleuationem eandem CO.

Si verò quis cupiat extruere conum æqualem cono ſuperficie curua conſtanti LQMN fiat circulus ex 19.Tr.30.qui ſe habeat ad circulum LNM, vt 4.ad 7.qui dicatur Z,& ſuper illum erigatur conus Z eleuatus eadẽ altitudine PQ,& iſte conus Z æquabitur cono LQMN.

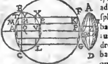
Probatur. Nam Pyramis HOA eſt ad conum LQMN, quæ flexis conſtant ſuperficiebus ex prop. 53. Tract.34. vt baſis AH rectangulum ad baſim LMN circulum, vel ellipſim. Sed vt rectangulum HA ad LNM circulum, vel ellipſim, ita eſt rectanguli $\frac{4}{7}$ ad circuli, vel ellipſis $\frac{4}{7}$, & ita eſt pyramis ſuper $\frac{4}{7}$ baſis HA erecta ad conum ſuper $\frac{4}{7}$ circuli LNM erectum ad eandem eleuationem. Ergo ex 16.l.5. vt pyramis HOA ad conum LQMN, flexis conſtantis,ſic pyramis ſuper $\frac{4}{7}$ baſis HA ad pyramidẽ ſuper $\frac{4}{7}$ circuli LNM: ſed pyramides ex baſi HOA flexis conſtans, & pyramis ex eius $\frac{4}{7}$ æquantur. Ergo etiam conus LQMN flexis conſtans, & conus ex $\frac{4}{7}$ circuli LNM ęquabuntur.

PROBL. XV. PROPOS. XXVIII.

* *Metæ quadriformi æqualem ponere pyramidem, & etiam metæ circulari æqualem conum.*

SVper quadruplum rectangulum baſis metæ ædificetur pyramis eiuſdem altitudinis; ac metæ ſemiaxis QB. Et hanc pyramidem dico eſſe æqualem metæ quadriformi. Si verò quis cupiat metam circularem, ſuper circulum baſim metæ quadruplum ex pr.19. Tract.30. p.2. erigatur ad prędictã eleuationem conus,& erit, quod expetitur operi demandatum.

Prob. Nam ex prop.54. Tract.34. p.2. ita eſt ſphęra quadriformis ad metam, vt baſis ſphærę quadratum ad baſim metæ quadruplum,& ita baſes quadruplo, quam ſphęræ baſis maior ad baſim quadruplo maiorem, quàm baſis metæ; & ita ex pr.28.Tr.34.p.2. pyramis ad eleuationem QB ſuper baſim quadruplam, quam ſphærę ad pyramidem ſuper baſim quadruplam, quam baſis metæ ad eandem eleuationem BQ. Ideo ex 16. lib.5. vt eſt ſphæra ad metam, ita pyramis ſuper baſim quadruplam baſis ſphæræ ad pyramidem ſuper baſim quadruplam baſis metæ in eandem altitudinem euectas: Sed illa ſuper baſim quadruplam ſphęrę æquat ſphęram ex pr 48. Cor. Tr.34. Ergo etiam ex prop.12.lib.5. pyramis hęc quadruplæ baſis ad eleuationem QB æquabit metam.



Eodem argumento idem oſtendes de cono,quod æquetur metæ circulari.

Idem concludes: ſi ſphæra quadriformis, & meta habeant baſes ſimiles. Nam ob paralleliſmum omnia plana ſecantia erunt ſimilia. Vnde ex prop.28.Tr.34 p.2. idem concludes de meta, & ſphæra quadriformi. Et ita etiam ſi ſint ellipticæ baſes; ſed ſimiles,quæ ſcilicet poſſint circumſcribi rectangulis ſimilibus: nam cum omnia rectangula parallela baſi ſint ſimilia; etiam omnes ellipſes ex propoſ.27. Tract.30. ſimiles erunt, & ideo ex 28. Tract.34. ipſa corpora erunt in proportione baſis ad baſim.

PROBL. XVI. PROPOS. XXXIX.

* *Corporibus ſpiralibus cylindros æquales exhibere,& ſuperficiebus ipſorum normalibus ſuperficiei æquales.*

NAm ſit corpus ſpirale primi generis de quo prop.57. locuti ſumus à circulo in altitudinem ſpiraliter ductum. Cylindri,in quo eſt medietas ipſum æquabit, ſicut, & cuiuſcumque eius partis ſoliditatem ſectoris cylindrici ſolidi medietas

adęquabit. Patet ex eadẽ pr.57.Tr.34.p.2. cum ibi oſtendatur corpus tale ſpirale eſſe dimidium cylindri comprehendentis.

Si verò ſit corpus ſpirale ſecundi generis à baſi ſpirali erectum æquealtum. Diuidetur altitodo cylindri cõprehẽdentis in tres partes, & tertia pars æquabitur corpori ſpirali ſuper ſpiralẽ baſem in æqualẽ eleuationẽ producti, vt pr.58. oſtendimus.

Si verò ſint corpora ſpiralia ſecundę ſpiræ, cum ſint, vt baſes ſpirales ad circulos includentes, & illę ſint, vt 7. ad 12. ſi diuidatur altitudo cylindri in 12. partes ex illis aſſumantur 7. ille cylindrus æquabit corpus ſpirale. Et ita dicas de alijs tertija, & quartis ſpiris, diuiſus enim cylindrus ſecundùm eam proportionem, quam habet baſis ad circulum, cylindrum æqualem ſpirali corpori exhibebit.

Hinc ſuperficies globoſa ſuper baſim ſpiralem normaliter erecta corporis ſpiralis ſuper ſpiram inixi, & æqualis eleuationis patebit. Siquidem ſuperficies ſectorum ſolidorum circumſcriptæ deficient latitudine tantùm: quæ ad ſectorum æqualium ſuperficies inuicem æquales ſe habebũt, vt 6. ad 12. ex pr.12. Tr.27. Quare, & vſitato argumento talis proportionis ipſa ſpiralis ſuperficies globoſa oſtendi poterit ad ſuperficiem cylindri, nempe, quod ſit, vt 6. ad 12.

Si vero ſit corpus ſpirale tertij generis à baſi ſpirali in ſpiralem eleuationem euecti; Diuidatur altitudo cylindri comprehendentis in 18. partes, & quinque partes æquabuntur prædicto corpori. Nam tale corpus baſis, & eleuationis ſpiralis eſt ad corpus ſpiralis baſis, ſed æqualis eleuationis, vt 5. ad 6. ex prop.59. Tract.34. at verò ſpirale corpus ad cylindum ambientem eſt, vt 6. ad 18. vel vt 1. ad 3. Ergo ex 23. lib.5. ſpirale corpus quoad baſim, & altitudinem erit ad cylindrum comprehendentem, vt 5. ad 18. ſed etiam quinque partes ex 18. cylindri eiuſdem eſt ad ipſum, vt 5. ad 18. Ergo æquantur ſpirale corpus altitudine, & baſi, & quinque partes cylindri comprehendentis ex prop. 9. lib.5. Euclidis.

Si verò ſit corpus quarti generis baſi ſpirali, decreſcendo eleuatum: tunc diuidetur cylindrus comprehendens in partes 18. & vna pars erit æqualis tali corpori.

Probatur. Quia corpus ſpirale decreſcens altitudine, ſed creſcens baſi eſt ad corpus ſpiralis baſis tantùm, vt 1. ad 6. ſed hoc corpus eſt ad cylindrũ comprehendentẽ, vt 6. ad 18. ergo etiam corpus ſpirale decreſcens altitudine dum baſi creſcit, erit ad cylindrum comprehendentẽ vt 1 ad 18. Vnde $\frac{1}{18}$ cylindri ipſius illi corpori æquabitur.

Si verò ſint ſecunda ſpiralis corpora baſi, & altitudine decreſcentis iam oſtendimus ſe habere ad corpus ſpiralis baſis, ſed eiuſdem altitudinis 17. ad 42. vel 119. ad 294. ſed corpus ſpiralis baſis, & eiuſdẽ altitudinis ſe habet ex 57. Tract.34. vt 7. ad 12, ideſt, vt 294. ad 504. Ideoque ex *æquo* ſpirale corpus deficiens etiam altitudine ſe habebit ad cylindrum comprehendentem; vt 119. ad 504. ideo ſi diuidas cylindrum comprehendentẽ in partes 504. & ex eis aſſumas 119. ille cylindrus partiũ 119. ęquabitur corpori in ſpira ſiti altitudine deficiẽtis.

Hinc eſt ſuperficiem flexam corporis ſpiralis facilè poſſe inueniri: Nam illi imaginentur circumſcriptæ ſuperficies latæ, vt ipſi arcus deficientes, quę deficiant altitudine arithmeticè, illę erunt ad eiuſdem latitudinis ſuperficies corporis baſi ſed nõ altitudine deficientis, vt 4. ad 6. ex pr.14. Tract.27. par.3. contextu; ideoque toties replicato argumento poterit argui, quod ſuperficies ipſa ſpiralis flexa deficiens altitudine ſe habeat ad ſpiralem altitudine non deficientem, ſed quæ ſint baſi ſpirali inixæ, vt 4. ad 6. At ſupra ſpiralis ſuperficies non deficiens eſt ad cylindri ſuperficiem, vt 6. ad 12. nempe vt ipſa ſpira ad circulum; Ergo ex *æquo* ad ſuperficiem cylindricam ſpiralis ſuperficies altitudine deficiens, & ſpiralis baſis erit, vt 4. ad 12.

EXPENSIO III.

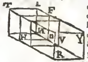
De corporum proportionali diuiſione.

VIſa transformatione corporum in alia corpora diuerſæ ſpeciei, modo de eorum diuiſione proportionali agendum eſt non obſeruata eadẽ figura, ſed tantũ per plana parallela vni lateri; inſra autem agemus de eodem augmento, ſeu diminutione: ſed ea in eadem figura conſeruando.

PROBL. I. PROPOS. XL.

Datum cubum, vel parallelepipedum ſecundùm proportionem datam ſecare.

DIuidatur iſtua YL in F ſecundùm proportionem datam, & baſes NH, & OR, vtpote eiuſdem altitudinis ex 1. l.6. obtinebunt proportionẽ laterum ſectorum ſecundùm datam rationem, ſed, & hanc habent parallelepipeda equalia altitudinis HL, & FR, vtpote quod eã



obtineant proportionem, quæ baſium ex prop. 8. Tract.34 p.1. Ergo, & ipſa parallelepipeda ſecta ſunt ſecundum datam rationem.

COROLLARIVM.

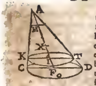
EAdem dicas de priſmate, & de cylindro, ſi altitudo eorum in datas rationes ſecetur, & per ſectionem agatur planum baſibus in priſmate triangulis in cylindro circulis parallelum. Nam eadem ratione ſecabuntur, tum priſma, tum cylindrus in datam rationem.

PROBL. II. PROPOS. XLI.

Cono, vel Pyramidi abſcindere partem datam.

*SIt ADOC Pyramis, vel conus à quo oporteat abſcindere partem verſùs acumen, ad quam ſe habeat reſiduum, vt 3. ad 1. Diuidatur altitudo coni AF in H tali modo, vt AF ſit ad AH, vt 4. ad 1. eritque *diuidendo* HF ad HA, vt 3. ad 1. Interq; AH; & AF duæ medię proportionales AX, & AI ex 3. Tr. 15. inueniantur, quarum maior ſit AI, & per punctum I planum parallelum baſi coni abſcindet conum TAK ſimile cono OOAC: Erit itaque conus DACO ad conum TAK cum ex pr.7.h. ſint ſimiles, vt FA prima ad HA quartam proportionalem nempe ex effect. vt 4. ad 1 Cum ergo ſit conus DOCA ad conum TAK, vt 4. ad 1. erit etiam *diuidendo* TDCKC reſiduum ablato cono TAK ad ipſum conum TAK, vt 4. ad 1. ablato 1. ſcilicet 3. ad ipſum 1. quæ erat proportio requiſita ſecundùm quam conus debebat diuidi.

Et



Et ita diuidetur etiam ſi pyramis, vel conus ſit obliquus, & ſuper Ellipſim. Nam ſemper conus, & pyramis quæcumque parallelo plano baſi abſciſſa ſimilis erit toti. Omnes enim baſes, quæ ducantur baſi parallelæ ſint ſimiles. Ex 4 Tract. 24. quia ſunt circuli, & ex 1. & 4. Tract. 35. ſi ſint ellipſes. Triangula etiam quæcumq; per axem ſimilia ſunt vt ex prop. 2. & 4. lib. 6. cum ſint anguli ob parallelas in cono EFAT, & CAOO æquales, & latera proportionalia. Vnde etiam ſuperficies conicæ abſciſi TAK, & totius ADC ſimiles erunt cum eoſdem angulos vbique, & circumquaque cùm baſi efficiant, vt ex 7. h. Cor. colligere licet: cum ergo coni abſciſſus TAK, & totus ADC contineantur ſuperficiebus ſimilibus, ſimiles erunt. Quod & extendes ad corpora coniformia rectis in centrum tendentibus ad modum coni conſtantia, vt cit. Cor. patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLII.

** Priſma triangulare parallelo ductu baſi quadratæ in partes datas ſecare.*

SIt priſma ASQOD per ductum parallelum baſi quadratæ ſecandum, ideo pars erit in acutum D deſinens RTD, habebunt verò æqualem altitudinem TR totũ ASQOD, & pars RTD, baſimq; ſimilem AOD, & RHO ob parallelum planum RHTI, & parallelam ſectionem RH, quare ex 2. lib. 6. erit AD ad RD, vt OD ad HD, & anguli æquales ex 2. lib. 6. DRH, DAO, & DHR, DOA. Vnde ex def. erũt ſimiles. Ideoque obtinebunt proportionem laterum duplicatam, eritque AOO ad DHR in proportione duplicata DO ad DH. Et quia Priſmata ſuper eas erecta obtinent eandem baſium proportionem, erit itaq; priſma ABDO ad priſma RTD in duplicata ratione lateris DO ad DH. Sit ergo datã proportio, ſecundùm quam Priſma abſcindendum eſt 4. ad 2. diuidaturque DO in quatuor partes, Interque primã partẽ DC, & totã quatuor partiũ inueniatur media proportionalis OH; agaturque per DH planum RHT, & erit factũ, quod imperatum fuerat.



Probatur. Nam DO ad DC habet proportionem duplicatam DO, & DH; ideoque ex 21. lib. 6. Cor. baſis DOA ad baſim DHR habebit proportionem, quam OO ad DC: ſed Priſma QBOAD habet eandem proportionem, quam baſis ad baſim ad priſma partiale TIHRD: Ergo priſma ASOQO erit ad priſma TIHRO vt DO ad DC.

THEOR. I. PROPOS. XLIII.

** Conum priſmaticum iuxta datam proportionem per parallelum planum baſi reſecare.*

DEbeat reſecari conus priſmaticus AFEO in partes iuxta datam proportionem RA ad GR; ita vt ſit totus ad ſuam partem, nempe, vt 3. ad 1. Inueniatur media proportionalis inter RA, & GR, & ſit TR id RA normali ad baſim ED, perque T agatur planum HS, parallelum baſi coni OR. Nam totus conus ABFO ſe habebit ad conum HSAF, vt AR ad RG, nempe, vt 3. ad 1. vnde compara AHSO ſe habebit ad compartem, vt 2. ad 1.

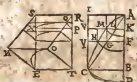


Probatur. Nam omnia priſmata in cono FBED inſcriptibilia erunt ex præc, tali modo truncata, vt totum ſingulorum ſit ad ſuam partem, vt 3. ad 1. cumque hęc omni poſſibili multiplicatione aucta, & multiplicata æquent ipſum conum. Etiam ipſe conus priſmaticus ABFO erit ad ſuam partem HSEF, vt 3. ad 1.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

** Conoidem parabolicum circulare, vel quadriforme in partes deſtinatas parallelo ductu baſi ſecare.*

CVm conoides parabolicum quadriforme æquetur priſmati eiuſdem baſis, quod priſma ſit eleuatum ad eandem altitudinem ac conoides, & conoides quoque parabolicum circulare ex prop. 35. Tract. 34. par. 2. ſit æquale cono priſmatico, cuius baſis circularis ſit æqualis circulari baſi conoidis, & altitudo altitudini, ſingulę quoque partes priſmatis ſingulis partibus conoidis quadriformis parallelo baſi plano detruncatis, & ſic partes parallelo ductu baſi pariter detruncatę conoidis circularis, & coni priſmatici æquentur. Hinc eſt, quod dato V. g. conoide circulari CMABO, ſi fiat conus priſmaticus OETSR eiuſdem baſis, & altitudinis, & diuidatur iuxta præcedentẽ plano XQP, & ad eandẽ eleuationem fiat diuiſio Me in conoide parabolico AMCAD parallelo baſi CBD, quod conoides AMCAD erit diuiſum iuxta proportionem datam.



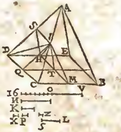
Probatur RSPQX portio coni priſmatici eſt ad RSOET totum in proportione data, ſed ex dictis MAE portio conoidis æquat portionem coni priſmatici RSPQX, & conoides totum AMCBD totum priſma RSOET, ergo etiam MAE portio conoidis erit ad totum AMCBO in proportione data.

PROBL. V. PROP. XLV.

** Pyramidem diuidere quadrangulam proximè plano ſuperficiei laterali parallelo ſecundùm datam rationem.*

HÆc diuiſio difficultatem ſpecialem obtinet, eo quia diuiſio non fiat in partes ſimiles toti: Sit ergo Pyramis ABCOE diuidenda per ductum HT parallelum ſuperficiei BEA. Iam euidens eſt partem DSHMC, non eſſe ſimilem pyramidi: Nam conſtabit ex IMTCQ pyramide ſimili toti, & ex priſmate

mate DQTSHI eiuſdem altitudinis ac pyramis MQI, quod diuiſum plano IHD conſtituet pyramidem HQTDI eiuſdem altitudinis, quę pyramides inuicem ſe habebunt ex prop. 24. Tr. 34. p. 1. vt baſes MQ ad HQ; baſes autem ſe habent inuicem ex prop. 1. lib 6. cùm ſint eiuſdem altitudinis CM vt latera CQ ad QD ideſt CM ad MB ob baſium ſimilitudinem, vt colligitur ex prop 15. l. 6. Ideoque ſi addatur ei pyramidi DSIM quantitas illa DSHI, qua excedit priſma ID ipſam pyramidem DHIQT, quæ eſt (cum ſit pyramis quadrata dupla triangularis) $\frac{2}{3}$ ex prop. 24. Tract. 34. ideoque MQI pyramis habebit proportionem ad priſma STID, quam CQ ad QD, vel CM ad MB, & ad $\frac{2}{3}$ ampliùs ex propoſ. 19. Tract. 17. V.g. ſi ſit pyramis ad pyramidem, vt 2. ad 3. erit pyramidis proportio ad priſma, vt 2. ad 4. $\frac{2}{3}$; ſi ſit, vt 1. ad 2. erit ad priſma, vt 2. ad 3. & cęt.



Sit ergo data ratio, iuxta quam oporteat pyramidem BACDE diuidere plano alicui planitiei lateralium parallelo, V.g. planitiei ipſi BEA plano parallelo SIHM, ita vt pars maior ABE SIHM ſit 11. minor ſit 5. Addantur 5. & 11. & ſint 16. nempe ratio 16. ad 5. totius pyramidis ad partem abſcindendam. Accipiatur deinde linea V 16. ęqualis lineę BC, quæ ponatur 16. & L ſit 5. Eligatur deinde fortuitò linea minor, quam L, quæcumque P, interque P, & 16. duę mediæ proportionales inueniantur N, & K, ex prop. 3. Tract. 15. Sitque N immediata, & ſecunda proportionalis poſt 16 V. Fiat deinde ex prop. 15. lib. 6., N ad exceſſum OV lineę V 16. Sic P ad aliud, & inueniatur X, cui deinde addantur dimidium Z ipſius X, & videatur, ſi omnes ſimul P, X, Z tamquam vna æquent lineam L 5. ſi æquant benè res ſe habet, ſi non æquāt; ſed ſuperent linea P accipienda erit minor adhuc, & iteranda operatio, donec tres P, X, Z ęquent L 5. ſaltem proximè, & tunc dicu, quod ſi longitudo M transferatur in BC, & ſit MC, & per punctum M agatur planum MS IH parallelum plano BEA, hoc planum abſcindere portionem MSID; nempe pyramidem, & priſma tale, quod ſe habeat ad pyramidem totam BACDE, vt 5. ad 16. & compartem, 5. ad 11.

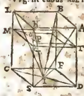
* Probatur. Pyramis tota BACDE eſt ad ſuam partem pyramidem ſimilem MIQTC in proportione homologorum laterum triplicata BC ad MC ex pr. 23. Tract. 34. pręced. ſed proportio triplicata BC ad MC eſt lineæ 16. V æqualis ex hypotheſi ipſi BC ad P ſiquidem eſt in triplicata 16. V ad N ex effectione. Ergo pyramis maior BACDE ad partem ſuam pyramidem ſibi ſimilem eſt, vt 16. V, vel BC ad P. Eſt autem P ad X, vt N ad OV, ſc. MC ad MB ex effectione, vel CQ ad QD ex propoſ 15. lib. 6. ideſt ex dictis, vt MIQ pyramis ad pyramidem TID quæ eſt $\frac{2}{3}$ priſmatis, & ideo ad priſma, vt P ad X, & ad Z dimidium ipſius ſicut pyramis MIQ eſt ad pyramidem TID, & ad reſiduum ex priſmate, quod æquat dimidium pyramidis. Itaque DAB tota pyramis eſt ad pyramidem QIN partem, vt V 16. ad P. Pyramis verò QIM pars eſt ad compartem QHI, vt QC ad QD, ideoque, vt CM ad MB, & vt P ad X; ergo ex *æquo* DAB tota pyramis erit ad pyramidem partem QHI, vt 16. V ad X, ideoque *inuertendo* X ad 16. V, vt QIH pyramis compars ad totam pyramidem DBA, itaque QHI ad DBA eſt, vt X ad 16. V, & QMI pyramis eſt ad pyramidem eandem DBA, vt P ad 16 V. Ergo ex 25. propoſ. l. 5. prima quantitas QHI cum quinta QMI pyramides partiales erit ad ſecundam DAB pyramidem totam, vt tertia X cum ſexta P ad quartam 16. V. Rurſus pyramis QIM ad QHI, eſt vt P ad X, ergo *componendo* QMI cum QHI ad QHI, vt P cum X ad X, & QI ad DHIS eſt, vt X ad Z, quare ex *æquo* pyramides QMI, & QHI ad DHSI pyramidem erunt P, & X ad Z.

Sunt autem duæ pyramides DIM ad totam DAB, vt X, P ad 16. V, ideo *conuertendo* DAB erit ad DIM, vt 16. V ad X, & P, at DIM duæ pyramides ſunt ad pyramidem DSIH, vt X, P ad Z, ergo ex *æquo* tota DAB ad DISH pyramidem partialem erit, vt 16. V ad Z, ideo *inuertendo* pyramis DISH ad totū DAB, vt Z ad 16. V. At DIM duæ pyramides ſunt ad totam DAB, vt X, P ad V 16. ergo ex 25. l. 6. DSIH cum DIM prima cum quinta erunt ad ſecundam DAB totam pyramidem, vt P, X tertia cum Z ſexta ad quartam 16. V, ſed hæ tres P, X, Z æquant 5 L, ergo tres pyramides DHSI, QHI, & QMI, ideſt tota quantitas DMSI erit ad totam pyramidem, vt 5 L ad 16. V, ideſt, vt 5. ad 16. quare *diuidendo* erit pars DSIM ad compartem SIMHEBA, vt 5. ad 11. vel *conuertendo* 5. ad 11. vt SIMHEBA ad DSIM.

COROLLARIVM I.

* Hinc colligas quomodo cubum vacuatum pyramide proximè, & tentando diuidas per planum baſi parallelum, cui incidit vertex pyramidis in partes deſideratas.

V.g. ſit cubus ABLHDC, cui deficit pyramis ABLHI. Iam vides conſtare quatuor pyramidibus æqualibus, vt LHSCI, vel AHDIS, & cæt. quæ per planum TM parallelum lateri plano ſic diuidendæ ſunt, ſingulę verò plano MOPQ aliis partialibus æquale. Cum ergo ſit eadem proportio partium



quæ multiplicium ex propoſ. 18. lib. 5. ſi aliqua ex illis diuidatur E.g. LHISC iuxta pręcedentem doctrinam diuidendo latus LC in M, & per punctum M agendo planum TM omnes quatuor æquales, ſimileſque pyramides ſub eadem proportione erunt diuiſæ.

COROLLARIVM II.

* Item colligitur quomodo diuidatur cylindrus BCDEFM vacuatus cono IMC per planū HT: Cū enim talis cylindrus BCDLE poſſit diuidi per planities ductas ad centrum I in pyramides ęquales, & ſimiles inuicem omni poſſibili numeroſitate multiplicatas, vt eſt MCLEI quadrangularium baſium LBMC, ſequitur, vt quælibet modo prædicto plano MT diuidi poſſit

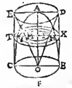


poſſit ſecundum rationem exoptatam: Quare, & omnes erunt ſimiliter diuiſæ per HT, eum para in qualibet æqualis alteri pyramidis parti debeat habere eandem rationem ad totum æquale alteri toti ex 17.lib.5. Elem. Quare etiam totus cylindrus ECOLE vacuus cono BIC ſimiliter erit diuiſus.

PROBL. VI. PROPOS. XLVI.

* *Sphæram, ſphæroidemque etiam ſi quadriforme proximè ſaltem in partes deſtinatas ſecare.*

SIt ſemiſphæra, vel ſemiſphæroides BAFC, & illi circumſcriptus ſit cylindrus OEDFC, cui fuerit ablatus conus DOE. Iam certum eſt ex prop. 39. tract. 34. part. 2. totum ſemiſphæroidem, vel hemiſphęrium æquari cylindro OEBC, cui ablatus ſit conus EOD, ſingulaſq; partes hæmiſphęrij HAI, vel hemiſphęroidis plano XF detruncatas V.g. IAH ęquali ſingulis eiuſdē cylindri ſegmentis vacuatis ſegmentis ijſdem coni, ſcilicet portionibus MTEYXD. Si ergo à cylindro DECB auferatur pars DT ſecundum proportionem datam agendo planū XF per T punctum parallelū baſi CFB ex prop. 45. pręc. obtinebimus partes æquales iſtis cylindricis partibus hæmiſphæræ, vel hemiſphæroidis. Quare dicent ad inuicem eandem proportionem, & ad totum, eritque M^T EYXD cylindri concaui portio ad EDBC cylindrum, vel ad compartem BXFO M^T C; quàm æqualis portio hemiſphæræ, vel hæmiſphæroidis HAI ad totum hemiſphęrium, vel hemiſphęroidem CAB æqualem toti cylindro EDCFBO, vel ad compartem IHBC æqualem comparti cylindri excauati TMCOYXB.



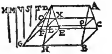
Eadem erit oſtenſio de hemiſphęra, vt hemiſphęroide quadriformi, eum idem de ea oſtenſum ſit propoſ. 50. Tract. anteced.

THEOR. II. PROP. XLVII.

* *Priſma ſimul, & Pyramidem idem corpus efficientia in partes datas tentando abſcindere parallelo ductu ipſi baſi.*

SIt ACBDHE priſma, & pyramis DHEFG æquealta, ipſiuſque protenſis ſuperficiebus AG, AF, SB operta, quę duo corpora, vtpote vnum conficientia parallelo ductu OQ baſi in partes datas ſint ſecanda: Hoc quidem poteſt fieri; ſed tentando ob diuerſam proportionem, quam toti dicunt pyramidis fruſtum, & fruſtum priſmatis; hoc enim dicit ad ſuum totum laterum proportionem duplicatam; Pyramis verò partialis ad totam triplicatam. Sit ergo data proportio M ad N, iuxta quam ita corpus totum AOFF ſit ad ſuam partem ADOQ, vt M ad N conſtituendum.

Aſſumatur aliqua minor, quàm N, & ſit T, interq; T, & M duæ medię interponantur V, & S, & videatur an S cum linea T; faciat quantitatem æqualem datæ quantitati N: ſi facit inuentum erit, quod quęritur ad ſectionem efficiendam; at ſi non æqualis, accipiatur adhuc alia, vel minor, vel maior, prout deficere ab N, vel excreſcere ſuper N inuenta fuerit, donec ſit S, & T, ſaltem proximè ipſi N ęqualis. Fiat deinde ex prop. 15. l. 6. vt M ad V, ſic AB, ad AQ, vel DH æqualis ad LD, & per Q ducatur planum baſi æquidiſtans, & detruncabitur ADQO corpus, cui erit in proportione totum ADBF, vt M ad N.



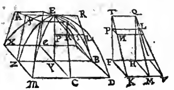
Modo oſtendo corpus AF eſſe ſectum iuxta proportionem datam. Nam priſma ADBCHE proportione duplicata lateris AB ad latus AQ reſpicit priſma AQOLX; ſed M ad S eſt proportio duplicata M ad V, & M ad V eſt eadem ex effectione proportionis lateris AB ad AQ. Ergo priſma ADBHC, habet eam proportionem ad priſma ADQLX, quam M ad S.

Deinde pyramis DHGFE obtinet proportionem triplicatam lateris HO ad latus LD ad pyramidem DLXG: ſed M ad T obtinet proportionem triplicatam DH ad DL eandem, quæ AB ad AQ: Ergo pyramis DHOFE ad pyramidem LODX obtinet proportionem M lineæ ad T. Quadere ſi coniungantur ſimul ex 19. prop. Tract 17. priſma totum, & pyramis totalis DHF, & fiat totū AOBF, habebūt ad alterā ex partibus factis V.g. priſma partiale ALXOQ eandem propprtionem, & *conuertendo* ALXDQ ad AEOB priſma, & DEG pyramidem eandem proportionem, quam dicebat priùs ad illas ſeparatas quantitates: Quare cum iam ADFBCG ſit quid totum ad illud DQALX priſma, & OLO pyramidem partiales quātitates vnitas dicent eaodem proportionem ex prop. 19. Tract. 27. quam priùs disiunctę dicebant ſe. eam, quam M ad S ad T; ſcilicet eam, quæ M ad N, quę æquat quantitates S, & T ſimul ſumptas.

THEOR. III. PROPOS. XLVIII.

* *A conoide Hyperbolico partem abſcindere experiendo iuxta proportionem datam.*

ADhibeatur fig. prop. 56. pręc. Tract. Dictum enim eſt, priſma KQ, & pyramidem VHQ æquari quartę parti quadriformis conoidis hyperbolici, & ſingulas partes priſmatis, & pyramidis ęquealtas ſingulis partibus æquealt s conoidis hyperbolici per plani baſi parallelo ductu abſciſſas. Si ergo ad eandem altitudinem EP, & TP abſcinda-



tur

tur portio IPE à conoide hyperbolico æquabitur parti priſmatis,& pyramidis æqualtę. Æqualiom verò eſt eadem proportio. Quadere ita erit QTFV corpus pyramide, priſmateq; conſtans ad partem ſuam NTL priſmate minori pariter conſtans,atque pyramide, ideſt in proportione duplicata quoad priſma,triplicataque quoad pyramidem lateris FT, vel YE æqualis altitudo ad TP, vel EP æqualia ſegmeota altitudinum, ac conoidea hyperbolicum EEY ad ſui partem PIE. Quare diuiſa altitudine YE iuxta pręc. In P dabit eodem modo partem in data proportione. Cumq; eadem proportio exiſtat vnius partis ad vnam,quam quatuor ad quatuor partet,& totum conoidem extenſo plano eodem pacto ſecari, cuius quarta pars tali modo ſecatur.

COROLLARIVM.

*IDem autē aſſeres de Conoide hyperbolico circulari ex propoſ. enim 33. Tract 34. æquatur fruſto coni, cui demptus fuerit cylindrus ęqueal tus, & ſingulæ eius conoidis partes ſingulis partibus huius fruſti per planum baſi parallelū in æquali eleuatione abſciſſis: Fruſtum verò tale conicum æquatur fruſto pyramidum, priſmatumque ex contex. prop. 13. Tract. 34. p. 1. æqualem baſim, & æqualem eleuationem obtinentium, ac fruſtum coni cylindro vacui, & ſingulæ illius partes æquales ſingulis partibus illius ſimiliter baſes parallelas baſi habentes, vt faciliter ab ea propoſitione deduci poteſt, cum probauerimus in ea omnes baſes baſi parallelas in fruſto pyramidis circulo coni ad eandem eleuationem ſecanti æquari: Quadere eadem praxi vtemur, cum etiam in conoide hyperbolico circulari partes æquentur partibus fruſti pyramidum, priſmatumque, ac in quadriformi: ſufficit iniſſe.

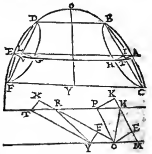
PROBL. VII. PROPOS. XLIX.

A Conoide hyperbolico, ſeu parabolico, ſeu ſphæroide imperatam partem auferre à dato puncto alteri in eodem corpore æqualem.

*SIt DGFE fruſtum conoidis parabolici,vel hyperbolici, ſeu etiam ſphæroidis FOOBC. Sitque detruncandum à dato puncto B, aliud fruſtum huic æquale.

Secetur conoides, ſeu ſphæroides plano BO, quod datum punctum B connectat cum extremo diametri ellipſis ſecantis DGF,& ducatur planū per centrum L ellipſis DGF; quod ſit EGHA parallelū ipſi plano OB. Agaturque aliud planum CF huic pariter parallelum per aliud diametri extremum F, eruntque tria plana æquali interuallo diſſita, cùm ſint ęqualia OL,& LF, vtpote ſemiaxes. Deinde ducatur per punctum B, & per axem OY planum FDOBC, quod exprimet ſectionem ex generatione, & huic plano per punctum E, & C, vbi ſe ſecat cum plano DB, & FC in punctis B, & C in ſuperficie conoidis ducatur planum BHC plano FDOBC normale. Nam hoc erit Ellipſis ex prop. 10. 14 18. Tract. 25. in quocumque corpore ex ſectionibus conicis deducto, & exhibebit BHCA æquale ſegmento DGFE.

Probatur Progr. 1. Quoniam in ſegmento CAHB, ſi quęcumque ducantur plana parallela baſi ſimiles ellipſes ſunt, ac ipſa baſis ex 11. 15. & Cor. prop. 18. Tract. 25. Secundò ſegmenta hæc FGEO, & CHAB baſes conſequuntur altitudinibus reciprocè proportionales. Ergo hic verificabitur prop. 29 part 2. Tract. præced. 34. & inuicem hæc ſegmenta erunt æqualia. Quod autem baſes in iſtis ſegmentis altitudinibus reciprocè ſint proportionales, ſic oſtenditur.



Triangulum EAC, & OFF, quæ inſcribuntur in ſegmentis ſunt æqualia. Ergo, baſes obtinebunt altitudinibus reciprocè proportionales, vt poſtea oſtendam. Altitudo autem AT ad altitudinem VE (normales ſc. ſuper FD, EC baſes ab A,& E cadentes,) eſt vt baſis LO ad baſim IE;ſed baſis LO ad baſim IE planorum triangulorum OFE,&EAC eſt, vt baſis DGF ſegmentorum ſolidorum ad baſim BHC, vt dicam; Ergo hæc ſegmenta obtinent baſes DGF ad BHC, vt altitudo AT ad altitudinem EV reciprocè. Quare ſegmenta OFFG, & BACH ſolida habentia omnes baſes axi parallelas ſimiles erunt æqualia ex præc. prop. 39. Tract 34.

Prog. 2. Duo itaque remanent oſtendenda triangula æqualia obtinere baſes altitudinibus reciprocè proportionales, & quod ſit baſis LO linea ad lineam EI, vt baſis plana OGF ad baſim planam BHC.

Probatur illud quod eſt primo propoſitum de triangulis.

Sint triangula in figura ſeorſim exhibita MON, & ORY æqualis altitudinis, vtpote inter parallelas TN, & YM, & baſis OY, & OM, ideo inuicem æqualia ex pr. 40. l. 1. Cor. Ducantur parallelæ TY,& OP vni laterum OX, & alteri MK. Parallelogramma TRYO, & PONM ſunt dupla triangulorum ſuorum ſuper quorum baſes ſunt YOR, & OMN, & ideo inuicem æqualia: Productis deinde OR in X, & MN in K, & ductis normalibus TX,YF, oecoon, & alio triangulo PK, & OE erunt rectangulū TYXF ęquale parallelogrammo YTRO, & PKOE parallelogrammo FNOM ex prop. 40. lib. 1. cùm ſint inter eaſdem parallelas TY, & XO, vel PO, MK, & ſuper eandem baſim TY, & PO. Quia ergo hæc rectangula TXYF, & NOFK obtinent angulos rectos, & ideo æqualea,& ſunt inuicē ęqualia,cum ſint ęqualia æqualibus parallelogrammis ex 10. lib. 6. propter hoc habebunt latera reciprocè proportionalia. Ideoque TY erit ad PO, vt OE ad FY, ſed hæc latera PO,& TI ęquant RO,& NM ex prop. 33. l. 1. baſes, & altitudines triangulorum RYO, & NOM ſunt YE,& OE, ergo reciprocabuntur, & erit TY, vel RO baſis ad PO,vel NM baſim,vt altitudo OE huius ad altitudinem YF alterius.

Progreſſ. 3. Remanet deinde oſtendendum, baſes nempe Ellipſes OGF, & BHC dicere eandem proportionem, quam DL linea baſis trianguli ad baſim

baſim ia alterius. Ex pr.21.32 43.Tr.30. oſtenſę ſunt æquales AI,& LE,& ex pr.10.14.18.tr.25. planum EGHA trāſiens per axē EA oſtenſum eſt ellipſis: Quare ex 6. tr.24. erit rectangulum AI, & IE ad rectangulum AL,& LE; vt quadratum HI ad quadratū LG,quia ſe. in ellipſi AHGE reperiuntur, quę tranſit per axem EA,& facit in ellipſibus normalibus ſibi ſectiones LG, & HI ad ſuperficiem conoidis, cuius ſectio eſt; & ideo ad eius ambitum pertingentes.

Cum itaque rectangulum AI, & IX æquetur rectangulo AL, & LX ob æqualia latera AI ipſi LA, & AL ipſi IE. Etiam quadrata ex IH,& LG reſtabunt ęqualia. Quamobrem etiam latera HI, & LG erunt æqualia. Cum ergo ſit ex prop.26.tract.30. ellipſis DGF ad ellipſim AHC,vt rectangulum ex AI,IH; ad rectangulū LD,LG:rectangula verò iſta ſint eiuſdem altitudinis IH,& LG ex oſtēſis,& ideo ſint inuicem,vt DL linea ad XI lineam ſequitur,vt etiam ellipſis DGF ſit ad ellipſim AHC,vt linea DL ad lineā DI, quæ eſt eadem ob triangula XAI, & DEL æqualia reciprocè altitudinis TA ad altitudinem EV.

Ideo que ſegmenta conicorum corporum habentia baſes altitudinibus reciprocè proportionales erunt æqualia.

EXPENSIO IV.

De corporum proportionali tranformatione.

MOdo de tranſformatione inncta, cum augmento, vel diminutione corporum agendum eſt, & docere modū quo aliquid dato corpori detrahatur, aut addatur, & tamen eadem figura maneat; ſicut,& reſiduum quamcumq; figuram inducat.

PROBL. I. PROPOS. L.

Ex maiori cubo detrahere minorem, reſiduumque cubum æqualem exhibere.

SVper baſim NT maioris cubi VT extruatur parallelepipedum IT ex prop.14.h. cubo X minori æquale. Et ex latere cubi maioris abſcindatur portio NH æqualis altitudini NI parallelepipedi conſtructi: perque punctum H ducatur planum HP, & erit reſiduum VP parallelepipedum, quod in cubum transformabitur ex prop.14.h.



Probatur operatio. Nam cum parallelepipedum NP, ſit æquale parallelepipedo IT ob æqualem baſim,& altitudinem; ex prop.40. h.Tract. A cubo TV detractus erit cubus exhibitus X mediante ablatione parallelepipedi NP. Vnde reſiduum redactum in cubum lateotum præſtabit.

COROLLARIVM.

IDem valet de quacumque alia figura, ſi redigatur in parallelepipedum,& ei detrahatur parallelepipedum dato corpori æquale, vel quæ pars magis placuerit. Nam reſiduum iterum per ea, quę diximus in Expenſ. ant. in figuram propoſitam redactum, & in priorem formam reſtitutum exhibebit quamlibet figuram propoſitā diminutā.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Addere cubo alium cubum, ita quod cubus remaneat.

NOn aliter,hęc propoſ. operi conſignabitur, ac antecedens. Extruatur itaque ſuper baſim NT cubi TV parallelepipedū ęquale dato cubo X, & cubus erit adauctus quantitate cubi X & redactus in parallelepipedum LV. Fiat itaque huic parallelepipedo cubus æqualis ex pr 14. h. & iam conſequemur cubum duobus cubis æqualem cubo VT,& cubo X. Patet prop. ex prec. oſtenſione.

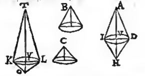
COROLLARIVM.

DEducitur quoque ex hac prop. quod ſi quodcumque corpus datum in cubum transformetur ex præcedenti expenſione, & huic cubo quæcumque data quantitas addatur, & deinde iterum in priſtinam figuram reformetur, corpus reſtitutum figura quidem priori potietur, at magnitudine auctius erit, & maiori mole conſtabit.

PROBL. III. PROP. LII.

Duos, aut plures conos rectos in vnicum conum reuocare. Vnicumque conum in plures conos diſtribuere.

SInt plures coni ADI,B,& C;qui debeant in vnicum componi. Redigatur ex 26.h. B ad eandē baſim coni DAI,& ſit DVI; componanturq; coni in Rhombum conicū ADIH: deinde fiat conus LTK obtinens baſim LYK compoſitorum DI, & altitudinem YT ipſorū HA,& iſte æquabitur ex 15. Tr.34. Rhombo OAIH. Deinde redigatur conus C ad eadem baſim DVI,vel KYL, & vt iam fecimus,iterū fiat Rhombus ſolidus LTKO. Poſtea conus æqualis altitudinis, & baſis Rhombo LTKO extolletur, iſteque conus tribus conis iam erit æqualis. Nam ex prop.15. æquat Rhombum LTKO; ille verò æquat parte quidem LOK conum C, parte verò LTK Rhombum DAIH; nempe DAI, & B.



Contrario verò modo fiet ſi de ablatione agatur. Nam conos V.g. LTK in duos conos reuocabitur, faciendo conum B, qui auferendus eſt æqualis baſis baſi LK coni LTK,& altitudo quę V.g.erit VH auferatur ab altitudine YT, & reliquetur VA, fiat itaque conus DAI altitudinis VA, & baſis LK; ideſt æqualis DI, & erit conus DAI reſiduus à cono LTK ablato cono B.

COROLLARIVM.

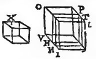
EAdem verò, quæ fiunt de conis poſſunt fieri de pyramidibus rectis, & quia licet prop.15. Tract.34. non loquatur de pyramidibus; ratio tamen poteſt ad illas extendi, eadem enim prorſus eſt, & efficaciter eodem pacto conuincit. Si verò

rò dentur pyramides, vel coni non recti ad rectos redigentur æquales, ſi fiant eiuſdem altitudinis ex prop. 4. Tract. 34. p. 2.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Cylindro, vel parallelepipedo, vel priſmati cylindros parallelepipeda, vel priſmata minora addere, vel auferre.

AD iſtam propoſ. operi demandandam ſufficit redigere parallelepipednm X, vel cylindrũ,



qui auferendus eſt, vel addendus ad eandem baſim NT ex prop. 25. h. & deinde, vel alteri PV, cui facienda eſt additio coniungere IN, vel auferre NH æqualem altitudinem inuenti cylindri altitudini ab eo cylindro, vel parallelepipedo, cui auferendum eſt, vel addendum, & VOIL erit totum ex additione reſultans ſi facta eſt additio, quod ſi facta fuerit ſubductio, HVOP eſt reſiduũ parallelepipedum ex VNTO deducto parallelepipedo HT æquali dato X.

PROBL. V. PROPOS. LIV.

Plures ſphæras in vnam ſphæram colligere, vel vnicam in plures diuidere. Idem quoque præſtare de ſphæroide, deque conoide elliptico, ſeu parabolico.

CVm oſtenderimus ſuprà, quibus conis iſta corpora æquentur: de ſphæra quidem pr. 43. de ſphęroide pr. 36. de conoide parabolico pr. 34. Tract. 34. Si exhibitum quodlibet ex iſtis corporibus ſphæricis, vel conoidalibus in conos æquales redigamus, ſicut, & corpora ſphærica, vel conoidalia, quę auferẽda ſunt, vel addenda, & ex pr. 52. h. conico corpori, cui facienda eſt additio, addamus alios conos æquales illis corporibus, quæ addenda ſunt, & deinde conum ſic adauctum in ſphæram, vel ſphęroidem, vel conoidem, prout priùs reſtituamus; habebimus intentum. Et idem de ablatione præſtandum erit.

COROLLARIVM.

HInc facilè addiſces etiã alia adaugere, etiam ſi, & intus excauata ſint; dummodo aliqua regularitate potiantur, vt ea de quibus ſupra egimus. Nam aut ad conos, aut ad pyramides, ſeu priſmata redigere poterimus, & ex prop. 52. h. ita augere, vel minuere, & poſtea in primum ſtatum reſtituere.

THEOR. I. PROPOS. LV.

Omnia corpora ſimilia triplicatam habent laterum, ſeu diametrorum proportionem ſicut duplicatam baſium.

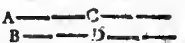
PRobatur. Nam omia corpora ſimilia cylindris ſimilibus, vel pyramidibus, vel priſmatibus inſcribi poſſunt, quæ triplicatam laterum proportionem dicunt ex propoſitionibus paſſim poſitis, vt pr. 9. tr. 34 p. 1. & 17. & 23. & ex prop. 9. p. 2. h. & etiam ex 1. Expenſ. vbi corpora multa ſimilia deſcripſimus, ſimiles baſes deſcribendo, ſuper quas cylindracea ſimilia erigi poſſunt. Ergo etiam ipſa corpora quæcomque ex deſcriptis triplicatam obtinebunt laterum, vel diametrorum, vel axium, vel ambituum proportionem. & eodem modo probabitur, quod duplicatam baſium conſequantur proportionem.

COROLLARIVM.

* EX præc. colligitur ſphæroidem, conoidemque hyperbolicum, & parabolicum, tàm baſis circularis, quàm ellipticæ, tum etiam quadratæ, ſeu rectangulæ dũmodo ſint ſimilia corpora eſſe in triplicata ratione diametrorũ; ne dum ob rationem vniuerſalem in propoſ. tactam, ſed etiam, quia omnia iſta genera corporum conis inſcriptis, quæ eorum baſibus inixi erant, & eundem diametrum pro diametro ſuæ baſis obtinebant, & eandẽ altitudinẽ, eis oſtenſa ſunt æqualia, vt prop. 43. 34. 36. Tract. 34. Illa verò triplicatam diametrorum, ſeu altitudinum, cum ſint ſimilia, proportionem obtinent. Quare etiam corpora conoidalia, quæ eis ſunt æqualia. Idem debemus fateri de conis priſmaticis ſimilibus, quia coni eiuſdem altitudinis, & baſis ſeſquialter oſtenſus eſt: ſic de conis ellipticam baſim obtinentibus ſimilibus, cum ſint ęquales conis eandem altitudinem, & æqualem baſim obtinentibus. Vnde erunt in triplicata proportione altitudinum, vt coni ipſis æquales; & ita doctrinã, vel generalem, vel ſpecialem applicabis cuicumque corpori ſimili; quod ſit ad aliud ſimile in triplicata ratione laterum, aut ſaltem in duplicata baſium.

PROBL. VI. PROPOS. LVI.

* *Datum corpus eorum, quæ triplicatam laterum, vel axium, aut diametrorum, vel altitudinum proportionem obtinens iuxta datam proportionem linearum in aliud ſimile corpus augere.*



SIt datum aliquod corpus, cuius diameter, vel axis, vel latus, vel altitudo A, & debeat aliud corpus conſtitui, & detur linea B, & vt A ad B; ita ſit faciẽdũ corpus aliquod ſimile corpori ex A; Inter A, & B duæ mediæ proportionales proiiciantur C, & D, vt ſint in continua proportione A ad C, & C ad D, & D ad B ex prop. 3. Tract. 15. & ex linea C fiat ex dictis ex Expenſione 1. corpus ſimile alteri dato &, ſimiliter poſitũ vtendo illa eodem munere, quo fungitur linea A, & erit corpus ex linea C deſcriptum, vt A ad B.

Probatur. Nam A ad B triplicatam obtinet proportionem eius, quam conſequitur A ad C, ſed corpus erectum ſuper C ex præced. conſequitur proportionem triplicatam eius, qua reſpicit A lineam C. Ergo, vt A ad B, ſic corpus ex A deſcriptum ad corpus ſimile, & ſimiliter poſitum ex C deſcriptum.

PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. LVII.

* *Datum corpus eorum, quæ duplicatam proportionem baſium conſequuntur, iuxta datam proportione baſis ad baſim adaugere.*

SIt data baſis A, & corpus ſuper illam erectum, & ſuperficies B: Sitque faciendum corpus aliud, quod ſe habeat ad A corpus, vt A ad B. Ex pr. 33. tract. 29. inter baſes A, & B baſis reperiatur media proportionalis C, & ſuper illam erigatur corpus ſimile, ſimiliterque poſitum, ac corpus datum, & erit operi demandatum, quod pręcipitur.

Probatur. Quia corpora ſimilia duplicatam habent baſium proportionem ex prop. 55. h. ſed baſis A ad B eſt duplicata proportio eius, quæ eſt A ad C. Ergo vt baſis A ad baſim B, ſic eſt corpus ex A ad corpus ex C ædificatum.

PROBL. VIII. PROPOS. LVIII.

* *Duobus datis corporibus tertium proportionale inuenire.*

DEntur duo corpora, quæ ſi non ſint ſimilia in ſimilem figuram redigantur V. g. parallelepipeda, vt docuimus: quorum diametri, vel axes, vel latera, vel altitudines ſint A, & B, & duabus A, & B tertia proportionalis reperiatur C, & illa eodem munere fungatur, & conſtituat aliquod corpus prędictis ſimile, dico, quod duobus A, & B eſt tertium corpus proportionale C, quod ſi hoc C alterius figuræ deſideretur per ea, quę diximus Expenſ. a. h. ad aliam figuram reuocari poterit.

Probatur. Nam corpora ſimilia ſunt in triplicata ratione laterum ſuorum: Quare cum ſit A ad B, vt B ad C ex effectione: Etiam erit triplicata proportio lateris A ad triplicatam rationem lateris B, vt triplicata ratio lateris B ad triplicatā rationem lateris C: Triplicatæ verò rationes, quæ continuè procedunt ex prop. 55. ſunt corporum ex A, B, & C conſtructorum ſimilium.

PROBL. IX. PROPOS. LIX.

* *Duobus datis corporibus corpus medium proportionale inuenire.*

SIt datum corpus ex A, & corpus ex B, quorum latera, vel axes, vel diametrij, vel altitudines ſint A, & B, & inter eas media inueniatur D, & ex ea eodem munere fungente fiat corpus, ſimile exhibitis duobus ſimilibus; quod dico eſſe medium proportionale inter corpora exhibita.

Si verò corpora non eſſent ſimilia oportet ea redigere ad eandem ſimilitudinem cōuertendo ambo data in parallelepipeda, aut aliam ſimilē figurā.

Probatur eadem ratione. Nam corporum eſt triplicata proportio laterum, aut axium, aut diametrorum, aut altitudinum, cumque ſit A ad C vt C ad D, etiam triplicata ratio A ad C erit eadem, quæ triplicata ratio C ad D, quæ eſt illa ratio, quam inuicem corpora conſequuntur.

PROBL. X. PROPOS. LX.

* *Tribus corporibus datis quartum corpus proportionale reperire.*

SIt datum corpus A, & corpus B, & C, & oportet reperire corpus D, ita vt ſit A ad B, vt C ad D. Reperiatur lateribus corporis A, & B, & C, vel axibus, aut altitudinibus, vel diametris; quarta proportionalis D, & ſuper eam pro eodem officio deſeruiente axis, aut lateris, & cęt. ædificetur corpus ſimile corpori C, & obtinebimus intentum.

Ratio eſt eadem præced. propoſ. & requiritur tantùm, vt diximus de ſuperficiebus, quòd duo corpora A, & B ſint inuicem ſimilia licet diſſimilia cum tertio C, quod tamen aſſimilabitur, tum lateribus, tum poſitione quarto reperiendo D.

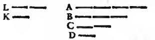
PROBL. XV. PROPOS. LXI.

* *Seriem continuam proportionalium corporum ſimilium, & diſſimilium inuenire iuxta datam proportionem.*

SIt data proportio A ad D, & oporteat reperire continuam ſeriem corporum in ea proportione, quæ eſt A ad D. Inter A, & D duæ mediæ proportionales interſerantur B, & C, ita quod A, B, C, D ſint continuè proportionales, & fiat continua progreſſio linearum A ad B iuxta dicta pr. a. Tr. 15. ſuperque illas lineas vtendo illis prout corpora cōſtituēda repoſcent, vel diametris, vel axibus, vel altitudinibus, vel lateribus corpora ſimilia ędificētur, & ſimiliter poſita, & aſſero illam ſeriem corporum obtinere proportionem continuam, quæ eſt A ad D.

Probatur. Corpus A ad corpus B proportionem obtinet triplicatā eius, quæ eſt A ad B: ſed A ad D proportio eſt triplicata ipſius A ad B. Ergo, vt A ad D, ſic eſt corpus A ad corpus B, ſed corpus B ad corpus C obtinet proportionem triplicatam lateris B ad latus C; Latus verò B ad C eſt, vt A ad B: latus autem A ad B eſt triplicata eius proportionis, quam habet A ad D. Ergo etiam corpus B ad corpus C proportionem obtinet, quam A ad D, & ſic de alijs.

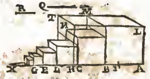
Quod, ſi libeat ſeriem à dato corpore incipere, cuius axis, ſeu latus, ſeu altitudo, vel diameter notus ſit, repertis inter A, & D duabus proportionalibus B, & C fiat A ad B, ſic latus V. g. L dati corporis, ad aliud, & reperiatur K: fiatque ſeries continua linearum L ad K, ſuper quas corpora ſimilia conſtruantur vtendo illis pro lateribus, pro vt ponitur linea primo corpori deſeruiēs. Quod ſi requirantur corpora non ſimilia quęcumque elegeris in alia corpora æqualia quidem; ſed diſſimilia poteris permutare, & ſic obtinebis ſeriem proportionalium corporum continuam; ſed diſſimilem.



PROBL. XII. PROP. LXII.

Seriei corporum continua proportione procedentium corpus æquale inuenire, datis duobus lateribus corporum duorum primorum.

DEntur Latera, ſeu etiam axes, aut diametri, aut altitudines duorum corporum primorum in ſerie illa, cui reperiendum ſit corpus æquale, ſintq; hęc latera AB, & BC. Reperiaturq; eis quarta proportionalis LB continua, vel ei æqualis BI, fiatque vt AI differentis ad AB; ſic AB ad aliud, & reperietur HA. Extruatur igitur ſuper AH parallelepipedum æqualis altitudinis primi termini, ſi primus terminus ſit parallelepipedum, vel tale corpus, quod ſe habeat ad primum terminum, vt latus AH ipſius ad AB: hocque corpus erit ſeriei infinitorum terminorum æquale.



Probatur. Nam linea HA eſt æqualis, ex prop. 16. tract.16. toti ſeriei baſium imparium procedentium in triplicata proportione AB ad BC; ſcilicet ſeriei procedentis in ea proportione, quæ eſt AB ad LB: & ideo ſinguli termini illius ſeriei procedentis in proportione AB ad BL, ſunt vt ſolidum AM ad ſolidum BN; Quare ſeries tota AX ſolidorum ſimilium ad AM primum corpus eſt, vt ſeries in ratione AB ad LB ad primum terminum AB cum ſinguli termini ſint in eadem proportione, quare ex Coroll.2. propoſ.19. lib.5. omnia vnius ſeriei erunt ad ſuum primum, vt omnis alterius ad ſuum primum; corpus verò AT ad corpus AM ex effectione eſt, vt latus AH ad latus AB; Latus verò AH ad latus AB eſt, vt ſeries infinita linearum ad lineam AB, cum toti ſeriei in ratione AB ad LB ſit æqualis linea ex effect. Ideoque erit in eadem proportione corpus AT ad corpus AM; qua infinita ſeries corporum ſimilium AX in ratione AB ad LB ad corpus AM; cum ergo AT corpus corpori AM, & infinita ſeries corporum eidem corpori AM eãdem dicant proportionem AH lateris ad AB erunt inuicem æqualia ex prop.9.l.5. quod erat probandum.

PROBL. XIII. PROPOS. LXIII.

Datum corpus in infinitam ſeriem corporum diſtribuere, quod à dato corpore incipiat.

SIt datum aliquod corpus, quod redigatur facilitatis gratia in cubum AM; & datum corpus, quod debet diſtribui minus illo, redigatur in parallelepipedum eiuſdem altitudinis AT, eiuſque baſis ſit etiam eiuſdem altitudinis, ac baſis LM ex propoſ.25.h.

Deinde fiat, vt AH ad AB; ſic AB ad aliud, & inueniatur AI; aſſumatur itaque differentia IB; & inter BI differentiã, & AB duę mediæ proportionales interponantur, quæ ſint Q, B; & deinde inſtituatur ſeries continua proportionalium in ratione AB ad Q, quæ ſit AX, & ex illis ædificentur corpora ſimilia, & ſimiliter poſita, vt AM cubus, & erit ſeries cuborum æqualis parallelepipedo AT.

Probatur. Fecimus AH ad AB, vt AB ad AI. Igitur differentis ea lineæ AB, ab AI erit ſecundus terminus alicuius ſeriei, cui ſit æqualis AH: ſiquidem tunc eſt *conuertendo* AI differentis IB ſecundi termini à primo AB, (ſi IB, vt ſecundus terminus ſumatur) ad primum terminum AB, vt AB ad AH? Quare ex 16. Tract.16. HA æquabit omnes lineas procedentes in proportione AB ad BI: ſed in ratione AB ad BI, ſic procedunt corpora AM, & BN; quia ſcilicet corpus BN ædificatum ex Q habet triplicatam proportionem lineæ Q ad AB, & ideo quam lineę IB ad AB. Quare omnes termini linearum ad primum ſuum terminum erunt, vt omnes termini corporum ad primum corpus ex Cor.2. prop 19. lib.5.

Quapropter etiam AH æqualis toti ſeriei linearum in ratione AB ad BI procedentium erit ad AB vt tota ſeries corporum AM; BN ex Q, & cæt. ad corpus AM, vt autem AH ad AB; ſic eſt AT corpus ex effectione ad AM, ergo erit corpus AT ad corpus AM, vt ſeries corporum ſuper AB, & Q, ſcilicet AM, BN, & cæt. ad idem corpus AM: Erunt ergo corpora æqualia AT, & infinita ſeries corporum ædificatorum ſuper AB, & Q; ſcilicet AM, BN, & cæt. vſque ad X terminum.

EXPENSIO VLTIMA.

De corporum calculatione.

BReuiter nos ab hac tractatione expediemus, ſiquidem eſt potius Coroll. prædictorum, quam quod hic ſit aliquid oſtendendum: Calculare itaque aliquod corpus eſt corpore quodam notæ menſuræ illud comparare, & videre, quam proportionem numeris exprimibilem illi obtineat. Verùm, quia non omnia corpora corporibus ſe accommodant, vt menſura menſurato ſe accommodare debet; niſi ſolùm cubus, vel parallelepipedum cubo, vel parallelepipedo; aliæ verò ſoliditates etiam eiuſdem rationis omnia ſpatia ſolidorum maiorum implere nequeunt, hinc eſt quod parallelepipedum, vel cubus ille ſit, quibus corpora menſurari poſſunt. Vnde labor exortus omnia corpora in parallelepipeda, vel cubos conuertendi, vt menſuris ſubijciantur: Hincque eſt quod corpora omnia non in propria forma; ſed in cubis, vel parallelepipedis, quibus æquiualent dimetiuntur, & ijs rectangulis, vt facilior menſura ſit.

PROBL.

Digitized by Google

PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Cubum, vel parallelepipedum numeris menſurare.

DVo latera baſis cubi menſurentur, & ſint V. g. alterum 25. vnciarum, alterum 33. & ex inde menſuretur altitudo, & ſit 40. Vnciarum. Quia itaque rectangula eam obtinent proportione, quæ ex proportione laterum componitur ex prop. 22. lib. 6. quadratum vnius vnciæ ad rectangulum habens latera alterum 25. alterum 33. vnciarum erit compoſita ex proportione 1. ad 25. & 1. ad 33. Itaque adhibenda eſſet regula, quam tradidimus propoſ. 9. Tract. 9. part. 1. & multiplicandum eſſet 1. per 1. & deinde 33. per 25. vt exiret proportio compoſita rectanguli vnius vnciæ ad rectangulum laterum 25. & 33. vnciarum, ſed quia 1. facit 1. ideo remanet ſola multiplicatio laterum 25. & 33. inuicem, quæ faciunt 825. vncias. Ideoque proportio vnius quadrati vnius vnciæ eſt ad rectangulum datorum laterum 25. & 33. vt 1. ad 825. ſed quia parallelepipeda ſub eadem altitudine conſtituta ſunt inuicem, vt baſes ex 8. prop. Tract. 34. ideo cubus cuius altitudo eſt vncia, & baſis vncia erit ad parallelepipedum, cuius item altitudo vncia eſt, ſed baſis 825. vt baſis 1. reperta ad baſim 825. ſuper quam conſtitutum eſt, ideoque habebimus parallelepipedum conſtans 825. vnciarum. Verùm, quia parallelepipeda eiuſdem baſis ſunt inuicem vt altitudines ex 10. propoſ. Tract. 34. ideo ſolidum vnius vnciæ altitudinis, ſed baſis rectangulæ 825. vnciarum eſt ad ſolidum eiuſdem baſis 825. vnciarum; ſed 40. altitudinis, vt altitudo 1. ad 40. Igitur regula proportionum poterit quæri: ſi altitudo vnius vnciæ dat vncias 825. ſoliditatis, ideſt ſolidum conſtans vncijs 825. quid dabit altitudo 40. quærere oportebit multiplicare 825. per 40. vt prodeat ſolidum, cuius altitudo eſt vnciarum 40. & facta multiplicatione erit ſolidum vnciarum 33000. nec hic opus eſt primum diuidere: quia vnitas diuidens reddit eundem numerum.



PROBL. II. PROP. LXV.

Parallelepipeda obliqua quæcumque menſurare.

QVia parallelepipeda quæcumque baſis quadrangulæ ſunt ad inuicem, vt baſes, ſi ſint æqualis altitudinis, ſiue ea ſint æqualium angulorum, ſiue inæqualium, ſiue baſes ſint ſimiles, ſiue diſſimiles, dummodo ſint æquales capacitate: Capacitate verò illę baſes ęquales ſunt ex 36. lib 1. quæ habent latus æquale alteri, etiam ſi Rhombi, ſiue Rhomboides, & altitudo eadem, hinc eſt, quod debeant latus menſurari, & normalis altitudo cadens ſuper latus menſuratum. Multiplicata enim longitudo lateris eius, ſuper quod cadit normalis illa, cum ipſa faciet ex præcedenti baſim rectangulam æqualem baſi datæ, etiamſi non rectangulæ, quia ſcilicet eſt eiuſdem baſis, & altitudinis, & quia quæcumque parallelepipeda æqualis baſis, & altitudinis ſunt æqualia ex prop. 4. 5. & 6. tract. 34. p. 1. ideo etiamſi parallelepipedum eſſet ſuper baſim obliquè conſtitutum erit æquale alteri eiuſdem baſis, & altitudinis rectè cōſtituto, & ideo huic rectangulo parallelepipedo. Detur itaque parallelepipedum, cuius baſis ſit Rhombus, & menſuretur vnum latus, & ſit 13. vnciarum, deinde altitudo baſis, nempe normalis, quæ ſuper latus menſuratum cadit, & erit 22. vnciarum, & ſimul multiplicentur, & baſis ei erit 286. Poſtea altitudo ipſius parallelepipedi obliqui ſcilicet linea, quæ ſuper Rhombum baſis normaliter cadat, & ſit 12. & ſimul cum baſi multiplicetur eodem modo hac eſſet parallelepipedum rectum dabit 3432. eritque parallelepipedum æquale parallelepipedo obliquo.

PROBL. III. PROPOS. LXVI.

Priſma triangularis baſis, menſuris numericis ſubijcere.

PRiſma triangularis baſis, ſeu rectum, ſeu obliquum, eſt dimidium parallelepipedi ex prop. 2. Tract. 34. p. 1. eiuſdem altitudinis, ideoque menſurata altitudine trianguli baſis 11. vnciarum, & latere, ſuper quod normalis cadit 14. vnciarum fiet rectangulum ex 18. & 19. tract. 19 duplum trianguli baſis vnciarum 154. quod multiplicatum in altitudinē 7. vnciarum faciet parallelepipedum rectum vnciarum 1078. duplum priſmatis, ſicut ipſa baſis eſt eius dupla, quod erit æquale cuicumque obliquo priſmati æqualis altitudinis, & baſis, & ideo duplo cuiuſcumque priſmatis eiuſdem baſis item, & altitudinis. Vnde dimidium 539. vnciarum ſolidum erit æquale exhibito priſmati, poteſt etiam aſſumi baſis 77. nempe non baſis dupla: ſed æqualis baſi priſmatis, nam multiplicata per altitudinem id præſtabit.

PROBL. IV. PROPOS. LXVII.

Priſma polygonæ baſis numeris dimetiri.

CVm priſma polygonæ baſis ſit ad priſma triangularis, vt baſis ad baſim ex prop. 19. Tract. 34. quod intelligitur ſi ſit eiuſdem altitudinis. Ideo, ſi diuidatur baſis polygona in ſua triangula, vt propoſ. 20. & 21. Tract. 19. docuimus, & numerus baſis triangularis ducatur per altitudinem priſmatis conſequemur priſma triangulare ex propoſ. 66. h. vt ergo baſis triangularis ad polygonam baſim, ſic erit priſma triangulare ad priſma polygonum ex propoſ. 19. Tract. 34. part. 1. Si ergo baſis triangularis ſit 15. & altitudo ſit 4. priſma triangulare erit 60. Sit verò nota ex propoſ. 20. cit. baſis polygona 45. partium, & adhibeatur regula aurea dicendo; ſi 15. dant 45. quid 60. & dabit 180. priſma polygonum: Quod, & obtinebimus multiplicando totam baſim in vnum collectam per altitudinem.

PROBL. V. PROPOS. LXVIII.

Pyramidem, vel polygonæ, vel triangularis baſis calculo ſubigere.

QVoniam omnis pyramis æqualis altitudinis ſcalena, & obliquè ſita eſt æqualis rectę æqualis baſis, & altitudinis ex 21. propoſ. Tract.34. part.1. & ex 22. omnis triangularis pyramis eſt tertia pars priſmatis, quod eſt dimidium parallelepipedi rectanguli cuiuſcumq; quę omnia cum pyramide ſint eiuſdem baſis, & altitudinis; Ideo omnis pyramis, ſeu recta, ſeu ſcalena triangularis erit ſexta pars parallelepipedi. Menſuretur itaque latus vnum pyramidis, & ſit 15. vnciatum, & altitudo ipſius baſia & ſit 7. & fiat rectangulum numericum, vt prop. 19. Tr. 29. multiplicando inuicem, vt fiant 105. pro baſi rectangula; menſuretur poſtea normalis eleuatio ipſius, & ſit 22. vnciarum, qui numerus multiplicetur cum baſi, & fiat parallelepipedum 2310. cuius numeri ſexta pars 385. eſt ſoliditas pyramidis. At ſi pyramis ſit polygona, cum componatur ex Coroll. propoſ. 25. ex pyramidibus triangularibus in ſua triangula diſpertita baſis, & menſurata, vt ſupra, dabit ſoliditatem ſingularum pyramidum, quæ ſimul aggregatæ pyramidem totalem conſtituent.

PROB. VI. PROPOS. LXVI.

Fruſto pyramidis numericas menſuras adhibere, ſi tamen conſtet baſibus parallelis.

QVoniam fruſtum pyramidis cuius baſis quadrata ex propoſ. 25. part.1. Tract.34. ęquatur parallelepipedo, cuius latera ſint ſuperioris fruſti baſis latera, & ſemidifferentia homologorum laterũ, cum triente parallelepipedi ex ſemidifferentijs, & omnia eiuſdem altitudinis. Hoc autem eſt (quodcumque illud ſit) ęquale parallelepipedo rectangulo eiuſdem baſis, & altitudinis: Hinc eſt, quod debeat menſurari latus 16. vnciarum ſupremæ baſis, & altitudo 18. eius; ſicut latus infimum homologum 28. & altitudo eiuſdẽ baſis 26. ſubducatur poſtea altitudo 18. ab altitudine 26. & reſtabunt 8. cuius medietas 4. deinde latus 16. à latere 28. & reſtabunt 12. cuius medietas 6. & altitudo ipſa fruſti pyramidis ſit 33.

Coniungatur differentia altitudinum 4. ipſarum baſium cum minori altitudine, & ſit 22. & differentia laterum 6. cum minori latere 16. & ſit item 22. qui multiplicentur inuicem, & fiant 484. pro baſi parallelepipedi, qui numerus multiplicatus in altitudinẽ 33. dabit 15972. Deinde ſemidifferentiæ 4. & 6. inuicem multiplicentur, & ſine 24. deinde per altitudinem 33. & fient 792. ſolidum rectangulum ſemidifferentiarum; cuius triens eſt 264. quod triens coniunctum cum numero 15972. dat 16136. Parallelepipedum ex lateribus minoribus cum ſemidifferentijs, & triens parallelepipedi ſemidifferentiarũ, quę duo æquant fruſtum pyramidis. Quod ſi ſit fruſtum triangulare accipies ex Coroll. propoſ. 25. prædicti numeri dimidium. Quod ſi ſit multilaterum diuides baſes in fruſta ſua triangularia, & calculabis, vt ſupra.

PROBL. VII. PROPOS. LXVII.

Cylindrum, & Conum acutum, vel priſmaticum, rectum, ſeu obliquum ſitum ſuper baſim circularem, ſeu Ellipticam, ſeu Parabolicam, ſeu ſuper quamcumq; eorum partem, aut quamcumque menſurabilem figuram menſurare.

EX Coroll. propoſ. 3. conſtat cylindrum eſſe ęqualem priſmati eiuſdem baſis, & altitudinis, itaque circulum baſis in rectangulum rediges ex 5. vel 7. vel ex 9 propoſ. tract. 30. & ſuper illud rectangulum parallelepipedum eiuſdem baſis, & altitudinis conſtitues V. g. ſit notus diameter circuli 15. vnciarum, quoniam ex prop. 41. lib. 6. Euclid. omnes circuli ſunt in eadem proportione, ac radij, ideo dicatur ſi 7. dant 22. circumferentiæ in aliquo circulo ex 5. Tract. 18. quid 15. in hoc circulo, & exiet numerus 47. & $\frac{1}{7}$. Multiplicabimus itaque hos numeros ſimul, & ex prop. 5. Tract. 30. efficietur rectangulum quadruplum areæ circuli 707. $\frac{1}{7}$ eius igitur quarta pars erit 176. [illegible] areę circuli æquale rectangulum, quod ductum in altitudinem cylindri 29. V. g. vnciarum expromet numerum ſoliditatis cylindri 5126. [illegible] hoc autem intelligitur, ſeu rectus ſit cylindrus, ſeu ſcalenus, quia ſunt æquales dummodo ſit eadem baſis, & altitudo ex prop. 4. tr. 34.

At quia conus omnis, ſeu rectus, ſeu ſcalenus in punctum deſinens eſt tertia pars cylindri ex propoſ. 7. Tract. 34. ideo ſi detur conus, qui pro diametro obtineat 15. vncias. & pro altitudine 29. cylindri eius tripli ſoliditas erit 5126. [illegible] aſſignata vnciarum cubarum, cuius tertia pars conum præſtabit 1708. [illegible]

At quia conus priſmaticus ex prop. 27. part. 2. Tract. 34. eſt $\frac{1}{2}$ coni acuti, ideo ſi detur talis conus, cuius diameter ſit 15. vnciarum, & altitudo 29. eius ſoliditas erit maior numero 854. [illegible] eiuſdem 1708. [illegible] numeri medietate, nempe 2563. [illegible].

At ſi cylindrus ſit ellipticus, & maior diameter illius ellipſis, quæ baſim ſubſternit cylindro, ſit 15. minor 12. tunc ellipſis ad rectangulum redigetur, & quia ex prop. 24. Tract. 30. eſt circulus maiori axe deſcriptus ad planum ellipticum, vt axis maior ad minorem dices regula aurea; ſi 15. axis dat 12. axem, quid Area circuli 176. [illegible], & offert 141. [illegible], ideſt $\frac{3}{7}$, ſed quia omne corpus cylindraceum, vt eſt cylindrus ellipticus eſt ad aliud, vt altitudo ad altitudinem ſi habeant baſes æquales, licet non ſimiles. Ergo cylindrus, cuius baſis erit 141. $\frac{3}{7}$. ellipſis ad cylindrum eiuſdem baſis, & altitudinis vnciarum 29. erit æqualis.

Quadere ſi multiplicemus in altitudinem 29. vnciarum prędictum numerum 141 $\frac{3}{7}$, & dabit

ſolidi-

ſoliditatem cylindri elliptici 4110. $\frac{1}{3}$. Quod ſi detur conus ellipticus, iſte ex prop. 27. Tract. 34. part. 2. æquabitur circulari eiuſdem baſis, & altitudinis, at circularis eiuſdem baſis, & altitudinis æquatur tertiæ parti cylindri eiuſdem baſis, & eleuationis. Quare erit tertia pars ſoliditatis inuentæ cylindricæ conus ellipticus, nempe 1367. $\frac{1}{3}$.

Id etiam, & æquo pacto concludit de cylindraceis corporibus quamcumque baſim habentibus, quorum multiplicata planities baſis cognitæ in altitudinem normalem ſoliditatẽ præſtabit: Quare ſi ſit aliquis cylindrus, qui obtineat baſim parabolam, cuius area prop. 33. tract. 30. ad triangulum, & ideo ad rectangulum reducatur, vel quæcũque eius cognitæ partes ex eadem prop. 36. ſicut & portiones ellipſium, quæ cognoſci poſſunt ex 28. aut etiam circulorum, quæ indagantur ex 4. Tract. 30. quæ ſe ſubſternant pro baſibus alicuius corporis cylindracei ex Coroll. propoſ. 4. & 24. Tract. 34. eodem modo menſurabitur, & eius ſoliditas nota euadet.

PROBL. VIII. PROPOS. LXIX.

Fruſta Conorum quorumcumque numeris ſubigere.

PRimo menſurabitur eodem modo, quo fruſtum pyramidis, vt coni circularis fruſti ſoliditas inuenitur ex 13. Tract. 34. part. 2. Verùm pro lateribus duobus maioribus adhibetur radius, & peripheria baſis maioris inferioris. & pro minoribus baſis ſuperioris, & minoris radius, item, & peripheria, quibus vnita ſemidifferentia diametrorum, & peripheriarũ maioris baſis à minori cõſtituit duo latera priſmatis æqualti fruſto conico æquali cum triente priſmatis, cui ſemidifferentiæ eædem conſtituunt latera baſis triangularis.

Secundò vniuerſaliter. Duo coni ad calculum redigentur, vt præc. prop. quorum conus ſit ſitus ſuper baſim fruſti maiorẽ alius ſitus ſuper baſim fruſti minorem, & inuenta eorum ſoliditate minor à maiore eximetur, & reſtabit cognitum fruſtum, quodcumque: qui modus poterit adhiberi, cum baſes non ſunt parallelæ.

Tertio, quia ex prop. 7. h. coni baſibus parallelis diuiduntur in conos ſimiles, qui ex pr. 55. h. ſunt in triplicata ambituũ ratione, ſeu diametrorũ, ſeu altitudinum: hinc eſt, quod ſi coni, cuius ſegmentum quæritur, conſtet diametro baſis maioris, & minoris poterit triplicari eorum proportio, & ex nota ſoliditate minoris per regulam auream cognoſcere ſoliditatem maioris. Sit ergo præcedens conus, cuius baſis diameter eſt 15 & conus prolungatus intelligatur, ita quod baſis illius ita prolungati ſit 30. triplicetur hæc proportio 15. ad 30. dabit ſoliditatem maioris coni. Triplicetur itaque dicendo ſi 15. dant 30. quid 30. & dabunt 60. iterumque dices ſi 30. dant 60. quid 60. & dabunt 120. & erit 15. ad 120. triplicata proportio 15. ad 30 Quà acquiſita dices ſi 15 dant 120. quid dabit ſoliditas minoris coni 1708 $\frac{7}{6}\frac{8}{6}$, & exhibebit ſoliditatem maioris 13671. $\frac{7}{7}\frac{8}{8}\frac{8}{6}\frac{8}{9}$ id eſt $\frac{8}{6}\frac{8}{7}$, à qua ſoliditate deducta minor ſoliditas minoris coni verſùs acumen 1708 $\frac{7}{6}\frac{8}{6}$ dabit fruſtum conicum 11962 $\frac{8}{6}\frac{8}{7}$.

Hic verò ſecundus, & tertius modus poterit adhiberi etiam quacumque pyramide, ſecundo quidem ſit ſecta planis non parallelis, tertio ſi planis parallelis ſit ſecta.

PROBL. IX. PROPOS. LXXII.

Rhombum conicum menſura numerica depromere, & reſiduum fruſti coni, vel Rhombi ablato cono inuerſo.

QVoniam ſoliditas Rhombi conici æquatur cono illi, qui habeat altitudinem conorum compoſitorum altitudini æqualem, & baſem baſi compoſitorum eorundem ex 15 tract. 34 ſufficiet hunc conum computare, vt ſupra.

Quod ſi à coni aliquo fruſto intelligatur ablatus conus inuentus adhuc hoc reſiduum calculabimus ex prop. 17. tract. 34. Sit V. g conus, cuius trianguli per axem latus ſit 25. vnciarum; baſis verò ſupremæ radius 12. alter infimæ, & maioris 20. latus fruſti conici ſit 15. primo reperienda eſt coni ſuperficies ex 32. tract. 31. ſic

Addantur ſimul 12. & 20. & fiant 32. deinde inter 32. & 15. reperiatur numerus medius proportionalis ex 21. tract. 13. part. 2. & erit proxime 22. & hic erit radius: hoc itaque numero 22. tamquam diametro exquiratur peripheria circuli ex 5. tract. 30. dicendo ſi diametri 7. dant 22. peripheriæ in aliquo circulo, quid 44. diametri, & inuenietur peripheria 134. $\frac{2}{7}$, deinde multiplicabimus 44. & 134. $\frac{2}{7}$ ſimul, & poſtea producti accipiemus quartam partem, aut dimidiam peripheriã 74. $\frac{6}{7}$, & radium 22. inuicem multiplicabimus, & erit area 1631. $\frac{3}{7}$ fruſti conici ex 32. tract. 31. Menſurata autẽm normali à centro maioris baſis cadente in ſuperficiem coni iuxta dicta pr. 13. h. & vt expuſcit pr. 32. cit. ſit 9 $\frac{3}{7}$.

Itaque calculetur conus, cuius altitudo ſit 9 $\frac{3}{7}$, & baſis 1631 $\frac{6}{7}$, & erit ea ſoliditas fruſti coni ablato cono inuerſo, id eſt ſuper baſem eius minorem conſtituto.

Eodem modo exquiretur ſoliditas fruſti Rhombi ablato Rhombo, quod corpus figura expreſſimus 18. tract. 34 part. 2. Quæ conſtat ex fruſto coni, & ex cono ſuper maiorem baſim conſtituto, deducto cono ſuper minorem baſim. Nam inuenietur ſuperficiei fruſti conici circulus æqualis, & conus eiuſdem baſis; at altitudinis normalis à vertice coni in ſuperficiem oppoſitam productam cadente.

PROBL.

PROBL. X. PROPOS. LXXIII.

Annuli plani ſoliditatem numeris exprimere.

SIt quidam annulus quadrata mole in gyrum ſe flectente conſtans, quem exhibuimus prop. 19. tract. 24. part. 2. & circuli maioris diameter notus ſit 15. vnciarum, minoris vero 5. ita quod eius annuli plani latitudo ſit 10. vnciarum, & circumferentia ferè 31. $\frac{3}{7}$ ex prop. itaque 12. tr. 30. multiplicatis iſtis numeris 10. & 31. $\frac{3}{7}$ ſimul productũ erit rectãgulũ æquale plano annulo 315. Exhibeatur verò altitudo normalis Annuli, quę ſit V. g. 11. vnc. qui multiplicatus in 315. exhibebit ſoliditatẽ annuli 3465. Quod ſi ſit rotũdus, vel cuiuſcũq; datæ figuræ; ſed eius ſectio exhibeat circulum, aut aliquod polygonum regulare: reperto circulo medio inter maiorem, & minorem circulum ſecundùm quos curuatur, prædicto modo, qui ſit vnc. 63. deinde ſectionis illius reperietur ſuperficies, cuius diameter notus eſt 10. partium, & iden peripheria 31. vnciarum, & $\frac{3}{7}$, & hic ipſe circuli diſcus vnciarum 78. $\frac{4}{7}$: Si ergo per prædicti circuli 63. ambitum multiplicetur hæc ſuperficies ex prop. illa 20. Tract. 34. part. 2. conſtabit ſoliditas annuli rotundi Vncijs cubis 4952.

Quod autem dicitur de circulo ex ea 20. prop. Tract. 34 part 2. valet de quocumque annulo polygono dummodo eius ſectionis area conſtet, quę 5. vel 20. prop. Tract. 29. perſcrutari poteſt: ſi ſit figuræ regularis.

THEOR. I. PROPOS. LXXIV.

Omnia corpora, quæ conos, vel pyramides, vel parallelepipeda æqualia, vel cylindros obtinent, calculationi ſubigere.

QVia ſupra diuerſis propoſitionibus Tract. 34. multa corpora cubauimus redigendo ea, aut ad cylindros, aut parallelepipeda, aut pyramides, aut conos, vel omnino ſolidos, vel aliquo alio corpore vacuatos ex prædictis, ideo ſufficiet hic monuiſſe ea corpora menſurare, & numeris ſupponere calculando corpora illis æqualia. Conſideretur itaque quænam corpora illis ſint æqualia, & ea numeris tractentur, & ſimul corpora, quibus ęquantur, menſurata erunt.

Gratias, Gratias Deo, & B. V. & cæt. infinitas, immenſas: hic quies.

AMICE LECTOR.

Errores aliqui, qui in characteribus figurarum indicibus occurerunt ex imprimentium fatalitate hic notantur, quos benigniùs corriges.

TRACTATV III.

Mendum	*correctio.*
DEf. 10. BCA.	CBA

TRACT. IV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 5. l. pen.	BC
Pr. 14. l. 10. DFA.	BAF
P. 29. l. 19. AD.	AB
P. 28. l. 29. DH.	GH

TRACT. VI.

Mendum	*correctio.*
P. 22. l. 3. AOB.	AD
P. 28. l. 39. BAD.	ABD

TRACT. IX. *Pars. 2.*

Mendum	*correctio.*
P. 4. l. 53. N	K
P. 16. l. 51. L.	G
Cor. 2. p. 21. l. 6. AB	AC

TRACT. X.

Mendum	*correctio.*
Pr. 4. C. l 2. AF.	AP
P. 5. l. 3. DE	DH
P. 10. l. 7. DO.	DB
P. 19. l. 5. G	B
P. 31. l. 35. AB.	YB

TRACT. XII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 2. l. 8 E	C
24. l. 10. A	AB
25. l. 33. EL.	BL
33. l. 68. IH.	IK

TRACT. XV.

Mendum	*correctio.*
P. 4. vbiq; PT ad OP.	OP ad TP
l. 34. IP ad NO.	NO ad IP
25. l. 51. OCI.	EFI

TRACT. XVI. *Pars. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 5. l. 3. HE	HF
7. l. 4. D ad H.	H ad D
7. l. 5. E ad I.	I ad E
Pars. 2.	
Pr. 1. l. 40. OE.	OR
l. 45. BH.	vt BH
Pr. 5. l. 5. EF.	BF
l. 23. TZ.	TQ
l. 26. ED.	EB
Pr. 7. l. 32. EH.	FH
l. 25. CA.	CE

TRACT. XVIII.

Mendum	*correctio.*
P. 15. l. pen. AER.	R
17. l. 13. TS	TI
29. l. 53. PL.	FL
C. 2. l. 17. XI.	XY

TRACT. XIX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 23. l. vlt. BL.	BF

TRACT. XX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 7. l. 15. AF	AB
13. l. 2. ABIG.	ABI
91. l. 16. & 17. AF.	AE

TR. XXII.

Mendum	*correctio.*
Pr. l. 5. EF.	BF
13. l. 1. PL.	PR
87. l. 7. LM.	M

TR. XXIII. *Pars. 2.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 15. l. 2. BE.	BX
ZI.	ZX
Pr. 24. l. 26. DF.	DE
Pr. 25. l. 12. YL.	XY
& 63. BN.	BE
& C l. 4. AZ.	VZ
Pr. 29. l. 19. VBE.	BVE
& l. 30 in arcu.	in D arcus
Pars. 3.	
Pr. 32. l. 7. F	E
Pr. 36. l. penul. DC.	BC

TR. XXIV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 8. l. 40. CX.	HX
Pr. 10 l. vlt. PF.	BF
P. 13. l. 18. NM.	NT
Pr. 23. l. 40. CFH.	GFH
Pr. 54. l. 5. CD.	CA

TR. XXV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 1. l. 21. XQZ.	XTZ
Pr. 10. l. vlt. DIS.	OIS
P. 16. l. 19. A.	EA
Pr. 19. l. 20. V.	VF

TR. XXVI. *P. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 11. l. 61. DB.	DE
Pars 2.	
P. 7 l. 2. AG.	dele
P. 8. l. 31. VC.	CL

TR. XXVII. *P. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 21. l. 4. OP.	RP
OM.	MR
Pr. 15. l. 9. G53.	G 153
Pars. 2.	
Pr. 16. l. 17. IV.	IO
Pr. 22. l. 4. AE.	AB
Pr. 50. l. 6. QR.	GO
l. 51. E.	F
Pr. 80. l. 30. H.	K

TRACT. XXVIII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 8. l. 11. LA.	LV
Pr 13. l. 41. DG.	BG
l. 57. T.	t

TR. XXIX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 11. l. 7. In L.	In I
Pr. 19. l. 1. AD.	VD
Pr. 24. l. 13. CV	DV
Pr. 24. l. 19. KL.	KM
P. 25. l. 31. P.	B
P. 28 l. 12. D.	B
Pr. 29. l. 6. K.	KI
l. 11. D	O
Pr 35. l. 24. & 26.	dele P
Pr. 49. l. 9. CE ad EF.	EF ad EI
P. 47. l. 31. CD.	GE

TR. XXX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 24. l. 30. CE.	PE
l. 36. CE.	PE
Pr. 26. l. 8. FD.	FB
Pr. 50. l. 6. BA.	BF
Pr. 60. l. 3. ALC.	adde I

TR. XXXI.

Mendum	*correctio.*
Pr. 14. l. 12. AIM.	AIN
Pr. 19 C. 3. l. 4. ITEX.	It AX
Pr. 21. l. 10. XC.	NC
l. 11. MQS	NQS

TR. XXXIII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 1. l. 27. BAE.	BE

TR. XXXIV. *P. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 22. l. 12. GC.	GD
Pr. 23. l. 8. FDH.	FGH
Pr. 25. l. 8. NK.	MK
Pars. 2.	
Pr. 12. l. 22. DC.	DCB
Pr. 18. l. 9. RLt.	RST
l. 22. RLT.	RLT
Pr. 19. l. 2. NR.	TR
Pr. 21. l. 29. It.	IT
Pr. 51. C. 2. l. 9. DA.	CA
l. 10. CIH.	CH
P. 56. l. 22. KG.	IG
HT.	KT

TR. XXXV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 27. l. 30. OV.	IV
& OI.	VI

VSVS TABVLÆ SEQVENTIS

SINVVM, TANGENTIVM, ET LOGARITHMORVM.

CVM iam logarithmicas tabulas excerptas à Canone magno triangulorum ſeu tabuls artificialium Herinci Brigij vulgauerit Caualierius, placuit nobis ipſos Neperianos logarithmos varietatis gratis exhibere, qui ab ipſo Nepero inuentore eorum conditi fuere, cuius tabulæ vſus talis eſt.

Arcus, & angulus ſi quærendus ſit, vel non excedet gradum 45. vel ſuperabit: ſi non excedat quærendus eſt in prima columna ſiniſtra reperiendo gradum in fronte, minuta deſcendendo per ipſam columnam. Si verò ſuperent dati gradus & minuta Gr. 45. quærendi ſunt gradus in calce nonæ columnæ & minuta aſcendendo. Excipientur autem ſinus correſpondentes procedendo directè per eandem teſſeram à ſiniſtra ad dextram in ſecunda columna ſiniſtra, ſi gradus minores quam 45. inuenti fuerint, at ſi maiores in octaua columna procedendo per eandem teſſeram à dextra in ſiniſtram verſùs medium areæ Logarithmi verò ſinuum in tertia columna, & ſeptima. Tangentes in quarta, & ſexta, & logarithmi tangentium in media quintaque columna inuenientur, qui deſeruient pro tangentibus graduum non excedentium gr. 45. deſcendendo; at verò aſcendendo pro tangentibus graduum maiorum; quam gradus 45. diuerſimodè tamen. Nam deſcendendo & prout deſeruiunt tangentibus ſiniſtris, illis vtemur ſecundùm regulam V. g. ſi ſit adhibēda ſubtractio, ſubtrahemus, ſi additio, addemus. At ſi deſeruiant tangentibus dextris, & aſcendendo repertæ fuerint, cum ſubtrahendum eſt, tunc addemus; cum addendum eſt, ſubducemus, vt dixi cap. 6. tract. 31.

Sinus ſi cognoſcamus, & velimus cognoſcere angulum, vel arcum reperiemus eos in ſecunda, vel octaua columna & è regione in eadem teſſera inueniemus arcum vel angulum correſpondentem; Logarithmos verò ſinuum in tertia & ſeptima; Tangentes in quarta, & ſexta; Logarithmos verò tangentium in media.

Qui prout illis vtemur deſeruient Gradibus minoribus gr. 45. & eorum tangentibus iuxta regulam adhibiti, contra verò regulam deſeruient tangentibus maioribus quam gr. 45. & gradibus correſpondentibus.

Si verò, quis cupiat Graduum minutorum, & etiam ſecundorum ſinus, qui in tabula non ponuntur per regulam auream intentum cōſequetur. Nam reperto ſinu arcus, & minutorum adhærentium, is ſubductatur à ſinu proximè maiori, & obtinebitur differentia; Dices ergo regula trium: ſi ſecunda 60. dant v. g. ſecunda 20. quid differentia reperta? & inuenies differentiam ſecundis datis congruentem, quæ addetur ſinui minori reperto, & fiet ſinus arcus dati notus nedum quo ad gradus, & minuta, ſed etiam quoad ſecunda. v. g. detur arcus G. 8. 32. S. 20 ſinus erit G. 8 M 32. P. 1483848. at proximè maior G. 8. minut. 33. ſinus 1486724. differentia eſt 2876. Dices itaque ſi 60. dant 20 quid 2876. differentia? & prodibit proportionalis congruens 958. quæ addita ſinui minoris arcus 1483848. conſtituet ſinum 1484805. G. 8. M 32. S 20. Eodemque modo logarith ſinuum, tangentes, logarithmoſq; ipſarum vſque ad ſecunda Graduum obtineri poterunt.

Si verò detur ſinus, qui non reperiatur in tabulis, & quis cupiat cognoſcere quot Gradus minuta & ſecunda illi reſpondeant per eandem regulam auream id conſequi poterimus. Nam reperto ſinu proximè minori, & à maiori dato ſubducto reſtabit differentia: iterumque eodem ſubducto à maiori proximè ſinu reperto in tabulis reſtabit alia differentia maior; Dices itaque ſi hæc differentia maior dat illam minorem, quid dabunt ſecunda 60 & obtinebis ſecunda tuæ differentiæ competentia ſinus dati à proximè minori v. g. detur ſinus 1484810.

Qui non reperitur in tabula ſinuum, ſed proximè minor eſt 1483848. qui ſubductus à maiori dato 1484910. relinquit differentiam 962. ſubductus verò iterum ipſe repertus ſinus 1483848. à maiori proximè reperto in tabulis 1486724. relinquit differentiam maiorem 2876. dico itaque ſi differentia 2876. dat differentiam 962 quid dabunt ſecunda 60. & reſtituent ſec. 20. & ſic agendum eſt in tangentibus vel logarithmis in tabula non repertis; ſi quis ſcrupuloſum computum expetet. Verum tutè ſemper poterit accipi pro dato ſinu proximè minor., ſi non adeò exacta requiratur ſupputatio.

Sinus verſus reperitur arcus infra Gr. 90. ſi accipiatur dati arcus complementi ſinus, & ſubducatur à ſinu toto. Nam reſiduum erit ſinus verſus illius arcus, at ſi ſuperet G. 90 cape exceſſum ſup. Gr. 90. illiuſque quære ſinum, additus enim ſinus ſinui toti conſtituet ſinum verſum illius arcus.

Si verò quis cupiat alicuius dati ſinus verſi arcum inuenire demat à ſinu toto, ſi ipſo minor ſit vel vice verſa ſi ſit maior & reſiduum inueniatur arcus, qui demptus à quadrante in priori caſu reliquit illius ſinus verſi arcum, & in poſteriori caſu additus quadranti idem præſtat.

Tandem ſi quæratur complementum alicuius arcus quærendus eſt in altera è regione graduum, & minutorum columna. v. g. ſi ſit quærendum complementum G. 8. M. 30. columnæ primæ ſiniſtræ complementum erit in extrema dextra G. 81. M 30. & vice verſa. Et idem afferas de ſinubus, tangentibus: atque logarithmis ipſorum, quorum complementa ſunt in columna correſpondente: ſub correſpondentibus arcuum complementis.

Ita ſinus complementi arcus G. 10. M. 15. erit ſinus arcus, qui illum cōplet G. 79. M. 45. qui eſt 9840407. ſicuti ſinus complementi arcus. G 79 M. 45 eſt ſinus arcus G. 10. M. 15. nimirum ſinus 1779415.

Denique ſi quis deſideret logarithmos ſecantium is poterit adhibere logarithmos ſinuum; ſed ſemper vtendo ipſis contra regulam, vt dixi tract. 22 propoſ. 25. Curauimus autem has tabulas omnino ab erroribus abſolutas tibi exhibere, quibus tuto vti poſſis, vt exactiſſimè præſtitimus.

TABVLA

TABVLA LOGARITHMICA

EIVSQVE VSVS EXPLICATVS.

DOcuimus coroll. prop. Tr. 22. logarithmos applicatos numeris geometricis in tabulis ſinuum, atq; tangẽtium Regulę aureę muneri deſeruire, & inuentioni quarti proportionalis, & hoc fieri addendo ſimul logarithmos, cũ in ea multiplicatio requiritur, vel ſubducendo, cum diuiſio ab ea imperatur: dummodo logarithmi ſint eiuſdem naturæ, vt dixi pr. 26. Tr 22. sũma verò eſt logarithmus abundans, ſi collecti logarithmi fuere abundantes, at deficiens, ſi fuere deficientes; ſicut, & reſiduum à ſubductione, abundans erit; ſi logarithmi ſubducti, & is à quo ſubducitur; fuit abundans: at deficiens, ſi ijdem fuere deficientes. Scire vero hoc deſeruit, vt cognoſcamus, cuius naturæ ſit quartus proportionalis, qui ellicitur; ſtat enim loco ſinus ſumma, vel reſiduum abundans, cum Problema pro quarto proportionali promittit ſinum, vel tangentis minoris quàm grad. 45. ſi promittat tangentem: ſtat autem loco ſecantis, cum eſt reſiduũ deficiens, & Prob. ſecantem promittit, quod ſi promittat inueniendam tangentem, illa tangens, vt pote deficiens, erit Graduum maiorum quàm G. 45. vt diximus expen 6. trac. 21.

At ſi caſus ferat quod vtamur logarithmis diuerſæ naturæ, ſcilicet, quòd ſit vnus deficiens, alter abundans, vt logarithmo ſinuum, & logarithmo, tangentium Graduum maiorum quã, G. 45 vel logarithm. vt ſinuum, & logarithmis ipſis vt ſecantium, tunc cum regula aurea docet vti multiplicatione, in logarithmis vtendum eſt ſubductione. & quod reſtat à maiori logarithmo, à quo ſubductio facta eſt, denominatur, & ſi ille erat abundans reſiduum, quoq; eſt abundans, ſi deficiens reſiduum quoq; eſt deficiens. Cum autem regula aurea vtitur diuiſione; ſi logarithmi ſint diuerſæ naturæ, vtendum eſt additione, vt dixi coroll prop. 26. Tr. 22. & totum quod conflatur à maiori logarithmo additorum. vocatur abundans, vel deficiens: quare ſi fiat additio reſiduo à ſubductione, qui ex dictis apellatur abundans, & iſtud ſit maius ſumma, quoq; erit abundans, ſecus ſi deficiens. Vnde ſcies, vt ſupra cuius, naturæ ſit quartus proportionalis, vt ipsũ reperias in Tabulis.

Ratio huius rei eſt, quia ſi addas logarithmũ, o vnitatibus 3. reſtat 3. Ergo ſi addas 2. deficiens, ideſt defectum duarum vnitatum log. 3. oportet, quod reſtet minus, quam 3. cum ponere rei defectum ſit ipſam rem, auferre, & ideo remanet 1. abundans. Sic ſi defectiuo log. Vg. 3. addas 2. logarithmum poſitiuum oportet, vt remaneat minus quam 3. defectiuum, ideſt 1. quia ponere quid verum, & poſitiuum eſt auferre defectum. Vnde addere eſt idem, ac ſubducere. At ſi ſubducas, o. a 3. log. abundante remanet 3. Ergo ſi auferas 2. minus quam o. ideſt defectum duarum vnitatum, oportet, quod creſcat & ſit 5. quia ſubducis defectum 2. tollitur autem defectus per rem poſitiuam, vnde ſubducere deficientes logarithmos ab abundantibus erit addere abundantibus; ideoque id quod conflatur, erit poſitiuum, & abundans: Verum ſi à. 3. defectiuo auferas logarith. poſitiuum, & abundantẽ nempe 2. facies vtique magis deficientẽ, nempe 5. vnitatibus infra o cui enim magis aufertur rei poſitiuæ, magis deficit. Vnde auferre eſt idem quod addere. & id quod fit eſt negatiuum magis. Si verò à negatiuo auferas negatiuum, clarum eſt quod erit minus negatiuum, & ſi addas erit magis negatiuum. Vnde ſolum in additione, vel ſubductione logarithmorum oppoſitę naturæ mutatur ſubductio in additionem, & additio in ſubtractionem. Ideoque in tangentium logarithmis ſuper, ſcribitur ſecundum regulam, inferiùs contra regulã quia cum, vt deficientes ſumantur ferè ſemper cum abundantibus ſinubus, vel tangentibus adhibentur, & idem dicendum eſt de logaritmhis ſinuum, ſi vſurpentur, vt ſecantium, ferè enim ſemper contra regulam adhibendi, quia cum ſinibus adhibentur.

MONITVM.

Cum literarius cenſor aliqua ſibi clam impreſſerit exemplaria mancha omninò foliiſque recuſis, & figuris deficientia, Priuilegium à Celſitudine Regali Sabaudię Ducis, &c. obtinere coactus ſum, ne alius quam à me deſtinatus bibliopola, hos noſtros libros exponat: Sed quia non vbique locorum hoc Priuilegium extenditur; ideo omnes monere cogor, ne huiuſmodi imperfecta volumina, in ſui incommodum, meique detrimentum emant; At ne folium ſine ſua vtilitate libro imponeretur, ſuperiorem doctrinam calculi logarithmici penitus explicatiuam tibi communicaui.

TABVLA
SINVVM ATQVE
TANGENTIVM
LOGARITHMIS NEPERIANIS
EXORNATA
DILIGENTER EMENDATA,

QVAE OMNI, TVM GEOMETRICAE, TVM
ARITHMETICÆ SVPPVTATIONI
APPRIME DESERVIT.

Digitized by Google

M.	Sinus	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	0	Infinitum	0000	Infinitum	Infinita	0	10000000	60
1	2909	81425681	2909	81425680	34376070815	1	10000000	59
2	5818	74494213	5818	74494211	17188033688	2	9999998	58
3	8727	75439556	8727	70439560	11458686834	4	9999996	57
4	11636	67562746	11636	67562739	8594012547	7	9999993	56
5	14544	65331315	17544	65331304	6875680006	11	9999989	55
6	17453	63508099	17452	63508083	5729633839	16	9999986	54
7	20362	61966595	20361	61966573	4911098124	22	9999980	53
8	23271	60631284	23270	60631256	4297181900	28	9999974	52
9	26180	59453453	26179	59453418	3819696333	35	9999967	51
10	29088	58399557	29088	58399814	3437829002	43	9999959	50
11	31997	57446759	31996	57446707	3125276745	52	9999950	49
12	34906	56576646	34905	56576584	2864819229	62	9999940	48
13	37815	55776222	37814	55776149	2644433955	73	9999928	47
14	40724	55035148	40723	55035064	2455533838	84	9999917	46
15	43632	54345225	43632	54345129	2291873854	96	9999905	45
16	46541	53699843	46541	53699734	2148619711	109	9999892	44
17	49450	53093600	49450	53093477	2022219818	123	9999878	43
18	52359	52522019	52359	52521881	1909864971	138	9999863	42
19	55268	51981356	55268	51981202	1809337410	154	9999847	41
20	58177	51468431	58177	51468261	1718863124	170	9999831	40
21	61086	50980537	61086	50980450	1637005697	187	9999813	39
22	63995	50515342	63995	50515137	1562590046	205	9999795	38
23	66904	50070827	66904	50070603	1494645462	224	9999776	37
24	69813	49645239	69813	49644995	1432363027	244	9999756	36
25	72721	49237039	72722	49236765	1375082163	265	9999736	35
26	75630	48844826	75631	48844539	1322188681	287	9999714	34
27	78539	48467431	78540	48467122	1273213435	309	9999692	33
28	81448	48103763	81450	48103431	1227756470	332	9999668	32
29	84357	47752759	84359	47752903	1185395877	356	9999644	31
30	87265	47413852	87268	47413471	1145801136	381	9999619	30
31	90174	47085554	90177	47085554	1108932084	407	9999593	29
32	93083	46768049	93086	46768049	1074263599	434	9999566	28
33	95991	46460773	95995	46460312	1041705454	461	9999482	27
34	98901	46162254	98904	46161763	1011062679	489	9999511	26
35	101809	45872392	101814	45871874	982180553	518	9999482	25
36	104718	45590688	104723	45590140	954895332	548	9999452	24
37	107627	45316714	107632	45316135	929081086	579	9999421	23
38	110530	45050041	110541	45049430	904627361	611	9999389	22
39	113445	44790296	113450	44789652	881427652	644	9999357	21
40	116353	44537132	116360	44536455	859395374	677	9999323	20
41	119262	44290216	119269	44289505	838430438	711	9999289	19
42	122171	44049255	122178	44048509	818463792	746	9999254	18
43	125079	43813959	125088	43813177	799432199	782	9999218	17
44	127988	43584078	127997	43583259	781259259	819	9999281	16
45	130896	43359360	130906	43358503	763899813	857	9999143	15
46	133805	43139582	133816	43138686	747289264	896	9999105	14
47	136714	42924534	136725	42923599	731385593	935	9999065	13
48	139622	42714014	139635	42713039	716149676	975	9999025	12
49	142531	42507833	142544	42506817	701531474	1016	9998984	11
50	145439	42305826	145454	42304768	687500739	1058	9998942	10
51	148348	42107812	148363	42106711	674016435	1101	9998900	9
52	151257	41913644	151273	41912499	661050728	1145	9998856	8
53	154164	41723175	154182	41721986	648578536	1189	9998811	7
54	157075	41536271	159092	41535037	636564040	1234	9998766	6
55	159982	41352795	160001	41351515	624990311	1280	9998720	5
56	162891	41172626	162911	41171299	613825994	1327	9998673	4
57	165799	41006643	165820	41005268	603057015	1375	9998625	3
58	168708	40821746	168730	40820322	592655713	1424	9998577	2
59	171616	40650816	171640	40649343	582610426	1473	9998527	1
60	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	60
1	177433	40317483	177459	40315900	563504309	1574	9998426	59
2	180341	40154899	180369	40153273	554414914	1626	9998374	58
3	183250	39994918	183279	39993239	545610968	1679	9998321	57
4	186158	39837447	186189	39835715	537085003	1733	9998267	56
5	189066	39682421	189100	39680633	528821258	1788	9998212	55
6	191975	39529765	192010	39527922	520805157	1843	9998157	54
7	194883	39379407	194920	39377598	513030946	1899	9998101	53
8	197792	39231274	197830	39229318	505482730	1956	9998044	52
9	200700	39085307	200740	39083293	498155754	2014	9997986	51
10	203608	38941441	203650	38936368	491038024	2073	9997927	50
11	206517	38799612	206561	38797479	484118353	2133	9997867	49
12	209425	38659767	209471	38657573	477393195	2194	9997806	48
13	212333	38521858	212381	38519603	470852152	2255	9997745	47
14	215241	38385824	215291	38383507	464487853	2317	9997683	46
15	218149	38251613	218201	38249233	458293185	2380	9997620	45
16	221057	38119183	221111	38116739	452261453	2444	9997556	44
17	223965	37988481	224022	37985972	446386310	2509	9997491	43
18	226873	37859471	226932	37856896	440661780	2575	9997425	42
19	229781	37732105	229842	37729464	435082056	2641	9997359	41
20	232689	37606339	232752	37603631	429641796	2708	9997292	40
21	235597	37482135	235663	37479359	424335793	2776	9997224	39
22	238505	37359458	238574	37356613	419159137	2845	9997155	38
23	241413	37238269	241485	37235354	414111295	2915	9997085	37
24	244321	37118532	244395	37115546	409175388	2986	9997014	36
25	247229	37000208	247306	36997150	404359642	3058	9996943	35
26	250137	36883272	250217	26889142	399655828	3130	9996871	34
27	253045	36767690	253128	36764487	395060088	3203	9996798	33
28	255953	36653428	256038	36650151	390568737	3277	9996724	32
29	258861	36540448	258949	36537096	386178258	3352	9996649	31
30	261769	36428748	261859	36425320	381885288	3428	9996573	30
31	264677	36318272	264770	36314768	377686614	3504	9996496	29
32	267585	36209009	267681	36205427	373579199	3582	9996419	28
33	270493	36100924	270592	36097264	369560062	3660	9996341	27
34	273401	35994000	273503	35990261	365626388	3739	9996262	26
35	276308	35888207	276414	35884388	361776788	3819	9996182	25
36	279216	35783520	279325	35779620	358006024	3900	9996101	24
37	282124	35679917	282237	35675935	354312962	3982	9996019	23
38	285032	35577380	285148	35573316	350695255	4064	9995937	22
39	287940	35475892	288059	35471745	347150587	4147	9995854	21
40	290847	35375415	290970	35371184	543677949	4231	9995770	20
41	293755	35275935	293882	35271619	340272744	4316	9995685	19
42	296663	35177444	296794	35173042	336934467	4402	9995599	18
43	299570	35079909	299705	35075420	333661982	4489	9995512	17
44	302478	34983320	302617	34978743	330451272	4577	9995424	16
45	305385	34887652	305528	34882987	327302782	4665	9995336	15
46	308293	34792895	308439	34788141	324212583	4754	9995247	14
47	311200	34699029	311351	34794185	321181137	4844	9995157	13
48	314108	34606036	314202	34601101	318204757	4935	9995066	12
49	317015	34413899	317174	34508872	315283945	5027	9994974	11
50	319922	34422606	320085	34417486	312416191	5120	9994881	10
51	322830	34332140	322997	34326926	309599077	5214	9994787	9
52	325737	34242484	325909	34237176	306833212	5308	9994693	8
53	328645	34153629	328821	34148226	304115322	5403	9994598	7
54	331552	34076549	331733	34071050	301445987	5499	9994502	6
55	334459	33978346	334645	33972650	298823024	5596	9994405	5
56	337367	33891701	337558	33886007	296244357	5694	9994307	4
57	340274	33805893	340470	33800100	263710598	5793	9994208	3
58	343181	33720820	343382	33714927	291219764	5893	9994109	2
59	346088	33636464	346295	33630476	288770746	5993	9994009	1
60	348994	33552817	349207	33546723	286362498	6094	9993908	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	348995	33552817	349207	33546723	286362498	6094	9993908	60
1	351902	33469860	352120	33463664	283994009	6196	9993806	59
2	354809	33387588	355033	33381289	281664304	6299	9993703	58
3	357716	33305993	357945	33299590	279372435	6403	9993599	57
4	360623	33225056	360858	33218549	277117516	6507	9993495	56
5	363530	33144770	365770	33138158	274898633	6612	9993490	55
6	366437	33065128	366683	33058410	272714927	6718	9993284	54
7	369344	32986107	369596	32979282	270565570	6825	9993177	53
8	372251	32907712	372508	32900779	268449755	6933	9993069	52
9	375158	32829923	375421	32422881	266366704	7042	9992960	51
10	378065	32752740	378334	32745588	264326358	7152	9992850	50
11	380971	32676149	381247	32668887	262296605	7262	9992740	49
12	383878	32600139	384160	32592866	260307416	7373	9992629	48
13	386785	32524706	387073	32517221	258348100	7485	9992517	47
14	389692	32449837	389987	32442239	256417991	7598	9992404	46
15	392598	32375526	392900	32367814	254517088	7712	9992290	45
16	395505	32301761	395814	32293934	252643455	7827	9992175	44
17	398412	32228539	398727	32220596	250797165	7943	9992060	43
18	401318	32155852	401641	32147793	248978216	8059	9991944	42
19	404225	32083692	404554	32075516	247184785	8176	9991827	41
20	407131	32012045	407468	32500751	245417543	8294	9991709	40
21	410038	31940909	410382	33932496	243674732	8413	9991590	39
22	412944	31870276	413295	31861743	241957021	8533	9991470	38
23	41585	31800141	416209	31791887	240262714	8654	9991349	37
24	41875	31730492	419123	31721716	238592501	8776	9991228	36
25	421663	31661332	422037	31652434	236945285	8898	9991106	35
26	424570	31592644	424951	31583623	235320041	9021	9990983	34
27	427476	31524424	427866	31515279	233717425	9145	9990859	33
28	430382	31456672	430780	31447402	232146427	9270	9990734	32
29	433288	31389371	433694	31379975	230576614	9396	9990608	31
30	436194	31322524	436609	31313001	229037584	9523	9990482	30
31	439100	31256121	439523	31246471	227518902	9650	9990355	29
32	442006	31190158	442438	31180380	226020167	9778	9990227	28
33	444912	31124626	445353	31114719	224540987	9907	9990098	27
34	447818	31059521	448267	31049484	223080983	10037	9989968	26
35	450724	30994841	441182	30984673	221639784	10168	9980837	25
36	453630	30930577	454097	30920277	220217049	10300	9989706	42
37	456536	30866722	457012	30856290	218812405	10432	9989574	23
38	459444	30803277	459927	30792712	217425507	10565	9989441	22
39	462348	30740210	462842	30729531	216056022	10699	9989307	21
40	465253	30677578	465757	30666744	214704085	10834	9989172	20
41	468159	30615317	468672	30604347	213368514	10970	9989036	19
42	471065	30553442	471588	30542335	212049271	11107	9988899	18
43	473970	30491940	474503	30480704	210746693	11245	9988761	17
44	476876	30430834	477419	30419451	209459545	11383	9988623	16
45	479781	30370090	480335	30358368	208188402	11522	9988484	15
46	482687	30309715	483251	30298053	206932111	11662	9988344	14
47	485592	30249702	486166	30237899	205691260	11803	9988203	13
48	488498	30190049	489082	30178104	204464726	11945	9988601	12
49	491403	30130749	491997	30118661	203253093	12088	9987918	11
50	494308	30071797	494913	30059565	202055705	12232	9987775	10
51	497214	30013197	497829	30000817	200871878	12376	9987631	9
52	500119	29954933	500745	29942412	199702191	12521	9987486	8
53	503024	29897014	503662	29884347	198545993	12667	9987340	7
54	505929	29839424	506578	29826610	197403054	12814	9987193	6
55	508835	2978216	50949	29769203	196273146	12962	9987045	5
56	511740	29725236	51241	29712125	195155685	13111	9986897	4
57	514645	29668628	51532	29655367	194051200	13261	9986748	3
58	517550	29612331	51824	39598920	192959095	13411	9986598	2
59	520455	29556458	52116	29542796	191879163	13562	9986447	1
60	524360	29500706	524075	29486992	160821200	13714	9986295	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	523360	29500706	524078	29486992	190811200	13714	9986295	00
1	526265	29445354	526995	29431487	189755028	13867	9986143	59
2	529170	29390307	529911	29376286	188710414	14021	9985989	58
3	532075	29335565	532828	29321389	187677207	14176	9985835	57
4	534980	29281122	535745	29266791	186655202	14331	9985680	56
5	537884	29226973	538663	29212486	185644562	14487	9985524	55
6	540789	29173115	541580	29158471	184644417	14644	9985367	54
7	543694	29119548	544498	29104746	183654941	14802	9985209	53
8	546598	29066270	547415	29051309	182676299	14961	9985050	52
9	549503	29013273	550333	28998152	181707670	15121	9984891	51
10	552407	28960557	553251	28945276	180749537	15281	9984731	50
11	555312	28908117	556169	28892675	179801085	15442	9984570	49
12	558216	28855951	559087	28850347	178862806	15604	9984408	48
13	561120	28804057	562005	28788290	177934219	15767	9984245	47
14	564024	28752430	564923	28736499	177015180	15931	9984081	46
15	566928	28701071	567841	28684975	176105555	16096	9983917	45
16	569832	28649975	570759	28633714	175205183	16261	9983752	44
17	572736	28599142	573678	28582715	174313925	16427	9983586	43
18	575640	28548570	576596	28531976	173431641	16594	9983419	42
19	578544	28498247	579514	28481485	172558198	16762	9983251	41
20	581448	28448177	582433	28431246	171693461	16931	9983082	40
21	584352	28398354	585352	28381253	170837304	17101	9982912	39
22	587256	28348782	588270	28331510	169989613	17272	9982742	38
23	590160	28298459	591189	28282015	169150247	17444	9982571	37
24	593064	28250377	594108	28232761	168319085	17616	9982399	36
25	595967	28201535	597028	28183746	167496287	17789	9982226	35
26	598871	28152930	59994	28134967	166681172	17963	9982052	34
27	601775	28104561	602866	28086423	165873906	18138	9981877	33
28	604678	2805642	505786	28018114	185074651	18314	9981701	32
29	607582	28008424	60870	27990033	164282764	18491	9981524	31
30	610485	27960848	611620	27942178	163498660	18670	9981349	30
31	613389	27913400	614544	27894552	162721698	18848	9981170	29
32	616292	27866180	617464	27847158	161952505	19027	9980991	28
33	619196	27819184	620384	27799977	161189849	19207	9980811	27
34	622099	27772408	623304	27753020	160434770	19388	9980631	26
35	625052	27725848	626225	27706278	159686753	19570	9980450	25
36	627905	27679504	629145	27659752	158945509	19752	9980268	24
37	630808	27633374	632066	27613439	158211136	19935	9980085	23
38	633711	27587457	634986	27567338	157483474	20119	9979901	22
39	636614	27541753	637907	27521449	156762433	20304	9979716	21
40	639517	27496257	640828	27475767	156047923	20490	9979530	20
41	642420	27450968	643749	27430291	155339855	20677	9979343	19
42	645323	27405885	646671	27385020	154638158	20865	9979156	18
43	648226	27361003	649592	27339950	153942729	21053	9978968	17
44	651129	27316323	652514	27295081	153253487	21242	9978779	16
45	654031	27271843	655435	27250411	152570581	21432	9978589	15
46	656934	27227563	658357	27205940	151893462	21623	9978398	14
47	659837	27183476	661278	27163661	151222301	21815	9978207	13
48	662739	27139581	664100	27117573	150557233	22008	9978015	12
49	665642	27095878	667121	27073676	149897753	22202	9977822	11
50	668544	27052373	670043	27029976	149244148	22397	9977628	10
51	671447	27009057	672965	26986465	148595987	22592	9977433	9
52	674349	26965926	675888	26943138	147953611	22788	9977237	8
53	677251	26922980	678810	26899995	147316726	22985	9977040	7
54	680153	26880218	681733	26857035	146685275	23183	9976843	6
55	683055	26837639	684656	26812757	146059175	23382	9976645	5
56	685957	26795243	687578	26771661	145438358	23582	9976445	4
57	688859	26753027	690501	26729244	144822775	2378[illegible]	9976245	3
58	691761	26710988	693423	26687003	144212307	23985	9976044	2
59	694663	26669126	696346	26644939	143606943	24187	9975842	1
60	697565	26627442	699269	26603052	143006601	24390	9975640	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logar. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	697565	26627442	699269	26603052	143006601	24390	9975640	60
1	700467	26585929	702193	26561335	142411234	24594	9975437	59
2	703369	26544587	705116	26519788	141820765	24799	9975233	58
3	706270	26503416	708039	26478411	141235335	25005	9975028	57
4	709172	26462418	710962	26437207	140654481	25211	9974822	56
5	712073	26421589	713886	26396171	140078545	25418	9974615	55
6	714975	26380927	716809	26355301	139507087	25626	9974408	54
7	717876	26340428	719733	26314593	138940429	25835	9974200	53
8	720777	26300094	722657	26284050	138378319	26044	9973991	52
9	723678	26259923	725580	26233669	137820702	26254	9973781	51
10	726579	26219913	728504	26193448	137267523	26465	9973570	50
11	729480	26180067	731428	26153390	136718731	26677	9973358	49
12	732381	26140377	734353	26113487	136174272	26890	9973145	48
13	735282	26100842	737277	26073738	135634096	27104	9972931	47
14	738183	26061465	740202	26034146	135098153	27319	9972717	46
15	741084	26022244	743127	25994709	134566419	27535	9972502	45
16	743985	25983176	746052	25955424	134038804	27752	9972286	44
17	746886	25944260	748978	25916290	133515636	27970	9972069	43
18	749787	25905496	751903	25877308	132995769	28188	9971851	42
19	752688	25866884	754829	25838477	132480297	28407	9971633	41
20	755588	25828423	757754	25799796	131968930	28627	9971414	40
21	758589	25790110	760680	25751262	131461286	28848	9971194	39
22	761389	25751942	763606	25722872	130957670	29070	9970973	38
23	764290	25713920	766532	25684727	130457692	29293	9970751	37
24	767190	25676043	769459	25646527	129991652	29516	9970528	36
25	770090	25638310	772385	25608570	129469305	29740	9970304	35
26	772991	25600722	775311	25570757	128980531	29965	9970079	34
27	77589	25563273	778238	25533082	128495548	30191	9969854	33
28	77879	25525966	781164	25495548	128014165	30418	9969628	32
29	781691	25488798	784091	25458152	127536341	30646	9969401	31
30	784591	25451769	787017	25420894	127062036	30875	9969173	30
31	787491	25414876	789944	25383772	126591211	31104	9968944	29
32	790391	25378119	792871	25346785	126123842	31334	9968715	28
33	793291	25341498	795799	25309933	125659878	31565	9968485	27
34	796191	25305013	798726	25273216	125199280	31797	9968254	26
35	799090	25268662	801653	25236632	124742169	32030	9968022	25
36	801990	25232442	804581	25200178	124288195	32264	9967789	24
37	804889	25196355	807509	25163857	123837634	32498	9967555	23
38	807789	25160399	810437	25127666	123390142	32733	9967320	22
39	810688	25124571	813365	25091602	122946003	32969	9967085	21
40	813587	25088870	816293	25055664	122505017	33206	9966849	20
41	816486	25053298	819221	25019854	122067151	33444	9966612	19
42	819385	25017853	822150	24984170	121632370	33683	9966374	18
43	822284	24982533	825079	24948610	121200643	33923	9966135	17
44	825183	24947340	828008	24913177	120771937	34163	9965895	16
45	828082	24912272	830937	24877866	120346233	34404	9965655	15
46	830981	24877326	833866	24842680	119923488	34646	9965414	14
47	833880	24842502	836795	24807613	119503669	34889	9965172	13
48	836778	24807799	839724	24772666	119086890	35133	9964929	12
49	839677	24773219	842653	24737841	118672834	35378	9964685	11
50	842575	24738761	845583	24703138	118261757	35623	9964440	10
51	845474	24704420	848513	24668551	117853346	35869	9964194	9
52	848372	24670196	851443	24634080	117447864	36116	9963948	8
53	851271	24636090	854374	24599726	117044995	36364	9963701	7
54	854169	24602100	857304	24565487	116644985	36613	9963453	6
55	857067	24568228	860234	24531365	116247668	36863	9963204	5
56	859965	24534473	863164	24497359	115853017	37114	9962954	4
57	862863	24500829	866095	24463463	115461005	37366	9962703	3
58	865761	24467298	869025	24429679	115071619	37619	9962452	2
59	868659	24433880	871956	24396008	114684819	37872	9962200	1
	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.
0	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947
1	874455	24367384	877817	24329003	113918875	38381	9961693
2	877353	24334302	880748	24295665	113539681	38637	9961438
3	880250	24301329	883680	24262435	113163656	38894	9961183
4	883148	24268467	886611	24229316	112788878	39151	9960927
5	886045	24235712	889543	24196303	112417202	39409	9960670
6	888943	24203064	892475	24163396	112047814	39668	9960412
7	891840	24170523	895407	24130595	111680940	39928	9960153
8	894737	24138089	898339	24097900	111316432	40189	9959893
9	897634	24105760	901271	24065309	110954164	40451	9959632
10	900531	24073540	904204	24032827	110594415	40713	9959370
11	903428	24041422	907137	24000446	110236764	40976	9959107
12	906325	24009408	910070	23968168	109881598	41240	9958844
13	909222	34977495	913003	23935990	109528589	41505	9958580
14	912119	23945985	915936	23903914	109177805	41771	9958315
15	915016	23913978	918870	23871940	108829233	42038	9958049
16	917913	23882373	921804	23840067	108482852	42306	9957782
17	920809	23850867	924738	23808292	108138767	42575	9957515
18	923706	23819460	927761	23776615	107796712	42845	9957247
19	926602	23788153	930605	23745038	107456902	43115	9956978
20	929498	23756942	933539	23713557	107119198	43386	9956708
21	932395	23725832	936473	23682174	106783466	43658	9956437
22	935291	23694818	939407	23650887	106449917	43931	9956165
23	938187	23663900	942343	23619695	106118428	44205	9955893
24	941083	23633080	945277	23588601	105788969	44479	9955620
25	943979	23602355	948212	23557601	105461519	44754	9955346
26	946875	23571725	951147	23526695	105136063	45030	9955071
27	949771	23541190	954083	23495883	104812581	45307	9954795
28	952667	23510748	957019	23465163	104491055	45585	9954518
29	955563	23480290	959934	23434535	104171468	45864	9954240
30	958458	23450143	962890	23403999	103853919	46144	9953962
31	961354	23419980	965826	23373556	103538166	46424	9953682
32	964249	23389908	968763	23343203	103224405	46705	9953403
33	967144	23359927	971699	23312940	102912514	46987	9953122
34	970039	23330036	974636	23282766	102602473	47270	9952840
35	972934	23300235	977573	23252681	102294266	47554	9952557
36	975829	23270525	980509	23222686	101987889	47839	9952274
37	978724	23240903	983446	23192778	101683314	48125	9951990
38	981619	23211368	986383	23162956	101380525	48412	9951705
39	984514	23181920	989320	23133220	101079507	48700	9951419
40	987408	23152560	992257	23103572	100780346	48988	9951132
41	990303	23123287	995195	23074010	100482822	49277	9950844
42	993198	23094100	998133	23044533	100187022	49567	9950555
43	996092	23064999	1001072	23015141	99893042	49858	9950266
44	998987	23035985	1004010	22985836	99600655	50149	9949976
45	1001881	23007056	1006949	22956615	99310047	50441	9949685
46	1004775	22978212	1009887	22927478	99021104	50734	9949393
47	1007669	22949449	1012825	22898421	98733810	51028	9949100
48	1010563	22920769	1015763	22869446	98448162	51323	9948807
49	1013457	22892172	1018702	22840553	98164135	51619	9948513
50	1016351	22863658	1021641	22811742	97881716	51916	9948218
51	1019245	22835227	1024580	22783013	97600790	52214	9947922
52	1022139	22806878	1027519	22754366	97321746	52512	9947625
53	1025032	22778609	1030459	22725798	97044063	52811	9947327
54	1027926	22750420	1033399	22697309	96767939	53111	9947028
55	1030819	22722311	1036339	22668899	96493467	53412	9946729
56	1033713	22694283	1039279	22640569	96220411	53714	9946429
57	1036606	22666333	1042219	22612316	95948971	54017	9946128
58	1039495	22638461	1045160	22584140	95679034	54321	9945825
59	1042392	22610667	1048101	22556041	95410585	54626	9945523
60	1045285	22582951	1051042	22528019	95143611	54932	9945219

Tttt

G.6

Iuxta Regulam adhibendi.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1045285	22582951	1051042	22528019	95143611	54932	9945218	60
1	1048178	22555313	1053983	22500075	94878103	55238	9944914	59
2	1051070	22527752	1056924	22472207	94614055	55545	9944609	58
3	1053963	22500267	1059866	22444414	94351448	55853	9944303	57
4	1056857	22472659	1062808	22416697	94090170	56162	9943996	56
5	1059749	22445527	1065750	22389055	93830595	56472	9943688	55
6	1062642	22418272	1068692	22361490	93572238	56782	9943379	54
7	1065534	22391091	1071634	22333998	93315361	57093	9943069	53
8	1068426	22363984	1074576	22306579	93059875	57405	9942759	52
9	1071318	22336951	1077518	22279233	92805759	57718	9942448	51
10	1074210	22309991	1080461	22251959	92553036	58032	9942136	50
11	1077102	22283104	1083404	22224757	92301618	58347	9941823	49
12	1079994	22256290	1086347	22197627	92051546	58663	9941509	48
13	1082886	22229549	1089291	22170570	91802810	58979	9941194	47
14	1085778	22202881	1092234	22143585	91555401	59296	9940879	46
15	1088669	22176285	1095178	22116672	91309309	59614	9940563	45
16	1091561	22149702	1098122	22089829	91064526	59933	9940246	44
17	1094452	22123308	1101066	22063055	90821043	60253	9939928	43
18	1097344	22096925	1104010	22036351	90578848	60574	9939609	42
19	1100235	22070612	1106954	22009717	90337917	60895	9939290	41
20	1103126	22044368	1109899	21983151	90098368	61217	9938970	40
21	1106017	22018195	1112844	21956655	89859858	61540	9938649	39
22	1108908	21992090	1115789	21930226	89622688	61864	9938327	38
23	1111799	21966054	1118734	21903865	89386745	62189	9938004	37
24	1114690	21940086	1121680	21877571	89152021	62515	9937680	36
25	1117580	21914186	1124625	21851344	88918508	62842	9937353	35
26	1120471	21888355	1127571	21825185	88686196	63170	9937029	34
27	112336	21862590	1130517	21799091	88455079	63499	993670	33
28	1126252	21836892	1133463	21773064	88225146	63828	9936370	32
29	1129142	21811261	1136409	21747103	87996394	64158	9936048	31
30	1132032	21785698	1139355	21721209	87768816	64480	9935719	30
31	1134922	21760199	1142302	21695378	87542404	64821	9935389	29
32	1137812	21734767	1145249	21669613	87317150	65154	9935058	28
33	1140702	21709400	1148196	21643912	87093043	65488	9934727	27
34	1143592	21684100	1151144	21618278	86870072	65822	9934395	26
35	1146482	21658865	1154092	21592708	86648225	66157	9934062	25
36	1149372	21633695	1157040	21567202	86427493	66493	9933728	24
37	1152261	21608580	1159988	21541756	86207866	66830	9933393	23
38	1155151	21583540	1162936	21516372	85989335	67168	9933057	22
39	1158040	21558554	1165884	21491050	85771891	67507	9932720	21
40	1160929	21533639	1168832	21465[illegible]79	85555525	67846	9932383	20
41	1163818	21508781	1171781	21440592	85340129	68186	9932046	19
42	1166707	21483986	1174730	21415459	85125995	68527	9931707	18
43	1169596	21459254	1177679	21390385	84912817	68869	9931367	17
44	1172485	21434585	1180628	21365372	84700687	69212	9931025	16
45	1175374	21409979	1183577	21340423	84489598	69556	9930685	15
46	1178263	21385434	1186527	21315533	84279571	69901	9930342	14
47	1181151	21360949	1189478	21290702	84070565	70247	9930000	13
48	1184040	21336524	1192427	21265931	83862572	70593	9929655	12
49	1186928	21312160	1195377	21241220	83655585	70940	9929310	11
50	1189816	21287855	1198328	21216567	83449598	71288	9928964	10
51	1192704	21263609	1201279	21191972	83244610	71637	9928617	9
52	1195592	21239423	1204230	21167436	83040614	71987	9928270	8
53	1198480	21215297	1207181	21142959	82837603	72338	9927922	7
54	1201368	21191230	1210132	21118540	82635570	72690	9927573	6
55	1204255	21167222	1213084	21094179	82434508	73043	9927223	5
56	1207143	21143273	1216036	21069877	82234410	73396	9926872	4
57	1210031	21119381	1218988	21045631	82035268	73750	9926521	3
58	1212918	21095546	1221940	21021441	81837074	74105	9926169	2
59	1215806	21071769	1224892	20997308	81639821	74461	9925816	1
60	1218693	21048049	1227845	20973231	81443502	74818	9925462	M.

Contra regulam adhibend

G.83

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1218693	21048049	1227846	20973231	81443502	74818	9925461	60
1	1221580	21024385	1230798	20949209	81248110	75176	9925106	59
2	1224467	21000779	1233751	20925245	81053639	75534	9924750	58
3	1227354	20977230	1236704	20901337	80860083	75893	9924393	57
4	1230241	20953738	1239658	20877485	80667435	76253	9924036	56
5	1233128	20930302	1242612	20853688	80475688	76614	9923678	55
6	1236015	20906922	1245566	20829946	80284835	76976	9923319	54
7	1238901	20883595	1248520	20806256	80094869	77339	9922959	53
8	1241788	20860323	1251474	20782620	79905783	77703	9922598	52
9	1244674	20837106	1254428	20759038	79717572	78068	9922236	51
10	1247560	20813945	1257383	20735512	79530231	78433	9921874	50
11	1250446	20790838	1260338	20712039	79343754	78799	9921511	49
12	1253332	20767785	1263293	20688619	79158136	79166	9921147	48
13	1256218	20744785	1266249	20665251	78973371	79534	9920782	47
14	1259104	20721838	1269205	20641935	78789454	79903	9920416	46
15	1261990	20698946	1272161	20618946	78606379	8 272	9920049	45
16	1264876	20676107	1275117	20595465	78724142	80642	9919682	44
17	1267761	20653321	1278073	20572308	78242737	81013	9919314	43
18	1270647	20630588	1281029	20549203	78062159	81385	9918945	42
19	1273532	20607906	1283986	20526148	77882402	81758	9918575	41
20	1276417	20585278	1286943	20503146	77703459	82132	9918204	40
21	1279302	20562701	1289900	20480194	77525324	82507	9917832	39
22	1282187	20540176	1292857	20457293	77347991	82883	9917459	38
23	1285072	20517703	1295815	20434444	77171455	83259	9917086	37
24	1287957	20495281	1298773	20411645	76995710	83636	9916712	36
25	1290841	20472909	1301731	20388895	76820751	84014	9916337	35
26	1293726	20450587	1304689	20366194	76646573	84393	9915961	34
27	1296610	20428316	1307648	20343543	76473170	84773	9915584	33
28	1299494	20406096	1310607	20320942	76300536	85154	9915206	32
29	1302378	20383925	1313566	20298389	76128666	85536	9914828	31
30	1305262	20361806	1316525	20275887	75957554	85919	9914449	30
31	1308146	20339737	1319485	20253435	75787195	86302	9914069	29
32	1311030	20317717	1322445	20231031	75617584	86086	9913688	28
33	1313914	20295746	1325405	20208675	75448716	87071	9913306	27
34	1316798	20273822	1328365	20186365	75280586	87457	9912923	26
35	1319681	20251947	1331325	20164103	75113189	87844	9912540	25
36	1322564	20230120	1334285	20141888	74946521	88232	9912156	24
37	1325447	20208341	1337246	20119720	74780577	88621	9911771	23
38	1328330	20186611	1340207	20097600	74615354	89011	9911385	22
39	1331213	20164931	1342168	20075530	74450847	89401	9910998	21
40	1334096	20143301	1346129	20053509	74287052	89792	9910610	20
41	1336979	20121717	1349891	20031533	74123964	90184	9910221	19
42	1339862	20100180	1352453	20009603	73961579	90577	9909832	18
43	1342744	20078689	1355015	19987718	73799892	90971	9909442	17
44	1345627	20057245	1357977	19965880	73638898	91365	9909051	16
45	1348509	20035846	1360940	19944086	73478595	91760	9908659	15
46	1351392	20014494	1363903	19922338	73318972	92156	9908266	14
47	1354274	19993189	1366866	19900036	73160051	92553	9907873	13
48	1357156	19971931	1369830	19878980	73001766	92951	9907479	12
49	1360038	19950718	1372793	19857368	72844173	93350	9907084	11
50	1362920	19929552	1375757	19829852	72687247	93750	9906688	10
51	1365802	19908432	1378721	19814281	72530983	94151	9906291	9
52	1368683	19887357	1381686	19792805	72375376	94552	9905893	8
53	1371564	19866327	1384650	19771373	72220422	94954	9905494	7
54	1374446	19845341	1387615	19749984	72066117	95357	9905095	6
55	1377327	19824400	1390580	19728639	71912459	95761	9904695	5
56	1380208	19803504	1393545	19707338	71759440	96166	9904294	4
57	1382089	19782652	1396510	19686080	71607058	96572	9903892	3
58	1385970	19761844	1399476	19664865	71455313	96975	9903489	2
59	1388851	19741081	1402442	19643694	71304198	97387	9903084	1
60	1391731	19720362	1405408	19622566	71153707	97796	9902681	0
								M.

M.	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes*	*Differentiæ & Logarit. Tangent.*	*Tangentes*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus.*	
0	1391731	19720362	1405408	19622566	71153706	97796	9902681	60
1	1394612	19699687	1408374	19601482	71003833	98205	9902276	59
2	1397492	19679054	1411341	19580439	70854576	98615	9901870	58
3	1400373	19658464	1414308	1945[illegible]438	70705932	99026	9901463	57
4	1403253	19637917	1417275	19538479	70557898	99438	9901055	56
5	1406133	19617413	1420242	19517562	70410470	99851	9900646	55
6	1409013	19596952	1423210	19496687	70263645	100265	9900237	54
7	1411893	19576535	1426178	19475756	70117419	100679	9899827	53
8	1414772	19556160	1429146	19455066	69971789	101094	9899416	52
9	1417652	19535827	1432115	19434317	69826751	101510	9899004	51
10	1420531	19515538	1435084	19413611	69682302	101927	9898591	50
11	1423410	19495290	1438053	19392945	69538439	102345	9898177	49
12	1426289	19475084	1441022	19372320	69395158	102764	9897762	48
13	1429168	19454918	1442992	19351734	69252455	103184	9897347	47
14	1432047	19434794	1446961	19331190	69110326	103604	9896931	46
15	1434926	19414711	1449931	19310686	68968768	104025	9896514	45
16	1437805	19334669	1452901	19290222	68827777	104447	9896096	44
17	1440684	19374668	1455871	19269798	68687250	104870	9895677	43
18	1443562	19354705	1458842	19249414	68547438	105394	9895257	42
19	1446441	1933478[illegible]	1461813	19229068	68408173	105719	9894837	41
20	1449319	19314908	1464784	19208765	68269416	106145	9894416	40
21	1452197	19295052	1467755	19188501	68131209	106071	9893994	39
22	1455075	19275275	1470727	19168277	67993549	106998	9893571	38
23	1457953	1925551[illegible]	1473699	19148091	67856423	107426	9893147	37
24	1460831	19235798	14[illegible]6671	19127943	67719855	1078[illegible]5	9892723	36
25	1463708	19216118	1479644	19107833	67583815	108285	9892298	35
26	1466786	19196477	1482617	19087761	67448309	108716	9891872	34
27	1469463	19176875	1485590	19067727	67313334	109148	9891445	33
28	1472340	19157313	1488563	19047732	67178887	109581	9891017	32
29	1475217	19137792	1491536	19027777	67044065	110015	9890588	31
30	1478094	19118310	1494510	19007861	66911564	110449	9890159	30
31	1480971	19098865	1497484	18987981	66778681	110884	9889729	29
32	1483848	19079459	1500458	18968139	66646313	111320	9889298	28
33	1486724	19060091	1503433	18908334	66514457	111757	9888866	27
34	1489601	19040761	1506408	18928566	66383110	112195	9888433	26
35	1492477	19021469	1509383	18908835	66252268	112634	9887999	25
36	1495353	19002215	1512358	18889141	66121928	113074	9887564	24
37	1498229	19982999	1515334	18869485	65992087	113514	9887128	23
38	1501105	18963823	1518310	18849867	65862743	113955	9886692	22
39	1503981	18944682	1521286	18830285	65733894	114397	9886255	21
40	1506857	18925581	1524262	18810741	65605537	114840	9885817	20
41	1509733	18906517	1527239	18791233	65477669	115284	9885378	19
42	1512608	18887489	1530216	18771760	65350287	115729	9884938	18
43	1515484	18868498	1533193	18752323	65223388	116175	9884498	17
44	1518359	18849545	1536170	18732921	65096969	116622	9884057	16
45	1521234	18830625	1539148	18713556	64971028	117069	9883615	15
46	1524109	18811744	1542126	18694227	64845563	117517	9883172	14
47	1526984	18792899	1545104	18674933	64720571	117966	9882728	13
48	1529859	18774090	1548082	18655674	64596049	118416	9882283	12
49	1532734	18755318	1551061	18636451	64471994	118867	9881838	11
50	1535608	18736581	1554040	18617262	64348404	119319	9881392	10
51	1538482	18717882	1557019	18598111	64225276	119771	9880945	9
52	1541356	18699218	1559999	18578994	64102607	120224	9880497	8
53	1544230	18680589	1562979	18559911	63980394	120678	9880048	7
54	1547104	18661995	1565959	18540862	63858635	121133	9879598	6
55	1549978	18643437	1568939	18521848	63737327	121589	9879148	5
56	1552755	18624915	1571920	18502869	63616468	122046	9878697	4
57	1555725	18606428	1574901	18483924	63496056	122504	9878245	3
58	1558599	1858797[illegible]	1577882	18465013	63376089	122962	9877792	2
59	1561472	1856955[illegible]	158086[illegible]	18446136	63256564	123421	9877338	1
60	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0.	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	60
1.	1567216	18532826	1586826	18408484	63018829	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	1589808	18389707	62900615	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	1592791	18370964	62782833	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	1595774	18352253	62665481	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	1598757	18333576	62548556	126196	9874597	55
6	1581681	18441594	1601740	18314933	62432056	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	1604723	18296324	62315979	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	1607707	18277747	62200323	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	1610691	18259203	62085085	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	1613675	18240692	61970263	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	1616660	18222213	61855854	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	1619645	18203705	61741856	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	1622630	18185351	61628267	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	1625615	18166969	61515085	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	1628601	18148619	61402307	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	1631587	18130301	61289930	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	1634573	18112014	61177952	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	1637560	18093758	61066370	133313	9868557	42
19	1618909	18208323	1640547	18075533	60955184	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	1643534	18057338	60844392	133268	9867616	40
21	1624629	18172624	1646522	18039177	60733992	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	1649510	18021047	60623981	134226	9866671	38
23	1630389	18137655	1652499	18002948	60514358	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	1655488	17984885	60405121	135187	9865722	36
25	1636129	18102541	1658477	17966842	60296268	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	1661466	17948835	60187796	136152	9864770	34
27	1641868	1806749	1664456	17930859	60079703	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	1667446	17912913	59971987	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	1670436	17894997	59864646	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	1673426	17877114	59757675	138093	9862856	30
31	1653345	17997839	1676417	17859259	59651081	138580	9862376	29
32	1656214	17980503	1679408	17841435	59544852	139068	9861895	28
33	1659082	17963198	1682399	17823641	59438989	139557	9861413	27
34	1661951	17945922	1685390	17805875	59333490	140047	9860930	26
35	1664819	17928677	1688382	17788139	59228353	140538	9860446	25
36	1667687	17911463	1691374	17770433	59123576	141030	9859961	24
37	1670555	17894281	1694366	17752759	59019157	141522	9859475	23
38	1673423	17877128	1697358	17735113	58915095	142015	9858989	22
39	1676291	17860006	1700351	17717497	58811388	142509	0858502	21
40	1679159	17842915	1703344	17699911	58708035	143004	9858014	20
41	1682027	17825852	1706337	17682352	58605034	143500	9857525	19
42	1684894	17808820	1709331	17664823	58502385	143997	9857035	18
43	1687761	17791817	1712325	17647322	58400087	144495	9856544	17
44	1690628	17774843	1715319	17629849	58298138	144994	9856053	16
45	1693495	17757899	1718313	17612406	58196536	145493	9355561	15
46	1696362	17740985	1721308	17594992	58095279	145993	9855068	14
47	1699229	17724100	1724304	17577606	57994366	146494	9854574	13
48	1702095	17707244	1727300	17560348	57893795	146996	9854079	12
49	1704962	17690418	1730296	17542919	57793564	147499	9853583	11
50	1707828	17673622	1733292	17525619	57693670	148003	9853087	10
51	1710694	17656856	1736287	17508349	57594111	148507	9852590	9
52	1713560	17640118	1739284	17491106	57494885	149012	9852092	8
53	1716426	17623408	1742281	17473890	57395990	149518	9851593	7
54	1719292	17606726	1745278	17456701	57297425	150025	9851093	6
55	1722157	17590073	1748275	17439540	57199188	150533	9850593	5
56	1725022	17573448	1751273	17422406	57101277	151042	9850092	4
57	1727887	17556851	1754271	17405299	57003690	151552	9849590	3
58	1730752	17540283	1757270	17388220	56906425	152063	9849087	2
59	1733617	17523744	1760269	17371169	56809480	152575	9848583	1
60	1736482	17507234	1763268	17354146	56712854	153088	9848078	0
								M.

M	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes*	*Differentia & Logarit. Tangent.*	*Tangentes.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus.*	
0	1730482	17507234	1763268	17354146	56712854	153088	9848078	60
1	1739347	17490751	1766268	17337150	56616545	153601	9847572	59
2	1742211	17474296	1769268	17320181	56520550	154115	9847066	58
3	1745075	17457869	1772268	17303239	56424868	154630	9846559	57
4	1747939	17441470	1775269	17286324	56239498	155146	9846051	56
5	1750803	17425098	1778270	17269435	56234439	155663	9845542	55
6	1753667	17408754	1781271	17252573	56139689	156181	9845032	54
7	1756531	17392438	1784272	17235738	56045247	156700	9844521	53
8	1759394	17376149	1787274	17218929	55951112	157220	9844010	52
9	1762258	17359887	1790276	17202147	55857283	157740	9843498	51
10	1765121	17343652	1793278	17185391	55763759	158261	9842985	50
11	1767984	17327444	1796281	17168661	55670539	158783	9842471	49
12	1770847	17311263	1799284	17151957	55577622	159306	9841956	48
13	1773710	17295109	1802287	17135279	55485007	159830	9841440	47
14	1776573	17278982	1805291	17118627	55392692	160355	9840924	46
15	1779435	17262882	1808295	17182001	55300676	160881	9840407	45
16	1782298	17246809	1811299	17085401	55208958	161408	9839889	44
17	1785160	17230762	1814303	17068827	55117535	161935	9839370	43
18	1788022	17214742	1817308	17052279	55029406	162463	9838850	42
19	1790884	17198749	1820313	17035757	54935569	162992	9838329	41
20	1793740	1718278	1823318	17019261	54845022	163522	9837808	40
21	1796608	1716684	1826324	17002790	54754764	164053	9837286	39
22	1799469	1715092	1829329	16986344	54664793	164585	9836763	38
23	1802331	1713504	1832335	16969924	54575107	165117	9836239	37
24	1805192	17119175	1835342	10953529	54485705	165650	9835714	36
25	1808053	17103342	1838349	10937158	54396586	166184	9835189	35
26	1810914	17087531	1841357	16920812	54307748	166719	9834663	34
27	1813774	17071746	1844365	16904491	54219190	167255	9834136	33
28	1816634	17055987	1847373	16888195	54130911	167792	9833608	32
29	1819495	17040154	1850382	16871924	54042909	168330	9833079	31
30	1822355	17024547	1853391	16855678	53955183	168869	9832549	30
31	1825215	17008866	1856400	16839458	53867731	169408	9832019	29
32	1828075	16993210	1859409	16823262	53780552	169948	9831488	28
33	1830935	16977579	1862419	16807090	53693644	170489	9830956	27
34	1833795	16961973	1865429	16790942	53607006	171031	9830423	26
35	1836654	16946392	1868439	16774818	53520637	171574	9829889	25
36	1839513	16930836	1871449	16758718	53434536	172118	9829354	24
37	1842372	16915305	1874460	16742642	53348702	172663	9828818	23
38	1845231	16899799	1877471	16726590	53263134	173209	9828282	22
39	1848090	16884317	1880482	16710561	53177831	173756	9827744	21
40	1850949	16868800	1883494	16694557	53092792	174303	9827200	20
41	1853808	16853425	1886500	16678577	53008016	174851	9826667	19
42	1856666	16838021	1889518	16662621	52923503	175400	9826128	18
43	1859524	16822638	1892531	16646688	52839251	175950	9825587	17
44	1862382	16807280	1895544	16630779	52755259	176501	9825040	16
45	1865240	16791946	1898558	16614893	52671525	177053	9824504	15
46	1868098	16776636	1901572	16599030	52588048	177606	9823961	14
47	1870956	16761351	1904586	16583191	52504826	178160	9823417	13
48	1873813	16746090	1907601	16567375	52421857	178715	9822872	12
49	1876670	16730853	1910616	16551583	52339140	179270	9822227	11
50	1879527	16715640	1913632	16535814	52256673	179826	9821781	10
51	1882384	16700451	1916648	16520068	52174455	180383	9821234	9
52	1885241	16685286	1919664	16504345	52092485	180941	9820686	8
53	1888098	16670145	1922680	16488645	52010762	181500	9820137	7
54	1890954	16655028	1925697	16472968	51929285	182060	9819587	6
55	1893810	16639934	1928714	16457313	51848053	182621	9819037	5
56	1896666	16624864	1931731	16441681	51767065	183183	9818486	4
57	1899522	16609817	2934749	16426072	51686321	183745	9817934	3
58	1902378	16594794	1937767	16410486	51605820	184308	9817381	2
59	1905234	16579794	1940785	16394922	51525561	184872	9816827	1
60	1908090	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	0
								M.

M.	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes*	*Differentia & Logarit. Tangent.*	*Tangentes*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus*
0	1908090	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272
1	1910945	16549865	1946822	16363862	51365765	186003	9815716
2	1913800	16534935	1949841	16348365	51286225	186570	9815160
3	1916655	16520028	1952861	16332890	51206922	187138	9814603
4	1919510	16505544	1955881	16317458	51127855	187706	9814045
5	1922365	16490283	1658901	16302008	51049023	277175	9813486
6	1925220	16475445	1961922	16286600	50970425	188845	9812926
7	1928074	16460630	1964943	16271214	50892060	189416	9812366
8	1930928	16445837	1967964	16255849	50813927	189988	9811850
9	1933782	16431067	1970985	16240506	50736025	190561	9811243
10	1936636	16416320	1974007	16225185	50658353	191135	9810680
11	1939490	16401596	1977029	16209886	50580910	191710	9810116
12	1942344	16386895	1980052	16194610	50503695	192285	9809551
13	1945197	16372216	1983075	16179355	50426707	192861	9808986
14	1948050	16357559	1986098	16164121	50349935	193438	9808420
15	1950903	16342924	1989122	16148908	50273407	194016	9807853
16	1953756	16328311	1992146	16133716	50197092	194595	9807285
17	1956609	16313720	1995171	16118545	50120999	195175	9806716
18	1959462	16299151	1998196	16103395	50045127	195756	9806147
19	1962314	16284604	2001221	16088266	49969475	196338	9805577
20	1965166	16270079	2004247	16073159	49894042	196920	9805006
21	1968018	16255576	2007273	16058073	49818827	197503	9804434
22	1970870	16241095	2010299	16043008	49743829	198087	9803861
23	1973722	16226636	2013326	16027964	49669047	198672	9803287
24	1976574	16212198	2016353	16012940	49594481	199258	9802712
25	1979425	16197782	2019380	15997937	49520130	199845	9802137
26	1982276	16183388	2022408	15982955	49445993	200433	9801561
27	1985127	16169016	2025436	15967994	49372069	201022	9800984
28	1987978	16154665	2028464	15953053	49298357	201612	9800406
29	1990829	16140336	2031493	15938133	49224856	202203	9799827
30	1993679	16126028	2034522	15923233	49151565	202795	9799247
31	1996530	16111742	2037552	15908355	49078483	203387	9798667
32	1999380	16097477	2040582	15893497	49005610	203980	9798086
33	2002230	16083232	2043612	15878658	48932945	204574	9797504
34	2005080	16069008	2046643	15863839	48860488	205169	9796921
35	2007930	16054805	2049674	15849040	48788238	205765	9796337
36	2010780	16040623	2052705	15834261	48716193	206362	9795753
37	2013629	16026462	2055737	15819502	48644352	206960	9795168
38	2016478	16012322	2058769	15804764	48572714	207558	9794582
39	2019327	15998203	2061801	15790046	48501278	208157	9793995
40	2022176	15984105	2064834	15775348	48430043	208757	9793407
41	2025025	15970028	2067867	15760670	48359008	209358	9792818
42	2027874	15955972	2070900	15746012	48288171	209960	9792228
43	2030722	15941936	2073934	15731373	48217531	210163	9791638
44	2033570	15927921	2076968	15716754	48147088	211167	9791047
45	2036418	15913926	2080002	15702154	48076841	211772	9790455
46	2039266	15899951	2083037	15687573	48006790	212378	9789862
47	2042114	15885996	2086073	15673012	47936934	212984	9789268
48	2044962	15872062	2089109	15658461	47867274	213591	9788674
49	2047809	15858148	2092145	15643949	47797809	214199	9788079
50	2050656	15844254	2095182	15629446	47728538	214808	9787483
51	2053503	15830371	2098219	15614953	47659460	215418	9786886
52	2056350	15816518	2101256	15600489	47590575	216029	9786288
53	2059197	15802685	2104293	15586044	47521882	216641	9785689
54	2062043	15788871	2107331	15571617	47453380	217254	9785090
55	2064889	15775077	2110369	15557210	47385067	217867	9784490
56	2067735	15761303	2113407	15542822	47316942	218481	9783889
57	2070581	15747559	2116446	15528463	47249003	219096	9783287
58	2073427	15733824	2119485	15514112	47181249	219712	9782684
59	2076272	15720109	2122525	15499780	47113680	220329	9782080
60	2079117	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2079137	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476	60
1	2081962	15692738	2128605	15471172	46979093	221566	9780871	59
2	2084807	15679082	2141646	15456896	46912075	222186	9780265	58
3	2087652	15665445	2134687	15442639	46845240	222806	9779658	57
4	2090497	15651828	2137729	15428401	46778587	223427	9779050	56
5	2093342	15638230	2140771	15414181	46712115	224049	9778442	55
6	2096180	15624651	2143814	15399979	46645823	224672	9777833	54
7	2099030	15611092	2146857	15385796	46579711	225296	9777223	53
8	2101874	15597552	2149900	15371632	46513778	225921	9776612	52
9	2104718	15584031	2152944	15357484	46448023	226547	9776000	51
10	2107562	15570530	2155988	15343356	46382445	227174	9775387	50
11	2110405	15557048	2159032	15329246	46317043	227802	9774773	49
12	2113248	15543585	2162077	15315155	46251817	228430	9774157	48
13	2116091	15530141	2165122	15301062	46186767	229052	9773544	47
14	2118934	15516715	2168167	15287026	46121892	229689	9772928	46
15	2121777	15503308	2171213	15272988	46057192	230320	9772311	45
16	2124620	15489920	2174259	15258968	45992666	230953	9771693	44
17	2127462	15476551	2177306	15244966	45928314	231585	9771075	43
18	2130304	15463200	2180352	15230981	45864135	232219	9770456	42
19	2133146	15449868	2183400	15217014	45800128	232854	9769836	41
20	2135988	15436554	2186448	15203064	45736291	233490	9769215	40
21	2138830	15423259	2189496	15189133	45672623	234126	9768593	39
22	2141671	15409982	2192544	15175219	45609123	234763	9767970	38
23	2144512	15396724	2195593	15161323	45545790	235401	9767347	37
24	2147353	15383484	2198642	15147444	45482623	236040	9766723	36
25	2150194	15370262	2201692	15133582	45419621	236680	9766098	35
26	2153035	15357059	2204742	15119738	45356785	237321	9765472	34
27	2155876	15343874	2207792	15105911	45294114	237963	9764845	33
28	2158716	15330708	2210843	15092102	45231607	238600	9764217	32
29	2161556	15317560	2213894	15078310	45169263	239250	9763589	31
30	2164396	15304430	2216946	15064535	45107083	239895	9762960	30
31	2167236	15291319	2219998	15050779	45045065	240540	9762330	29
32	2170070	15278226	2223051	15037040	44983211	241186	9761699	28
33	2172916	15265150	2226104	15023317	44921521	241833	9761067	27
34	2175755	15252092	2229157	15009611	44859993	242481	9760435	26
35	2178594	15239052	2232211	14995922	44798626	243130	9759802	25
36	2181433	15226030	2235265	14982250	44737419	243780	9759168	24
37	2184272	15213025	2238319	14968594	44676371	244431	9758533	23
38	2187111	15200038	2241374	14954955	44615481	245083	9757897	22
39	2189948	15187068	2244429	14941333	44554749	245735	9757260	21
40	2192787	15174116	2247485	14927728	44494174	246388	9756623	20
41	2195625	15161182	2250541	14914140	44433756	247042	9755985	19
42	2198463	15148266	2253597	14900569	44373494	247697	9755346	18
43	2201300	15135367	2256654	14887014	44313387	248353	9754706	17
44	2204137	15122485	2259711	14873475	44253435	249010	9754065	16
45	2206974	15109621	2262769	14859953	44193637	249668	9753423	15
46	2209811	15096774	2265827	14846447	44133992	250327	9752781	14
47	2212648	15083944	2268885	14832957	44074501	250987	8752138	13
48	2215485	15071132	2271944	14819485	44015263	251647	9751494	12
49	2218322	15058337	2275003	14806029	43955977	252308	9750849	11
50	2221158	15045559	2278063	14792589	43896942	252970	9750203	10
51	2223994	15032799	2281123	14779166	43838057	253633	9749557	9
52	2226830	15020056	2284183	14765759	43779321	254297	9748910	8
53	2229666	15007330	2287244	14752368	43720733	254962	9748262	7
54	2232502	14994620	2290305	14738992	43662293	255628	9747613	6
55	2235337	14981927	2293367	14725632	43604000	256295	9746963	5
56	2238172	14969251	2296429	14712288	43545855	256963	9746312	4
57	2241007	14956592	2299492	14698960	43487857	257632	9745660	3
58	2243842	14943950	2302555	14685649	43430006	258301	9745008	2
59	2246677	14931325	2305618	14672354	43372301	258971	9744355	1
60	2249511	14918717	2308682	14659075	43314742	259942	9743700	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2249511	14918717	2308682	14659073	43314749	259642	9743001	60
1	2252345	14906126	2311746	14645812	43257328	260314	9743045	59
2	2255179	14893551	2314810	14632564	43200060	260987	9742389	58
3	2258013	14880993	2317875	14619332	43142947	261661	9741733	57
4	2260847	14868452	2320940	14606116	43085958	262336	9741076	56
5	2263680	14855927	2324006	14592916	43029122	263011	9740418	55
6	2266513	14843419	2327072	14579732	42972429	263687	9739759	54
7	2269346	14830928	2330139	14566564	42915878	264364	9739099	53
8	2272179	14818453	2333206	14553411	42859468	265042	9738439	52
9	2275012	14805995	2336273	14540274	42803199	265721	9737778	51
10	2277844	14793553	2339341	14527152	42747070	266401	9737116	50
11	2280676	14781128	2342419	14514046	42691080	267082	9736453	49
12	2283508	14768719	2345478	14500955	42635228	267764	9735789	48
13	2286340	14756325	2348547	14487878	42579514	268447	9735124	47
14	2289172	14743947	2351616	14474817	42523937	269130	9734459	46
15	2292004	14741585	2354686	14461771	42468497	269814	9733793	45
16	2294835	14719239	2357757	14448740	42413193	270499	9733126	44
17	2297666	14706909	2360828	14435724	42358025	271185	9732458	43
18	2300497	14694595	2363899	14422723	42302993	271872	9731789	42
19	2303328	14682297	2366971	14409737	42248096	272560	9731120	41
20	2306159	14670015	2370043	14396766	42193334	273249	9730450	40
21	2308989	14657749	2373116	14383810	42138706	273939	9729779	39
22	2311819	14645498	2376189	14370868	42084211	274630	9729107	38
23	2314649	14633263	2379263	14357941	42029845	275322	9728434	37
24	2387479	14621044	2382337	14345029	41975617	276015	9727760	36
25	2320309	14608841	2385411	14332132	41921518	276709	9727085	35
26	2323138	14596654	2388486	14319250	41867550	277404	9726409	34
27	232596	14584483	2391561	14306384	41813712	278099	9725733	33
28	2328790	14572328	2394636	14293533	41760003	278795	9725056	32
29	2331625	14560189	2397712	14280697	41706424	279492	9724378	31
30	2334454	14548066	2400788	14267876	41652974	280190	9723699	30
31	2337282	14535958	2403865	14255069	41599653	280889	9723020	29
32	2340110	14523866	2406942	14242277	41546464	281589	9722340	28
33	2342938	14511789	2410020	14229500	41493407	282289	9721659	27
34	2345766	14499727	2413098	14216737	41440480	282990	9720977	26
35	2348594	14487680	2416176	14203988	41387683	283692	9720294	25
36	2351421	14475648	2419255	14191253	41335015	284395	9719610	24
37	2354248	14463632	2422334	14178533	41282475	285099	9718926	23
38	2357075	14451631	2425414	14165827	41230062	285804	9718241	22
39	2359902	14439645	2428494	14153135	41177775	286510	9717555	21
40	2162729	14427674	2431574	14140457	41125614	287217	9716868	20
41	2365555	14415718	2434655	14127793	41073577	287925	9716180	19
42	2368381	14403777	2437736	14115143	41021663	288934	9715491	18
43	2372207	14391851	2440818	14102507	40969871	289344	9714802	17
44	2374033	14379941	2443900	14089887	40918201	290054	9714112	16
45	2376859	14368046	2446983	14077281	40866652	290765	9713421	15
46	2379684	14356166	2450066	14064689	40815224	291477	9712729	14
47	2382509	14344301	2453150	14052111	40763917	292190	9712036	13
48	2385334	14332451	2456234	14039547	40712731	292904	9711343	12
49	2388159	14320616	2459319	14026997	40661665	293619	9710649	11
50	2390983	14308796	2462404	14014461	40610718	294335	9709954	10
51	2393808	14296991	2465490	14001939	40559890	295052	9709258	9
52	2396632	14285200	2468576	13989430	40509183	295770	9708561	8
53	2399456	14273424	2471662	13976935	40458596	296489	9707863	7
54	2402280	14261662	2474749	13964453	40408129	297209	9707165	6
55	2405104	14249915	2477836	13951986	40357781	297929	9706466	5
56	2407927	14238182	2480924	13939532	40307552	298650	9705766	4
57	2410750	14226464	2484012	13927092	40257440	299372	9705065	3
58	2413574	14214761	2487101	13914666	40207446	300095	9704363	2
59	2416396	14203072	2490191	13902253	40157569	300819	9703660	1
60	2419219	14191398	2494280	13889854	40107808	301544	9702957	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2419219	14191398	2493280	13889854	40107809	301544	9702957	60
1	2422041	14179738	2496370	13877468	40058165	302270	9702253	59
2	2423863	14168092	2499411	13865095	40008633	302997	9701548	58
3	2427685	14156461	2502552	13852737	39959218	303724	9700842	57
4	2430507	14144844	2505643	13840392	39909917	304452	9700135	56
5	2433329	14133242	2508735	13828061	39860729	305181	9699428	55
6	2436150	14121654	2511827	13815743	39811654	305911	9698720	54
7	2438971	14110081	2514920	13803439	39762695	306642	9698011	53
8	2441792	14098522	2518013	13791148	39713852	307374	9097301	52
9	2444613	14086977	2521106	13778870	39665124	308107	9696590	51
10	2447434	14075447	2524200	13766606	39616509	308841	9695879	50
11	2450254	14063931	2527294	13754355	39568006	309576	9695167	49
12	2453074	14052429	2530389	13742117	39519614	310312	9694454	48
13	2455894	14040940	2533484	13729891	39471331	311049	9693740	47
14	2458714	14029465	2536580	13717679	39423158	311786	9693025	46
15	2461533	14018004	2539676	13705480	39375094	312524	9692309	45
16	2464352	14006557	2542773	13693294	39327139	313263	9691593	44
17	2467171	13995124	2545870	13681121	39279294	314003	9690876	43
18	2469990	13983705	2548968	13668961	39231557	314744	9690158	42
19	2472809	13972300	2552066	13656814	39183929	315486	9689439	41
20	2475628	13960909	2555165	13644680	39136409	316229	9688719	40
21	2478446	13949532	2558264	13632559	39088998	316973	9687998	39
22	2481264	13938168	2561364	13620450	39041695	317718	9687277	38
23	2484082	13926818	2564464	13608354	38994501	318464	9686555	37
24	2486900	13915482	2567564	13596272	38947416	319210	9685832	36
25	2489717	13904159	2570665	13584202	38900438	319957	9685108	35
26	2492534	13892850	2573766	13572145	38853567	320705	9684383	34
27	2495351	13881554	2576868	13560100	38806801	321454	9683657	33
28	2498168	13870272	2579970	13548068	38760139	322204	9682931	32
29	2500984	13859004	2583073	13536049	38713580	322955	9682204	31
30	2503800	13847749	2586176	13524042	38667125	323707	9681476	30
31	2506616	13836508	2589280	13512048	38620772	324460	9680747	29
32	2509431	13825280	2592384	13500066	38574525	325214	9680017	28
33	2512248	13814066	2595489	13488097	38528384	325969	9679287	27
34	2515064	13802865	2598594	13476141	38482347	326724	9678556	26
35	2517879	13791678	2601700	13464198	38436414	327480	9677824	25
36	2520694	13780504	2604806	13452267	38390584	328237	9677091	24
37	2523509	13769343	2607912	13440348	38344857	328995	9676357	23
38	2526324	13758195	2611019	13428441	38299232	329754	9675623	22
39	2529138	13747061	2614126	13416547	38253708	330514	9674888	21
40	2531952	13735940	2617234	13404665	38208285	331275	9674152	20
41	2534766	13724833	2620342	13392796	38162963	332037	9673415	19
42	2537580	13713739	2623451	13380939	38117740	332800	9672677	18
43	2540391	13702658	2626560	13369094	38072616	333564	9671938	17
44	2543206	13691590	2629670	13357262	38027592	334328	9671199	16
45	2546019	13680535	2632780	13345442	37982666	335093	9670459	15
46	2548831	13669493	2635891	13333634	37937838	335859	9669718	14
47	2551645	13658464	2639002	13[illegible]1838	37893109	336626	9668976	13
48	2554458	13647448	2642114	13310054	37848479	337394	9668233	12
49	2557270	13636445	2645226	13298282	37803948	338163	9667490	11
50	2560082	13625454	2648339	13286521	37759515	338933	9666746	10
51	2562894	13614476	2651452	13274772	37715180	339704	9666001	9
52	2565706	13603511	2654566	13263035	37670943	340476	9665255	8
53	2568517	13592559	2657680	13251310	37626803	341249	9664508	7
54	2571328	13581620	2660795	13239597	37582760	342023	9663761	6
55	2574139	13570694	2663910	13227896	37538814	342798	9663013	5
56	2576950	13559781	2667026	13216208	37494964	343573	9662264	4
57	2579760	13548880	2670142	13204531	37451210	344349	9661514	3
58	2582570	13537992	2673258	13192866	37407551	345126	9660763	2
59	2585380	13527117	2676375	13181213	37363987	345904	9660011	1
60	2588190	13516255	2679492	13165572	37320317	346683	9659258	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit Tangent	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2588190	13516255	2679492	13165574	37320517	346683	9659258	60
1	2591000	13505406	2682610	13157943	37277141	347463	9658505	59
2	2593810	13494570	2685728	13146326	37233859	348244	9657751	58
3	2596618	13483745	2688847	13134720	37190670	349026	9656996	57
4	2599427	13472934	2691966	13123126	37147574	349808	9956240	56
5	2602236	13462435	2695086	13111544	37104570	350591	9655484	55
6	2605045	13451348	2698206	13099973	37061659	351375	9654727	54
7	2607857	13440573	2701327	13088413	37018840	352160	9653969	53
8	2610661	13429810	2704448	13076804	36976114	352946	9653210	52
9	2613469	13419060	2707570	13065327	36933479	353733	9652450	51
10	2616277	13408322	2710693	13053801	36890936	354521	9651689	50
11	2619084	13397596	2713816	13042286	36848483	355310	9650927	49
12	2621891	13386183	2716940	13030783	36806121	356100	9950165	48
13	2624698	83376182	2720064	13019291	36763849	356891	9649402	47
14	2627505	13365493	2723189	13007810	36721666	357683	9648638	46
15	2630312	13354817	2726314	12996341	36679574	358476	9647873	45
16	2633118	13344153	2729439	12984283	36637572	359270	9647108	44
17	2635924	13333502	2732565	22973438	36595659	360064	9646342	4
18	2638730	13322863	2735691	12962004	36553836	360859	9645575	4
19	2641536	13312237	2738818	12950582	36512107	361655	9644807	41
20	2644342	13301623	2741945	12939171	36470455	362452	9644038	4
21	2647147	13291022	2745073	12927772	36428903	363250	9643268	3
22	2649952	13280432	2748201	12916383	36387437	364049	9642498	3
23	2652757	13269854	2751330	12905005	36346060	364849	9641727	3
24	2655562	13259288	2754459	12893638	36304771	365650	9640955	3
25	2658366	13248734	2757589	12882282	36263570	366452	9640182	3
26	2661170	13238191	2760729	12870936	36222456	367255	9639408	3
27	2663974	13227660	2763850	12859601	36181427	368059	963863	3
28	2666777	13217141	2766981	12848278	36140483	36886	9637858	3
29	2669580	13206633	2770113	12836965	36099623	369668	9637082	3
30	2672383	13196137	2773245	12825663	36058848	370474	9636305	3
31	2675186	13185653	2776378	12814372	36018156	371281	9635527	2
32	2677989	13175181	2779511	12803092	35977550	372089	9634745	2
33	2680792	13164721	2782645	12791825	35937029	372898	9633965	2
34	2683595	13154273	2785779	12780565	35896591	373708	9633185	2
35	2686397	13143837	2788914	12769318	35856241	374516	9632405	2
36	2689199	13133413	2792050	12758082	35815973	375331	9631626	2
37	2692001	13123000	2795186	12746856	35775789	376144	9630843	2
38	2694802	13112599	2798323	12735641	35735689	376958	9630055	2
39	2697603	13102210	2801460	12724438	35695692	379772	9629275	2
40	2700404	13091833	2804597	12713246	35655739	378587	9628490	2
41	2703205	13081468	2807735	12702065	35615888	379403	9627704	1
42	2706005	13071114	2810873	12690894	35576121	380220	9626917	1
43	2708805	13060771	2814012	12679733	35536438	381038	9626129	1
44	2711605	13050440	2817151	12668583	35496838	381857	9625341	1
45	2714405	13040120	2820291	12657443	35457320	382677	9624552	1
46	2717204	13029812	2823432	12646314	35417883	383498	9623762	1
47	2720003	13019515	2826573	12635195	35378528	384320	9622971	1
48	2722802	13005229	2829714	12624086	35339253	385143	9622179	1
49	2725601	12998955	2832856	12612988	35300059	385967	9621387	1
50	2728400	12988692	2835999	12601901	35260945	386791	9620594	1
51	2731198	12978441	2839142	12590825	35221911	387616	9619800	
52	2733996	12968291	2842286	12579759	35182956	388442	9619005	
53	2736794	32957972	2845430	12568793	35144080	389269	9618209	
54	2639592	12947755	2848575	12557658	35105283	390097	9617413	
55	2742389	12937549	2851720	12546623	35066565	390926	9616616	
56	2745186	12927354	2854866	12535598	35027925	391756	9615818	
57	2747983	12917171	2858012	12524584	34989364	392587	9615019	
58	2750789	12906999	2861159	12513580	34950881	393419	9614221	
59	2753577	12896838	2864306	12502586	34912477	394252	9613418	
60	2756373	12886689	2867454	12491603	34874151	395086	9612617	

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2756373	12886089	2867453	12491603	34874151	395086	9612617	60
1	2759169	12876551	2870601	12480630	34835903	395921	9611815	59
2	2761965	12866423	2873749	12459667	34797733	396756	9611012	58
3	2764761	12856306	2876898	12458714	34759640	397592	9610208	57
4	2767556	12846200	2880048	12447771	34721625	398429	9609403	56
5	2770351	12836105	2883198	12436838	34683686	399267	9608598	55
6	2773146	12826021	2886349	12425915	34645824	400106	9607792	54
7	2775941	12815948	2889501	12415002	34608038	400946	9606985	53
8	2778735	12805886	2892653	12404099	34570327	401787	9606177	52
9	2781529	12795835	2895806	12393206	34532692	402629	9605368	51
10	2784323	12785795	2898960	12382323	34495132	403472	9604558	50
11	2787117	12775766	2902114	12371450	34457647	404316	9603749	49
12	2789911	12765748	2905268	12360587	34420237	405161	9602938	48
13	2792704	12755741	2908423	12349734	34382903	406007	9602126	47
14	2795497	12745745	2911578	12338891	34345644	406884	9601313	46
15	2798290	12735760	2914734	12328059	34308459	407701	9600499	45
16	2801082	12725785	2917890	12317236	34271348	408549	9599685	44
17	2803874	12715821	2921047	12306423	34234310	409398	9598870	43
18	2806666	12705868	2924204	12295620	34197345	410248	9598054	42
19	2809458	12695926	2927362	12284827	34160453	411099	9597237	41
20	2812250	12685999	2930520	12274044	34123634	411951	9596419	40
21	2815041	12676073	2933679	12263271	34086888	412804	9595600	39
22	2817832	12666166	2936839	12252508	34050215	413658	9594781	38
23	2820623	12656267	2939999	12241754	34013615	414513	9593961	37
24	2823414	12646379	2943160	12231010	33977088	415369	9593140	36
25	2826205	12636501	2946321	12220275	33940634	416226	9592318	35
26	2828994	12626633	2949483	12209550	33904252	417083	9591495	34
27	2831784	12616776	2952645	12197835	33867942	417941	9590672	33
28	2834574	12606029	2955808	12188129	33831703	418800	9589848	32
29	2837364	12597093	2958971	12177433	33795535	419660	9589023	31
30	2840153	12587267	2962135	12166746	33759418	420521	9588197	30
31	2842942	12577452	2965299	12156069	33723410	421383	9587371	29
32	2845731	12567627	2968464	12145401	33687453	422246	9586544	28
33	2848520	12557853	2971629	12134743	33651566	423110	9585716	27
34	2851308	12548069	2974795	12124094	33615750	423975	9584887	26
35	2854096	12538296	2977962	12113455	33580005	424841	9584057	25
36	2856884	12528533	2981129	12102825	33544330	425708	9583226	24
37	2859672	12518780	2984297	12092204	33508725	426576	9582395	23
38	2862459	12509038	2987465	12081593	33473188	427445	9581563	22
39	2865246	12499306	2990634	12070992	33437720	428314	9580730	21
40	2868033	12489565	2993804	12060401	33402321	429184	9579896	20
41	2870819	12479874	2996973	12049819	33365990	430055	9579061	19
42	2873605	12470174	3000143	12039247	33331728	430927	9578225	18
43	2876391	12460484	3003314	12028684	33296534	431800	9577389	17
44	2879177	12450804	3006486	12018130	33261408	432674	9576552	16
45	2881963	12441134	3009658	12007585	33226351	433549	9575714	15
46	2884748	12431474	3012831	11997949	33191362	434425	9574875	14
47	2887533	12421824	3016004	11986522	33156441	435302	9574036	13
48	2890318	12412184	3019178	11976004	33121588	436180	9573196	12
49	2893103	12402554	3022353	11965495	33086802	437059	9572355	11
50	2895888	12392934	3025528	11954996	33052082	437938	9571513	10
51	2898672	12383324	3028703	11944506	33017427	438818	9570670	9
52	2901456	12373724	3031879	11934025	32982839	439699	9569826	8
53	2904240	12364134	3035055	11923553	32948317	440581	9568982	7
54	2907023	12354554	3038232	11913090	32913862	441464	9568137	6
55	2909806	12344984	3041410	11902636	32879487	442348	9567291	5
56	2912589	12335425	3044588	11892192	32845153	443233	9566444	4
57	2915371	12325876	3047767	11881757	32810898	444119	9565596	3
58	2918153	12316337	3050946	11871330	32776709	445007	9564747	2
59	2920935	12306808	3054126	11860912	32742586	445896	9563898	1
60	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	9563048	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	6563048	60
1	2926499	12287780	3060487	11840104	32674536	447676	9562197	59
2	2929280	12278280	3063669	11829713	32640597	448567	9561345	58
3	2932061	12268790	3066851	11819331	32606731	449459	9560492	57
4	2934842	12259310	3070034	11808958	32572937	450352	9559639	56
5	2937623	12249840	3073218	11798594	32539196	451246	9558785	55
6	2940403	12240379	3076402	11788239	32505517	452140	9557930	54
7	2943183	12230928	3079587	11777893	32471901	453035	9557074	53
8	2945953	12221487	3082772	11767556	32438348	453931	9556217	52
9	2948743	12212056	3085958	11757228	32404858	454828	9555360	51
10	2951523	12202634	3089144	11746908	32371430	455726	9554502	50
11	2954302	12193222	3092331	11736597	32338074	456625	9553643	49
12	2957081	12183820	3095518	11726295	32304762	457525	9552783	48
13	2959860	12174427	3098706	11716001	32271534	458426	9551922	47
14	2962630	12165044	3101895	11705716	32238349	459328	9551061	46
15	2965416	12155671	3105084	11695440	32205237	460231	9550199	45
16	2968194	12146308	3108274	11685173	32172187	461135	9549336	44
17	2977209	12136954	3111464	11674914	32139200	462040	9548472	43
18	2973750	12127610	3114655	11664695	32106275	462945	9547607	42
19	3976527	12118276	3117846	11654425	32073413	463851	9546742	41
20	2979304	12108952	3121038	11644194	32040613	464758	9545876	40
21	2982080	12099637	3124230	11633971	32007875	465666	9545009	39
22	2984857	12090332	3127423	11623757	31975197	466575	9544141	38
23	2987633	12081036	3130617	11613551	31942580	467485	9543272	37
24	2990409	12071749	3133811	11603353	31910024	468396	9542403	36
25	2993185	12062472	3137006	11593164	31877528	469308	9541533	35
26	2995960	12053204	3140201	11582983	31845093	470221	9540662	34
27	2998735	12043945	3143397	11572810	31812717	471135	9539790	33
28	3001510	12034696	3146594	11562646	31780401	472050	9538917	32
29	3004284	12025456	3149791	11552490	31748144	472966	9538043	31
30	3007058	12016225	3152989	11542341	31715946	473884	9537169	30
31	3009832	12007004	3156187	11532202	31683807	474802	9536294	29
32	3012606	11997792	3159386	11522071	31651727	475721	9535418	28
33	3015380	11988589	3162585	11511948	31619705	476641	9534541	27
34	3018153	11979396	3165785	11501835	31587742	477561	9533664	26
35	3020926	11970212	3168986	11491730	31556838	478482	9532786	25
36	3023699	11961037	3172187	11481633	31523992	479404	9531907	24
37	3026472	11951872	3175389	11471545	31492205	480327	9531027	23
38	3029244	11942716	3178591	11461465	31460476	481251	9530146	22
39	3032016	11933569	3181794	11451393	31428805	482176	9529264	21
40	3034788	11924431	3184998	11441329	31397191	483102	9528382	20
41	3037559	11915303	3188202	11431274	31365636	484029	9527499	19
42	3040339	11906184	3191407	11421227	31334138	484957	9526615	18
43	3043101	11897074	3194613	11411188	31302698	485886	9525730	17
44	3045872	11887973	3197819	11401157	31271315	486816	9524844	16
45	3048643	11878881	3201026	11391134	31239989	487747	9523958	15
46	3051413	11869798	3204233	11381119	31208720	488679	9523071	14
47	3054183	11860724	3207441	11371113	31177508	489611	9522183	13
48	3056953	11851659	3210649	11361115	31146352	490544	9521294	12
49	3059723	11842603	3213858	11351125	31115252	491478	9520404	11
50	3062492	11833557	3217067	11341144	31084208	492413	9519514	10
51	3065261	11824520	3220277	11331171	31053221	493349	9518623	9
52	3068030	11815492	3223488	11321206	31022289	494286	9517731	8
53	3070798	11806473	3226699	11311249	30991413	495224	9516838	7
54	3073566	11797463	3229911	11301300	30960593	496163	9515944	6
55	3076334	11788461	3233124	11292358	30929828	497103	9515050	5
56	3079102	11779468	3236337	11281424	30899119	498044	9514155	4
57	3081869	11770484	3239551	11271498	30868465	498986	9513259	3
58	3084636	11761509	3242766	11261580	30837866	499929	9512362	2
59	3087403	11752543	3245981	11251670	30807323	509873	9511464	1
60	3090170	11743586	3249197	11241768	30776834	501818	9510565	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3090170	11743580	3249197	11241768	30776834	501818	9510565	60
1	3092936	11734638	3252413	11231874	30746400	502764	9509666	59
2	3095702	11725699	3255630	11221988	30716020	503711	9508766	58
3	3098468	11716768	3258848	11212109	30685695	504659	9507865	57
4	3101234	11707840	3262066	11202239	30655423	505607	9506963	56
5	3103999	11698933	3265285	11192377	30625205	596556	9506061	55
6	3106764	11690029	3268504	11182523	30595041	507506	9505158	54
7	3109529	11681133	3271724	11172676	30564930	508457	9504254	53
8	3112294	11672246	3274944	11162837	30534872	509409	9503349	52
9	3115058	11663368	3278165	11153006	30504867	510362	9502443	51
10	3117822	11654499	3281387	11143184	30474915	511316	9501536	50
11	3120586	11645638	3284609	11133367	30445015	512271	9500629	49
12	3123349	11636786	3287832	11123559	30415169	513227	9499721	48
13	3126112	11627943	3291055	11113759	30385375	514184	9498812	47
14	3128875	11619199	3294280	11103967	30355635	515142	9497902	46
15	3131639	11610283	3297505	11094182	30325947	516101	9496991	45
16	3134400	11601466	3300731	11084405	30296312	517061	9496080	44
17	3137162	11592658	3303957	11074637	30266730	518021	9495168	43
18	3139924	11583858	3307184	11064876	30237200	518982	9494255	42
19	3142686	11575067	3310411	11055123	30207723	519944	9493341	41
20	3145448	11566285	3313639	11045378	30178299	520907	9492427	40
21	3148209	11557511	3316868	11035640	30148927	521871	9491512	39
22	3150970	11548746	3320097	11025910	30119605	522836	9490596	38
23	3153731	11539989	3323327	11016178	30090334	523802	9489679	37
24	3156491	11531240	3326558	11006471	30061113	524769	9488761	36
25	3159251	11522500	3329789	10996763	30031943	525737	9487842	35
26	3162011	11513768	3333020	10987062	30002823	526706	9486923	34
27	3164770	11595045	3336252	10977369	29973753	527675	9486003	33
28	3167529	11496330	3339485	10967683	29944734	528647	9485081	32
29	3170288	11487624	3342719	10958004	29915765	529620	9484160	31
30	3173047	11478926	3345953	10948332	29886847	530594	9483237	30
31	3175805	11470237	3349188	10938669	29857978	531568	9482314	29
32	3178563	11461556	3352423	10929013	29829160	532543	9481390	28
33	3181321	11452883	3355659	10919364	29800392	533519	9480466	27
34	3184079	11444219	3358896	10909723	29771674	534496	9479539	26
35	3186837	11435563	3362133	10900090	29743006	536473	9478612	25
36	3189594	11426915	3365371	10890464	29714388	536451	9477684	24
37	3192351	11418275	3368610	10880845	29685822	537430	9476757	23
38	3195107	11409644	3371850	10871234	29657301	538410	9475828	22
39	3197864	11401021	3375090	10861630	29628831	539391	9474898	21
40	3200620	11392406	3378331	10852033	29600411	540373	9473967	20
41	3203374	11383800	3381572	10842444	29572041	541356	9473035	19
42	3206130	11375202	3384814	10832862	29543719	542340	9472103	18
43	3208885	11366612	3388057	10823287	29515446	543325	9471170	17
44	3211640	11358030	3391300	10813819	29487221	544311	9470236	16
45	3214395	11349456	3394544	10804158	29459043	545298	9469301	15
46	3217150	11340891	3397788	10795605	29430913	546286	9468366	14
47	3219904	11332334	3401033	10785059	29402831	547275	9467430	13
48	3222658	11323785	3404279	10775520	29374807	548265	9466493	12
49	3225410	11315244	3407524	10765988	29346811	549256	9465555	11
50	3228164	11306711	3410771	10756462	29318873	550249	9464616	10
51	3230917	11298186	3414029	10746944	29290982	551242	9463677	9
52	3233671	11289670	3417267	10737434	29263139	552236	9462737	8
53	3236412	11281162	3420516	10727931	29235343	553231	9461796	7
54	3239174	11272662	3423766	10718436	29207595	554226	9460854	6
55	3241926	11264170	3427016	10708948	29179895	555222	9459911	5
56	3244678	11255686	3430266	10699467	29152243	556219	9458968	4
57	3247429	11247210	3433518	10689993	29124638	557217	9458024	3
58	3250180	11238742	3436770	10680526	29097080	558216	9457079	2
59	3252932	11230282	3440023	10671066	29069569	559216	9456133	1
60	3255682	11221830	3443276	10661623	29042105	560217	9455186	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3255682	11221830	3443276	10661613	29042109	560217	9455186	6
1	3258432	11213386	3446530	10652167	29014688	561219	9454239	5
2	3261182	11204950	3449785	10642728	28987318	562222	9453291	5
3	3263931	11196522	3453040	10633296	28959988	563226	9452342	5
4	3266681	11188102	3456296	10623871	28932707	564231	9451392	5
5	3269430	12179690	3459553	10614453	28905472	565237	9450441	5
6	3272179	11171286	3462810	10605042	28878283	566244	9449490	5
7	3274927	11162889	3466068	10595637	28851139	567252	9448538	5
8	3277675	11154500	3469326	10586239	28824040	568291	9447585	5
9	3280423	11146119	3472585	10576849	28796987	569270	9446631	5
10	3283171	11137746	3475845	1[illegible]567466	28769979	570280	9445676	5
11	3285918	11129381	3479105	10558090	28743015	571291	9444720	4
12	3288665	11121024	3482366	10548721	28716096	572303	9443764	4
13	3291412	11112675	3485628	10539359	28689222	573316	9442807	4
14	3294159	11104334	3488891	10530004	28662393	574330	9441849	4
15	3296906	11096000	3492154	10520655	28635608	575345	9440890	4
16	3299652	11087674	3495418	10511313	28608868	575361	9439931	4
17	3302398	11079356	3498683	10501997	28582172	577370	9438971	4
18	3305144	11071046	3501949	10492648	28555520	578398	9438010	4
19	3307889	11062744	3505215	10483326	28528913	579418	9437048	4
20	3310634	11054449	3508482	10474010	28502350	580439	9436085	4
21	3313379	11046162	3511749	10464702	28475832	581460	94[illegible]5122	
22	3316123	11037883	3515017	10455401	28449357	582482	9434158	
23	3318867	11029612	3518286	10446107	28422926	583505	943319[illegible]	
24	3321611	11021348	3521555	10436819	28396539	584529	9432227	
25	3324355	11013092	3524825	10427538	28370195	585554	9431260	
26	3327098	11004843	3528096	10518263	28343895	586580	9430293	
27	3329841	10996602	3531368	10408995	28317638	587607	9429325	
28	3332585	10988368	3534640	10399733	28291424	588635	9428356	
29	3335327	10980142	3537913	10390479	28265253	589663	9427386	
30	3338069	10971923	3541186	10381231	28239125	590692	9426415	
31	3340811	10963712	3544[illegible]60	10371990	28213040	591722	9425444	
32	3343553	10955509	3547735	10362756	28186998	592753	9424472	
33	3346294	10947313	3551010	10353528	28160999	593785	9423499	
34	3349035	10939125	3554286	10344307	28135043	594818	9422525	
35	3351776	10930944	3557563	10335092	28109129	595852	9421550	
36	3354516	10922771	3560840	10325884	28083258	596887	942057[illegible]	
37	3357256	10914606	3564118	10316682	28057429	597924	9419599	
38	3359996	10906448	3567397	10307486	28031642	598962	9418622	
39	3362736	10898298	3570676	10298397	28005898	600001	9417644	
40	3365475	10890156	3573956	10289115	27980196	601041	9416665	
41	3368214	10882021	3577237	10279940	27954536	602081	9415685	
42	3370953	10873894	3580519	10270772	27928917	603122	9414705	
43	3373691	10865774	3583801	10261610	27903339	604264	9413724	
44	3376429	10857661	3587084	10252454	27877803	605207	9412742	
45	3379167	10849555	3590367	10243304	27852308	606251	9411760	
46	3381905	10841457	3593651	10234161	27826855	607296	9410777	
47	3384642	10833366	3596936	10225024	27801443	608342	9409793	
48	3387379	10825282	3600221	10215893	27776072	609389	94088[illegible]8	
49	3390116	10817206	3603507	10206770	27750742	610436	9407[illegible]	
50	3392852	10809137	3606794	10197653	27725453	611484	9406836	
51	3395588	10801075	3610082	10188542	27700204	612533	9405849	
52	3398324	10793021	3613370	10179438	27674995	613583	9404861	
53	3401060	10784974	3616659	10170340	27649827	614634	9403872	
54	3403795	10776934	3619949	10161248	27624699	615686	9402882	
55	3406530	10768902	3623239	10152162	27599612	616740	9401891	
56	3409265	10760877	3626530	10143082	27574565	617795	9400900	
57	3411999	10752860	3629822	20134009	27549559	618851	9399908	
58	3414733	10744850	3633115	10124942	27524592	619908	9398915	
59	3417467	10736847	3636408	10115881	27499665	620966	9397924	
60	3420201	10728852	3639702	10106827	27474777	622025	9396926	

Digitized by Google

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithm. Sinuum.	Sinus	
0	3420201	10728852	3639702	10100827	27474777	622045	9396926	60
1	3422934	10720865	3642997	10097781	27449929	623084	9395931	59
2	3425667	10712885	3646293	10088741	27425120	624144	9394935	58
3	3428400	10704912	3649589	10079707	27400350	625205	9393938	57
4	3431133	10696945	3652886	10070678	27375620	626267	9392940	56
5	3433865	10688984	3656183	10061654	27350929	627330	9391941	55
6	3436597	10681030	3659481	10052636	27326278	628394	9390942	54
7	3439329	10673085	3662780	10043626	27301667	629459	9389942	53
8	3442060	10665147	3666079	10034822	27277095	630525	9388941	52
9	3444791	10657216	3669379	10025624	27252563	631592	9387939	51
10	3447522	10649292	3672680	10016632	27228070	632660	9386937	50
11	3450253	10641375	3675982	10007646	27203616	633729	9385934	49
12	3452983	10633465	3679284	9998666	27179200	634799	9384930	48
13	3455713	10625562	3682587	9989692	27154823	635870	9383925	47
14	3458442	10617667	3685891	9980725	27130484	626942	9382919	46
15	3461171	10609779	3689195	9971764	27106184	638015	9381913	45
16	3463900	10601898	3692500	9962810	27081922	639088	9380906	44
17	3466629	10594024	3695806	9953862	27057698	640162	9379898	43
18	3469357	10586157	3699113	9944920	27033511	641237	9378889	42
19	3472085	10578297	3702420	9935984	27009362	642313	9377880	41
20	347481	10570444	3705728	9927054	26985251	643390	9376870	40
21	3477540	10562598	3709037	9918130	26961177	644468	9375859	39
22	3480262	10554760	3712347	9909213	26937141	645547	9374847	38
23	3482994	10546929	3715657	9900302	26913143	646027	9373834	37
24	3485721	10539104	3718968	9891396	26889183	647708	9372820	36
25	3488447	10531286	3722279	9882496	26865260	648790	9371800	35
26	3491173	10523474	3725591	9873601	26841383	64987	9370791	34
27	3493890	10515669	3728904	9864711	26817535	650955	9369775	33
28	3496624	10507871	3732218	9855827	26793726	652044	9368752	32
29	3499345	10500080	3735533	9846949	26769942	653131	9367740	31
30	3502074	10492295	3738848	9838076	26746206	654219	9366722	30
31	3504790	10484516	3742164	9829209	26722507	655307	9365703	29
32	3507523	10476745	3745480	9820349	26698845	656396	9364683	28
33	3510247	10468981	3748797	981149	26675220	657486	9363662	27
34	3512971	10461225	3752115	980264	26651631	658577	9362640	26
35	3515694	10453476	3755434	979380	26628079	659669	9361618	25
36	3518417	10445734	3758753	9784972	26604563	660762	9360595	24
37	3521140	10437999	3762073	977614	26581084	661856	9359571	23
38	3523862	10430271	3765394	976732	26557641	662951	9358546	22
39	3526584	10422550	3768710	975850	26534234	664047	9357521	21
40	3529306	10414836	3772038	974969	26510863	665143	9356495	20
41	3532027	10407129	3775361	974088	26487528	666240	9355468	19
42	3534748	10399429	3778685	973209	26464229	667338	9354440	18
43	3537469	10391735	3782010	972329	26440966	668437	9353411	17
44	3540190	10384047	3785335	971451	26417738	669537	9352382	16
45	3542910	10376366	3788661	970572	26394546	670638	9351352	15
46	3545630	10368692	3791988	969695	26371390	671741	9350321	14
47	3548350	10361024	3795315	9688179	26348270	672845	9349289	13
48	3551070	10353362	3798643	9679412	26325185	673950	9348257	12
49	3553789	10345706	3801972	9670650	26302135	675056	9347224	11
50	3556508	10338057	3805302	9661894	26279120	676163	9346190	10
51	3559227	10330415	3808632	9653144	26256141	677271	9345155	9
52	3561945	10322780	3811963	9644400	26233196	678380	9344119	8
53	3564663	10315152	3815295	9635662	26210286	679490	9343082	7
54	3567380	10307531	3818628	9626930	26187411	680601	9342045	6
55	3570097	10299916	3821961	9618204	26164571	681712	9341007	5
56	3572814	10292308	3825295	9609484	26141766	682824	9339968	4
57	3575531	10284707	3828630	9600770	26118996	683937	9338928	3
58	3578247	10277113	3831966	9592062	26096260	685051	9337887	2
59	3580963	10269526	3835303	9583360	26073559	686166	9336847	1
60	3583675	10261946	3838640	9574664	26050893	687282	9335804	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus
0	3583679	10261946	3838040	9574664	26050893	687282	9335804
1	3586395	10254372	3841978	6565973	26028264	688399	9334761
2	3589110	10246804	3845316	9557287	26005663	689517	9333717
3	3591825	10239243	3848655	9548607	25984090	690636	5332672
4	3594540	10231688	3851995	9539932	25960569	691756	9331628
5	3597254	10224140	3855336	9531263	25938073	692877	9330582
6	3599968	10216598	3858678	9522599	25915610	693999	9329535
7	3602682	10209063	3862020	9513941	25893181	695122	9328488
8	3605395	10201534	3865363	9505288	25870786	696246	9327440
9	3608108	10194012	3868707	9496642	25848424	697370	9326391
10	3610821	10186496	3872052	9488001	25826096	698495	9325341
11	3613533	10178987	3875397	9479366	25803801	699621	9324290
12	3616245	10171484	3878743	9470736	25781540	700748	9323238
13	3618957	10163988	3882090	9462111	25759312	701877	9322186
14	3621669	10156498	3885438	9453491	25737118	703007	9321133
15	3624380	10149015	3888787	9444877	25714957	704138	9320079
16	3627091	10141538	3892136	9436268	25692830	705270	9319024
17	3629802	10134067	3895486	9427664	25670736	706403	9317969
18	3632512	10126603	3898837	9419066	25648675	707537	9316913
19	3635222	10119145	3902188	9410473	25626647	708672	9315856
20	3637932	10111694	3905540	9401886	25604051	709808	9314798
21	3640642	10104249	3908893	9393305	25582688	710944	9313739
22	3643351	10096811	3912247	9384730	25560758	712081	9312680
23	3646060	10089379	3915601	9376160	25538860	713219	9311620
24	3648768	10081953	3918956	9367595	25516995	714358	9310559
25	3651476	10074533	3922312	9359035	25495162	715498	9309497
26	3654184	10067120	3925669	9350481	25473362	716639	9308434
27	3656892	10059713	3929027	9341931	25451594	717782	9307371
28	3659599	10052312	3932385	6333386	25429858	718926	9306307
29	3662306	10044918	3935744	9324847	25408154	720071	9305242
30	3665012	10037530	3939104	9316313	25386482	721217	9304176
31	3667718	10030148	3942465	9307784	25364841	722364	9303109
32	3670424	10022773	3945826	9299261	25343232	723512	9302042
33	3673130	10015404	3949188	9290744	25321655	724660	9300974
34	3675835	10008041	3952551	9282232	25300110	725809	9299905
35	3678541	10000685	3955915	9273726	25278597	726959	9298836
36	3681246	9993335	3959280	9265215	25257116	728110	9297766
37	3683951	9985991	3962646	9256729	25235666	729262	9296695
38	3686655	9978653	3966012	9248238	25214248	730415	9295623
39	3689359	9971322	3969379	6239753	25192861	731569	9294550
40	3692062	9963997	3972746	9231273	25171506	732724	9293476
41	3694765	9956678	3976114	9222798	25150183	733880	9292401
42	3697468	9949366	3979483	9214326	25128891	735037	9291326
43	3700170	9942060	3982853	9205865	25107629	736195	9290250
44	3702872	9934760	3986224	9197406	25086398	737354	9289173
45	3705574	9927466	3989596	9188952	25065198	738514	9288096
46	3708276	9920178	3992969	9180503	25044029	739675	9287018
47	3710977	9912896	3996342	9172059	25022890	740837	9285939
48	3713678	9905620	3999716	9163620	25001782	742000	9284859
49	3716379	6898350	4003090	9155186	24980705	743164	9283778
50	3719080	9891086	4006465	9146757	24959659	744329	9282697
51	3721780	9883828	4009841	9138333	24938644	745495	9281615
52	3724480	9876577	4013217	9129915	24917659	746662	9280532
53	3727179	9869332	4016594	9121502	24896704	747830	9279448
54	3729878	9862093	4019972	9113094	24875780	748999	9278363
55	3732577	9854860	4023351	9104691	24854887	750169	9277278
56	3735275	9847633	4026731	909629[illegible]	24834024	751340	9276192
57	3737973	9840412	4030112	9087900	24813191	752512	9275105
58	3740671	9833192	4033494	907951[illegible]	24792387	753685	9274017
59	3743369	9825988	4036877	9671129	24771613	754859	9272028
60	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839

Digitized by Google

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839	60
1	3748763	9811589	4043647	9054381	24730154	757208	9270749	59
2	3751460	9804399	4047031	9046015	24709469	758384	9269658	58
3	3754156	9797215	4050416	9037654	24688814	759561	9268566	57
4	3756852	9790036	4053802	9029296	24668189	760740	9267474	56
5	2759548	9782863	4057189	9020943	24647594	761920	9266381	55
6	3762243	9775696	4060577	9012595	24627028	763101	9265287	54
7	2764938	9768535	4063966	9004252	24606492	764283	9264192	53
8	3767633	9761380	4067356	8995914	24585986	765466	9263096	52
9	3770327	9754231	4070747	8987581	24565509	766650	9262000	51
10	3773021	9747088	4074139	8979253	24545061	767835	9260903	50
11	3775715	9739950	4077531	8970929	24524642	769021	9259805	49
12	3778408	9732818	4080924	8962610	24504252	770208	9258706	48
13	3781101	9725693	4084318	8954297	24483891	771396	9257606	47
14	3783794	9718574	4087713	8945989	24463559	772585	9256506	46
15	3786486	9711461	4091109	8937686	24443256	773775	9255405	45
16	3789178	9704354	4094506	8929388	24422981	774966	9254303	44
17	3791870	9697353	4097903	8921196	24402735	776157	9253200	43
18	3794562	9690158	4101301	8912809	24382518	777349	9252097	42
19	3797253	9683069	4104699	8904527	24362329	778542	9250993	41
20	3799944	9675986	4108097	8896259	24342169	779736	9249888	40
21	3802635	9668908	4111497	8887977	24322037	780931	9248782	39
22	3805325	9661836	4114898	8879709	24301937	782127	9247676	38
23	3808015	9654770	4118300	8871446	24281860	783324	9246569	37
24	3810704	9647709	4121703	8863187	24261815	784522	9245401	36
25	3813393	9640654	4125107	8854933	24241798	785721	9244352	35
26	3816082	9633605	4128511	8846683	24221809	786922	9243242	34
27	3818771	9626562	4131916	8838438	24201849	788124	9242131	33
28	3821459	9619525	4135322	8830198	24181917	789327	9241020	32
29	3824147	9612494	4138728	8821963	24162013	790531	9239908	31
30	3826834	9605468	4142135	8813732	24142137	791736	9238795	30
31	3829521	9598448	4145544	8805506	24122289	792942	9237682	29
32	3832208	9591434	4148953	8797285	24102468	794149	9236508	28
33.	3834895	9584426	4152363	8789069	24082675	795357	9235453	27
34	3837581	9577424	4155773	8780859	24062910	796565	9234337	26
35	3840267	9570427	4159184	8772653	24043172	797774	9233220	25
36	3842953	9563436	4162596	8764452	24023462	798984	9232103	24
37	3845638	9556451	4166009	8756256	24003779	800195	92[illegible]0985	23
38	3848323	9549472	4169423	8748065	23984124	801407	9229866	22
39	3851008	9542498	4172838	8739878	23964496	802620	9228746	21
40	3853692	9535530	4176255	8731696	23944895	803834	9227625	20
41	3856376	9528567	4179672	8723518	23925320	805049	9226504	19
42	3859060	9521610	4183090	8715345	23905773	806265	9225382	18
43	3861743	9514659	4186509	8707177	23886254	807482	9224259	17
44	3864426	9507713	4189928	8699013	23866762	808700	9223135	16
45	3867109	9500373	4193348	8690854	23847297	809919	9222010	15
46	3869791	9493839	4196769	8682700	23827859	811139	9220884	14
47	3872473	9486911	4200191	8674551	23808448	812360	9219758	13
48	3875155	9479988	4203613	8666405	23789064	813583	9218631	12
49	3877837	9473071	4207036	8658264	23769706	814807	9217504	11
50	3880518	9466160	4210460	8650128	23750375	816032	9216376	10
51	3883199	9459254	4213885	8641996	23731071	817258	9215247	9
52	3885880	9452354	4217311	8633870	23711793	818484	9214117	8
53	3888560	9445460	4220738	8625749	23692542	819711	9212986	7
54	3891240	9438571	4224165	8617632	23673318	820939	9211855	6
55	3893919	9431688	4227593	8609520	23654121	822168	9210723	5
56	3896598	9424810	4231022	8601412	23934950	823398	9209590	4
57	3899277	9417938	4234452	8593509	23615805	824629	9208456	3
58	3901955	9411071	4237883	8585210	23596687	825861	9207323	2
59	3904633	9404210	4241315	8577116	23577595	827094	9206185	1
60	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	828328	9205049	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	82831	920504[illegible]	60
1	3909989	9390504	4248182	8560941	23539489	829563	9203912	59
2	3912666	9383660	4251619	8552861	23520475	830799	9202774	58
3	3915343	9376821	4255052	8544785	23501486	832036	920163[illegible]	57
4	3918020	9369988	4258488	8536714	23482523	833274	9200496	56
5	3920696	9363160	4261925	8528647	23463586	834513	9199356	55
6	3923372	9356337	4265363	8520584	23444674	835753	9198215	54
7	3926048	9349520	4268801	8512525	23425788	836995	9197073	53
8	3928723	9342708	4272240	8504470	23406927	838238	9195931	52
9	3931398	9335902	4275680	8496420	23388092	839482	9194788	51
10	3934072	9329101	4279121	8488374	23369282	840727	9193644	50
11	3936746	9322306	4282563	8480333	23350498	841973	9192499	49
12	3939420	9315516	4286006	8472296	23331740	843220	9191353	48
13	3942093	9308731	4289450	8464263	23313012	844468	9190207	47
14	3944766	9301952	4292895	8456236	23294302	845716	9189060	46
15	3947439	9295178	4296340	8448213	23275621	846965	9187912	45
16	3950112	928841[illegible]	4299786	8440195	23256965	848215	9186763	44
17	3952784	928164[illegible]	4303233	8432181	23238335	849466	9185614	43
18	3955456	92748[illegible]	4306681	8424172	23219730	850718	9184464	42
19	3958128	9268138	4310130	8416167	23201151	851971	9183313	41
20	3960799	9261392	4313580	8408167	23182597	853225	9182161	40
21	3963470	9254651	4317031	8400171	23164068	854480	9181009	39
22	3966140	9247915	4320482	8392179	23145565	855736	9179856	38
23	3968810	9241185	4323934	8384192	23127086	856993	9178702	37
24	1971480	9234460	4327387	8376209	21108632	858251	9177547	36
25	3974149	9227741	4330841	8368231	23090203	859510	9176391	35
26	3976818	9221027	4334296	8360257	23071798	860770	9175235	34
27	3979487	9214319	4337752	8352288	23053418	862031	9174078	33
28	3982155	9207616	4341209	8344322	23035062	863294	9172920	32
29	3984823	9200918	4344666	8339360	23016731	864558	9171761	31
30	3987491	9194226	4348124	8328403	22998424	865823	9170601	30
31	3990159	9187539	4351583	8320450	22980141	867089	9169440	29
32	3992826	9180857	4355043	8312501	22961883	868356	9168279	28
33	3995493	9174181	4358504	8304558	22943650	869623	9167117	27
34	3998159	9167510	4361966	8296616	22925441	870891	9165955	26
35	4000825	9160844	4365429	8288684	22907256	872160	9164792	25
36	4003491	9154183	4368893	8280753	22889096	873430	9163628	
37	4006156	9147528	4372357	8272827	22870960	874701	9162463	
38	4008821	9140878	4375822	8264905	22852848	875973	9161297	
39	4011486	9134233	4379288	8256987	22834760	877246	9160131	
40	4014150	9127593	4382755	8249073	22816696	878520	9158964	20
41	4016814	9120959	4386223	8241164	22798656	879795	9157796	
42	4019478	9114330	4389692	8233259	22780639	881071	9156627	
43	4022141	9107706	4393162	8225358	22762646	882348	9155457	
44	4024804	9101087	4396633	8217461	22744676	883626	9154286	
45	4027467	9094473	4400105	8209568	22726730	884905	9153115	
46	4030130	9087865	4403578	8201679	22708808	886186	9151943	
47	4032792	9081262	4407051	8193794	22690909	887468	9150770	
48	4035454	9074664	4410525	8185913	22673034	888751	9149597	
49	4038115	9068071	4414000	8178036	22655183	890035	9148423	
50	4040776	9061483	4417476	8170163	22637355	891320	9147248	
51	4043437	9054901	4420953	8162295	22619551	892606	9146072	
52	4046097	9048324	4424431	8154431	22601771	893893	9144895	
53	4048757	9041752	4427910	8146571	22584014	895181	9143718	
54	4051416	9035185	4431390	8138715	22566281	896470	9142540	
55	4054075	9028623	4434871	8130863	22548571	897760	9141361	
56	4056734	9022066	4438352	8123015	22530885	899051	914018[illegible]	
57	4059392	9015514	4441834	8115172	22513222	900342	913900[illegible]	
58	4062050	9008968	4445317	8107334	22495582	901634	913782[illegible]	
59	4064708	9002427	4448801	8099500	22477965	902927	913663[illegible]	
60	4067366	8995891	4452286	8091670	22460371	904221	913545[illegible]	
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4067366	8995891	4452286	8091670	22460371	904221	9135455	60
1	4070023	8989360	4455772	8083844	22442800	905526	9134271	59
2	4072680	8982834	4459259	8076022	22425252	906812	9133087	58
3	4075337	8976313	4462747	8068204	22407726	908109	9131902	57
4	4077993	8969797	4466236	8060389	22390223	909408	9130716	56
5	4080649	8963286	4469726	8052578	22372742	910708	9129529	55
6	4083305	8956780	4473216	8044771	22355284	912009	9128342	54
7	4085960	8950280	4476707	8036969	22337848	913311	9127154	53
8	4088615	8943785	4480199	8029171	22320435	914614	9125965	52
9	4091269	8937295	4483692	8021377	22303044	915918	9124775	51
10	4093923	8930810	4487186	8013587	22285675	917223	9123584	50
11	4096577	8924330	4490681	8005801	22268328	918529	9122493	49
12	4099231	8917855	4494177	7998019	22251004	919836	9121200	48
13	4101884	8911385	4497674	7990241	22233703	921144	9120007	47
14	4104537	8904920	4501172	7982467	22216424	922453	9118814	46
15	4107189	8898460	4504671	7974697	22199168	923763	9117620	45
16	4109841	8892005	4508171	7966931	22181935	925074	9116425	44
17	4112493	8885555	4511672	7959169	22164725	926386	9115229	43
18	4115144	8879110	4515173	7951411	22147537	927699	9114032	42
19	4117795	8872670	4518675	7943657	22130372	929013	9112835	41
20	4120446	8866235	4522178	7935908	22113229	930327	9111637	40
21	4123096	8859804	4525682	7928161	22096109	931643	9110438	39
22	4125746	8853379	4529187	7920419	22079011	932960	9109238	38
23	4128395	8846959	4532693	7912681	22061934	934278	9108038	37
24	4131044	8840544	4536200	7904947	22044879	935597	9106837	36
25	4133693	8834134	4539708	7897217	22027846	936917	9105635	35
26	4136341	8827729	4543217	7889491	22010834	938238	9104432	34
27	4138989	8821329	4546727	7881769	21993845	939560	9103228	33
28	4141637	8814934	4550238	7874051	21976874	940883	9102024	32
29	4144285	8808544	4553750	7866337	21959926	942207	9100819	31
30	4146932	8802159	4557264	7858627	21943000	943532	9099613	30
31	4149579	8795779	4560778	7850921	21926094	944858	9098406	29
32	4152226	8789404	4564293	7843219	21909210	946185	9097198	28
33	4154872	8783033	4567809	7835520	21892348	947513	9095990	27
34	4157518	8776667	4571326	7827825	21875508	948842	9094781	26
35	4160163	8770306	4574843	7820134	21858689	950172	9093572	25
36	4162808	8763959	4578361	7812456	21841892	951503	9092362	24
37	4165453	8757599	4581880	7804764	21825116	952835	9091151	23
38	4168097	8751253	4585400	7797085	21808362	954168	9089939	22
39	4170741	8744912	4588921	7789409	21791629	955503	9088726	21
40	4173385	8738575	4592443	7781736	21774918	956839	9087512	20
41	4176028	8732243	4595966	7774067	21758228	958176	9086297	19
42	4178671	8725916	4599490	7766402	21741559	959514	9085082	18
43	4181313	8719594	4603015	7758741	21724911	960853	9083866	17
44	4183955	8713277	4606541	7751084	21708283	962193	9082649	16
45	4186597	8706965	4610068	7743431	21691676	963534	9081432	15
46	4189239	8700657	4613596	7735782	21675090	964875	9080214	14
47	4191880	8694354	4617125	7728137	21658525	966217	9078995	13
48	4194521	8688056	4620654	7720496	21641981	967560	9077775	12
49	4197162	8681763	4624184	7712859	21625458	968904	9076555	11
50	4199802	8675475	4627715	7705226	21608956	970249	9075334	10
51	4202442	8669192	4631247	7697597	21592475	971595	9074112	9
52	4205081	8662913	4634780	7689970	21576015	972943	9072889	8
53	4207720	8656639	4638314	7682347	21559575	974292	9071665	7
54	4210359	8650370	4641849	7674281	21543155	975642	9070441	6
55	4212997	8644106	4645385	7667113	21526756	976993	9069215	5
56	4215635	8637846	4648922	7659501	21510377	978345	9067989	4
57	4218273	8631591	4652460	7651893	21494019	979698	9066763	3
58	4220910	8625341	4655999	7644289	21477681	981052	9065535	2
59	4223547	8619096	4659540	7636689	21461364	982407	9064307	1
60	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangente	Logarithmi Sinuum.	Sinus	M
0	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	60
1	4228819	8606620	4666623	7621500	21428790	985120	9061848	59
2	4231455	8600389	4670166	7613611	21412534	986478	9060618	58
3	4234090	8594163	4673710	7606326	21396208	987837	9059387	57
4	4256725	8587942	4677255	7598745	21380063	989197	9058155	56
5	4239360	8581725	4680801	7591167	21363888	990558	9056922	55
6	4241994	8575513	4684348	7583593	21347713	991920	9055688	54
7	4244628	8569306	4687896	7576021	21331558	993283	9054454	53
8	4247202	8563103	4691444	7568456	21315423	994647	9053219	52
9	4249895	8556951	4694993	7560893	21299308	996012	9051983	51
10	4252528	8550712	4698543	7553333	21283213	997379	9050746	50
11	4255161	8544523	4702094	7545776	21267138	998747	9049508	49
12	4257793	8538339	4705646	7538223	21251083	1000116	9048270	48
13	4260425	8532160	4709199	7530674	21235048	1001486	9047031	47
14	4263056	8525985	4712753	7523129	21219032	1002856	9045791	46
15	4265687	8519815	4716308	7515588	21203036	1004227	9044551	45
16	4268318	8513650	4719864	7508051	21187059	1005599	9043310	44
17	4270949	8507489	4723422	7500517	21171102	1006972	9042068	43
18	4273579	8501333	4726981	7492987	21155164	1008346	9040825	42
19	4276209	8495181	4730541	7485460	21139246	1009721	9039582	41
20	4278838	8489034	4734102	7477937	21123347	1011097	9038338	40
21	4281467	8482892	4737664	7470418	21107468	1012474	9037093	39
22	4284096	8476754	4741227	7462902	21091609	1013852	9035847	38
23	4286724	8470621	4744790	7455389	21075769	1015232	9034600	37
24	4289352	8464493	4748354	7447880	21059949	1016613	9033353	36
25	4291979	8458369	4751919	7440374	21044148	1017995	9032105	35
26	4294606	8452250	4755485	7432872	21028367	1019378	9030856	34
27	4297233	8446135	4759052	7425373	21012605	1020762	9029606	33
28	4299859	8440025	4762620	7417878	20996863	1022147	9028356	32
29	4302485	8433919	4766189	7420386	20981140	1023533	9027105	31
30	4305111	8427818	4769759	7402898	20965436	1024920	9025853	30
31	4307736	8423722	4773330	7395414	20949752	1026308	9024600	29
32	4310361	8415630	4776902	7387933	20934086	1027697	9023347	28
33	4312986	8409543	4780475	7380456	20918439	1029087	9022093	27
34	4315610	8403560	4784049	7372982	20902811	1030478	9020838	26
35	4318234	8397382	4787624	7365512	20887202	1031870	9019582	25
36	4320858	8391308	4791200	7358045	20871612	1033263	9018326	24
37	4323481	8385239	4794777	7350582	20856040	1034657	9017069	23
38	4326104	8379174	4798355	7343122	20840487	1036052	9015811	22
39	4328726	8373114	4801934	7335665	20824953	1037449	9014552	21
40	4331548	8367059	4805515	7328212	20809438	1038847	9013292	20
41	4233970	8361008	4809096	7320762	20793941	1040246	9012031	19
42	4336591	8354962	4812678	7313316	20778463	1041646	9010770	18
43	4339212	8348920	4816261	7305873	20763004	1043047	9009508	17
44	4341833	8342883	4819845	7298434	20747564	1044449	9008245	16
45	4344453	8336850	4823430	7290998	20732142	3045852	9006982	15
46	4347073	8330822	4827016	7283566	20716739	1047256	9005718	14
47	4349693	8324798	4830603	7276138	20701355	1048660	9004453	13
48	4352312	8318778	4834191	7268713	20685989	1050065	9003187	12
49	4354931	8312763	4837780	7261292	20670642	1051471	9001921	11
50	4357549	8306752	4841371	7253874	20655313	1052878	9000654	10
51	4360167	8300746	4844962	7246459	20640003	1054287	8999386	9
52	4362785	9294744	4848554	7239047	20624711	1055697	8998117	8
53	4365402	8288747	4852147	7231639	20609437	1057108	8996848	7
54	4368019	8282754	4855741	7224234	20594182	1058520	8995578	6
55	4370635	8276765	4859336	7216832	20578945	1059933	8994307	5
56	4373251	8270781	4862932	7209434	20563726	3061347	8993035	4
57	4375867	8264801	4866529	7202039	20548526	1062762	8991762	3
58	4378482	8298826	4870127	7194648	20533344	1064178	8990489	2
59	4381097	8252855	4873726	7187260	20518180	1065595	8989215	1
60	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	0

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	60
1	4386326	8240927	4880930	7172493	20487906	1068434	8986664	59
2	4388940	8234970	4884533	7165115	20472797	1069855	8985388	58
3	4391554	8229017	4888137	7157740	20457706	1071277	8984111	57
4	4394167	8223068	4891742	7150368	20442633	1072700	8982833	56
5	4396780	8217124	4895347	7143001	20427577	1074123	8981555	55
6	4399392	8211184	4898953	7135637	20412539	1075547	8980276	54
7	4402004	8205249	4902560	7128277	20397519	1076972	8978996	53
8	4404616	8199318	4906168	7120920	20382516	1078398	8977715	52
9	4407227	8193391	4909777	7113566	20367531	1079825	8976433	51
10	4409838	8187469	4913387	7106216	20352563	1081253	8975151	50
11	4412449	8181551	4916999	7098868	20337613	1082683	8973868	49
12	4415059	8175638	4920610	7091524	20322681	1084114	8972584	48
13	4417669	8169729	4924223	7084183	20307767	1085546	8971299	47
14	4420278	8163824	4927838	7076845	20292870	1086979	8970013	46
15	4422887	8157923	4931454	7069510	20277991	1088413	8968727	45
16	4425496	8152027	4935071	7062179	20263130	1089848	8967440	44
17	4428104	8146135	4938689	7054851	20248286	1091284	8966152	43
18	4430712	8140247	4942308	7047526	20233460	1092721	8964864	42
19	4433326	8134364	4945928	7040205	20218651	1094159	8963575	41
20	4435927	8128485	4949549	7032887	20203860	1095598	8962285	40
21	4438534	8122610	4953171	7025572	20189086	1097038	8960994	39
22	4441140	8116739	4956794	7018260	20174329	1098479	8959702	38
23	4443746	8110873	4960418	7010952	20159590	1099921	8958410	37
24	4446352	8105011	4964043	7003647	20144868	1101364	8957117	36
25	4448957	8099153	4967669	6996345	20130163	1102808	8955824	35
26	4451562	8093299	4971296	6989045	20115475	1104254	8954530	34
27	4454167	8087450	4974924	6981749	20100805	1105801	8953235	33
28	4456771	8081605	4978553	6974456	20086152	1107149	8951939	32
29	4459375	8075764	4982184	6967166	20071516	1108598	8950642	31
30	4461978	8069927	4985816	6959879	20056898	1110048	8949344	30
31	4464581	8064095	4989448	6952596	20042297	1111499	8948045	29
32	4967184	8058267	4993081	6945316	20027709	1112951	8946746	28
33	4469786	8052443	4996716	6938039	20013142	1114404	8945446	27
34	4472388	8046623	5000352	6930765	19998591	1115858	8944146	26
35	4474990	8040808	5003989	6923495	19984057	1117313	8942845	25
36	4477591	8034997	5007627	6916228	19969540	1118769	8941543	24
37	4480192	8029190	5011266	6908964	19955039	1120226	8940240	23
38	4482792	8023387	5014906	6901703	19940555	1121684	8938936	22
39	4485392	8017589	5018547	6894546	19926088	1123143	8937632	21
40	4487992	8011795	5022189	6887191	19911637	1124604	8936327	20
41	4490591	8006005	5025832	6879939	19897203	1126066	8935021	19
42	4493190	8000219	5029476	6872690	19883786	1127529	8933717	18
43	4495788	7994437	5033121	6865444	19868386	1128993	8932406	17
44	4498386	7988660	5036767	6858202	19854002	1130458	8931098	16
45	4500984	7982887	5040414	6850963	19839635	1131924	8929789	15
46	4503582	7977118	5044062	6843727	19825285	1133391	8928479	14
47	4506179	7971353	5047712	6836494	19810951	1134859	8927169	13
48	4508776	7965592	5051363	6829265	19796634	1136327	8925858	12
49	4511372	7959835	5055015	6822039	19782333	1137796	8924546	11
50	4513968	7954083	5058668	6814817	19768048	1139266	8923234	10
51	4516563	7948335	5062322	6807597	19753780	1140738	8921921	9
52	4519158	7942591	5065977	6800380	19739528	1142211	8920607	8
53	4521753	7936851	5069635	6703166	19725293	1143685	8919292	7
54	4524347	7931115	5073290	6785955	19711074	1145160	8917976	6
55	4526941	7925383	5076948	6778747	19696872	1146636	8916659	5
56	4529535	7919655	5080607	6771542	19682686	1148113	8915341	4
57	4532128	7913932	5084267	6764340	19668516	1149592	8914023	3
58	4534721	7908213	5087928	6757141	19654362	1151072	8912704	2
59	4537313	7902498	5091590	6749945	19640225	1152553	8911385	1
60	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	8910065	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	891006	60
1	4542497	7891080	5098919	6735562	19611999	1155518	8908744	59
2	4545088	7885377	5102585	6728375	19597910	1157002	8907422	58
3	4547679	7879678	5106252	6721191	19583837	1158487	8906099	57
4	4540270	7873983	5109920	6714010	19569780	1159973	8904776	56
5	4552860	7898292	5113589	6706832	19555639	1161460	8903452	55
6	4555450	7862605	5117259	6699657	19541714	1162948	8902127	54
7	4558039	7856923	5120930	6692486	19527704	1164437	8900802	53
8	4560628	7851245	5124602	6685318	19513710	1165927	8899476	52
9	4563216	7845571	5128275	6678153	19499732	1167418	8898149	51
10	4565804	7839901	5131949	6670991	19485770	1168910	8896821	50
11	4568392	7834235	5135625	6663832	19471824	1170403	8895492	49
12	4570979	7828573	5139302	6656676	19457894	1171897	8894163	48
13	4573566	7822915	5142980	6649523	19443980	1173392	8892833	47
14	4576153	7817261	5146659	6642373	19430081	1174888	8891502	46
15	4578739	7811611	5150339	6635225	19416198	1176386	8890171	45
16	4581325	7805965	5154020	6628080	19402331	1177885	8888839	44
17	4583911	7800323	5157702	6620938	19388480	1179385	8887506	43
18	4586496	7794685	5161385	6613799	19374644	1180886	8886172	42
19	4589081	7789051	5165069	6606663	19360824	1182388	8884838	41
20	4591665	7783422	5168755	6599531	19347019	1183891	8883503	40
21	4594249	7777797	5172442	6592402	19333230	1185395	8882167	39
22	4596833	7772176	5176130	6585276	19319456	1186900	8880830	38
23	4599416	7766558	5179819	6578152	19305698	1188406	8879462	37
24	4601999	7760944	5183509	6571031	19291955	1189913	8878134	36
25	4604581	7755334	5187200	6563913	19278228	1191421	8876815	35
26	4607163	7749728	5190892	6556797	19264516	1192931	8875475	34
27	4609744	7744126	5194585	6549684	19250819	1194442	8874134	33
28	4612325	7738528	5198279	6542574	19237138	1195954	8872793	32
29	4614906	7732934	5201974	6597467	19223472	1197467	8871451	31
30	4617486	7727344	5205670	6528363	19209821	1198981	8804108	30
31	4620066	7721757	5209368	6521261	19196185	1200496	8868765	29
32	4622646	7716174	5213067	6514162	19182565	1202012	8867421	28
33	4625225	7710596	5216767	6507067	19168960	1203529	8866076	27
34	4627804	7705022	5220468	6499975	19155370	1205047	8864730	26
35	4630382	7799452	5224170	6492886	19141795	1206566	8863383	25
36	4632960	7693886	5227873	6485800	19128235	1208086	8862035	24
37	4635538	7688324	5231577	6478717	19114691	1209607	8860687	23
38	4638115	7682766	5235283	6471637	19101162	1211129	8859338	22
39	4640692	7677212	5238990	6464560	19087648	1212652	8857989	21
40	4643268	7671662	5242698	6457485	19074149	1214177	8856639	20
41	4645844	7666116	5246407	6450413	19060665	1215703	8855288	19
42	4648420	7660574	5250117	6443344	19047196	1217230	8853936	18
43	4650995	7655035	5253828	6436277	19033741	1218758	8852583	17
44	4653570	7649500	5257540	6429213	19020301	1220287	8851230	16
45	4656145	7643969	5261254	6422152	19006876	1221817	8849876	15
46	4658719	7638442	5264969	6415094	18993466	1223348	8848521	14
47	4661293	7632919	5268685	6408039	18980070	1224880	8847165	13
48	4663866	7627400	5272402	6400987	18966689	1226413	8845809	12
49	4666439	7621885	5276120	6393938	18953323	1227947	8844452	11
50	4669012	7616374	5279839	6386893	18939972	1229481	8843095	10
51	4671584	7610867	5283559	6379850	18926636	1231017	8841737	9
52	4674156	7605363	5287280	6372809	18913314	1232554	8840378	8
53	4676727	7599863	5291003	6365771	18900007	1234092	8839018	7
54	4679298	7592367	5294727	6358735	18886715	1235632	8837657	6
55	4681869	7588875	5298452	6351702	18873437	1237173	8836295	[illegible]
56	4684439	7583387	5302178	6344672	18860174	1238715	8834932	4
57	4687009	7577903	5305905	6337645	18846925	1240258	8833569	3
58	4689578	7572422	5309634	6330620	18833691	1241802	8832205	2
59	4692147	7566945	5313363	6323598	18820471	1243347	8830841	1
60	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1243894	8829476	0
								M.

M	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes*	*Differentiæ & Logarit. Tangent.*	*Tangentes*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus*	
0	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1244894	8829476	60
1	4697284	7556003	5320826	6309561	18794074	1246442	8828110	59
2	4699852	7550538	5324559	6302547	18780897	1247991	8826743	58
3	4702419	7545076	5328293	6295535	18767735	1249541	8835375	57
4	4704986	7539618	5332028	6288526	18754587	1251092	8824007	56
5	4707553	7534164	5335765	6281520	18741454	1252644	8822638	55
6	4710119	7528714	5339503	6274517	18728335	1254197	8821268	54
7	4712685	7523268	5343242	6267517	18715231	1255751	8819898	53
8	4715250	7517826	5346982	6260521	18702140	1257305	8818527	52
9	4717815	7512388	5350723	6253528	18689064	1258860	8817155	51
10	4720380	7506954	5354465	6246528	18676002	1260416	8815783	50
11	4722944	7501524	5358209	6239550	18662954	1261974	8814408	49
12	4725508	7496097	5361954	6232564	18649920	1263533	8813034	48
13	4728071	7490674	5365700	6225581	18636900	1265093	8811659	47
14	4730634	7485255	5369447	6218601	18623894	1266654	8810285	46
15	4733197	7479840	5373195	6211624	18610902	1268216	8808907	45
16	4735759	7474428	5376944	6204649	18597925	1269779	8807530	44
17	4738321	7469020	5380694	6197676	18584962	1271344	8806152	43
18	4740883	7463616	5384445	6190706	18572015	1272910	8804773	42
19	4743443	7458216	5388198	6183739	18559078	1274477	8803394	41
20	4746004	7452819	5391952	6176774	18546157	1276045	8802014	40
21	4748564	7447426	5395707	6169812	18533250	1277614	8800633	39
22	4751124	7442037	5399463	6162853	18520357	1279184	8799251	38
23	4753683	7436651	5403221	6155896	18507478	1280755	8797869	37
24	4756242	7431269	5406980	6148942	18494612	1282327	8796486	36
25	4758801	7425891	5410740	6141991	18481760	1283900	8795102	35
26	4761359	7420517	5414501	6135063	18468922	1285474	8793717	34
27	4763917	7415146	5418263	6128096	18456094	1287050	8792332	33
28	4766474	7409779	5422026	6121152	18443287	1288627	8790946	32
29	4769031	7404416	5425791	6114211	18430490	1290205	8789559	31
30	4771588	7399057	5429557	6107273	18417707	1291784	8788171	30
31	4774144	7393701	5433324	6100337	18404938	1293364	8786782	29
32	4776700	7388349	5437092	6093404	18392182	1294945	8785393	28
33	4779255	7383001	5440861	6086474	18379440	1296527	8784003	27
34	4781810	7377657	5444632	6079547	18366712	1298110	8782613	26
35	4784365	7372316	5448404	6072622	18353997	1299694	8781222	25
36	4786919	7366979	5452177	6065700	18341296	1301279	8779830	24
37	4789473	7361646	5455951	6058781	18328608	1302865	8778437	23
38	4792026	7356316	5459726	6051863	18315934	1304453	8777044	22
39	4794579	7350990	5463503	6044948	18303273	1306042	8775650	21
40	4797132	7345668	5467281	6038036	18290626	1307632	8774255	20
41	4799684	7340349	5471060	6031126	18277992	1309223	8772859	19
42	4802236	7335034	5474840	6024219	18265372	1310815	8771462	18
43	4804787	7329723	5478621	6017315	18252765	1312408	8770065	17
44	4807338	7324415	5482404	6010413	18240171	1314002	8768667	16
45	4809888	7319111	5486188	6003514	18227591	1315597	8767267	15
46	4812438	7313811	5489973	5996618	18215024	1317193	8765868	14
47	4814988	7308514	5493759	5989723	18202470	1318791	8764468	13
48	4817537	7303221	5497546	5982831	18189930	1320390	8763068	12
49	4820086	7297931	5501335	5975941	18177405	1321990	8761665	11
50	4822633	7292645	5505125	5969054	18164889	1323591	8760263	10
51	4825183	7287363	5508916	5962170	18152388	1325193	8758860	9
52	4827731	7282084	5512708	5955288	18139901	1326796	8757456	8
53	4830278	7276809	5516501	5948409	18127427	1328400	8756051	7
54	4832825	7271538	5520296	5941533	18114966	1330005	8754646	6
55	4835371	7266270	5524092	5934659	18102518	1331611	8753240	5
56	4837917	7261006	5527889	5927787	18090084	1333219	8751833	4
57	4840462	7255746	5531687	5920918	18077663	1334828	8750425	3
58	4843007	7250489	5535487	5914051	18065255	1336438	8749016	2
59	4845552	7245236	5539288	5907187	18052860	1338049	8747607	1
60	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	0
								M.

G 29 | Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	60
1	4850640	7234712	5546893	5893468	18028109	1341274	8744787	59
2	4853184	7229500	5550697	5886612	18015753	1342888	8743376	58
3	4855727	7224262	5554503	5879759	18003410	1344503	8741964	57
4	4858270	7219027	5558310	5872906	17991079	1346119	8740551	56
5	4860812	7213795	5562118	5866059	17978761	1347736	8739137	55
6	4863354	7208567	5565927	5859213	17966456	1349354	8737722	54
7	4865895	7203342	5569738	5852368	17954164	1350974	8736307	53
8	4868436	7198121	5573550	5845520	17941885	1352595	8734891	52
9	4870977	7192903	5577363	5838686	17929618	1354217	8733475	51
10	4873517	7187689	5581177	5831849	17917364	1355840	8732058	50
11	4876057	7182478	5584993	5825014	17905123	1357464	8730640	49
12	4878596	7177271	5588810	5818182	17892894	1359089	8729221	48
13	4881135	7172068	5592628	5811353	17880678	1360715	8727801	47
14	4883674	7166868	5596447	5804526	17868475	1362342	8726381	46
15	4886212	7161672	5600268	5897701	17856285	1363971	8724960	45
16	4888750	7156480	5604090	5790879	17844107	1365601	8723538	44
17	4891287	7151291	5607913	5784059	17831942	1367232	8722116	43
18	4893824	7146106	5611737	5777242	17819790	1368864	8720693	42
19	4896361	7140924	5615562	5770427	17807651	1370497	8719269	41
20	4898897	7135746	5619388	5763615	17795524	1372131	8717844	40
21	4901433	7130572	5623216	5756806	17783410	1373766	8716418	39
22	4903968	7125401	5627045	5749999	17771309	1375402	8714992	38
23	4906503	7120234	5630875	5743195	17759220	1377039	8713565	37
24	4909037	7115070	5634707	5736392	17747143	1378678	8712138	36
25	4911571	7109909	5638540	5729591	17735079	1380318	8710710	35
26	4914105	7104752	5642374	5722793	17723027	1381959	8709281	34
27	4916638	7099598	5646210	5715997	17710987	1383601	8707851	33
28	4919171	7094448	5650047	5709204	17698960	1385244	8706420	32
29	4921703	7089301	5653885	5702413	17686945	1386888	8704989	31
30	4924235	7084158	5657725	5695625	17674941	1388533	8703557	30
31	4926767	7079018	5661566	5688839	17662951	1390179	8702124	29
32	4929298	7073882	5665408	5682056	17650972	1391826	8700691	28
33	4931829	7068749	5669251	5675275	17639006	1393474	8699257	27
34	4934359	7063620	5673096	5668496	17627052	1395123	8697822	26
35	4936889	7058494	5676942	5661719	17615111	1396775	8696386	25
36	4939418	7053372	5680789	5654945	17603182	1398427	8694949	24
37	4941947	7048253	5684637	5648173	17591266	1400080	8693512	23
38	4944476	7043138	5688486	5641404	17579362	1401734	8692074	22
39	4947004	7038026	5692337	5634637	17567470	1403389	8690636	21
40	4949532	7032918	5696189	5627873	17555591	1495045	8689197	20
41	4952059	7027814	5700043	5621111	17543724	1406703	8687757	19
42	4954586	7022713	5703898	5614351	17531869	1408362	8686316	18
43	4957113	7017615	5707754	5607593	17520026	1410022	8684873	17
44	4959639	7012521	5711611	5600838	17508189	1411683	8683431	16
45	4962165	7007430	5715469	5594085	17496369	1413345	8681988	15
46	4964690	7002342	5719329	5587334	17484559	1415008	8680544	14
47	4967215	6997258	5723190	5580586	17472764	1416672	8679100	13
48	4969740	6992177	5727052	5573840	17460981	1418337	8677655	12
49	4972264	6987099	5730916	5567095	17449210	1420004	8676209	11
50	4974788	6982025	5734781	5560353	17437451	1421672	8674762	10
51	4977311	6976954	5738647	5553613	17425704	1423341	8673314	9
52	4979834	6971886	5742515	5546875	17413969	1425011	8671866	8
53	3982356	6966822	5746384	5540140	17402246	1426682	8670417	7
54	4984878	6961761	5750254	5533407	17390534	1428354	8668968	6
55	4987399	6956704	5754125	5526677	17378834	1430027	8667518	5
56	4989920	6951650	5757998	5519949	17367146	1431701	8666067	4
57	4992441	6946600	5761872	5513224	17355469	1433376	8664615	3
58	4994961	6941553	5765747	5506500	17343804	1435053	8663162	2
59	4997481	6936509	5769624	5499778	17332150	1436731	8661708	1
60	5000000	6931469	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	0
								M.

Contra regulam adhibendi | G. 60

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5000000	6931409	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5777381	5486342	17308878	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5781262	5479628	17297258	1441771	8657344	58
3	5007556	6916369	5785144	5472916	17285651	1443453	8655888	57
4	5010074	6911342	5789027	5466206	17274056	1445136	8654431	56
5	5012591	6906319	5792911	5459498	17262473	1446821	8652972	55
6	5015108	6901299	5796797	5452792	17250902	1448507	8651514	54
7	5017624	6896282	5800684	5446088	17239342	1450194	8650055	53
8	5020140	6891269	5804572	5439387	17227794	1451882	8648595	52
9	5022656	6886259	5808462	5432688	17216258	1453571	8647134	51
10	5025171	6881253	5812353	5425992	17204734	1455261	8645673	50
11	5027686	6876250	5816245	5419298	17193222	1456952	8644211	49
12	5030200	6871250	5820139	5412605	17181721	1458645	8642748	48
13	5032714	6866254	5824034	5405915	17170231	1460339	8641284	47
14	5035227	6861261	5827930	5399227	17158752	1462034	8639820	46
15	5037740	6856271	5831828	5392541	17147285	1463730	8638355	45
16	5040253	6851285	5835727	5385858	17135829	1465427	8636889	44
17	5042765	6846302	5839627	5379177	17124384	1467125	8635423	43
18	5045277	6841323	5843528	5372499	17112950	1468824	8633956	42
19	5047788	6836347	5847431	5365822	17101527	1470525	8632488	41
20	5050299	6831374	5851335	5359147	17090115	1472227	8631019	40
21	5052809	6826405	5855241	5352475	17078714	1473930	8629549	39
22	5055319	6821439	5859148	5345805	17067326	1475634	8628079	38
23	5057829	6816476	5863056	5339137	17055957	1477339	8626608	37
24	5060338	6811516	5866966	5332471	17044591	1479045	8625137	36
25	5062847	6806560	5870877	5325808	17033235	1480752	8623665	35
26	5065355	6801607	5874789	5319147	17021892	1482460	8622192	34
27	5067863	6796657	5878702	5312488	17010560	1484169	8620718	33
28	5070370	6791710	5882617	5305831	16999230	1485879	8619243	32
29	5072877	6786767	5886533	5299177	16987929	1487590	8617768	31
30	5075384	6781827	5890450	5292525	16976631	1489302	8616292	30
31	5077890	6776890	5894369	5285874	16965344	1491016	8614815	29
32	5080396	6771956	5898289	5279225	16954068	1492733	8613338	28
33	5082901	6767026	5902211	5272579	16942803	1494447	8611860	27
34	5085406	6762099	5906134	5265934	16931540	1496165	8610381	26
35	5087911	6757175	5910058	5259291	16920306	1497884	8608901	25
36	5090415	6752255	5913984	5252651	16909074	1499604	8607420	24
37	5092919	6747338	5917911	5246013	16897855	1501325	8605939	23
38	5095422	6742424	5921839	5239377	16886644	1503047	8604457	22
39	5097925	6737513	5925769	5232743	16875446	1504770	8602975	21
40	5100427	6732606	5929700	5226112	16864259	1506494	8601492	20
41	5102929	6727702	5933633	5219482	16853083	1508220	8600008	19
42	5105430	6722802	5937567	5212855	16841918	1509947	8598523	18
43	5107930	6717905	5941502	5206230	16830764	1511675	8597037	17
44	5110431	6713011	5945438	5199607	16819621	1513404	8595551	16
45	5112931	6708120	5949376	5192986	16808489	1515134	8594064	15
46	5115431	6703232	5953315	5186367	16797367	1516865	8592577	14
47	5117930	6698348	5957255	5179751	16786256	1518597	8591089	13
48	5120429	6693467	5961197	5173137	16775156	1520330	8589600	12
49	5122927	6688589	5965140	5166525	16764067	1522064	8588110	11
50	5125425	6683714	5969084	5159914	16752989	1523800	8586619	10
51	5127922	6678842	5973030	5153305	16741922	1525537	8585127	9
52	5130419	6673974	5976776	5146699	16730866	1527275	8583635	8
53	5132916	6669109	5980926	5140095	16719820	1529014	8582142	7
54	5135412	6664247	5984876	5133493	16708785	1530754	8580649	6
55	5137905	6659388	5988827	5126892	16697760	1532496	8579155	5
56	5140403	6654532	5992780	5120293	16686746	1534239	8577660	4
57	5142898	6649680	5996734	5113697	16675742	1535983	8576164	3
58	5145393	6644831	6000690	5107103	16664749	1537728	8574668	2
59	5147887	6639985	6004647	5100511	16653766	1539474	8573171	1
60	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	60
1	5152874	6630302	6012566	5087332	16631833	1542970	8570175	59
2	5155367	6625465	6016528	5080745	16620882	1547720	8568676	58
3	5157859	6620631	6020491	5074160	16609942	1546471	8567176	57
4	5160351	6615801	6024455	5067578	16599013	1548223	8565675	56
5	5162843	6610974	6028420	5060998	16588094	1549970	8564173	55
6	5165333	6606150	6032387	5054420	16577186	1551730	8562671	54
7	5167825	6601329	6036355	5047844	16566289	1553485	8561168	53
8	5170315	6596512	6040324	5041271	16555402	1555241	8559664	52
9	5172805	6591698	6044295	5034700	16544526	1556998	8558160	51
10	5175294	6586887	6048267	5028130	16533660	1558757	8556655	50
11	5177783	6582079	6052241	5021562	16522805	1560517	8555149	49
12	5180271	6577275	6056216	5014997	16511960	1562278	8553643	48
13	5182759	6572474	6060193	5008434	16501126	1564040	8552136	47
14	5185246	6567676	6064171	5001873	16490302	1565803	8550628	46
15	5187733	6562881	6068150	4995313	16479488	1567568	8549119	45
16	5190220	6558089	6072131	4988755	16468685	1569334	8547609	44
17	5192706	6553300	6076113	4982199	16457892	1571101	8546099	43
18	5195192	6548514	6080096	4975645	16447109	1572869	8544588	42
19	5197676	6543731	6084081	4969093	16436337	1574638	8543077	41
20	5200162	6538951	6088067	4962543	16425575	1576408	8541565	40
21	5202646	6534174	6092055	4955994	16414824	1578180	8540052	39
22	5205130	6529400	6096044	4949447	16404083	1579953	8538538	38
23	5207614	6524629	6100035	4942902	16393352	1581727	8537024	37
24	5210097	6519862	6104027	4936360	16382631	1583502	8535509	36
25	5212580	6515098	6108020	4929820	16371920	1585278	8533993	35
26	5215062	6510337	6112015	4923282	16361219	1587055	8532476	34
27	5217544	6505580	6116011	4916747	16350528	1588833	8530958	33
28	5220025	6500826	6120009	4910213	16339847	1590613	8529440	32
29	5222506	6496075	6124008	4903681	16329176	1592394	8527921	31
30	5224986	6491327	6128008	4897151	16318516	1594176	8526402	30
31	5227466	6486583	6132010	4890624	16307866	1595959	8524882	29
32	5229946	6481842	6136013	4884098	16297226	1597744	8523361	28
33	5232425	6477103	6140018	4877573	16286596	1599530	8521839	27
34	5234904	6472367	6144024	4871050	16275976	1601317	8520317	26
35	5237382	6467634	6148032	4867529	19265366	1603105	8518794	25
36	5239860	6462904	6152041	4858010	16254766	1604894	8517270	24
37	5242337	6458177	6156052	4851493	16244176	1606684	8515745	23
38	5244814	6453453	6160064	4844978	16233597	1608475	8514220	22
39	5247290	6448732	6164077	4838465	16223028	1610267	8512094	21
40	5249766	6444014	6168092	4831954	16212469	1612060	8511167	20
41	5252241	6439299	6172108	4825444	16201920	1613855	8509639	19
42	5254716	6434588	6176126	4818937	16191381	1615651	8508111	18
43	5257191	6429880	6180145	4812432	16180852	1617448	8506582	17
44	5259665	6425175	6184168	4805929	16170332	1619246	8505052	16
45	5262139	6420473	6188190	4799427	16159822	1621046	8503522	15
46	5264612	6415774	6192213	4792927	16149322	1622847	8501991	14
47	5267085	6411078	6196237	4786429	19138832	1624649	8500459	13
48	5269557	6406385	6200263	4779933	16128351	1626452	8498927	12
49	5272029	6401695	6204290	4773439	16117880	1628256	8497394	11
50	5274501	6397008	6208319	4766947	16107419	1630061	8495860	10
51	5276972	6392324	6212350	4760456	16096968	1631868	8494326	9
52	5279443	6387643	6216382	4753967	16086527	1633676	8492791	8
53	5281913	6382965	6220416	4747480	16076095	1635485	8491255	7
54	5284383	6378290	6224451	4740995	16065673	1637295	8489718	6
55	5286852	6373618	6228488	4734512	16055261	1639106	8488180	5
56	5289321	6368949	6232526	4728031	16044859	1640918	8486641	4
57	5291789	6364283	6236566	4721552	16034466	1642731	8485102	3
58	5294257	6359620	6240607	4715074	16024083	1644546	8483562	2
59	5296725	6354961	6244649	4708599	16013710	1646362	8482022	1
60	5299192	6350305	6248693	4702126	16003347	1648179	8480481	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5299192	6350305	6248693	4702120	16003347	1648179	8480481	60
1	5301659	6345652	6252738	4695655	15992994	1649997	8478939	59
2	5304125	6341002	6256785	4689186	15982651	1651816	8477397	58
3	5306591	6336354	6260834	4682717	15972315	1653637	8475854	57
4	5309056	6331709	6264884	4676240	15961992	1655459	8474310	56
5	5311521	6327067	6268935	4669785	15951676	1657282	8472765	55
6	5313985	6322428	6272988	4663322	15941370	1659106	8471219	54
7	5316449	6317792	6277042	4656861	15931073	1660931	8469673	53
8	5318913	6313159	6281098	4750402	15920785	1662757	8468126	52
9	5321376	6308529	6285155	4643944	15910507	1664585	8466579	51
10	5323839	6303902	6289214	4637488	15900238	1666414	8465031	50
11	5326301	6299278	6293274	4631034	15889979	1668244	8463482	49
12	5328763	6294657	6297336	4624582	15879729	1670075	8461932	48
13	5331224	6190039	6301399	4618131	15869489	1671908	8460381	47
14	5333685	6285424	6305464	4611682	15859259	1673742	8458830	46
15	5336145	6280812	6309530	4605235	15849038	1675577	8457278	45
16	5338605	6276203	6313598	4598790	15838827	1677413	8455725	44
17	5341065	6271597	6317667	4592347	15828625	1679250	8454172	43
18	5343524	6266994	6321738	4585906	15818433	1681088	8452618	42
19	5345983	6262394	6325810	4579467	15808251	1682927	8451064	41
20	5348441	6257797	6329883	4573030	15798078	1684767	8449509	40
21	5350898	6253203	6333958	4566594	15787915	1686609	8447953	39
22	5353355	6248612	6338024	4560160	15777761	1688452	8446396	38
23	5355812	6244024	6342112	4553728	15767616	1690296	8444838	37
24	5358268	6239439	6346191	4547298	15757480	1692141	8443280	36
25	5360724	6234857	6350272	4540859	15747353	1693988	8441721	35
26	5363179	6230278	6354355	4534442	15737235	1695836	8440161	34
27	5365634	6225702	6358439	4528017	15727127	1697685	8438600	33
28	5368088	6221129	6362525	4521594	15717028	5699535	8437039	32
29	5370542	6216559	6366613	4515172	15706938	1701387	8435477	31
30	5372996	6211992	6370702	4508752	15696857	1703240	8433915	30
31	5375449	6207427	6374792	4502333	15686786	1705094	8432352	29
32	5377902	6202865	6378884	4495916	15676724	1706949	8430788	28
33	5380354	6198306	6382977	4489501	15666671	1708805	8429223	27
34	5382806	6293750	6387072	4483088	15656627	1710662	8427658	26
35	5385258	6189197	6391169	4476676	15646592	1712521	8426092	25
36	5387709	6184647	6395267	4470266	15636566	1714381	8424525	24
37	5390159	6180100	6399366	4463858	15626549	1716242	8422957	23
38	5392609	6175556	6403467	4457452	15616541	1718104	8421389	22
39	5395058	6171015	6407569	4451048	15606542	1719967	8419820	21
40	5397507	6166477	6411673	4444646	15596552	1721831	8418250	20
41	5399855	6161942	6415779	4438245	15586571	1723697	8416679	19
42	5402403	6157409	6419886	4431845	15576599	1725564	8415108	18
43	5404851	6152879	6423995	4425447	15566636	1727432	8413536	17
44	5407298	6148352	6428105	4419051	15556682	1729301	8411963	16
45	5409745	6143828	6432216	4412656	15546738	1731172	8410390	15
46	5412191	6139307	6436329	4406263	15536803	1733044	8408816	14
47	5414637	6134789	6440444	4399872	15526877	1734917	8407241	13
48	5417082	6130274	6444560	4393483	15516960	1736791	8405666	12
49	5419527	6125762	6448678	4387096	15507052	1738666	8404090	11
50	5421972	6121253	6452798	4380711	15497153	1740542	8402513	10
51	5424416	6116747	6456919	4374327	15487263	1742420	8400935	9
52	5426859	6112244	6461042	4367945	15477382	1744299	8399357	8
53	5429302	6107744	6465166	4361565	15467510	1746179	8397778	7
54	5431743	6103246	6469292	4355186	15457646	1748060	8396199	6
55	5434186	6098751	6473419	4348809	15447791	1749942	8394619	5
56	5436629	6094259	6477548	4342433	15437945	1751826	8393038	4
57	5439070	6089770	6481678	4336059	15428108	1753711	8391456	3
58	5441510	6085284	6485809	4329687	15418280	5755597	8389873	2
59	5443950	6080800	6489942	4323316	15408461	1757484	8388290	1
60	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	60
1	5448829	6071841	6498212	4310579	15388850	1761262	8385121	59
2	5451268	6067366	6502350	4304213	15379057	1763153	8383536	58
3	5453707	6062894	6506489	4297849	15369273	1765045	8381950	57
4	5456145	6058425	6510630	4291487	15359497	1766938	8380363	56
5	5458583	6053958	6514773	4285126	15349730	1798832	8378776	55
6	5461020	6049494	6518917	4278766	15339972	1770728	8377188	54
7	5463456	6045033	6523063	4272408	15330222	1772625	8375599	53
8	5465892	6040575	6527210	4266052	15320481	1774523	8374009	52
9	5468328	6036120	6531359	4259698	15310748	1776422	8372419	51
10	5470763	6031668	6535510	4253346	15301024	1778322	8370828	50
11	5473198	6027218	6539662	4246994	15291309	1780224	8369236	49
12	5475032	6022771	6543816	4240644	15281603	1782127	8367644	48
13	5478066	6018327	6547971	4234296	15271905	1784031	8366051	47
14	5480499	6013886	6552128	4227950	15262216	1785936	8364457	46
15	5482932	6009448	6556287	4221605	15252535	1787843	8362862	45
16	5485364	6005013	6560447	4215262	15242863	1789751	8361266	44
17	5487796	6000580	6564609	4208920	15233200	1791660	8359670	43
18	5490228	5996150	6568772	4202580	15223545	1793570	8358073	42
19	5492659	5991723	6572937	4196241	15213800	1795482	8356476	41
20	5495090	5987299	6577103	4189904	15204261	1797395	8354878	40
21	5497520	5982878	6581271	4183569	15194632	1799309	8353279	39
22	5499950	5978460	6585440	4177236	15185011	1801224	8351680	38
23	5502379	5974044	6589611	4170904	15175398	1803140	8350080	37
24	5504808	5969631	6593784	4164573	15165794	1805058	8348479	36
25	5507236	5965221	6597958	4156244	15156199	1806977	8346877	35
26	5509664	5960814	6602134	4151917	15146612	1808897	8345274	34
27	5512091	5956409	6606312	4145591	15137034	1810818	8343671	33
28	5514318	5952007	6610491	4139267	15127464	1812740	8342067	32
29	5516944	5947608	6614672	4132944	15117903	1814064	8340463	31
30	5519370	5943212	6618855	4126623	15108331	1816529	8338858	30
31	5521795	5938829	6623039	4120314	15098807	1818515	8337252	29
32	5524220	5934438	6627225	4113996	15089271	1820442	8335646	28
33	5526645	5930050	6631413	4107680	15079744	1822370	8334039	27
34	5529069	5925665	6635603	4101366	15070225	1824299	8332431	26
35	5531493	5921275	6639792	4095043	15060714	1826230	8330822	25
36	5533916	5916893	6643984	4088731	15051211	1828162	8329212	24
37	5536338	5912516	6648178	4082421	15041717	1830095	8327602	23
38	5538760	5908142	6652373	4076113	15032231	1832029	8325991	22
39	5541182	5903771	6656570	4069807	15022753	1833964	8324380	21
40	5543603	5899402	6660768	4063501	15013283	1835901	8322768	20
41	5546024	5895036	6664968	4057197	15003821	1837839	8321155	19
42	5548444	5890673	6669170	4050895	14994368	1839778	8319541	18
43	5550864	5886313	6673373	3044594	14984923	1841719	8317927	17
44	5553283	5881955	6677578	4038294	14975486	1843661	8316312	16
45	5555702	5877600	6681785	4031996	14966058	1845604	8314696	15
46	5558120	5873248	6685994	4025700	14956638	1847548	8313079	14
47	5560538	5868899	6690204	4019405	14947226	1849494	8311462	13
48	5562956	5864552	6694416	4013111	14937822	1851441	8309844	12
49	5565373	5860208	6698630	4006819	14928426	1853389	8308226	11
50	5567790	5855867	6702845	4000529	14919038	1855338	8306607	10
51	5570206	5851529	6707062	3994241	14909659	1857288	8304987	9
52	5572622	5847193	6711281	3987953	14900288	1859240	8303367	8
53	5575037	5842860	6715501	3981667	14890925	1861193	8301746	7
54	5577452	5838530	6719723	3975383	14881570	1863147	8300124	6
55	5579866	5834203	6723946	3969101	14872223	1865102	8298501	5
56	5582280	5829878	6728171	3962819	14862884	1867059	8296877	4
57	5584693	5825556	6732397	3956539	14853553	1869017	8295253	3
58	5587105	5821237	6736625	3950261	14844230	1870976	8293628	2
59	5589518	5816920	6740854	3943984	14834916	1872936	8292002	1
60	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	60
1	5594340	5808295	6749318	3931435	14816312	1876860	8288794	59
2	5596751	5803987	6753553	3925163	14807022	1878824	8287121	58
3	5599161	5799681	6757789	3918892	14797740	1880789	8285493	57
4	5601578	5795378	6762027	3912623	14788466	1882755	8283864	56
5	5603981	5791078	6766267	3906355	14779200	1884723	8282234	55
6	5606390	5786780	6770508	3900088	14769941	1886692	8280603	54
7	5608798	5782485	6774751	3893823	14760690	1888662	8278972	53
8	5611206	5778192	6778996	3887559	14751447	1890633	8277340	52
9	5613614	5773902	6783243	3881297	14742212	1892605	8275708	51
10	5616021	5769615	6787491	3875036	14732985	1894579	8274075	50
11	5618427	5765330	6791741	3868776	14723765	1896554	8272441	49
12	5620833	5761048	6795993	3862518	14714553	1898530	8270806	48
13	5623239	5756769	6800246	3856261	14705349	1900508	8269170	47
14	5625644	5752493	6804501	3850006	14696153	1902487	8267534	46
15	5628049	5748219	6808758	3843752	14686965	1904467	8265897	45
16	5630453	5743948	6813016	3837500	14677785	1906448	8264259	44
17	5632857	5739680	6817276	3831249	14668613	1908431	8262621	43
18	5635260	5735414	6821538	3824999	14659449	1910415	8260982	42
19	5637663	5731151	6825801	3818751	14650293	1912400	8259343	41
20	5640066	5726891	6830066	3812505	14641146	1914386	8257703	40
21	5642468	5722634	6834333	3806261	14632007	1916373	8256062	39
22	5644869	5718379	6838602	3800017	14622875	1918362	8254421	38
23	5647270	5714127	6842872	3793775	14613750	1920352	8252779	37
24	5649670	5709878	6847144	3787538	14604633	1922343	8251136	36
25	5652070	5705631	6851417	3781296	14595523	1924335	8249492	35
26	5654469	5701387	6855692	3775059	14586421	1926328	8247847	34
27	5656868	5697145	6859969	3768822	14577327	1928323	8246202	33
28	5659266	5692906	6864247	3762587	14568241	1930319	8244556	32
29	5661665	5688670	6868527	3756354	14559162	1932316	8242909	31
30	5664062	5684450	6872809	3750122	14550091	1934314	8241262	30
31	5666459	5680205	6877093	3743891	14541028	1936314	8239614	29
32	5668856	5675976	6881379	3737661	14531972	1938315	8237965	28
33	5671252	5671750	6885666	3731433	14522924	1940317	8236316	27
34	5673648	5667527	6889955	3725206	14513883	1942321	8234666	26
35	5676043	5663306	6894246	3718980	14504850	1944326	8233015	25
36	5678438	5659088	6898539	3712756	14495825	1946332	8231363	24
37	5680832	5654872	6902833	3706532	14486807	1948340	8229711	23
38	5683226	5650659	6907129	3700310	14477797	1950349	8228058	22
39	5685619	5646449	6911426	3694090	14468794	1952359	8226405	21
40	5688012	5642241	6915725	3687871	14459799	1954370	8224751	20
41	5690404	5638036	6920026	3681653	14450812	1956383	8223096	19
42	5692796	5633834	6924329	3675437	14441833	1958398	8221440	18
43	5695187	5629635	6928634	3669223	14432861	1960412	8219784	17
44	5697578	5625438	6932940	3663010	14423896	1962428	8218127	16
45	5699968	5621244	6937248	3656799	14414939	1964445	8216469	15
46	5702358	5617052	6941558	3650588	14405990	1966464	8214810	14
47	5704747	5612863	6945869	3641379	14397048	1968484	8213151	13
48	5707136	5608676	6950182	3638171	14388113	1970505	8211491	12
49	5709524	5604492	6954497	3634965	14379186	1972527	8209831	11
50	5711912	5600311	6958813	3625761	14370266	1974550	8208170	10
51	5714299	5596132	6963131	3619557	14361354	1976575	8206508	9
52	5716686	5591956	6967451	3613355	14352451	1978601	8204846	8
53	5719072	5587782	6971773	3607154	14343552	1980628	8203183	7
54	5721458	5583611	6976097	3600954	14334662	1982657	8201519	6
55	5723844	557944[illegible]	6980423	3594756	14325780	1984687	8199854	5
56	5726229	5575277	6984750	3588559	14316905	1986718	8198188	4
57	5728613	5571114	6989079	3582364	14308037	1988750	8196522	3
58	5730997	556695[illegible]	6993409	3576169	14299177	1990784	8194855	2
59	5733381	556279[illegible]	6997741	3569976	14290325	1992819	8193188	1
60	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	60
1	5738147	5554486	7006411	3557594	14272643	1996892	8189851	59
2	5740529	5550336	7010749	3551405	14263813	1998931	8188182	58
3	5742911	5546188	7015088	3545217	14254990	2000971	8186512	57
4	5745292	5542043	7019429	3539031	14246174	2003012	8184841	56
5	5747672	5537900	7023772	3531846	14237365	2005054	8183170	55
5	5750052	5533760	7028117	3526662	14228563	2007098	8181498	54
7	5752432	5529622	7032463	3520479	14219769	2009143	8179825	53
8	5754811	5525487	7036811	3514298	14210982	2011189	8178151	52
9	5757190	5521354	7041161	3508118	14202202	2017236	8176477	51
10	5759568	5517224	7045513	3501939	14193429	2015285	8174802	50
11	5761946	5513096	7049867	3495761	14184662	2017335	8173126	49
12	5764323	5508971	7054223	3489585	14175904	2019386	8171449	48
13	5766700	5504849	7058581	3483410	14167153	2021439	8169772	47
14	5769076	5500729	7062940	3477236	14158409	2023493	8168094	46
15	5771452	5466612	7067301	3471064	14149672	2025548	8166416	45
16	5773827	5492497	7071664	3464892	14140943	2027605	8164737	44
17	5776202	5488385	7076029	3458722	14132221	2029663	8163057	43
18	5778576	5484275	7080395	3452553	14123506	2031722	8161376	42
19	5780950	5480168	7084763	3446386	14114798	2033782	8159695	41
20	5783324	5476063	7089133	3440219	14106097	2035844	8158013	40
21	5785697	5471961	7093505	3434054	14097402	2037907	8156330	39
22	5788069	5467861	7097879	3427890	14088715	2039971	8154647	38
23	5790441	5463764	7102254	3421728	14080035	2042036	8152963	37
24	5792812	5459669	7106631	3415566	14071363	2044103	8151278	36
25	5795183	5455577	7111010	3409406	14062699	2046171	8149593	35
26	5797553	5451488	7115391	3403248	14054040	2048240	8147907	34
27	5799923	5447401	7119773	3397090	14045389	2050311	8146220	33
28	5802292	5443317	7124157	3390934	14036746	2052383	8144532	32
29	5804661	5439235	7128543	3384779	14028110	2054456	8142844	31
30	5807030	5435156	7132931	3378626	14019481	2056530	8141155	30
31	5809398	5431079	7137321	3372473	14010859	2058606	8139465	29
32	5811766	5427005	7141713	3366422	14002244	2060683	8137775	28
33	5814133	5422933	7146106	3360172	13993636	2062761	8136084	27
34	5816499	5418864	7159501	3354024	13985035	2064840	8134393	26
35	5818865	5414797	7154898	3347877	13976441	2066920	8132701	25
36	5821230	5410733	7159297	3341731	13967853	2069002	8131008	24
37	5823595	5406671	7163698	3335586	13959272	2071085	8129314	23
38	5825959	5402612	7168100	3329443	13950698	2073169	8127620	22
39	5828323	5398555	7172504	3323300	13942131	2075255	8125925	21
40	5830687	5394501	7176910	3317159	13933571	2077342	8124229	20
41	5833050	5390449	7181318	3311019	13925017	2079430	8122532	19
42	5835412	5386400	7185728	3304880	13916470	2081520	8120835	18
43	5837774	5382353	7190140	3298742	13907930	2083611	8119137	17
44	5840136	5378308	7194554	3292605	13899397	2085703	8117439	16
45	5842497	5374266	7198970	3286470	13890872	2087796	8115740	15
46	5844858	5370226	7203387	3280335	13882354	2089891	8114040	14
47	5847218	5366189	7207806	3274202	13873843	2091987	8112339	13
48	5849578	5362154	7212227	3268070	13865339	2094084	8110638	12
49	5851937	5358122	7216650	3261939	13856842	2096183	8108936	11
50	5854295	5354093	7221075	3255810	13848352	2098283	8107234	10
51	5856653	5350067	7225502	3249683	13839869	2100384	8105531	9
52	5859010	5346043	7229931	3243557	13831392	2102486	8103827	8
53	5861367	5342021	7234362	3237431	13822922	2104590	8102122	7
54	5863724	5338002	7238794	3231307	13814459	2106695	8100417	6
55	5866080	5333985	7243228	3225184	13806002	2108801	8098711	5
56	5868436	5329970	7247664	3219061	13797552	2110909	8097004	4
57	5870791	5325958	7252102	3212940	13789109	2113018	8095296	3
58	5873145	5321948	7256541	3206820	13780673	2115128	8093588	2
59	5875499	5317940	7260982	3200700	13772243	2117240	8091879	1
60	5877852	5313935	7265424	3194582	13703820	2119353	8090170	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5877852	5313935	7265424	3194582	13763820	2119353	8090170	60
1	5880205	5309932	7269869	3188465	13755403	2121407	8088460	59
2	5882558	5305932	7274316	3182350	13746993	2123582	8086749	58
3	5884910	5301935	7278765	3176236	13738590	2125699	8085038	57
4	5887262	5297940	7283216	3170123	13730194	2127817	8083325	56
5	5889613	5293947	7287669	3164011	13721805	2129936	8081613	55
6	5891964	5289957	7292124	3157900	13713422	2132057	8079899	54
7	5894314	5285969	7296581	3151790	13705046	2134179	8078185	53
8	5896664	5281984	7301040	3145682	13696677	2136302	8076470	52
9	5899013	5278001	7305501	3139575	13688315	2138426	8074754	51
10	5901361	5274020	7309963	3133468	13679959	2140552	8073038	50
11	5903709	5270042	7314427	3127363	13671610	2142679	8071321	49
12	5906056	5266066	7318893	3121259	13663268	2144807	8069603	48
13	5908403	5262092	7323361	3115155	13654932	2146937	8067885	47
14	5910750	5258121	7327831	3109053	13646602	2149068	8066166	46
15	5913096	5254152	7332303	3102952	13638279	2151200	8064446	45
16	5915442	5250186	7336777	3096853	13629963	2153333	8062726	44
17	5917787	5246222	7541253	3090754	13621653	2155468	8061005	43
18	5920132	5242261	7345731	3084657	13613350	2157604	8059283	42
19	5922476	5238302	7350210	3078561	13605054	2159741	8057561	41
20	5924820	5234346	7354691	3072466	13596764	2161880	8055838	40
21	5927163	5230392	7359174	3066372	13588481	2164020	8054114	39
22	5929505	5226441	7363659	3060280	13580204	2166161	8052389	38
23	5931847	5222492	7368146	3054188	13571934	2168304	8050664	37
24	5934189	5218545	7372635	3048097	13563670	2170448	8048938	36
25	5936530	5214601	7377126	3042008	13555413	2172593	8047212	35
26	5938871	5210659	7381619	3035919	13547162	2174740	8045485	34
27	5941211	5206720	7386114	3029832	13538918	2176888	8043757	33
28	5942551	5202783	7390611	3023749	13530680	2179037	8042028	32
29	5945890	5198848	7395110	3017660	13522449	2181188	8040299	31
30	5948228	5194916	7399610	3011576	13514224	2183340	8038569	30
31	5950566	5190986	7404112	3005493	13506[illegible]	2185493	8036838	29
32	5952904	5187059	7408616	2999412	13497794	2187647	8035107	28
33	5956241	5183134	7413122	2993331	13489589	2189803	8033375	27
34	5957578	5179211	7417630	2987251	13481390	2191960	8031642	26
35	5959914	5175291	7422140	2981173	13473197	2194118	8029909	25
36	5962250	5171373	7426652	2975095	13465011	2196278	8028175	24
37	5964585	51674[illegible]7	7431167	2969018	13456832	2198439	8026440	23
38	5966919	5163544	7435684	2962943	13448659	2200601	8024705	22
39	5969253	5159633	7440203	2956868	13440492	2202765	8022969	21
40	5971586	5155724	7444724	2950794	13432331	2204930	8021232	20
41	5973919	5151818	7449246	2944722	13424177	2207096	8019494	19
42	5976251	5147914	7453770	2938650	13416029	2209264	8017756	18
43	5978583	5144012	7458296	2932579	13407888	2211433	8016017	17
44	5980915	5140113	7462824	2926510	13399753	2213603	8014278	16
45	5983246	5136216	7467354	2920442	13391624	2215774	8012538	15
46	5985577	5132322	7471886	2914375	13383502	2217947	8010797	14
47	5987907	5128430	7476420	2908309	13375386	2220121	8009056	13
48	5990237	5124540	7480956	2902244	13367276	2222296	8007314	12
49	5992566	5120653	7485494	2896180	13359172	2224473	8005571	11
50	5994894	5116768	7490033	2890117	13351075	2226651	8003828	10
51	5997222	5112886	7494574	2884056	13342984	2228830	8002084	9
52	5999549	5109006	7499117	2877995	13334899	2231011	8000339	8
53	6001876	5105128	7503663	2871935	13326821	2233193	7998593	7
54	6004202	5101253	7508211	2865877	13318749	2235376	7996847	6
55	6006528	5097380	7512761	2859819	13310683	2237561	7995100	5
56	6008853	5093509	7517313	2853762	13302624	2239747	7993352	4
57	6011178	5089641	7521867	2847706	13294571	2241935	7991604	3
58	6013502	5085775	7526423	2841651	13286524	2244124	7989855	2
59	6015826	5081911	7530981	2835597	13278483	2246314	7988105	1
60	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangente.	Differentiæ & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	60
1	6020473	5074191	7540103	2823492	13262419	2250699	7984604	59
2	6022796	5070334	7544667	2817441	13254396	2252893	7982852	58
3	6025118	5066470	7549232	2811391	13246380	2255088	7981100	57
4	6027439	506202[illegible]	7553801	2805342	13238369	2257285	7979347	56
5	6029760	5058777	7558371	2799234	13230365	2259483	7977593	55
6	6032080	5054929	7562943	2793247	13222367	2261682	7975838	54
7	6034400	5051084	7567517	2787201	13214375	2263883	7974084	53
8	6036719	5047241	7572093	2781156	13206390	2266085	7972328	52
9	6039038	5043401	7576670	2775113	13198411	2268288	7970572	51
10	6041357	5039563	7581249	2769071	13190438	2270492	7968815	50
11	6043675	5035727	7585830	2763029	13182472	2272698	7967057	49
12	6045992	5031894	7590413	2756989	13174512	2274905	7965299	48
13	6048309	5028063	7594999	2750949	13166558	2277114	7963540	47
14	6050625	5024234	7599587	2744910	13158610	2279324	7961780	46
15	6052940	5020408	7604177	2738873	13150668	2281535	7960020	45
16	6055255	5016584	7608769	2732836	13142732	2283748	7958259	44
17	6057570	5012762	7613363	2726800	13134802	2285962	7956497	43
18	6059884	5008942	7617959	2720764	13126877	2288178	7954735	42
19	6062198	5005125	7622557	2714730	13118958	2290395	7952972	41
20	6064511	5001310	7627157	2708696	13111043	2292614	7951208	40
21	6066824	4997497	7631759	2702663	13103138	2294834	7949443	39
22	6069136	4993687	7636363	2696632	13095237	2297055	7947678	38
23	6071448	4989879	7640969	2690602	13087343	2299277	7945912	37
24	6073759	4986073	7645577	2684573	13079453	2301500	7944146	36
25	6076069	4982270	7650187	2678545	13071573	2303725	7942379	35
26	6078379	4978469	7654799	2672518	13063697	2305951	7940611	34
27	6080688	4974670	7659413	2666492	13055827	2308178	7938842	33
28	6082997	4970873	7664030	2660467	13047963	2310406	7937073	32
29	6085306	4967079	7668649	2654444	13040105	2312635	7935303	31
30	6087614	4963287	7673270	2648421	13032253	2314866	7933533	30
31	6089922	4959497	7677893	2642399	13024407	2317098	7931762	29
32	6092229	4955710	7682518	2636378	13016567	2319332	7929990	28
33	6094536	4951925	7687145	2630358	13008732	2321567	7928218	27
34	6096842	4948142	7691774	2624338	13000903	2323804	7926445	26
35	6099147	4944361	7696405	2618319	12993080	2326042	7924671	25
36	6101452	4940582	7701038	2612301	12985263	2328281	7922896	24
37	6103756	4936806	7705673	2606284	12977457	2330522	7921121	23
38	6106060	4933032	7710310	2600268	12969647	2332764	7919345	22
39	6108364	4929260	7714949	2594252	12961848	2335008	7917569	21
40	6110667	4925490	7719590	2588237	12954055	2337253	7915792	20
41	6112970	4921723	7724233	2582224	12946267	2339499	7914014	19
42	6115272	4917958	7728878	2576211	12938485	2341747	7912235	18
43	6117573	4914195	7733525	2570199	12930709	2343996	7910456	17
44	6119873	4910435	7738175	2564189	12922939	2346246	7908676	16
45	6122173	4906677	7742827	2558179	12915175	2348498	7906896	15
46	6124473	4902921	7747481	2552170	12907417	2350751	7905114	14
47	6126772	4899168	7752137	2546163	12899665	2353005	7903332	13
48	6129071	4895417	7756795	2540156	12891919	2355261	7901550	12
49	6131369	4891668	7761455	2534150	12884179	2357518	7899767	11
50	6133667	4887921	7766117	2528145	12876445	2359776	7897983	10
51	6135964	4884177	7770781	2522141	12868717	2362036	7896198	9
52	6138261	4880435	7775447	2516138	12860994	2364297	7894413	8
53	6140557	4876695	7780116	2510136	12853277	2366559	7892627	7
54	6142853	4872957	7784787	2504134	12845565	2368823	7897841	6
55	6145148	4869222	7789460	2498134	12837859	2371088	7889054	5
56	6147442	4865489	7794135	2492135	12830159	2373354	7887266	4
57	6149746	4861758	7798812	2486136	12822465	2375622	7885477	3
58	6152030	4858029	7803491	2480138	12814776	2377891	7883688	2
59	6154323	4854302	7808172	2474140	12807093	2380162	7881898	1
60	6156615	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880107	0
								M

M.	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes*	*Differentiæ & Logarit. Tangent.*	*Tangentes*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus.*	
0	6156015	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880108	60
1	6158907	4846856	7817542	2462149	12791745	2384707	7878317	59
2	6161198	4843136	7822230	2456154	12784080	2386982	7876525	58
3	6163489	4839418	7826920	2450160	12776420	2389258	7874732	57
4	6165781	4835702	7831612	2444167	12768765	2391535	7872939	56
5	6168070	4831989	7836306	1438175	12761116	2393814	7871145	55
6	6170259	4828278	7841002	2432184	12753473	2396094	7869350	54
7	6172648	4824569	7845700	2426193	12745835	2398376	7867555	53
8	6174936	4820862	7850400	2420203	12738203	2400659	7865759	52
9	6177224	4817158	7855102	2414215	12730577	2402943	7863963	51
10	6179512	4813456	7859807	2408227	12722956	2405229	7862166	50
11	6181799	4809756	7864514	2402240	12715341	2407516	7860368	49
12	6184085	4806058	7869223	2396254	12707732	2409804	7858569	48
13	6186371	4802363	7873934	2390269	12700128	2412094	7856770	47
14	6188656	4798670	7878647	2384285	12692530	2414385	7854970	46
15	6190940	4794979	7883363	2378301	12684937	2416678	7853169	45
16	6193224	4791290	7888081	2372318	12677350	2418972	7851368	44
17	6195508	4787603	7892801	2366336	12669769	2421267	7849566	43
18	6197791	4783919	7897523	2360355	12662194	2423564	7847764	42
19	6200074	4780237	7902247	2354375	12654624	2425862	7845961	41
20	6202356	4776557	7906973	2348396	12647060	2428161	7844157	40
21	6204638	4772880	7911702	2342418	12639501	2430462	7842352	39
22	6206919	4769205	7916433	2336441	12631948	2432764	7840547	38
23	6209199	4765532	7921166	2330465	12624400	2435067	7838741	37
24	6211479	4761861	7925901	2324489	12616858	2437372	7836935	36
25	6213758	4758192	7930638	2318514	12609321	2439678	7835128	35
26	6216037	4754525	7935378	2312539	12601790	2441986	7833320	34
27	6218315	4750860	7940120	2306565	12594265	2444295	7831511	33
28	6220593	4747198	7944864	2300593	12586746	2446605	7829702	32
29	6222870	4743538	7949610	2294621	12579232	2448917	7827892	31
30	6225146	4739880	7954358	2288650	12571724	2451230	7826082	30
31	6227422	4736224	7959109	2282680	12564222	2453544	7824271	29
32	6229698	4732571	7963862	2276711	12556725	2455860	7822459	28
33	6231973	4728920	7968617	2270743	12549234	2458177	7820647	27
34	6234248	4725271	7973374	2264775	12541746	2460496	7818834	26
35	6236522	4721624	7978133	2258808	12534264	2462816	7817020	25
36	6238796	4717979	7982895	2252842	12526787	2465137	7815205	24
37	6241069	4714336	7987659	2246876	12519316	2467460	7813390	23
38	6243342	4710695	7992425	2240911	12511850	2466784	7811574	22
39	6245614	4707056	7997193	2234946	12504389	2472110	7809758	21
40	6247885	4703419	8001963	2228982	12496934	2474437	7807941	20
41	6250156	4699785	8006736	2223020	12489484	2476765	7806123	19
42	6252426	4696153	8011511	2217058	12482039	2479095	7804304	18
43	6254696	4692523	8016288	2211097	12474600	2481426	7802485	17
44	6256966	4688895	8021067	2205136	12467167	2484759	7800665	16
45	6259235	4685269	8025849	2199176	12459739	2486093	7798845	15
46	6261503	4681645	8030633	2193217	12452317	2488428	7797024	14
47	6263771	4678024	8035419	2187259	12444900	2490765	7795202	13
48	6266038	4674405	8040207	2181302	12437489	2493103	7793380	12
49	6268305	4670788	8044997	2175345	12430083	2495443	7791557	11
50	6270572	4667173	8049790	2169389	12422683	2497784	7789733	10
51	6272838	4663561	8054585	2163435	12415288	2500126	7787909	9
52	6275103	4659951	8059382	2157481	12407900	2502470	7786084	8
53	6277368	4656343	8064181	2151528	12400515	2504815	7784258	7
54	6279632	4652737	8068983	2145575	12393136	2507162	7782432	6
55	6281895	4649133	8073787	2139623	12385762	2509510	7780605	5
56	6284158	4645531	8078593	2133672	12378394	2511859	7778777	4
57	6286420	4641931	8083401	2127721	12371031	2514210	7776949	3
58	6288682	4638334	8088212	2121772	12363673	2516562	7775120	2
59	6290943	4634739	8093025	2115824	12356320	2518915	7773290	1
60	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	0
								M.

Digitized by Google

M.	*Sinus.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes.*	*Differentiæ & Logarit. Tangent.*	*Tangentes.*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus.*	
0	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	60
1	6295464	4627555	8102658	2103929	12341630	2525626	7769629	59
2	6297724	4623966	8107479	2097982	12334293	2525984	7767797	58
3	6299983	4620379	8112300	2092036	12326961	2528343	7765965	57
4	6302242	4616794	8117124	2086091	12319635	2530703	7764132	56
5	6304501	4613211	8121951	2080146	12312314	2533065	7762299	55
6	6306759	4609630	8126780	2074202	12304998	2535428	7760465	54
7	6309016	4606052	8131611	2068259	12297687	2537793	7758630	53
8	6311273	4602476	8136444	2062317	12290381	2540159	7756794	52
9	6313529	4598902	8141280	2056376	12283081	2542526	7754958	51
10	6315784	4595330	8146118	2050435	12275786	2544895	7753121	50
11	6318039	4591760	8150958	2044495	12268496	2547265	7751283	49
12	6320293	4588292	8155801	2038555	12261212	2549637	7749445	48
13	6322547	4584627	8160646	2032617	12253933	2552010	7747606	47
14	6324800	4581064	8165493	2026679	12246659	2554385	7745766	46
15	6327053	4577503	8170343	2020742	12239390	2556761	7743926	45
16	6329305	4573944	8175195	2014806	12232126	2559138	7742085	44
17	6331557	4570387	8180049	2008870	12224867	2561517	7740244	43
18	6333808	4566832	8184905	2002935	12217613	2563897	7738402	42
19	6336059	4563279	8189764	1997000	12210364	2566279	7736559	41
20	6338310	4559728	8194625	1991066	12203121	2568662	7734716	40
21	6340560	4556179	8199488	1985133	12195883	2571046	7732872	39
22	6342809	4552632	8204354	1979200	12188650	2573432	7731028	38
23	6345058	4549088	8209222	1973269	12181422	2575819	7729183	37
24	6347305	4545546	8214092	1967338	12174199	2578208	7727337	36
25	6349553	4542006	8218965	1961408	12166981	2580598	7725490	35
26	6351800	4538468	8223840	1955478	12159768	2582990	7723642	34
27	6354046	4534932	8228717	1949549	12152561	2585383	7721794	33
28	6356292	4531398	8233597	1943621	12145359	2587777	7719945	32
29	6358537	4527866	8238479	1937693	12138162	2590173	7718096	31
30	6360782	4524336	8243363	1931766	12130970	2592570	7716246	30
31	6363026	4520808	8248250	1925839	12123783	2594969	7714395	29
32	6365270	4517282	8253139	1919913	12116601	2597369	7712544	28
33	6367513	4513758	8258031	1913988	12109424	2599770	7710692	27
34	6369756	4510236	8262925	1908063	12102252	2602173	7708839	26
35	6371999	4506717	8267821	1902140	12095085	2604577	7706986	25
36	6374241	4503200	8272720	1896217	12087923	2606983	7705132	24
37	6376482	4499685	8277621	1890295	12080766	2609390	7703277	23
38	6378722	4496172	8282524	1884373	12073614	2611799	7701422	22
39	6380962	4492661	8287429	1878452	12066467	2614209	7699566	21
40	6383201	4489152	8292337	1872531	12059325	2616621	7697710	20
41	6385440	4485645	8297247	1866611	12052188	2619034	7695853	19
42	6387678	4482140	8302160	1860692	12045056	2621448	7693995	18
43	6389916	4478637	8307075	1854773	12037929	2623864	7692137	17
44	6392153	4475136	8311992	1848855	12030809	2626281	7690278	16
45	6394390	4471637	8316912	1842937	12023690	2628700	7688418	15
46	6396626	4468140	8321834	1837020	12016578	2631120	7686558	14
47	6398862	4464646	8326759	1831105	12009472	2633541	7684697	13
48	6401097	4461154	8331686	1825190	12002370	2635964	7682835	12
49	6403332	4457664	8336615	1819276	11995274	2638388	7680973	11
50	6405566	4454176	8341547	1813363	11988183	2640813	7679110	10
51	6407799	4450690	8346481	1807450	11981097	2643240	7677246	9
52	6410032	4447206	8351418	1801537	11974015	2645669	7675382	8
53	6412264	4443724	8356357	1795625	11966938	2648099	7673517	7
54	6414496	4440244	8361298	1789714	11959866	2650530	7671652	6
55	6416728	4436766	8366242	1783803	11952799	2652963	7669786	5
56	6418959	4433290	8371188	1777893	11945737	2655397	7667919	4
57	6421189	4429816	8376136	1771983	11938680	2657833	7666051	3
58	6423419	4426344	8381087	1766074	11931628	2660270	7664183	2
59	6425648	4422875	8386040	1760166	11924580	2662709	7662314	1
60	6427876	4419408	8390996	1754259	11917537	2665149	7660445	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6427876	4419408	8390996	1754259	11917537	2665149	7660445	60
1	6430104	4415943	8395954	1748353	11910499	2667590	7658575	59
2	6432331	4412480	8400915	1742447	11903466	2670033	7656704	58
3	6434558	4409019	8405878	1736542	11896438	2672477	7654833	57
4	6436785	4405560	8410844	1730637	11889417	2674923	7652961	56
5	6439011	4402103	8415812	1724733	11882397	2677370	7651088	55
6	6441236	4398648	8420782	1718829	11875383	2679819	7649215	54
7	6443461	4395195	8425754	1712926	11868374	2682269	7647341	53
8	6445685	4391743	8430729	1707022	11861370	2684721	7645466	52
9	6447909	4388293	8435706	1701119	11854371	2687174	7643591	51
10	6450132	4384845	8440686	1695216	11847377	2689629	7641715	50
11	6452355	4381399	8445668	1689314	11840388	2692085	7639838	49
12	6454577	4377955	8450653	1683412	11833404	2694543	7637960	48
13	6456799	4374514	8455640	1677512	11826424	2697002	7636082	47
14	6459020	4371075	8460630	1671613	11819449	2699462	7634204	46
15	6461240	4367638	8465622	1665714	11812479	2701924	7632325	45
16	6463460	4364203	8470617	1659816	11805514	2704387	7630445	44
17	6465679	4360770	8475614	1653918	11798553	2706852	7628564	43
18	6467898	4357339	8480614	1648021	11791597	2709318	7626683	42
19	6470116	4353910	8485617	1642124	11784646	2711786	7624802	41
20	6472333	4350483	8490622	1636228	11777700	2714255	7622920	40
21	6474550	4347058	8495629	1630332	11770758	2716726	7621037	39
22	6476766	4343635	8500639	1624437	11763821	2719198	7619153	38
23	6478982	4340214	8505651	1618542	11756889	2721672	7617269	37
[illegible]	6481198	4336795	8510666	1612648	11749962	2724147	7615384	36
25	6483413	4333378	8515683	1606755	11743039	2726623	7613498	35
26	6485628	4329963	8520703	1600862	11736121	2729101	7611612	34
27	6487842	4326550	8525725	1594970	11729208	2731580	7609725	33
28	6490055	4323993	8530750	1589078	11722300	2734061	7607837	32
29	6492268	4319730	8535777	1583187	11715396	2736543	7605949	31
30	6494480	4316323	8540806	1577296	11708497	2739027	7604060	30
31	6496692	4312919	8545838	1571407	11701602	2741512	7602170	29
32	6498903	4309517	8550872	1565518	11694712	2743999	7600280	28
33	6501114	4306116	8555909	1559629	11687827	2746487	7598389	27
34	6503324	4302717	8560949	1553740	11680947	2748977	7596498	26
35	6505533	4299320	8565991	1547852	11674071	2751468	7594606	25
36	6507742	4295925	8571036	1541964	11667200	2753961	7592713	24
37	6509950	4292532	8576083	1536077	11660334	2756455	7590819	23
38	6512158	4289141	8581133	1530191	11653472	2758950	7588925	22
39	6514365	4285752	8586185	1524305	11646615	2761447	7587031	21
40	6516572	4282365	8591239	1518420	11639763	2763945	7585136	20
41	6518778	4278980	8596296	1512535	11632915	2766445	7583240	19
42	6520984	4275597	8601355	1506651	11626072	2768946	7581343	18
43	6523189	4272226	8606417	1500767	11619234	2771449	7579446	17
44	6525394	4268837	8611482	1494884	11612401	2773953	7577548	16
45	6527598	4265460	8616549	1489001	11605572	2776459	7575650	15
46	6529801	4262085	8621619	1483119	11598748	2778966	7573751	14
47	6532004	4258712	8626692	1477237	11591928	2781475	7571851	13
48	6534206	4255341	8631767	1471356	11585112	2783985	7569951	12
49	6536408	4251972	8636845	1465476	11578301	2786496	7568050	11
50	6538609	4248605	8641926	1459596	11571494	2789009	7566148	10
51	6540809	4245240	8647009	1453717	11564691	2791523	7564246	9
52	6543009	4241877	8652095	1447838	11557893	2794039	7562343	8
53	6545208	4238516	8657183	1441960	11551100	2796556	7560439	7
54	6547407	4235157	8662273	1436082	11544312	2799075	7558535	6
55	6549606	4231800	8667366	1430205	11537529	2801595	7556630	5
56	6551804	4228445	8672461	1424328	11530751	2804117	7554724	4
57	6554001	4225092	8677559	1418451	11523977	2806641	7552818	3
58	6556198	4221741	8682659	1412575	11517208	2809166	7550911	2
59	6558394	4218392	8687762	1406699	11510444	2811693	7549004	1
60	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangente	Logarithmi Sinuum.	Sinus
0	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	754700
1	6562785	4211698	8697975	1394947	11496929	2816751	754511
2	6564979	4208354	8703085	1389072	11490178	2819282	754327
3	6567173	4205017	8708198	1383197	11483431	2821815	754136
4	6569367	4201672	8713314	1377323	11476688	2824349	753945
5	6571560	4198334	8718433	1371450	11469950	2826884	753754
6	6573755	4194999	8723555	1365578	11463216	2829421	753563
7	6575045	4191666	8728679	1359707	11456487	2831959	753372
8	6578130	4188335	8733806	1353836	11449762	2834499	753180
9	6580526	4185006	8738935	1347966	11443042	2837040	752989
10	6582516	4181679	8744067	1342097	11436326	2839582	752798
11	6584705	4178354	8749201	1336228	11429615	2842126	752606
12	6586894	4175030	8754338	1330358	11422908	2844672	752414
13	6589082	4171708	8759478	1324489	11416206	2847219	752223
14	6591270	4168388	8764620	1318620	11409508	2849768	752031
15	6593458	4165070	8769764	1312752	11402815	2852318	751839
16	6595645	4161754	8774911	1306884	11396126	2854870	751648
17	6597831	4158440	8780061	1301017	11389442	2857423	751456
18	6600016	4155128	8785214	1295150	11382762	2859978	751264
19	6602201	4151818	8790369	1289284	11376086	2862534	751072
20	6604386	4148510	8795527	1283418	11369415	2865092	750880
21	6606570	4145204	8800688	1277553	11362748	2867651	750687
22	6608753	4141900	8805851	1271688	11356086	2870212	750495
23	6610936	4138598	8811017	1265824	11349428	2872774	750303
24	6613118	4135298	8816186	1259960	11342774	2875338	750111
25	6615300	4132000	8821357	1254097	11336125	2877903	749918
26	6617481	4128703	8826531	1248233	11329480	2880470	749726
27	6619661	4125408	8831708	1242370	11322899	2883038	749533
28	6621841	4122115	8836887	1236507	11316203	2885608	749341
29	6624021	4118824	8842069	1230645	11309571	2888179	749148
30	6626200	4115535	8847253	1224783	11302944	2890752	748955
31	6628379	4112248	8852440	1218922	11296321	2892326	748762
32	6630557	4108963	8857630	1213061	11289702	2895902	748570
33	6632734	4105680	8862822	1207201	11283088	2898479	748377
34	6634911	4102399	8868017	1201341	11276478	2901058	748184
35	6637087	4099120	8873215	1195482	11269873	2903638	747991
36	6639263	4095843	8878415	1189623	11263272	2906220	747798
37	6641438	4092567	8883628	1183763	11256675	2908804	747604
38	6643612	4089293	8888824	1177904	11250082	2911389	747411
39	6645786	4086021	8894033	1172045	11243494	2913976	747218
40	6647959	4082751	8899244	1166187	11236910	2916564	747025
41	6650132	4079483	8904458	1160529	11230330	2919154	746831
42	6652304	4076217	8909675	1154472	11223755	2921745	746638
43	6654476	4072953	8914894	1148615	11217184	2924338	746444
44	6656647	4069691	8920116	1142759	11210617	2926932	746251
45	6658817	4066431	8925341	1136904	11204054	2929527	746057
46	6660987	4063173	8930568	1131049	11197496	2932124	745863
47	6663156	4059917	8935798	1125195	11190942	2934722	745669
48	6665325	4056663	8941031	1119341	11184392	2937322	745476
49	6667493	4053410	8946267	1113487	11177846	2939923	745282
50	6669661	4050159	8951506	1107635	11171305	2942526	745088
51	6671828	4046910	8956747	1101780	11164768	2945130	744894
52	6073994	4043663	8961991	1095927	11158235	2947736	744700
53	6676160	4040418	8967238	1090074	11151706	2950344	744505
54	6678326	4037175	8972487	1084222	11145182	2952953	744311
55	6680491	4033934	8977739	1078370	11138662	2955564	744117
56	6682655	4030695	8982994	1072518	11132146	2958177	743922
57	6684818	4027458	8988252	1066667	11125634	2960791	743728
58	6686981	4024225	8993512	1060816	11119126	2963407	743533
59	6689144	4020990	8998775	1054966	11112623	2966024	743339
60	6691306	4017759	8004040	1049116	11106124	2968943	743144

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6691306	4017759	9004040	1049116	11106124	2968643	7431448	60
1	6693468	4014529	9009308	1043266	11099629	2971263	7429501	59
2	6695629	4011301	9014579	1037400	11093138	2973885	7427553	58
3	6697789	4008075	9019853	1031567	11086652	2976508	7425605	57
4	6699949	4004851	9025130	1025718	11080170	2979133	7423657	56
5	6702108	4001629	9030410	1019879	11073692	2981759	7421708	55
6	6704267	3998409	9035693	1014023	11067218	2984380	7419758	54
7	6706425	3995191	9040978	1008170	11060748	2987015	7417807	53
8	6708582	3991974	9046266	1002329	11054283	2989645	7415856	52
9	6710739	3988759	9051557	996482	11047822	2992277	7413905	51
10	6712895	3985540	9056850	990036	11041365	2994910	7411953	50
11	6715051	3982335	9062146	984790	11034912	2997545	7410000	49
12	6717206	3979120	9067445	978944	11028463	3000182	7408046	48
13	6719361	3975919	9072747	973099	11022018	3002820	7406092	47
14	6721515	3972714	9078052	907254	11015577	3005460	7404137	46
15	6723668	3969511	9083360	901409	11009140	3008102	7402181	45
16	6725821	3966310	9088670	955505	11002708	3010745	7400225	44
17	6727973	3963110	9093983	949720	10996280	3013390	7398268	43
18	6730125	3959912	9099299	943876	10989856	3016036	7396311	42
19	6732276	3956710	9104618	938032	10983436	3018684	7394353	41
20	6734427	3953522	9109940	932189	10977020	3021333	7392394	40
21	6736577	3950330	9115265	926346	10970608	3023984	7390435	39
22	6738726	3947140	9120593	920504	10964200	3026636	7388475	38
23	6740875	3943951	9125923	914661	10957796	3029290	7386515	37
24	6743024	3940764	9131256	908819	10951396	3031945	7384554	36
25	6745172	3937579	9136592	902977	10945000	3034602	7382592	35
26	6747319	3934396	9141930	897135	10938608	3037261	7380629	34
27	6749465	3931215	9147271	891294	10932221	3039921	7378666	33
28	6751011	3928030	9152615	885453	10925838	3042583	7376702	32
29	6753757	3924859	9157962	879613	10919459	3045246	7374738	31
30	6755902	3921684	9163312	873773	10913084	3047911	7372773	30
31	6758047	3918511	9168665	867934	10906713	3050577	7370807	29
32	9760191	3915339	9174021	822094	10900346	3053245	7368841	28
33	6762334	3912169	9179380	856255	10893983	3055914	7366874	27
34	6764477	3909001	9184741	850416	10887624	3058585	7364907	26
35	6766619	3905835	9190105	844577	10881269	3061258	7362939	25
36	6768760	3902671	9195472	838739	10874918	3063932	7360970	24
37	6770901	3899509	9200842	832901	10868571	3066608	7359001	23
38	6773041	3896548	9206215	827063	10862228	3069285	7357031	22
39	6775181	3893189	9211590	821225	10855889	3071964	7355061	21
40	6777320	3890032	9216968	815388	10849554	3074644	7353090	20
41	6779459	3886877	9222349	809551	10843222	3077326	7351118	19
42	6781597	3883723	9227733	803714	10836895	3080009	7349145	18
43	6783734	3880571	9233120	797877	10830572	3082694	7347173	17
44	6785871	3877421	9238510	792041	10824253	3085380	7345199	16
45	6788007	3874273	9243903	786205	10817938	3088068	7343225	15
46	6790143	3871127	9249299	780369	10811627	3090758	7341250	14
47	6792278	3867983	9254698	774534	10805320	3093449	7339274	13
48	6794413	3864841	9260100	768699	10799017	3096142	7337298	12
49	6796547	3861701	9265505	762865	10792718	3098836	7335322	11
50	6798681	3858563	9270913	757031	10786423	3101522	7333345	10
51	6800814	3855426	9276324	751197	10780132	3104229	7331367	9
52	6802946	3852291	9281738	745363	10773845	3106928	7329388	8
53	6805078	3849158	9287155	739529	10767562	3109629	7327409	7
54	6807209	3846027	9292574	733690	10761282	3112331	7325429	6
55	6809340	3842898	9297996	727863	10755006	3115035	7323449	5
56	6811470	3839770	9303421	712029	10748734	3117741	7321468	4
57	6813599	3836644	9308840	716196	10742466	3120448	7319486	3
58	6815728	3833520	9314280	710303	10736202	3123157	7317504	2
59	6817856	3830398	9319714	704530	10729942	3125868	7315521	1
60	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.
0	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537
1	6822111	3824160	9330591	692866	10717434	3131294	7311553
2	6824237	3821044	9336034	687035	10711186	3134009	7309568
3	6826363	3817929	9341480	681203	10704942	3136726	7307583
4	6828489	3814816	9346929	675372	10698702	3139444	7305597
5	6830614	3811705	9352381	669541	10692466	3142164	7303610
6	6832738	3808596	9357835	663711	10686233	3144885	7301623
7	6834861	3805488	9363292	657880	10680004	3147608	7299635
8	6836984	3802382	9368752	652050	10673779	3150332	7297647
9	6839107	3799278	9374215	646221	10667558	3153057	7295658
10	6841229	3796176	9379682	640392	10661341	3155784	7293668
11	6843350	3793075	9385152	634562	10655128	3158513	7291678
12	6845471	3789976	9390625	628732	10648919	3161244	7289687
13	6847591	3786879	9396101	622903	10642713	3163976	7287695
14	6849711	3783784	9401580	617074	10636511	3166710	7285703
15	6851830	3780691	9407062	611246	10630313	3169445	7283710
16	6853949	3777600	9412547	605418	10624119	3172182	7281716
17	6856067	3774510	9418034	599589	10617929	3174921	7279722
18	6858184	3771422	9423524	593760	10611742	3177662	7277728
19	6860301	3768336	9429017	587932	10605559	3180404	7275733
20	6862417	3765252	9434513	582104	10599380	3183148	7273737
21	6864533	3762170	9440012	576277	10593205	3185893	7271741
22	6866648	3769090	9445514	570450	10587034	3188640	7269744
23	6868762	3756011	9451019	564622	10580867	3191389	7267746
24	6870876	3752934	9456528	558795	10574703	3194139	7265748
25	6872989	3749859	9462040	552968	10568543	3196891	7263749
26	6875102	3746786	9467555	547142	10562387	3199644	7261749
27	6877214	3743714	9473073	541315	10556235	3202399	7259748
28	6879325	3740644	9478594	545489	10550087	3205155	7257747
29	6881436	3737576	9484118	529663	10543942	3207913	7255746
30	6883546	3734510	9489645	523838	10537801	3210672	7253744
31	6885656	3731446	9495175	518013	10531664	3213435	7251741
32	6887765	3728383	9500708	512187	10525531	3216196	7249737
33	6889874	3725322	9506244	506361	10519401	3218961	7247733
34	6891982	3722263	9511783	500536	10513275	3221727	7245739
35	6894089	3719206	9517325	494711	10507153	3224495	7243724
36	6896196	3716150	9522870	488886	10501034	3227264	7241718
37	6898302	3713096	9528419	483061	10494919	3230035	7239712
38	6900408	3710044	9533971	477236	10488808	3232808	7237704
39	6902513	3706994	9539526	471411	10482701	3235583	7235697
40	6904617	3703946	9545084	465587	10476597	3238359	7233689
41	6906721	3700899	9550645	459762	10470497	3241137	7231681
42	6908824	3697854	9556209	453938	10464401	3243916	7229672
43	6910927	3694811	9561776	448114	10458309	3246697	7227662
44	6913029	3691770	9567346	442291	10452220	3249479	7225651
45	6915131	3688730	9572919	436467	10446135	3252263	7223639
46	6917232	3685692	9578495	430644	10440054	3255048	7221627
47	6919332	3682656	9584074	424821	10433976	3257835	7219614
48	6921432	3679622	9589656	418999	10427902	3260623	7217601
49	6923531	3676590	9595241	413177	10421832	3263413	7215588
50	6925630	3673559	9600830	407355	10415765	3266204	7213574
51	6927728	3670530	9606422	401533	10409702	3268997	7211559
52	6929825	3667503	9612017	395711	10403643	3271792	7209543
53	6931922	3664478	9617614	389889	10397587	3274589	7207527
54	6934018	3661454	9623216	384067	10391535	3277387	7205511
55	6936114	3658432	9628820	378245	10385487	3280187	7203494
56	6938209	3655412	9634427	372423	10379443	3282989	7201476
57	6940303	3652394	9640037	366602	10373402	3285792	7199457
58	6942397	3649377	9645651	360780	10367365	3288597	7197438
59	6944491	3646362	9651268	354958	10361332	3291404	7195418
60	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	9662511	343315	10349276	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	9668137	337494	10343253	3299835	7189355	58
3	6952858	3634321	9673766	331673	10337234	3302648	7187333	57
4	6954949	3631315	9679399	325852	10331219	3305463	7185310	56
5	6957039	3628311	9685034	320032	10325207	3308279	7183287	55
6	6959128	3625308	9690674	314211	10319199	3311097	7181263	54
7	6961216	2622307	9696315	308390	10313194	3313917	7179238	53
8	6963304	3619308	9701960	302570	10307193	3316738	7177213	52
9	6965392	3616311	9707609	296750	10301196	3319561	7175187	51
10	6967479	3613315	9713261	290930	10295202	3322385	7173161	50
11	6969565	3619321	9718916	285110	10289212	3325211	7171134	49
12	6971651	3607329	9724574	279290	10283225	3328039	7169106	48
13	6973736	3604338	9730235	273469	10277242	3330869	7167078	47
14	6975821	3601349	9735900	267649	10271262	3333700	7165049	46
15	6977905	3598362	9741568	261829	10265286	3336533	7163019	45
16	6979988	3595377	9747239	256009	10259314	3339368	7160989	44
17	6982071	3592394	9752913	250190	10253345	3342204	7158958	43
18	6984153	3589412	9758591	244370	10247380	3345042	7156927	42
19	6986235	3586432	9764272	238550	10241418	3347882	7154895	41
20	6988336	3583454	9769956	232731	10235460	3350723	7152863	40
21	6990396	3580478	9775643	236912	10229506	3353566	7150830	39
22	6992476	3577504	9781334	221093	10223555	3356411	7148796	38
23	6994555	3574531	9787028	215274	10217607	3359257	7146762	37
24	6996634	3571560	9792725	209455	10211663	3362105	7144127	36
25	6998712	3568590	9798425	203635	10205722	3364955	7142691	35
26	7000789	3565622	9804128	197616	10199785	3367806	7140655	34
27	7002866	3562656	9809835	191997	10193852	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	9815545	186178	10187922	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	9821257	180359	10181996	3376369	7134543	31
30	7009093	3553767	9826974	174541	10176073	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	9832694	168723	10170154	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	9838417	162905	10164239	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	9844143	157087	10158327	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	9849872	151269	10152418	3390672	7124344	26
35	7019459	3538989	9855605	145451	10146513	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	9861341	139633	10140611	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	9867080	133814	10134713	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	9872822	127996	10128818	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	9878568	122178	10122926	3405019	7114131	21
40	7029810	3524243	9884317	116359	10117038	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	9890069	110541	10111153	3410770	7110041	19
48	7033947	3518371	9895826	104723	10105272	3413648	7107995	18
43	7036014	3515432	9901585	98904	10099394	3415528	7105949	17
44	7038081	3512495	9907347	93886	10093520	3419409	7103402	16
45	7040147	3509560	9913113	87268	10087649	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	9918882	81450	10081782	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	9924654	75632	10075918	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	9930430	69824	10070058	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	9936209	64006	10064201	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	9941991	58178	10058347	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	9947777	52360	10052497	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	9953566	46543	10046651	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	9959359	40726	10040808	3445413	7085852	7
54	7058716	3483219	9965155	34908	10034968	3448311	7083399	6
55	7060776	3480401	9970954	29090	10029132	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	9976756	23273	10023299	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	9982562	17455	10017469	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	9988371	11637	10011643	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	9994184	5818	10005820	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	1000000	0	10000000	3465735	7071068	0
								M.

I N D E X

Propoſitionum totius Operis.

A

Accomodatio.

ACcomodatio lineæ in circulo, quæ 83. d. 7. Vt fiat. pr.1. pag. 84

Addere.

Minutias ſimul addere. pr.12. 211
Addere cuicumque figuræ ſolidæ, ita quod in eadem figura perſeuerent pr. 51. Coroll.
Vt corpora augeantur? pr.52. Cor.
Cylindro, Parallelepipedo, Priſmati alia ſimiliter addere pr. 52.
Corpus eorum, qui duplicatam habent rationem baſium, & cæt. iuxta datam proportionem baſi ad baſim augere.
Addere circulo, vide circulus.
Corpus aliquod eorum, quæ triplicatam laterum, axium, & cæt. habent rationem iuxta datam ꝓportionē in ſimile corpus augere pr.56.
Cubo alium cubum addere, ita quod cubus remaneat pr.51.
Additio numerorum quænam? pr.5. 96
Quinam numeri addendi? pr. 3. 96
Datum parallelogrammum diſſimile, altero augere pr.30. 513
Rationis datę multiplicem aſſignare pr.30 280
Triangulum ex multis coagmentatum fabricare pr.23. 509
Triangulo datam partem addere, vel auferre manente eadem figura pr.24. 509
Vide compoſitio.

Æqualitas.

Corporum, vide corpora.
Circulorum vide circulos.
Linearum vide lineæ, rectæ, latera crura.
Annulorum vide annulos.
Superficierum vide ſuperficies.

Æquidiſtantia.

Æquidiſtantia circulorum à centro deſ.10. 350

Æqualitas angulorum.

Triangula habentia crura proportionalia ſunt æquiangula prop.5. 136
Triangula habentia circa vnum ęqualem angulum crura proportionalia æquiangula ſunt pr.6.136
Quæ vno angulo æquantur, & reliqua crura habent proportionalia, & cęt. æquiangula ſunt. prop. 7. 137
Vide anguli.

Æquipotentia linearum.

Rectangula ſegmentorum, vt ęquent quadratum, vel rectangulum totius pr.3. 4. & 6. pag.54.55
Vt æquent ſe inuicem prop.5. & 9. 55. & 57
Segmenta duarum partium æqualium, & inæqualium conſtituta rectangula, vt ſe æquent p.7.56
Linea alteri addita, quid poſſit prop.7.& 10. 57
Æquipotentia crurum triangulorum baſis in rect. triangulo æquè poteſt, vt ambo crura pr.11. 58
In Ambligonio, quid poſſit magis pr.13. 60
In Oxigonio, quid poſſit minus pr.14. 60
Æquepotentes lineas reperire pr.15.& 16. 61
Segmenta linearum ſe ſecantium circulo poſſunt æqualiter pr.35. 79
Æquipotentia numeri, vtcumque ſecti pr.1. 176
etiam multiplicatus in ſe,& etiam cum alio numero Cor. 2. etiam ſi in plures partes Cor. 2. & pr.2. & 3. pag. 177
Æquipotentia numeri biſariam ſecti cum alterius numeri additione pr.4. 177
Æquipotentia numeri in partes æquales,& inęquales ſecti pr.5. 178
Numero dato æquipotentes numeros inuenire pr.29. 222

Aggregatio.

Aggregata proportionis numero æqualia ſunt in continua proportione pr.3. 257
Rationes in vnam ſummam aggregare pr.32. 281
Numerorum aggregatio vide ſumma, numerus.

Alterna ratio.

Alterna ratio in numeris pr.13. 159
Alterna ratio quid ſit? deſ 16. 115
Alterna ratio oſtenditur prop.19. 126

Algorithmus.

Algorithmus rationum. 280. & ſeqq.

Altitudo.

Altitudo figuræ, quæ deſ 4. 132
Altitudo corporum, vt inuenietur pr.3. 662
Corpus datum, vt cylindrum conum Pyramidem in altitudinem datam euehere prop.26. 668

Ambitus.

Ambitus polygoni in circulis ſunt inuicem, vt diameter ad diametrum pr.42. 133

Analyſis.

Analyſis quid ſit. 45

Anguli rectilinei, mixtilinei, ſolidi, ſphęrici.

Anguli in eodem ſegmento æquales pr.24. 74
In circulo quadrilaterorum anguli aduerſi duobus rectis æquales pr.25. 75
Angulo ſemicirculo rectus in maiori ſegmento minor recto, in minori maior recto pr.28. 76
De angulis diuidendis in ratione data 302
Anguli æqualium crurum æquales pr.27. 75
De angulis in ordine ad latera 300.& ſeq.
Vide diuidere.
Angulum in duo diuidere pr.4. 34
Angulum datum mediante quadratrice diuidere pr. 8. 302
Angulos conſtituere in triangulo proportionis datæ pr.10. 303
Anguli normaliom quadranti inſiſtunt Cor.2. 75
Angulus ſectus biſariam facit baſis ſegmentum ad crus eiuſdem proportionis, quam duo crura ad baſim totam pr.2. 283
Anguli inſiſtentium linearum ęquant duos rectos Cor. 36
Anguli ſe ſecantium linearum æquales pr.12. 37
A contactu ductę, & tangentis anguli, quibus ęquenṭur

quenṭur

quentur pr.29. pag. 77
Segmentum lateris ad aliud habet maiorem proportionem anguli ad angulum inſiſtentium in rectangulo propoſ.2. 300
etiamſi remotiùs angulo recto Cor.& pr.4. 301
Anguli in eadem proportione, ac ſectores arcus in circulis æqualibus pr.39. 152
Quæ ſecat bifariam angulum trianguli, ſecat baſim in partes cruribus proportionales pr.3 134
Anguli ęquales cùm faciant baſis ſegmenta continuè proportionalia? pr.7. 302
Vide baſim. Segmentum. Latus.
Angulus ad centrum duplus anguli ad peripheriam ſuper eundem arcum pr.23. 73
Angulus contactus omni rectilineo minor, & ſemicirculi omni rectilineo ãgulo maior p.18. 70
In ſemicirculo angulus trianguli duplus reliqui, vt faciat crura ad baſim proportionalia propoſ. 4. 288
Anguli crura proportionaliter ſecare à dato puncto pr.11. 303
In eo ducere lineam per datum punctum, quæ in eo puncto ſit ſecta proportionaliter pr.12. 244
De angulis quoad latera. 203. & ſeq.
Extra angulum ducere lineam, quę proportionaliter ſecta remaneat à cruribus eius pr.13. 304
Angulus. def. 8. 27
Rectilineus. def. 9. 28
Rectus. def.10. Obtuſus 11. Acutus def. 12.
Anguli ſphærici quinam? & menſura, quę d.3. 360
Rectus. ibid.
Anguli circulorum ſe ſecantium ſunt æquales pr.2. 361
Anguli ad verticem ipſorum ęquales pr.3. 361
Anguli ęquales ęqualia latera ſubtendunt in triangulo pr.6. 38
Anguli trianguli vide triangulum.
Angulus ſegmenti circuli quinam? def. 6. 64
Anguli in ſegmento circuli quinam? def.7. 64
Solidi anguli duo anguli reliquo maiores p.1. 598
Omnis ſolidus angulus continetur minus, quam quatuor rectis pr.2. 598
Ex quibus angulis poſſit angulus ſolidus conſtitui pr.3. 599
Angulum ſolidum fabricare pr.3. 599
Solidus angulus quinam ſit? def.4. 597

Annulus.

Dato circulo annulum ęqualem ponere, & è contrà pr.18. 532
Annulus ſolidus quadratus, cui ęquetur? p.29. 627
Annulus ſolidus rotũdus cui ęquetur? pr.20. 627
Annulos ęquales reperire pr.21. 628
Annuli plani aream cognoſcere pr.12. 530
Annulum planum menſurare pr.73. 686
Annulo ſolido ęquale priſma efficere pr.24. 667
Omnes annuli rotundi ſolidi ſimiles pr.9. 662
etiam cuiuſcumque figurę Coroll.
Cylindri in annulum flexi ſuperficies planas inuenire pr.41. 595
Quomodo ſuperficies iſtæ inuicem creſcant Coroll. 596

Apotome.

Apotome quęnam pr.23. 192
Apotomarum ſex ſpecies inueniuntur pr.2. 192
Apotomarum ſex ſpecies pr.24. 193
Apotome medię commenſurabilis linea apotome media eſt pr.53. 105
Apotome media prima pr.32 pag. 196
ſecunda pr.34. 197
Apotome commenſurabilis linea apotome eſt. pr.51. 205
Media, & extrema ratione lineę ſectę ſegmenta ſunt apotome pr 40. 200

Applicata ſpatia.

Parallelogrammum applicare alicui lineę cum defectu pr.30. pag. 148
idem agere cum exceſſu pr.31.
Applicare parallelogrammum cum exceſſu, & cum defectu alicui lineę pr.30. 148. & 149. pr.31. & 198. pr.36.
Parallelogrãmum maximum applicatorum quodnam ſit pr.29. 147

Applicatę lineę quadratrici.

Applicata quadratricis def. 4.& prop.18.& 19. 294
Applicata, cum eſt radius eſt media proportionalis inter ſagittam, & quadrantem Cor.1.& 2. 295
Applicata in quadratrici, cui arcui ſit ęqualis Coroll.3. 296

Sectionum Conicarum Applicatę.

Quadrata applicatarum in ellipſi, & hiperbola, ſunt, vt rectangula ex ſegmentis diametri pr.6. extenditur doc. in Cor. 393
Applicatas reperire in ſectionibus conicis propoſ.4. 392
Quadrata applicatarum in parabola ſunt inuicem, vt interceptę diametri portiones pr.5. 393
Quadrata applicatarum ęqualia quibus rectangulis in parabola? pr 8. 394
In ellipſi, & hyperbola, quibus rectangulis ſint ęqualia quadrata applicatarum pr.8. 395
Applicatarum in Aſymptotum terminantium rectangula, quę, & cuinam quadrato ſint ęqualia pr.46. 418
Applicatas inuenire in ellipſi Cor. 2. 412
Vide diameter.

Area.

Aream cuiuſlibet figurę regularis in ęquale parallelogrammum redigere pr.5. 504
Cui rectangulo circuli area ęquetur pr.3. 528
Aream circuli ex data diametro, & peripheria proximè inuenire pr.5. 529
Area circuli eſt ad quadratum diametri vt 11. ad 14. proxime pr.6. 529
Vide circulus.
Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire pr.7. pag. 529. & alio modo pr.9.
Area Iſoperimetrũ figurarum. Vide Iſoperimetrę.
Area annuli vide annulus.
Areã cuiuſlibet trianguli reperire pr.18.& 19. 508
Aream cuiuſlibet figurę regularis reperire propoſ.20. 508
Aream figurę irregularis inuenire pr.21. 509
& etiam Geometricè pr.22.
Vide nomen figurę cuius aream cupis.

Arcus.

Arcum detruncare ęqualem alteri pr.1. 360
Arcum circuli deſcribere, cuius centrum haberi nequeat pr.1. 286
Arcus ęquali diminutione decreſcentes ſimul dimidiũ integrorũ ęquant excluſo vno pr.10. 291
Arcus tertius proportionalis duabus rectis pr.20. & 21. Cor.3. 296
arcus linea ęqualis pr.22. & 24. 297

Maior

Maior arcus habet maiorẽ proportionem ad minorem, quam chorda maioris ad chordam minoris pr.3. pag. 301
Arcus ſimilis circuli ad arcum ſimilem eſt, vt chorda ad chordam, & è contra pr.45. 133
Arcus, ac ſectores proportionales ſunt in circulis æqualibus pr.39. 152
Arcus inſiſtentes ſibi, aut rectos, aut rectis duobus angulos ęquales faciunt pr.4. 361
Arcus vide triangula ſphærica.

Argumenta Mathematica.

Modi argumentandi 116
Alterna Inuerſa Ex ęquali Enumeratio, Collectio, Reſiduatio, Replicatio, Detractio, Diuiſio, Compoſitio, Conuerſio, quæ vide ſuis locis.
Modi arguendi in proportionibus 278. & ſeq.
Argumeta mathematica extremo, maiori, minori medio termino conſtant pr.13. 115

Arithmetica.

Arithmetica eſt ſcientia oſtenſiua, & eius obiectum aſſignatur pr.5. 23

Arithmetica ſeries.

Arithmeticæ proportionis proprietates in exordio expenſ. 237
Arithmetica linearum proportio pr.24. 255
Arithmeticum numerum in partes arithmeticas diſtribuere pr.18. 241
Seriem ſimilem ſeriei arithmeticæ inuenire propoſ.19 242
Arithmeticus multiplicatus per numerum interuallorum, quem numerum gignat in arithmetica ſerie pr.6. & Cor. 239
Numeri Arithmeticè procedentes æqualiter ab ab extremis diſtiti, vt ſint æquales pr.8. 239
Arithmeticam ſeriem in ſummam colligere propoſ.9. 239
Arithmeticam ſeriem proportionalium extendere pr.10. 240
Arithmeticum tertium, & vltimum reperire prop. 11 12. & 13. 240
Vide ſumma, interuallum, medium.

Arithmeticorum ſpatiorum ſeries.

Rectangula Arithmeticè decreſcentia ſunt dimidium integrorum vno excluſo pr.12. 499
Rectangula duplici arithmetico decremento deficientia ad integra ſunt maiora ſuis reſiduis propoſ.13. 498
Suntque ad integra excluſo vno minus, quam 1. ad 3. pr.14. 500
& magis incluſo maximo vtrinque pr.15.
Sed ſemper quò in dictis rectãgulis duplici arithmetico decremento deficientibus eſt minutior diuiſio fit acceſſus ad proportionem 1. ad 3. propoſ.16. 501
Si ſit infinita ſubdiuiſio dictorum rectangulorum ſe habent ad integra, vt 1 ad 3. pr.16. 501
Quod ſi non accedant vſque ad vltimam diminutionem, quam proportionem ſeruent pr. 18. & 19. 502
Cui rectangulo ea ſeries rectangulorum duplici arithmetico decremento minutorum æquetur? Coroll. 502

Aſymptotus.

Aſymptotos inuenire pr.47. 418
Aſymptotos lineę curuæ p.22. pag.296. & p.27. 298
Aſymptoti Hyperbolæ in conoide hyperbolico deſcriptæ quinam pr.20. 442
Aſymptota quænam ſectio oſtendatur circa hyperbolam pr.44. 417
Quadratum tangentis verticem in Aſymptotum terminantis, cui æquetur pr.45. 417
In Aſymptotico cono, quæ lineæ tangentes ęquales pr.31. 635
Fruſtum Aſymptotici coni, quẽ cylindrum ęquet? pr.32. 635
Aſymptoticæ ſeries planitierum, & corporum, vide ſeries.
Quæ parallelæ Aſymptotis hyperbolicis includant ſpatia æqualia pr.47. 543

Axis.

Axis coni def.3. pag.390. & eius ſectionum d.11.
Axes duo in cono ſcaleno Cor. pr.2. 437
Axes in ellipſi inuenire pr.33. 412
Axem principalem in hyperbola inuenire propoſ.31. 411
Axem inuenire in parabola pr.36. 413
Axis quadratricis def. 3. 293
Axis ſphæræ quid def.3. 354
Axis ſphæroidis def.2. 439

B

Baſis.

BAſis diuiſa biſariam in triangulo, quos angulos efficiat maiores pr.1. 300
Triangulum, vel parallelogrammum ad maiorem baſem, ſeu altitudinem ſeruata æqualitate redigere pr.6. 504
Maior proportio lateris ad latus, quàm baſis ad baſim, quos faciat angulos maiores pr.5. 302
Maior proportio lateris ad latus, quàm baſis ad baſim angulum verticalem facit maiorem, &c. pr.6. pag.302. & pr.15. pag.313.
Duorum triangulorum æquiangulorum baſes vna linea fiunt compoſitæ, ſi reliqua crura ſint parallela pr.9. 138
Corpus aliquod, vt cylindrum, conum, pyramidem, priſma in baſibus datis locare pr.25. 668
Baſes harmonicæ quænam def. 3. 267

Binomium.

Binomium à quibus lineis naſcatur pr.10. 189
Binomium primum pr.17. pag.190. ſecundum pr. 18. tertium pr.19. pag.191. quartum prop.20. quintum 21. ſextum pr.22. pag.192.
Binomio medio commenſurabilis linea binomium medium eſt pr.52. 205
Binomio commenſurabilis linea binomium eſt pr.50. 205
Binomium medium primum pr.31. pag.196. ſecundum pr.33. pag.196.
Bina media potens, vt fiat pr.46. 203

C

Centrum.

CEntrum harmonicum quodnam def.2. 263
Centrum circuli reperire pr.1. 64
Quorum circulorum ſit idem centrum pr.2. 64
pr.3. 65
in qua linea ſit centrum Cor. 64
Lineę plures æquales in idem punctum conſpirantes in circulo oſtendunt centrum pr.4. 65
A centro Linearum æquidiſtantia def.4. 63
Centrum ſectionum conicarum quodnam d.13. 391
Centrum hyperbolæ inuenire pr.30. 411

Centrum in ellipſi inuenire Coroll.2. 412
Sphæræ centrum inuenire pr.5. 356

Chorda.

Chorda quid ſit def.1. 307
Chorda, lineaque in circulo coniungens duo puncta peripheriæ eſt intra circulum pr.12. 68
Quæ chordę æqualiter, magiſue diſtent à centro, ſeu minus prop.16. pag.69. & prop.17. pag.70.
Quæ æquales pr.33. 68
Rectangulum ex contingente, & chorda circuli, cui rectangulo æquetur pr.13. 555
Chorda ad chordam ſimilis arcus, vt diameter ad diametrum pr.44 133
Chordę parallelę in circulo ſimul, ad diametrum, quam habeant rationem pr.39. 567
Differentię chordarum à circuli ſextante pariter remotarum, cui ſinui æquentur pr.23. 321
Quæ maximæ lineæ, quæ minimæ, quæ maiores in circulo ab aliquo puncto, at non centro ad peripheriam ductæ pr.15. 69
Arcus tertiæ partis chora data inuenire chordam totius arcus pr.20. 319
Radius vt ſe habeat ad chordam quadrantem ſuperantem pr.21. 320
Per auream regulam chordas inuenire Coroll. pr.21. 320
Tres ſubtenſę arcui, & duplo, & triplo ſunt tres continuè proportionales pr.22. 320
Cuiuſcumque arcus tripli, quadrupli, aut quintupli chordas inuenire pr.32. Cor. 320
Chordas inuenire Cor. 3. pag. 312. & Cor. 313.
Sinum inuenire pr.2. 312
Ex ſinus duorum arcuum chordam amborum inuenire, & ſinum pr.12. 312
Quadratum chordæ duorum arcuum, quibus quadratis æquetur pr.13 & 14. 313
Chorda vnius gradus ſenſibiliter non differt ab arcu ſuo Cor. pr.15. 173
Chordam vnius gradus inuenire Cor.2. pag. 314. & ſinum minutorum 15.Cor.3.
Chordas ſine extractione radicis quadratæ inuenire exceſſus arcus ſuper alium, vel ſummæ duorum arcuum Cor. 1. & 2. pag.317. vel tripli vnius arcus, vel è contra Cor. 3. & 4. pag.318 & quintupli Cor.5.
Chordæ vide ſubtenſæ.

Cyclicæ lineæ.

Cyclicam deſcribere pr.29. 299

Circumſcriptio.

Circumſcriptio quænam def.1. 83
Rectilinei circulo def.4. 83
Circuli rectilineo def.6. 83
Trianguli circa circulum pr.2. 84
Circuli circa triangulum pr.5. 85
Quadrati circulo pr.7. 86
Circuli quadrato pr.9. 87
Pentagoni circulo pr.12. 88
Circumſcriptio figuræ ſimilis inſcriptæ circulo. Cor. 89
Pentagoni circa circulum pr.14. 89
Cuicumque figuræ curuilineæ, mixtilineæque rectangula tot circumſcribi poſſunt, donec relinquant quantitatem quslibet data minorem propoſ.1. 527
Figura omnis circulo circumſcripta eſt maioris ambitus, inſcripta minoris pr.2. 528

Circulus.

Circuli quinam ęquales def.1. 63
Circulus datis tribus punctis deſcribitur Cor 1. pag. 86
Circulus alium non ſecat, niſi in duobus punctis in ſphęra pr.5. 65
Vide tactus, tangens, ſecans, ſegmentum.
Circuli areę æquale quadratum ponere pr. 530
Vide area.
Circulos proportionaliter augere, vel minuere pr.19. 533
Circulus, in quo conueniat cum ellipſi, & parabola Cor.3. 396
Circulorum per punctum intra circulum, & non per polum ductorum, qui arcus ſint maiores in ſphęra, & cęt. pr.22. 380
Vide Tactus, maximus, ſubtenſę.
Circuli vide ſectores arcus, ſegmenta, Anguli ſphęrici, chordę, ſecantes, ſubtenſæ, tangentes, radius, diameter.
Circuli inter ſe ſunt, vt quadrata diametrorum pr.41. 153
Circulus in quot partes diuidatur 307
Circuli proiectio vide orthographia, ſtereographia.

Circumferentia.

Circumferentia cuiuſlibet circuli diametrum continet ter, & magis, quàm eius octauam partem pr.5. 288
Proportio peripheriæ ad diametrum, inter quas rationes conſiſtat Cor. 289
Circumferentiæ inter ſe ſunt, vt diametri pr.43. pag. 153
Deſcriptio circumferentiæ, & menſura 286 & ſeq.
Cuiuſlibet circuli peripheria eſt tripla diametri, & parte ſeptima paulò minor pr.3. 287

Collectio.

Collectio rationis def.10. 116
Collectio oſtenditur Cor. 2. 117

Commenſurabilitas.

Commenſurabilium maximam communem menſuram inuenire pr.1. & 2. 183. & 184
Quę duas magnitudines metitur communem quoque maximam menſuram dimetitur Cor. pr. 1. & Cor. pr. 2. 183
Commenſurabilium ratio eſt, quæ numeri ad numerum, & incommenſurabilium nequaquam pr.3. 184
Commenſurabilium quadrata, numericorum quadratorum proportionem habent, & è contra pr.14. 184
Inuenire rectas, quorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum pr.11. 187
Commenſurabiles inuenire Cor. pr.11. 188
Commenſurabiles magnitudines compoſitę, partibus commenſurabiles pr.9. 186
Vide Incommenſurabiles.
Quæ lineæ commenſurabiles longitudine, quæ potentia Coroll. 185
Commenſurabiles magnitudines, quæ? def.1. 182
Latera exceſſuum quadratorum ſegmentorum quando ſint commenſurabilia pr.38. 189

Compoſitio rerum.

Datis pluribus rectilineis ea in vnicum conglobare pr.28. 512

Com-

Digitized by Google

Compoſiti numeri, & inter ſe compoſiti def. 13. & 14. 93
Duos aut plures conos in vnum coadunare propoſ.52. 679
Vide addere.

Compoſitio rationum.

Proportio compoſita generi ex minutijs pr.15. 212
Compoſitio rationis def.25. 117
Proportionem compoſitam agnoſcere pr.10. 132
Ratio ex rationibus compoſita def.27. 118
Compoſitio rationis in proportionalitatibus propoſ.25. 279
Compoſitio rationis pr.21. 128
Compoſitam proportionem in lineis agnoſcere prop.5. 250
Compoſita ratio numerica, quæ? def.4. 154
Lineam compoſitam proportionem ad aliam habentem reperire pr.4. 249
Plani numeri ratio compoſita pr.10. 171
Compoſitio rationis in numeris pr.24. 161

Conchilis.

Conchilem deſcribere pr.26. & 28. 298
Eſt Aſymptotos pr.27. 298
Diuidit trifariam angulum pr.10. 303

Coniforme corpus.

Coniformis corpora æquealta ſunt inuicem, vt baſes pr.28. 631
Quod ſi ſint æqualium baſium ſe referunt, vt altitudines pr.28. Cor. 632
Et reciprocas altitudines baſibus habentia, æqualia pr.29. 631
Conum cono flexis conſtanti æquare pr.71. 673

Conoides.

Conoides hyperbolicum quid ſit? def.1. 441
Conoides hyperbolicum, quam habeat proportionem ad conum inſcriptum pr.30. 633
Conoides hyperbolicum quadriforme æquat fruſtum pyramidis, & cæt. pr.56. 652
In conoide Hyperbolico quænam ſectio ſit parabola? pr. 17. pag. 441. quænam ſit hyperbola pr.19. quænam ellipſis pr.18. 442
Conoides cui ſpatio aſymptotici coni æquetur pr.33. 35
Vt facilè ſoliditas ipſius colligitur in Cor.
Conoidea parabolicum quadriforme, cui ſoliditati æquetur pr.55. 652
cui ſoliditati eius partes? Cor. pr.55. ibid.
Conoides parabolicum quid? def.1. 440
Conoidis parabolici ſectio parallela baſi circulo circulus pr.12. 440
Quodcumque corpus conoidale alteri dato etiam obliquo aſſimilare pr.12. 664

Continuatio.

Continuatio ſerierum proportionalium. Vide ſeries.
Continuatio rationum. 283. & ſeq.

Coni ſuperficies.

Superficies coni recti, cui ſectori æquetur, & cui triangulo in Coroll. pr.24. 560
Coni ſuperficiei cylindricæ pr.25. 560
Coni circulo æquetur pr.26. 561
Conicam ſuperficiem coni recti tranſmutare Coroll. 561
Superficies coni recti ad ſuperficiem recti cylindri, quam habeat rationem? pr.57. 561
Superficies coni recti, quę? & cuius duplo æquetur? pr. 58. 561
Vide conos.
Superficies coni recti ſe habet ad ſuum circulum, vt latus ad radium pr.30. 562
Similium rectorum conorum ſuperficies, vt ſint ad inuicem? pr.33. quam proportionem compoſitam habeant? pr. 34. 531
Superficies rectorum conorum æquealtorum, vt ſint ad inuicem pr.35. 563
Vide ſuperficies.
Superficies conorum ſcalenorum, & quorumcumque corporum obliquorum ſuperficiem globoſam inueſtigare Cor. pr.2. 662
Portionis figuræ conicæ ſuperficies ſphæræ circumſcriptę, quo circuli ſit maior pr. 44. pag. 569. & inſcriptæ minor pr.45. 570
Omnis parabolici, & hyperbolici conoidis ſuperficies, vt ſe habeat ad planum per axem, & quęcumque talis figura pr.38. & Cor. 566
Coni ſuperficiem rectanguli inuenire pr.16. 582
Superficiem coni ad datam baſim terminantis inuenire pr.17. 582
Coni ſuperficie concaua ſecti ſuperficiem extendere pr.18. 583
Coni priſmatici ſuperficiem in planum deducere pr. 20. ibid.
Coni obliqui ſuperficiem inuenire à cylindro ſecti pr.21. 584
Coni ſecti à ſuperficie plana axi non normali in planum extendere pr.22. 585
Coni ſeu obliqui, ſeu elliptici ſuperficiem plano conſignare pr.23. 586
Coni lenticularis baſis ſuperficiem extendere propoſ.24. 587
Coni cuiuſcumque irregularis ſuperficiem inuenire pr.25. ibid.

Coni ſoliditas.

Conus priſmaticus ad conum eſt, vt 2. ad 3. propoſ.26. 631
Conus Ellipticæ baſis, quem æquet conum æquealtum pr.27. ibid.
Æqualis baſis, & altitudinis æquantur pr.27. Coroll.1. 632
Et ſi habeant baſes altitudinibus reciprocè proportionales Cor.2. ibid.
Sunt æqualis baſis inuicem, vt altitudines Coroll.3. ibid.
Conus quid ſit def.1. pag. 390. & oppoſiti quinam def.5. rectus, ſcalenus def.4. 391
Cono, vel pyramidi abſcindere partem datam propoſ.41. 675
Conum pyramidi æqualem efficere pr.19. 666
Cono ęqualem cylindrum ponere pr.19. ibid.
Conum æqualem ſoliditati coni intus vacuati ponere pr.27. 668
Etiam cùm eſt vacuus ſimili ſolido pr. 28. ibid.
Conica corpora vide corpora.
Coni Iſoſceles quinam æquales pr.9. 635
Conus eſt triens cylindri pr.7. 612
Conum diuidere vide diuidere.
Vt ſe ad inuicem referant pr.8. 611
Similes in triplicata ratione ſunt diametrorum pr.9. 613
Vide Cylindros.
Conum mutare in parallelepipedum pr.21. 666
Conum in priſma mutare pr.20. 666
Coni ſectio per axem triangulum def.4. 391

Co-

Digitized by Google

Conoides.

Conoidea hyperbolicum vide hyperbolicum,
Parabolicum vide parabolicum.

Conuerſio.

Conuerſio rationis deſ.27. 117
Conuerſa ratio in proportionalitatibus pr.27. 279
Conuerſio rationis Cor.2. 128
Conuerſio rationis oſtēditur in numeris p.22. 161
Conuerſio rationis in numeris pr.25. 162

Corpora.

Corporibus ſpiralibus cuiuſcumque generis cylindros æquales erigere pr.39. 674
Corporis conici ſphęræ inſcripti omnes ſuperficies, cui circulo æquentur pr.40. 567
Omnia corpora, quibus conos, vel pyramides, vel parallelepipeda æqualia exhiberi poſſint numeris examinare pr.74. 686
Ex proportionalibus dimenſionibus corpora effecta, quæ æquentur pr.22. 629

Crus.

Crus rectanguli eſt medium proportionale inter totam baſim, & ſegmentum ſibi vnitum Cor.2. pag. 138
Crus vide latera, rectę, triangula, & ſimilia.
Ex notis cruribus rectanguli duobus tertium inuenire pr.17. 507

Cubus.

Dato cubo æquale parallelepipedum conſtruere ad datam altitudinem, vel ſuper datam baſim pr.15. 665
Datum cubum, vel parallelepipedum iuxta datam proportionem ſecare pr.40. 675
Cubum, parallelepipedumq; vacuatum pyramide diuidere pr.43. Coroll.2. 677
Cubum conſtituere, & ſphęra complecti, & de diametri ad eius latus ratione pr.8. 601
Cubum, vel Parallelepipedum calculationi ſubigere pr.64. 683
Cubū in corpus regulare transfundere pr.22. 667
Cubi numeri definitio deſ.4. 161
Cubus numerus cubū, ductus in ſe facit pr.9. 179
& etiam multiplicans alium cubum. ibid.
Et inuertendo ſi faciat cubum, ipſe eſt cubus pr.2. ibid.
Cuborum triplicata ratio pr.19. 174

Cum Rationali linea.

Cum rationali medium totum efficiens, vt fiat pr.48. 204
Cum medio medium totum efficiens, vt fiat pr.49. ibid.

Cylindrus.

Cylindrus ad cylindrum, vt axis ad axem, quinam? pr.10. 623
Æqualium baſium ſunt inuicem, vt altitudines pr 11. 624
Æqualium reciprocantur baſes, & altitudines pr.12. ibid.
Coni, & cylindri æqualti ſunt inuicem, vt baſes pr.3 621
Quinam ſint æquales pyramidi, & priſmati pr.3. Coroll. ibid.
Quinam ſint inuicem æquales pr.4. & quænam partes ipſorum in Cor. ibid.
Æquealti ſe referunt vt baſes pr.5. 622
Cylindrus ſphęroide circumſcriptus, vt ſe habeat ad ſphęroidem pr.37. 639
Etiam ſi Ellipticę ſectionis Cor.3.
Cylindrum in parallelepipedum erigere p.21. 666
Cylindri elliptici æquales qui? pr.25. Cor. 630
Cylindrum alteri ſimilem ponere pr.3. 662
Cylindro æquale facere priſma pr.18. 666
Cylindro ęqualem conum conſtituere pr.19. ibid.
Cylindrum vacuum cono, cui cylindro æquetur? reperire pr.29. 669
Coni cylindro vacuati æqualem conum reperire pr.30. 670
Cylindrum in pyramidem mutare pr.20. 666
Cylindrum vacuatum pyramide iuxta datam rationem diuidere pr.43. Coroll.2. 677
Cylindrum, ſeu conum etiam priſmaticum quodcumque calculis examinare pr.67. 684

Cylindri ſuperficies.

Cylindri ſuperficies, cui æquetur. 551
Quomodo extendatur. 173. & ſeq.
Vide ſuperficies.

Cylindraceum corpus.

Cylindracea corpora æquealta ſunt inuicem, vt baſes pr 23. 529
Et vt altitudines, ſi ſint æqualis baſis pr,24. 630
Æqualia quorum reciprocæ baſes, & altitudines pr.25. ibid.
Cylindraceum corpus alteri ſimile ponere pr.6. pag. 663

D

Defectus.

EX maiori cubo detrahere minorem reſiduo cubo manente pr.50. 679
Detrahere à quacumque figura ſolida pr.50. Coroll.
Deficere parallelogrammi quid? def.5. 133
Vide partire, ſegmentum, para, diuidere
Datam proportionem minorem à maiori deducere pr.33. 281
Detractio rationis oſtenditur pr.6. pag. 120
& Coroll. 130
Detractio rationis quid? deſ.13. 117

Deſinitio.

Definitiones quid ſint? 24

Denominator.

Denominator proportionis continuæ, vt habeatur pr.10. 232
Diuerſa genera Denominatorum Cor. 284
Vide proportiones, ſeries, Geometrica, Muſica.
Denominatores proportionum muſicarum in qualibet proportione creſcunt ab vnitate p.14. 233
Minutiam ad minorem denominationem reducere pr.10. 210
Proportio numeratoris ad denominatorem, quid exprimat, Cor. 214

Deſcriptio.

Deſcribere figuras in ellipſibus ſimiles illis, quæ ſunt in circulo quoad proportionem ad totum Cor. prop.29. 537
Super datam diametrum deſcribere ellipſim circulo æqualem pr.30. & ſingula eius ſegmenta Coroll. 537
Deſcribere parabolas æquales Cor.2. 540

Trian-

Triangulum æquale parabolę pr.37. ibid.
Vide ea, quæ cupis deſcribere.
Vide Inſcriptio, ſeu circumſcriptio.

Diameter.

Circuli in ſphęra diametrum inuenire pr.9. 317
Diameter ſphęrę, & circuli baſim ambientis ad latera Tetaedri, & normalem comparatur pr. 6. & Coroll. 1. & 2. pag. 600
Diametri ſphærę menſuram inuenire pr.10. 357
Diameter ſectionum conicarum, & diameter tranſuerſa quænam? def. 11. & 12. 391
Diametri ſecundariæ ſunt axes Cor.1.pr.29. 3'0
In parabola diametrum ducere pr.36. 4'3
Diametrum coniugatam in parabola inuenire 37. pag. 413
Diametros coniugatas inuenire in Hyperbola pr.30. 411
In Ellipſi diametrorum quamlibet coniugationem inuenire pr 32. 411
Coniugatas diametros æquales in Ellipſi inuenire pr.34. 412
Quadrata applicatarum ad diametros coniugatas æqualia ſunt rectangulis ex diametri portionibus pr.35. ibid.
Diameter parallelogrammi quid? def.35. 30
Diameter parallelogrammi biſariam illud ſecat pr 34. 47
æquè poteſt, ac latera Cor.1. & 2. 59

Differentiæ.

Differentiæ, & termini in progreſſione Geometrica linearum, vt ſe habeant pr.4. 257
& pr.5. 258
Vide termini.
Ex differentijs tres proportionales ſuas inuenire pr.7. & 8. 250
Differentię harmonicę quando ſint incommenſurabiles, & irrationales pr.17. 268
Differentiæ ſunt in eadem proportione, ac ipſi proportionales pr.8. 231
Differentiæ coaceruatę in numero radicali faciunt vltimum pr 9. 232
Differentiæ in progreſſione geometrica linearum ſe reſpiciunt, vt termini pr.1. 257
Differentiæ proportionales terminos proportionales habent pr.2. ibid.
Differentiæ muſicę poſſunt omni data quantitate fieri minores pr.22. 270
Quęcumque infinita differentiarum ſeries æquat primum terminum pr.23. Ibid.
Differentia qua augeſcit logarithmus à ſinu toto, ſi progreſſio incipit à 0. eſt ipſe logarithmus pr 13. 333
Differentiæ Geometricorum, vt ſint inuicem in ſerie, cui Logarithmi applicandi pr.24. & 25. 334
Differentiam arithmeticam inuenire pr.45. 341

Diuidere.

Diuidere lineas, ſuperficies, corpora. Vide hæc
Diuidere angulos diuerſis modis. Vide angulus Chonchilis.
Diuidere numerorum quid ſit. def.16. 94
Numerus omnis maior per numerum alium diuidi poteſt, at ſi ſit minor pr.18. 100
Minor per maiorem poteſt diuidi pr.19. 100
ſemper ſupereſt aliquid pr.21. 101
Et eſt pars numeri diuidentis pr.22. Ibid.
Minor ſumptus in minori proportione diuidi poteſt pr.23. ibid.
Vt numerus datus diuidatur pr.24. 101

Diuiſio rationis.

Diuiſio rationis def.26. 117
Diuiſio rationis oſtenditur pr.20. 127
Diuiſio rationis in numeris oſtenditur pr.23. 160
Diuiſio rationis in proportionalitatibus pr. 26. pag. 279
Rationem partiri in datas rationes pr.38. 282
Vide proportio Geometrica.
Datam rationem diuidere pr.39. 282

Diuiſio rerum.

Diuiſio lineæ proportionalis docetur p. 11. 140
Secare, vt alia ſecta eſt pr. 13. Ibid.
& ſecundùm proportionem quácumque datam in Cor. ibid.
Vnicum rectilineum in plura partiri manente eadem figura in partibus pr. 29. & Cor. 512
Vnicum conum in plures diſtribuere pr.52. 679
Datam ellipſim diuidere pr.29. 536
Lineam ita ſecare, vt ſinguiæ partes proportionem muſicam ſeruent pr.1. 163
Diuidere lineam in partes incommenſurabiles pr.39. 189
Minutiam per minutiam diuidere pr.29. 213
Vide ea, quæ diuidenda ſunt, vide extrema, & media ratio.

Dodecaedrum.

Dodecaedrum conſtituere, & ſphæra complecti, & oſtenditur latus eius linea irrationalis p.19. pag. 602
Latus dodecaedri comparatur cum latere cubi Coroll.1. 604

Duplicata proportio.

Æquiangula parallelogramma habent proportionem laterum duplicatam p.23.& trianguloCor. 1. & 2. 144
Duplicata, triplicataque ratio in numeris quænam def.3. 154
Duplicata ratio inter ſimilia triangula, & polygona pr.20. & 21. 143
Plani ad planum eſt laterum ratio duplicata pr.11. 172

E

Elementa.

ELementa quid ſint. 23
Elementa alternata, & alternantia p.6. 32
Elementorum ordo pr.7. ibid.
Authores. ibid.

Ellipſis.

Ellipſis quid def.9. 391
Diuiſio Ellipſis in partes ſubduplas Coroll. 534
Diameter ad diametrum eſt, vt ellipſis ad circulū maiori diametro deſcriptum pr.24. 534
Quinam circulus ęqualis ellipſi pr.26. 535
Ellipſis quælibet ad quemlibet circulum eſt, vt rectangulum ex diametris ad quadratum circuli pr.26. ibid.
Ellipſis ad ellipſim, quam conſequatur proportionem pr.27. & Cor.2. ibid.
Deſcribere ellipſim æqualem ellipſi pr 27. Coroll. 536
Omnis ſectio ſphæroidis ad axem recta circulus eſt pr.9. & axi obliqua ellipſis. 439
Ellipſes parallelæ in cono ſimiles pr.4. 437

Quæ-

Quænam ellipſes, ſeu hyperbolæ ſimiles pr.52.& 53.&Cor. & 54. & Corollarija. 421
In omni cylindro, ſeu circulari, ſeu elliptico ónes ſectiones axi obliquæ ſunt ellipſes p.22. 443. at axi obliqua in conoidale Parabolico ellipſis eſt pr.14. 440
Dato circulo ellipſim deſcribere pr.27. pag.431.& 431. pr.73. Item parabolam pr.74. 433
Item Hyperbolam pr.75. ibid.
Ellipſim deſcribere pr.67. pag.429. & pr.68. 430

Enumeratio.
Enumeratio rationum def.19. 116
Enumeratio rationis modus arguendi oſtenditur in numeris pr.12. 158
Enumeratio rationis pr.17. 126

Eſſentia.
Quantitatis eſſentia quæ ſit? pr.1. 1

Exagonum.
Exagoni latus æquat ſemidiametrum Cor.1. 90
Exagoni deſcriptio, vide Inſcriptio.

Exceſſus.
Exceſſum rationum inuenire pr.40. 283
Excedere parallelogrammi quid def.6. 133

Ex æquali Ratio.
Ex æquali ratio def.18. 116
Ex æqualitate ratio in numeris pr.14. 159
Ex æqualitate ratio oſtenditur pr.3. pag.119. & pr. 24. pag.130. & pr.23. 129
Ex æqualitate ratio perturbata in numeris oſtenditur pr.21. 161

Extrema Ratio.
Lineam diuiſam extrema, & media ratione ſecare pr.23. 254
Aggregatum extremarum in ſuas extremas diſtinguere pr.6. 250
Partire numerum in extrema proportionalia dato numero pr.25. 226
Vide Ratio, ſecare, diuidere.

F

Figura.
Figura quid def.14. 28
Figuræ rectilineæ def.19. 29
Trilineæ def.20. Quadrilineç def.21. Multilaterę def.22.
Vide Multilaterum, Polygonum, Rectilineum, Triangulum, & ceteras ſpecies figurarum.
De angulis figurarum rectilinearum 305.& ſeq.
Quot angulos contineat figura rectilinea pr.15. pag. 305
Quot angulis anguli figuræ rectilineæ æquentur pr.16. ibid.
Externi quatuor rectos æquant pr.17. ibid.

Figura ſolida.
Figura conica ſphęrę inſcripta, cui cono æquetur pr. 41. 643. & ſector cui ſectori. Et quo cono minor ſit pr.42. 644
A quacumq; figura ſolida detrahere partem manente reſiduo figurato, vt prius pr.50. Cor. 679
Vide Multilaterum, Regularis, diuidere addere.

Finitum.
Finiti ad infinitum nulla proportio pr.2. 108

Fornix.
Fornicis cruciformis ſoliditas, quæ Cor.1. 671

Fractio.
Fractio quid ſit? def.1. 207
Minutia quid ſit? def.1. ibid.
Minutia ad ſuum integrum, vt referatur p.1. 208
Minutiæ, quæ æquales? pr.2. ibid.
Minutię quando proportione totorum eadem gaudeant pr.3. & quando proportione numerorum integrorum pr.4. 108
Minutias reducere pr.5. ibid.
Vide minutia.

Fruſtum.
Fruſtum coni, cui cono æquetur pr.13. Cor. 626
Fruſta conorum quæcumque numeris menſurare pr.69. 685
Fruſtum conicum, cui æquetur pr.13.14. 624
Fruſtum conorum, vel pyramidum ſimilia efficere pr. 10. 663
Segmentorum ſphęroidicorum ſuperficies, quibus equentur Coroll. 566
Fruſto ſphęroidis ęqualem conum exhibere pr.33. pag. 670
Sphæroidis fruſtum, quam proportionem habeat ad conum inſcriptum pr.40. 640
Superficies fruſti coni recti, ad quem annulum planum, quam proportionem habeat p.31. 562
Superficies fruſti coni recti, cui circulo æquetur pr.32. 562
Fruſtum ſphæroidis, quas partes æquet cylindri pr.34. 640
Vide ſphæroidea.
Fruſtum pyramidis, cui æquetur pr.25. 619
Fruſtum pyramidis calculare pr.69. 684
Fruſti cylindrici acuta ſuperficies, cui ęquetur pr.6. 552
Vide ſegmentum, & nomina rerum, quorum fruſta noſcere cupis.

G

Genitus numerus.
Genitus ex multiplicatione duorum numerorum planus eſt def.1. 166
Vide numerus, multiplicatio.

Geometria.
Geometria eſt ſcientia oſtenſiua pr.5. 23
& eius obiectum aſſignatur. ibid.

Geometrica Progreſſio, Proportio.
Geometrica progreſſio quid def.2. 256
Proportionis geometricæ continuę proprietates, & ſpecies, inexordio expenſionis. 230
Non omnes numeri continuari in proportione poſſunt pr.1. 231
Vt ſe producant numeri continuè proportionales pr.2. 230
Qui medij proportionales inter tres cadant pr.3. pag. 231
Medijs intermiſſis tot numero, tres numeri in continua proportione eandem rationem dicunt pr.4. 231
Quadratum medij rectangulo extremorum æquatur pr.5. 331
Et rectangulum mediorum duorum rectangulo duorum extremorum pr.6. 231
In maiori numero plures, & minutiores proportiones

Digitized by Google

tiun ea reperiuntur pr.7. ibid.
Vt ſumma ſeriei numerorum Geometricorum inueniatur pr.15. pag.233. & pr.16. 234
Vt ſeries Geometricorum proportionalium extendatur in numeris pr.17.pag.234.pr.17 & 18. addendo pr.19. & auferendo pr.20. & 21. & 22. & Cor. 1. ibid.
Vide Differentiæ, Termini, Maximus.
Proportionales inuenire, quorum ſummam æqualis ſit numero vnius in alterum procreato Cor. 2. 235
Inter duos numeros conſtituere geometricè proportionalem pr.23. 236
Inter duos numeros plures proportionales interponere pr.24. ibid.
Numerum datum in partes proportionales diſtribuere pr.25. ibid.
Maximum numerum, & extremum medijs intermiſſis multis depromere pr.26. ibid.
Geometrica progreſſio linearum. Vide ſeries.

Geometrica progreſſio planitierum.
Omnia, quæ de progreſſione Geometrica verificantur in lineis etiam de ſuperficiebus vera euadunt pr.1. pag 495. tum de ſpatijs ſimilibus, quam de diſſimilibus Cor.1.
Progreſſio infinita geometrica ſuperficierum producit determinatam, & finitam ſuperficiem, Cor.2. 495
Omnia ſpatia antecedentia ſunt ad conſequentia, vt vnum antecedens ad vnum conſequens Coroll.3. ibid.
Differentia primi ſpatij à ſecundo in progreſſione gometrica primum ſpatium, & series infinita ſunt in continua proportione Coroll.4. pagina 496
Si ſeries duæ procedant per eandem analogyam, ita eſt tota ſeries ad totam ſeriem, vt primus terminus vnius ad primum alterius pr.2. ibid.
Planitiem æqualem ſeriei proportionalium geometricæ inuenire pr.3. ibid.
Reperire planum continuè proportionalium terminorum pr.4. 496
Datis primis baſibus reperire planorum ſeriei æqualem ſuperficiem, & etiam quadratum pr.5.& Cor. ibid.
Seriem infinitam inuenire, quę à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo æquetur pr.6. pag. 497. & etiam, quę à ſegmento incipiat pr.7. etiam alteri æqualem pr.8. 498
Seriem planorum alteri datam proportionem habentem, quæ incipiat à dato quadrato pr.9. ibid.

Geometrica progreſſio corporum.
Vide ſeries corporum.
Gnomon quid def.2. 52

H

Harmonica proportio numerorum.
PRoprietates proportionis Harmonicæ Cor.1. 2. & 3. 243
Tres harmonicos inuenire pr.1. ibid.
Tertium Harmonicorum inuenire pr.2. ibid.
Non ſemper harmonicus tertius inueniri poteſt Coroll. 244
Duplex modus continuandi Harmonicam ſeriem in exord. ibid.
Continuare proportionem Harmonicam pr 3. 244 & pr.4. & 5. 245
Quinam in ſerie Harmonica ſint Arithmetici Coroll. 244
Quinam ſint minutię Coroll. 245
Inter duos medium Harmonicum inuenire pr.6. pag. 245
Numerum in proportionem Harmonicam diſtribuere pr.7. 246
Arithmetici, vt Harmonicos producant Cor. ibid.

Harmonica proportio linearum.
Plurimas lineas in infinitum inuenire, quę proportione muſica creſcant, vel decreſcant pr.2. 264
Linea harmonicè diuiſa, eſt diuiſa in partes ſucceſſiuę denominationis pr. 3. ibid.
Lineam Harmonicè ſimiliter ſecare pr.4. 264
Quę ſeries Harmonicè proportionem ſemper eandem ſeruent pr.5. 265
Similem alteri ſeriem harmonicam propagare pr 6. 265
Omnes harmonicę proportiones ſunt in eadem Geometrica proportione pr.7. ibid.
Series Harmonicas datæ denominationis reperire pr.8. 266. & etiam in pluribus lineis pr 9. Vide Termini differentiæ Triangula.
In qualibet data linea abſque fine progreſſio harmonica extendi poteſt pr.19. 269
In harmonica ſerie aſſignata qualibet minori, adhuc ad minorem poteſt perueniri pr.20. ibid.
Nulla progreſſio harmonica extremum conſequi poteſt pr.18. ibid.
Omnes propoſitiones, quæ de lineis muſicis verificantur etiam de planitiebus vera ſunt Coroll. 499
Superficies Muſicas augere, & minuere ſecundùm datam rationem pr.48 520
Superficies harmonicas iuxta datam rationem ſe incipientes minui ponere pr.49. 521

Helix.
Helicis, & quadratricis comparatio. 197
Radius helicis, & applicata quadratricis quando æquales pr.23. 297
Radij helicis, quibus arcubus æquales pr.24. ibid.
Helicis lineam deſcribere pr.25. ibid.

Hemiſpheroides.
Hemiſphęroides duplum eſt coni inſcripti pr.39. pag. 640. Vide ſphęroides.

Homologum.
Homologæ quantitates quænam def.13. 114

Hyperbola, & Hyperbolicum conoidea.
Hyperbolam deſcribere pr.64. 427
Data Aſymptoto, & pr.65. 428
Eamdem reſarcire, & producere pr.66. 429
Hyperbola quid? def.10. 391
Hyperbolæ parallelæ in cono ſimiles pr.6. 438
Quænam ſint Hyperbolæ, & Ellipſes æquales pr. 34. pag. 413. & pr.40. 414
Vide parabola, ellipſis, ſectio coni, Conoidea.
A conoide hyperbolico, ſeu parabolico imperatam partem auferre pr 49. 678
Hyperbolicum conoidem iuxta datam rationem diuidere pr.48. 67
Hyperbolicum conoidem in conum æqualem trãſformare pr.34. 671

Hypotenuſa.
Hypotenuſa crure, & angulo datis quibuſlibet per logarithmos tertium reperire pr.18. 466

Datis crure, & angulo duobus quibuſlibet logarithmicè tertium reperire pr.19. 467

I

Icoſaedrum.

ICoſaedrum ponere, & ſphæra complecti, cuius latus oſtenditur irrationale diametro ſphęræ pr.10. 604

Inclinatio.

Lateri anguli inclinationis normalis omnibus aliis lineis normalis pr.4. 348
Triangulum inclinationis planis inclinatis normale eſt Cor. 2. 349
Parallela in plano inclinato alteri, eſt etiam parallela ſectioni Cor.3. ibid.
Quinam anguli inter inclinata plana ſit maiores pr.20. pag. 352. & pr.22. 353
Angulus inclinationis planorum idem, vbique in ipſis pr.18. 352
Rectę ad planum inclinatio quænam? def.3. 347
& æqualis inclinatio def.5.
Plani ad planum inclinatio quænam def.4. 347
& æqualis inclinatio def.5.
Inclinata ad vmbelicum à contactu æqualis eſt axis portioni intercluſa inter verticem, & vmbelicum pr.26. pag. 407. Vide Vmbelicus.
Inclinatio circulorum, quæ? def.6. pag.354. & quæ ſimilis? def.7.

Incommenſurabiles lineæ.

Incommenſurabiles lineæ def.4. 182
Vide commenſurabiles.
Magnitudines proportione relatę commenſurabilitate, vel incommenſurabilitate, etiam referuntur pr.5. 185
Quæ eidem magnitudini ſunt incommenſurabiles etiam inter ſe pr.6. 186
Quæ magnitudines incommenſurabiles pr.7. & 8. pag. 186
Magnitudo incommenſurabilis compoſita facit totum partibus incommenſurabile pr.10. 186
Incommenſurabiles longitudine tantùm, & etiam potentia inuenire pr.12. & etiam plures Coroll. 188
Inuenire rationales potentia, vt differentis quadrata habeat latus maiori commenſurabile pr. 13. pag. 188. & etiam incommenſurabile pr.14. pag. 189
Proportionalium laterum quadratorum exceſſus quando ſit commenſurabile, ſiue non pr.15. 189
Sectio in partes inęquales cum faciat lineas incommenſurabiles, ſeu non pr.37. conuertitur Coroll. 198
Incommenſurabilium longitudine quadrata, quam proportionem habeant pr.4. 184

Incommenſurabilia latera.

Incommenſurabilitas laterum figurarum regularium. 310. & ſeq.
Latus quadrati diametro circuli, in quo eſt inſcriptum eſt, incommenſurabile pr.7. 310
Item trianguli latus pr.8. latus decagoni, & pentagoni diametro, & longitudine, & potentia incommenſurabilis linea eſt pr.9. 311
Latus octogoni diametro incommenſurabile propoſ.10. 311
Inuenire duas lineas potentia incommenſurabiles, quarum quadratorum compoſitum ſit rationale, at rectangulum ex ipſis ſit medium pr.41. pag. 201. vel etiam quadratorum compoſitum medium, at rectangulum rationale pr.42. & etiam vtrumque medium pr.43. 202

Indiuiſibilia.

Pars vltima indiuiſibilis nec eſt, nec eſſe poteſt ſine alijs partibus pr.10. 10
Non ſunt mathematicę obiectum pr.13. 11

Indiuiduatio.

Indiuiduatio eſt vnitas numerica pr.1 13
eſt idem cum rebus indiuiduatis pr.15. 17

Infinitas,

Linearum proportionem propagare in infinitum pr. 2. 248. Vide ſeries Geometrica, Harmonica.
Infiniti ad infinitum nulla proportio pr.1. 108
In aliqua finita quantitate, vt partes multiplicari poſſint in infinitum. pr.12. & Cor.1. & 2. 260

Inſcriptio.

Inſcriptio rectilineorum quęnam def.1. 83
Rectilinei in circulo quæ? def.3. 83
Circuli in rectilineo quæ? def. 5. 83
Inſcriptio trianguli in circulo pr.2. 84
Circuli in triangulo pr.4. 85
Quadrati in circulo pr.6. 86
Circuli in quadrato pr 8. 86
Pentagoni in circulo pr.11. 88
Circuli in pentagono pr.13. 89
Exagoni in circulo pr.15. 90
Trianguli æquilateri, & æquianguli inſcriptio pr. 15. 90
Quindecagoni in circulo pr.16. 91
Aliarum figurarum in circulo Cor. 91
Inſcribi poteſt corpus planis ſuperficiebus conſtans in quocumque corpore elliptico, Parabolico, hyperbolico pr.32. 591
Quando ſuperficies hæc inſcripti corporis agnoſci poſſit pr.33. 591
Inſcriptio ſolidi in ſolido quæ def.6. 597
Sunt minus, quam quadruplum maximi circuli ſphæra inſcripti conicæ ſuperficies ſphæra inſcriptæ pr.41. 568
At circumſcriptæ maius 42. ibid.
Parabolę maximum inſcribere triangulum pr 31. pag. 538
Quæ inſcripta triangula in parabola ſint æqualia pr.32. ſi vnum ex iis ſit maximum etiam aliud Coroll.
Inſcribere in ſphęra conorum ſegmenta tangentia tantùm ſphæram aliam concludentē pr.13. 607.
& etiam circumſcribere Cor.
Inſcribi quoq; tot ſolida corpori globoſo poſſunt, vt relinquant quantitatem omni data minorem pr.14. 608
Maximum triangulum Hyperbolæ inſcribere pr. 40. 541. Vide, quæ inſcribere cupis.

Intercepta.

Linea intercepta harmonica quęnam def.2. 263
Intercipientes æquales arcus parallelæ Cor. 75
Quę in circulo bifariam ſecetur Cor. 76

Interuallum.

Interuallorum numerus multiplicatus cum ſecundo numero ſerie æquetur pr.4. 238
Interuallorum numerus ad numerum interuallorum, quam proportionem dicat in Arithmetica pro-

proportione pr.4.& 5. 238
Interuallorum numeri dicunt inuicem eam proportionem, quam differentiæ pr.7. 238
Numerum interuallorum Arithmeticorum inuenire pr.24. 241
Interuallum vide Arithmetica ratio.

Interſectio.

Planorum interſectio eſt linea recta pr.3. 348
Interſectiones planorum 347 & ſeq.
Interſectio circulorum in ſphęra. Vide circulos.

Inuerſa ratio.

Inuerſa ratio quid ſit? def.13. 116
Inuerſa ratio oſtenditur pr.4. Coroll. 120
Inuerſa ratio in proportionalitatibus pr.74. 278

Inuolucrum.

Inuolucrum ſphærę quadriformis, cui pyramidi æquetur pr.51. 649
Inuolucrum vngulæ, & lunulæ, quæ pars ſit cylindri, & parallelepipedi concludentis, ex quibus naſcuntur Coroll.2. 673
Inuolucri quadrati conoidis hyperbolici ſoliditas quæ? Cor.1. 653
Inuolucrum vngulæ cylindricæ, cui pyramidi æquetur Cor.1. vt cognoſcatur Cor. Cor.2. 649
Irrationale quadratum def.9. & 10. 183
Compoſitis lineis irrationalibus commenſurabiles ſunt quoque irrationales compoſitæ pr.54. pag. 106
Irrationales quæ. def.7. & 11. 183. pr.25. 193

Iſoperimetræ.

Iſoperimetræ figuræ quænam? def.1. 521
Area Iſoperimetra quid def.2. ibid.
Figuram regularem alteri Iſoperimetram ponere pr.50. 522
Scaleno triangulum æquicrurum Iſoperimetrum facere pr.51. 522
Dato triangulo parallelogrammum, æquale, & Iſoperimetrum fabricare pr.52. ibid.
Figurarum Iſoperimetrarum ea eſt capacior, quæ plures continet angulos pr.67. 525
Iſoperimetrarum, quæ ſit figura maxima pr.68. 525
Circulus omnibus figuris Iſoperimetris capacior pr.69. pag.525. eſt etiam maior Cor.1. & etiam ſphęra talis conditionis eſt Cor.2. 526
Rectangulum non rectangulo ęquale. & Iſoperimetrum ponere pr.53. 522
Rectilineo ęquale, & Iſoperimetrum rectangulum conſtituere pr.54. 522
Rectangulum facere æquale, & Iſoperimetrũ ſemicirculo pr.55. ibid.
Iſoperimetra triangula quando minora prop. 56. pag. 523. Iſoſcelium quando eſt maius alio Coroll. 524
Eadem proportione in figuris Iſoperimetris latera, & anguli diminuuntur pr.55. pag. 524. & etiam differentia lateris, & anguli Cor.

Iſoſceles.

Iſoſceles def.25. 24

L

Latus.

LAtera decagoni, & hexagoni inueſtigare pr.5. pag.309. item trianguli Cor.1. 309. quadrati Cor.2. Item quindecagoni Cor. 310
Inueniuntur, & comparantur latera figurarum regularium pr.9. 605

Lemma.

Lemma quid ſit. 25

Linea.

Linea eſt quid reale indiuiſibile reduplicatiuè pr. 9. 9
Inadæquatè accipitur pr.11. 10
Et vt negatio pr.12. ibid.
Quid ſit? def.2. 26
Quinam eius termini? def.4. 27
Recta quænam ſit? def.5. ibid.
Parallela vide parallelæ.
Lineę æqualem lineam ponere pr.5. 35
Illi detrahere partem datam pr.6. 35
Bifariam ſecare pr.7. ibid.
Normalem excitare à puncto in ea pr.8. 36
Si extra eam punctum detur pr.9. ibid.
Quos angulos inſiſtens alteri faciat pr.10. ibid.
Quæ ſint in directum pr.11. ibid.
Ad verticem ſe ſecantium anguli æquales p.12. 37 ne dum inuicem, ſed & quatuor rectis. Cor.
Æquipotentes vide æquipotentia.
Lineæ extenſæ plano nulla pars in ſublimi pr.1. pag. 348
Lineę ſe ſecantes, & triangula in eodem plano ſunt pr.2. ibid.
Lineæ ad ſuperficiem nulla proportio pr.4. 109

Logarithmus.

Similiter proportionatorum ęquales logarithmi Cor.2. pag.326. & pr.11. 332
De ſerie facili geometricorum reperienda, cui arithmetica, & logarithmica deſeruiat prop.8. pag. 326. & 327
Exempla tabularum geometricorum continuè proportionalium cum logarithmis 327 & ſeq.
In progreſſione logarithmica principium ad libitum pr.9. 332
Tabulis Geometricis, ſeriebuſque eorum logarithmos inſcribere pr.10. 332. & Cor. 334
Quomodo reperiatur Geometricus quilibet ad continuandam ſeriem Coroll. pr. 11. 333. & Coroll. pr.15. 334
Quomodo reperiantur logarithmi ad continuandas tabulas logarithmorum pr.12.& Cor. 333 & Cor.1. & 2. pr. 13.
Logarithmos continuare Cor.pr.15. & Coroll. pr. 16. 335
Vt Geometrici in infinitum in eadem proportione decreſcant in ſerie logarithmica poſiti propoſ.16. 335
In logarithmicis tabulis componendis fractiones non ſunt ſperandæ pr.16. Cor. 336
Logarithmos tabulis ſinuum applicare pr 17. & Cor.1. & 2. ibid.
Quomodo ſinus gr. 45. logarithmus reperiatur Cor. 337
Logarithmos ſinubus arcuum minoribus, quàm gr. 45. applicare pr.19. & Coroll. 338
De tabulis logarithmicis ſinuum ordinandis, & logarithmis tangentium addendis 338. & ſeq.
Proprietates tabulę logarithmis inſtructę ſinuum, atque tangentium 335. vſque ad pag. 340
Tabulæ logarithmicę abſolutæ, vt condantur 340 & ſequentib. Vide differentiæ.
Aggregatum ex logarithmis anguli, & cruris æquatur logarithmo anguli, & cruris oppoſiti in obliquangulis triangulis pr.29. 470

In obliquangulia logarithmus aggregati crurum æquè ſubductus, quid relinquat? p.30. & 31. 470
Logarithmus numerorum in ſerie naturali multiplicatorum quinam? pr.27. 341
Numerorum ab 1. vſque ad 10. logorithmos reperire? pr.37. 344
Numerorum, qui ex multiplicatione ſimplicium prodeunt logarithmos reperire pr.18. 345
Alios logarithmos quoſcumq; vltra denarium inuenire pr.39. 345
In ſerie proportionali dato logarithmo vnius exquirere logarithmum alterius proportionalis pr.32. 342
Numeris quibuſcumque duobus datis, & logarithmo vnius exquirere logarithmum alterius propoſ.33. 343
Logarithmus cruris in rectangulo æquatur logarithmo anguli, & baſis pr.16. 466
Item logarithmus cruris in rectangulo æquatur logarithmo tangentis oppoſitæ, & reliqui cruris pr.17. ibid.
Cur arithmetici numeri proportionales vniantur geometricis. 324. & ſeq.
Quid logarithmi? in exord. 324
Symbolizatio geometricorum numerorum, & logarithmorum pr.1. 324 & pr.3. 5. 6. & 7. 325
Quænam progreſſio arithmetica ſit applicanda geometricę pr.8. 324
Subductio logarithmorum, & additio in omnibus operationibus arithmeticis deſeruit multiplicationi, & diuiſioni geometricorum pr.1. 3. 4. 5. & 6. 324
Vt reperiatur terminus datorum continuè proportionalium multiplicando ſolùm logarithmos pr.31. 341
Quotorum numerus eſt reciprocè proportionalis numero logarithmorum in ſerie naturali logarithmica Coroll. ibid.

Lunulę planæ, & ſolida.

Triangulum lunulę planę ęquale facere pr.17. 532
Lunulam, & inuolucrum eius in pyramidē æqualem transfundere pr.36. 672
Soliditas lunularum ſolidarum quæ? pr.52. 649. & eius inuolucri? ibid.

M

Magnitudo.

Propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus reperire aliam mediam alicui datæ commenſurabilem pr.34. 387
Magnitudo magnitudini eſt, vt partes proportionales eadem proportione acceptę ad partes proportionales eodem ordine acceptas pr.37. 516
Proportio maioris inæqualitatis continuata facit proportionem maiorem omni data magnitudine pr.13. 260
Maior irrationalis, vt fiat, quæ ſit pr.44. 201

Mathematica.

Mathematica habet pro obiecto ens quantum, vt menſurabile pr.1. 21
Obiectum præciſè, & abſtractè conſiderat pr.2. 21
Eſt ſcientia oſtenſiua pr.3. 22
In tres partes diuiditur pr.4. 23
Introductio ad ipſam. 25
Ipſi incumbentes qui? 26

Maximus Numerus.

Maximus numerus in ſerię proportionali multiplici, vt contineat reliquos minores pr.11. 232
Maximus numerus, vt contineat reliquos in proportione ſuper particulari, & ſuperpartiente pr.12. ibid.
Maximus detracto primo ad ſummam reliquorum, quam rationem dicat pr.13. 233

Maximus Circulus.

Maximi circuli tranſitus per polos mutuus propoſ.15. 359
Sectio mutua maximorum diſtat quadrāte à circulo, in quo polos habent Cor. pr.15. 359
Circulum maximum in ſphæra deſcribere pr.16 pag.359. & etiam per duo puncta pr.17.
Maximi circuli quinam? qui maiores, vel minores? pr.11. 357
Maximi in ſphæra bifariam neceſſariò ſe ſecant pr.12. & è contrà pr.13. 358
Maximus ſecat alium normaliter ſecat, & bifariam, & per polos p.14. & è contra Cor. ibid.
Per polos circulorum maximus ductus per contactum circulorum tranſit pr.8. & ſi per polum, & contactum etiam per alterum polum pr.13. 373
Maximus minorem circulum tangens, & alterum tangit parallelum pr.4. & è contrà pr.5. & parallelos quoque maximo, cui obliquus eſt pr.6. pag. 374
Si maximus maximum ſecet, ſectio diameter ſphęræ eſt, & circuli pr.7. 374
A ſi minorem ſecet ſectio chorda eſt pr.8. 375
Qui circoli maximi per æquales arcus ducti inæquales de altero circulo maximo intercipiant arcus pr.28. & 29. pag. 384. & de maximo parallelo pr.33. 387

Maxima Harmonia.

Maxima, minorq; harmonia quænam? 241
vt reperiatur pr.13. 247

Media proportionalis.

Mediam proportionalem duabus datis lineis inuenire pr.16. 141
Media, & extrema ratione lineam ſecare pr.17. pag. 142
Medias, & extremas proportionales lineas reperire pr.1. 248
Inter duas lineas duas medias proportionales conijcere pr.8. 290. & pr.3. 149
Duabus datis lineis mediam, aut extremam proportionalem acquirere pr.25. 255

Medię irrationales.

Media irrationalis quęnam? pr.26. 193
Mediæ quadrato æquale rectangulum quodnam latus habeat, ſi alterum ſit rationale pr.27. 194
Medias inuenire, quę rationale ſpatium cōtineant pr.29. 194. & quę irrationale pr.30. 195

Media Ratio.

Mediam rationem inter duas rationes inuenire pr.41. 183

Medij numeri.

Mediū inter duos arithmeticos inuenire pr.16. 241 & etiam plures medios pr.5.
Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire pr.24. 226

Medium ſpatium, & corpus.

Medium ſpatium non ſuperat aliud ſpatio rationali

nali Cor. 197
Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire pr.33. 514
Etiam ſi ſint circuli Cor.
Duobus datis corporibus corpus medium proportionale inuenire pr.59. 681

Menſura.
Minutiarum maximam communem menſuram inuenire pr.9. 210
Menſura communis duorum numerum non primorum pr.2. 155. & trium etiam pr.3. 156
Minutia per quam minutiam menſuretur ab alia minutia pr 18. 173. Fit id per decuſſatam multiplicationem Cor. ibid.

Meta.
Metæ ſoliditas, vt ſit ad ſphęram quadriſormem pr.54.651. Æqualem ei facere pyramidem p.38. 674. & etiam circulari. Ibid.

Minimus numerus.
Reperire numerum minimum duos metientem pr. 26. pag.164. Vide primus.
Minimos in data ratione reperire pr.24. 164
Minimus menſuratus à duobus menſurat illum numerum quam duo menſurant pr.23. 165
Tribus numeris datis minimum numerum, quem menſurant inuenire pr.28. ibid.
Menſuratus numerus habet partes à menſurante denominatas pr.29. ibid.
Numerum partes habentem metitur numerus à parte denominatus pr.40. 166
Numerum minimum habentem partes datas inuenire pr.41. ibid.
Minimos reperire pr.2. & 3. 168
Non ſemper continui proportione reperiuntur pr 4. 169
Et quando? pr.5. & quomodo id dignoſcatur? pr.6. 169. & pr.7. 170
Minimi proportionales numeri pr.1. 167

Minor circulus.
Quænam ſectio maximorum cum minoribus faciat arcus inæquales pr.20. & non ſimiles p 21. pag. 180
At ſi minor ſecet duos maximos ſibi normales ſinus ſiunt pr.9. 275. Vide ſegmenta circulorum. Vide maximus.

Minor harmonia.
Minor harmonia, vt reperiatur pr.11. & 12. 247. Vide Harmonia.

Minor linea.
Minor irrationalis linea, vt fiat pr.4. 213

Minutia.
Plures, quàm duas minutias ad eandem reducere pr.6. 209
Minutias eſtimare pr.7. & Cor. 1. & 2. ibid.
Etiam ſecundùm alias partes pr.8.
Fractiones fractionum in fractiones reuocare pr.21. 214
Minutias inſerere pr.22 & 23. 215
Ad minutiam integros redigere pr.12. 270
Vide multiplicatio, menſura, fractio.

Modi arguendi.
Modi arguendi pag. 115. & ſeq.

Multilaterum.
Figuram regularem in deſtinatas partes ſecare per parallelam vni lateri pr.34. 514
Diuidere quoque per lineas nulli lateri parallelas ſed alteri extrinſecæ pr.35. 515
A multilatero auferre deſtinatam partem per parallelam vni lateri pr.36. 516
Vide diuidere, addere.
Figura regularis, & cæt. rectangulum triangulum parallelogrammum, & cæt.

Multiplex.
Numerus multiplex quinam? def.5. 93
Multiplex proportio ſuperpartiens pr.7, & ſuperparticularis. 109

Multiplicatio rationum.
Datam rationem per aliam multiplicare pr.34. 281
Datis rationum denominatoribus eas multiplicare pr.35. 282
Rationem per rationem multiplicare pr.36. ibid.

Multiplicatio numerorum.
Multiplicatio quid def.15. 93
Qui numerus multiplicatus ſuperet decimam pr. 10. & 11. 98
Multiplicantes ſe duo numeri eundem efficiunt pr. 16. 159
Minutias inuicem multiplicare pr.14. 211
Minutiam per integrum multiplicare pr.16. 212
Numerum integrũ cum integro minutiæ adnexo multiplicare pr.17. & etiam minutias tantùm in Cor. ibid.

Mutatio.
Ad rectilinei latus æquale ei triangulum facere pr.7. & etiam ſi multilaterum pr.8. 505
Mutatio ſuperficiei in aliam, vel corporis in corpus. Vide corpora, vel corporum ſuperficies quas deſideras mutatas.

N

Normalis.
Normalis vnica duci poteſt ad aliam Cor. 8. pag. 40. vt ducatur pr.8. & 9. 35. & 36
Cadit ad partes acuti anguli Cor.10. 40
Eſt breuiſſima inter lineas ab eodem puncto ductas Cor. 41
Normalis in figuris iſoperimetris maior, quo rectilineum plures habet angulos pr.56. 524
Normalis in rectangulo eſt media proportionalis inter ſegmenta baſis Cor. 1. 138
Quæ lineę in circulo ſe ſecent bifariam, & normaliter pr. 13. & 14. 68
In cõtactum lineę à centro ducta ei normalis propoſ.20. 72
In contactu eius normalis in ſe habet centrum pr.20. ibid.
Caſum normalis in triangulis inuenire prop.15. & 16. 507
Punctum caſus normalis in corporibus inueſtigare pr.5. 662
A centro ſphęrę ad centrum circuli ducta circulo normalis pr.4. & è contrà Coroll. 356
A centro ſphęrę circulo normalis in polos eius cadit pr.6. & è contra, & etiam in alterum polum pr.7. ibid.
Poli centrum ſphæræ, & circuli in normali alicui circulo pr.8. Coroll. 357

Nor-

Normalis arcus.

Cùm normalis arcus intra triangulum ſphæricum cadat pr.30. & 31. 362

In cuius trianguli ſphærici baſim duo arcus normales non cadant pr.32. 33. & 34. ibid.

Normalis linea plano, vel plana inuicem.

Normalis tribus ſi ſit,hę in eodem plano ſunt propoſ.5. 349

Quæ lineæ ambæ neceſſariò planorum ſectioni orthogonales pr.6. ibid.

Quæ lineæ ambæ neceſſariò plano normales pr.8. pag. 350

Quæ planis normales etiam parallelæ pr.7. 349

Quæ ſint normalia plana pr.15. 351

Quæ ſectiones planorũ plano normales pr.16. 351

A puncto in ſublimi plano normalē ducere pr. 10. pag. 350

A puncto in plano normalem excitare pr.11. 350

Crus trianguli ſuper planum poſiti normale alicui ſectioni ponere pr.21. 352

Normalem altitudinem corporum perſcrutari, & ſuperficierum intus latentium pr.5. 662

Nota.

Quot ſunt notæ in vnoquoque multiplicatora, tot erunt in fracto, & aliquando vna minus pr.30. 341

Numerum notarum in vnaquaque multiplicatione obtinere facilitar pr.34. 343

Notarum numerum multis intermiſſis proportionalibus inuenire pr.35. ibid.

Numerus.

Numerus quid def.2. 92

Numerus non diſtinguitur à re realiter pr.7. 15

Sed addit ipſi metaphyſicè aliquid pr.8. ibid.

Idem, ac vnitas obiectiua pr.13. 17

Non datur conceptus communis numeri pr.15. 17

Non poteſt dari infinitus pr.16. 18

Non poſſidet eſſentiam,vt numerus eſt pr.17. 20

Sed,vt dicit quantitatis partes numeratas pr.18. 20

Et in ordine ad opera noſtri intellectus pr.19.ibid.

Numerus metiens duos numeros etiam eorum communem menſuram metitur Cor. 155

Numerus cuius proportionis alium multiplicans generet? pr.12. 98

Genitus comprehendit genetantium partes? p.13. pag. 98

Numeri per eundem faciunt genitos in eadem ratione generantium pr.17. 160

Et à contrà idem duos multiplicans pr.18. ibid.

Numerare, & legere numeros pr.2. 95

Numeri continuantur per proportionem decuplam pr.1. 95

Numeri ordine naturali progredientes in aliqua magna ſerie poſſunt eſſe continuè proportionales, vel proximè pr.36. 344

Maior numerus, quam 9. in fig. diuidenda qualibet nequit capere pr.20. 100

Ablato 9. à qualibet fig. num. quid remaneat pr. 24. & 25. Cor. 103

Vide ſimplex,minutia,fractio.

O

Obliquangulum, Triangulum ſphæricum.

In omni triangulo obliquangulo ſinus complementi anguli maioris apud baſim ad ſinum complementi anguli minoris eſt,vt ſinus anguli minoris ad ſinum maioris, in quos diuiditur arcus à normali pr.66. 490

Data ſumma duorum arcuum, & eorum proportione reperire caſum normalia pr.67. 491

Tribus cruribus datis in obliquangulo latera reperire pr.70. ibid.

Sinus ſecundi arcuum in obliquangulo à normali diuiſæ baſis ſunt inuidem, vt ſinus complementorum crurum pr.71. 492

Tangentes ſecundę laterum ſunt inuicem,vt ſinus ſecundi laterum angulorum, in quos à normali diuiditur obliquangulum ſphæricum pr.74.492

In obliquangulo ſinus ſegmentorum baſis à normali factorum ſunt, vt tangentes complementorum angulorum pr.77. 493

Tangens dimidiæ baſis ad tangentem dimidij aggregati crurum in obliquangulo ſphærico, vt tangens dimidię differantiæ crurum ad portionem baſis, quæ extra circulum reſtat p.80. 493

Duobus cruribus, & angulo obliquanguli angulum reliquum reperire pr.54. 487 & pr.65. 490

Duobus angulis, & crure inuenire crus obliquanguli ſphęrici pr.55. 488. & pr 66. 490

Duobus cruribus, & angulo in ſphærico triangulo datis inuenire baſim pr.56. 488. & p.73. 492

Duobus angulis,& crure inuenire baſim p.57.488 & pr.78. 493

Duobus cruribus, & angulo angulum verticalem pr.58. 488. & pr.76. 493

Duobus angulis, & crure oppoſito inuenire angulum verticalem pr.59. 488. & pr.70. 491

Angulo verticali,& duobus cruribus baſim pr.72. 492. & angulos inuenire p.73.492.& p.60. 489

Dato crure interiacente, & duobus angulis angulum verticalem pr.61. 489. & pr.76. 493

Data baſi,& angulis ad baſim crura patefacere pr. 62. 489. & pr.79. 493

Datis tribus lateribus obliquanguli ſphęrici illud ad duo rectangula reducere pr.81. 494

Datis tribus lateribus angulos, quoſlibet in obliquangulis reperire pt.82. ibid.

Ex duobus cruribus quibuſcumque, & angulo in obliquangulo comprehenſo angulos patefacere pr.33. 470

Ex duobus angulis,& crure reperire quartum, ſeu crus, ſeu angulum pr.32. ibid.

Obliquangulum rectilineum.

Obliquangulum ad duo rectangula reducere p.34. pag. 471

Datis angulis, & crure inuenire aliud aut baſim pr.23. 468

Datis duobus lateribus, & angulo angulos reperire pr.24. 469

Duobus cruribus, & angulo verticali alios angulos inuenire pr.25. 468

Triangulum ſcalenum ad duo rectangula reducere pr.26. 469

Trianguli ſcaleni datis cruribus angulos inuenire pr.26. ibid.

Data baſi,& crure in iſoſcelibus triangulis angulos inuenire pr.28. ibid.

Octaedrum.

Octaedrum facere, & ſphęra complecti, & de diametri proportione ad eius latus pr.47. 601

Orthogonalis.

Orthogonalis linea plano quid ſit def.1. 347

Vide normalis,

Orthographia.

Orthographia, à quo naſcatur? pr.2. 444
Lineę, in quas lineæ proijciantur orthographicè pr.5. 445. & pr.6. 446
Angulus in quem angulum orthographicè proijciatur pr.7. ibid.
Superficies in quid proiecta orthographicè mutetur pr.8.& 9. 447
Partes inuenire ſuperficiei normalis orthographicè proiectæ pr.10. ibid.
Superficies orthographicè proijcere pr.11. ibid. & pr.12. 448
Proiectus circulus Ellipſis in orthographia pr.13. 449. At ellipſis, aut circulus, aut ellipſis pr.14. pag. 449
Proiectio parabolæ parabola eſt pr.15. ibid.
Proiectio Hyperbolę Hyperbola eſt pr.16. 450
Vt circulus, ellipſis, parabola, hyperbola, & cęt. orthographicè proijciatur. ibid.
Sectio diametri circuli prolungati quænam in ordine ad orthographiam circuli pr.17. 451
Dato ſitu diametri, & puncto peripherię circuli proiectionem inuenire orthographicam pr.18. 451. & duobus diametris datis pr.19. 442. & etiam tantùm puncto in peripheria pr.20. 442
Proiectæ lineæ orthographicè, vt inuicem ſituentur pr.17. 458

Ordinata ratio.

Ordinata proportio quę ſit def.14. 114

Oualia.

Lineam oualem efformare pr.7. 290

P

Par, impar.

QVid par, impar, & pariter par, & pariter impar, & impariter impar def.7.8.9.10. 93

Parabola.

Parabola quid? def.8. 391
Parabola eſt ſeſquitertia trianguli inſcripti pr.33. pag. 538
In parabola diametro parallela per tactum ducta omnes tangentes parallelas bifariam ſecat p.27. pag.408. & habet rationem diametri. 409
Parabolæ aream ad quamcumque figuram redigere pr.42. 542
Omnes parabolæ ſunt inuicem ſimiles pr.51. 420
Parabolam deſcribere p.61. 426.& etiam circa datum triangulum pr.62. eam producere, & reſarcire pr.63. 427
Parabola ad parabolam, & ſegmentum ad ſegmentum, quam rationem habeant propoſ 36. 540. Sunt inuicem, ſi habeant æquales baſes, vt altitudines Coroll.
Quænam ſint parabolæ æquales pr.38. 413
Vide ellipſis, hyperbola, ſectio conica, triangulum, ſegmentum.

Parabolicum Conoides.

Parabolicum conoides eſt ad conum inſcriptum, vt 3. ad 2. pr.34. 636
Æquatur quoque cono priſmatico, & ſingulæ partes ſingulis ſuis partibus pr.35. 637
Conoidem parabolicum circulare, vel quadriforme in partes deſtinatas parallelo ductu baſis ſecare pr.43. 676
Parabolico conoidi conum ęqualē facere p.35.671

Parallelæ.

Parallelę lineę quænam? pr.28.pag.45.& p.29.46
Parallelæ quoſnam cum incidente faciant angulos pr.30. 46
Vt ducantur? pr.31. 47
Comparatę vni tertię, vt ſint inuicem pr.31. ibid.
Coniungentes parallelas, & æquales parallelæ pr. 33. ibid.
Quæ lineę non in eodem plano ſint parallelæ pr.9. pag. 350
Parallelæ ſectiones in cono ęquales eſſe nequeunt pr.7. 438
Parallela cruri in triangulo aufert triangulum toti ſimile Cor.1. 136. diuiditurque ab eadem linea à vertice cadente in partes partibus baſis proportionales Cor.2. 136
Parallelæ in triangulo baſi, ſecant latera proportionaliter pr.2. 134
Parallelarum ad diametrum ſectionis conicæ proprietates pr.41. & 42. 315

Paralleli circuli.

Parallelli circuli circa eoſdem polos ſunt pr.19. pag 359. & è contra pr.20. 360
Duo circuli in ſphæra tantùm ſunt paralleli, & æquales pr.21. ibid.
Quę parallelæ auferant à maximo circulo alteri inclinato inęquales arcus pr.30. & 31. 385
Paralleli inæquales auferunt circumferentias inęquales à maximo, in quo polos habent, & quæ maiores? pr.26. 385
Arcus obliqui circuli, & maximi parallelorum non ſunt ſimiles ſecti à maximis à polo parallelorum ductis pr.35. 388

Parallela plana.

Parallela plana continentia ſolidum aliquod ſunt æqualia, & ſimilia pr.1. 609
Parallela axi parabola eſt in conoide parabolico pr.13. 440
Hyperbolico in conoide, & cono, quæ faciant ſectiones ſimiles. 437. & ſeq.

Parallelogrammum.

Parallelogramma circa diametrum ſunt quadrata Cor.2. 56
Parallelogrammum def.34. 30
Eius partes circa diametrum def.37. 30
& complementa.
Parallelogrammo, ſi vnus angulus rectus omnes recti pr.1. 53
Et in eo parallelæ faciunt parallelogramma, ſub quibus contineatur def.1. ibid.
Parallelogramma æqualta ſe referunt, vt baſes. pr.1. 133
Eiuſdem baſis, vt altitudines Cor.
Parallelogrammi anguli aduerſi in eo æquales pr.34. 47
Complementa æqualia pr 35. 48
Baſi eadem, & inter parallelas eaſdem æquantur pr.36. 48
Et etiam ſuper baſes æquales pr.37. 49
Parallelogrammum eſt duplum trianguli eadem baſi conſtituti, & ſuper eaſdem parallelas p.34. pag. 49
Etiam ſi ſit ſuper æqualem baſim pr.40. 450
Et conuertuntur propoſitiones Cor.
Æquale Triangulo facere parallelog.pr.41. 50
& pr.43. pag.51. & etiam rectilineo pr.44. 51
In parallelogrammo, quæ partes ſint ſimiles propoſ.25. 145
Ex parallelogrammo parabolam efformare p. 69. item hyperbolam 71. & ellipſim propoſ. 7. pag. 430

Similia

Similia parallelogremma circa idem diametrum ſunt pr.28. 147
Æquilatera parallelogramma quatuor, vt ſe referant ad inuicem ſi duo ſint, & æquiangula propoſ.7. 394
Dato quadrilatero ęquale parallelogrammum conſtituere pr.3. 503
Dato parallelogrammo æquale parallelogrammum ponere pr.4. 504

Parallelepipedum.

Parallelepipedum per diagonios in æquales partes ſecatur pr.2. 609
Parallelepipeda æqualis baſis, & altitudinis ſunt æqualia pr.3 & 5. 610
Æqualis baſis, & altitudigis æqualia pr.6. 611
Parallela plana ſecti parallelepipedi partes ſunt inuicem, vt baſes pr.7. ibid.
Obtinent æquè eleuata eandem proportionem, quam baſes pr.8. 612
Similia ſunt in triplicata ratione laterum homologorum pr.9. ibid.
Si fuerint ęqualia ſunt altitudines baſibus reciprocè proportionales pr.10. 613
Ex tribus datis continuè proportionalibus compoſitum æquatur cubo mediæ pr.11. 613
Ex quatuor factum æquatur cubo ſecundę propoſ.12. 614
Ex quinque ædificatum æquatur parallelepipedo ex ſecunda, & tertia pr.13. ibid.
Quatuor parallelepipeda ſimilia laterum proportionem obtinent pr.14. 615
Dato parallelepipedo æquale cōſtruere pr.13. 664
Dato parallelepipedo cubum æqualem ponere pr. 14. 665
Parallelepipeda quæcumque calculare pr.64. 683
Dato parallelepidedo ſimile conſtruere, & æquale alteri dato pr.16. 665
Et etiam quodcumque aliud corpus regulare Coroll. eiuſdem.
Parallelepipedum erigere in cylindrum pr.21. 666
Parallelepipedum in conū trausfundere p.22. ibid.
Parallelepipedo conficere æquale priſma p.17. 665
Parallelepipedo æqualem pyramidem facere pr.17. pag. ead.

Parameter.

Contigua verticis appellatur parameter Coe. 394 & Coroll. 396
Conicæ ſectionis cuiuſcumque parametrum inuenire pr.9. 396. & pr 10. 397

Pars.

Pars quid def. 1. 106
Multiplex, & æquemultiplex quid def.2.& 3. 106
Pars numeri quid ſit def.3. 92
Partes quid def.4. 93
Pars, vel partes eſt quilibet numerus cuiuſlibet dati numeri pr.14. 156
Pars, & pars eadem duorum compoſitę ſunt, & pars compoſitorum eadem pr.5. 157
Pars numerus numeri, vt ablatus ablati etiam ablatus ablati eadem pars erit pr.7. ibid.
& idem aſſerendum ſi partes ſit pr.8. ibid.
Pars numeri, & pars alterius viciſſim eſt pars partis, vel partes, vt numerus numeri alterius pr.9. 158
Si fuerit partes, idem dicendum pr.10. ibid.

Peripheriæ.

Peripherię, quę æquales pr.32. 78
Peripheriam biſariam ſecare pr.34. ibid.
Vide circulus, triangulum ſphericum, arcus.

Perturbata proportio.

Perturbata proportio quænam def.15. 114
Permutata ratio in proportionibus propoſ.23. pag. 278

Pentagonum.

Pentagoni anguli quænam partes ſint rectorum Cor.1. 88
Vide inſcriptio.

Planum.

Plani numeri ſimiles inuicem ducti efficiunt quadratum pr.6. pag.178. & inuertendo ſi efficiant quadratum ſimiles erunt pr.7.
Planum ad planum rectum quodnam? def.2. 347
Quæ ſectiones planorum ſint parallelæ pr.14. 351
Quæ plana ſint parallela pr.12. & 13. 350
& pr.16. 352

Planus numerus.

Planorum numerorum ratio, quænam? pr. 15. 173
Plani numeri definitio def.1. 166

Poli.

Poli ſphęrę quinam? def.5. 354
Polum circuli inuenire pr.18. 359
Poli circuli maximi ab eo quadrante diſtant Cor.2. & è contra. 359
Per polos ducta per circuli, & ſphęrę centrum tranſit pr.8. 357
Vide circulus maximus.

Polygonum.

Polygona in circulis, vt quadrata ex circulis inuicem ſunt pr.40. 152
Similia polygona ſunt, vt prima ad tertiam continuè proportionalem Cor. pr.8. 144
Similia polygona in duplicata ratione homologorum laterum pr.25. 133
Simile rectilineum deſcribere pr.23. 135
& æquale alteri dato pr.27. 146
Simile eidem rectilineo, ſunt etiam ſimilia inter ſe pr.24.135. Vide rectilineum, rectangulum, & nomina polygonorum.

Poſtulata.

Poſtulata quid? 84

Potentia linearum.

Rectanguli trianguli baſis poteſt quaſcumque figuras ſimiles laterum pr.32. 149
Quęnam magis poſſit linearum pr.33. 150
Lineæ ſectæ ſecundum extremam, & mediam rationem maius ſegmentum cum dimidio totius quid poſſit pr.34. ibid.
Minus cum dimidio maioris ſegmenti pr. 35. 151
Tota, & minus ſegmentum ſeorſim pr.36. ibid.
Tota cum maiori ſegmento pr 36. ibid.
Tota, & minus ſegmentum, vt vna pr.37. ibid.
Potentia laterum figuratum regularium, 308. & ſeq.
Lateris trianguli potentia pr.2. 308
Lateris quadrati potentia pr.2. ibid.
Lateris decagoni, & exagoni potentia pr.3. 308
Lateris pentagoni potentia pr.4. ibid.

Quin-

Quindecagoni lateris potentia pr.6. 309
De potentijs laterum triangulorum 304. & ſeq.
Quadrata laterum trianguli ſimul, quibus quadratis æquentur pr.14. 304
Vide æquipotentiæ.

Primi numeri.

Primus numerus qui ſit def.11. 93
Primi inuicem quinam? def.12. ibid.
Primi numeri quinam? pr.1. 155
Primi poterunt inueniri in infinitum pr.42. 166
Modus reperiendi numeros primos Cor. 166
Primi numeri in proportione ea minimi pr.26. pag. 162
Minimi in proportione ſunt primi pr.27. 162
Primos inter ſe numeros metiens vnum, alium non metitur pr.28. ibid.
Primi numeri æquè maiores menſurant pr.29. 163
Genitus ex primis primus eſt illi numero, cui generantes ſunt primi pr.30. ibid.
Et etiam duobus pr.31. ibid.
Geniti ex multiplicatione primorum in ſe primi inuicem ſunt pr.32. ibid.
Aliquem compoſitum numerum aliquis numerus metitur pr.33. 164
Omnis numerus, vel eſt primus, vel metitur à primo pr.34. ibid.

Principia.

Principia quid? 23
Principia quædam pr.1. & cæt. 30

Priſma.

Priſma quid ſit def.2. 550
Priſmata æque eleuata ſunt inuicem, vt baſes pr.15. 615
Quadratæ baſi duplæ triangularis ſitum priſma æquatur priſmati baſis triangularis pr.16. ibid.
Similia ſunt in triplicata ratione homologorum laterum pr.18. 616
Omnia verificantur de priſmatibus quibuſcumq; quæ de triangularem baſim habentibus pr.19. & Cor. ibid.
Priſma ad priſma æqualis baſis ſe habet, vt altitudo ad altitudinem pr.20. 617
Priſma triangularis baſis numericè menſurare pr.66.
Priſma, vel priſmaticum conum alteri ſimilem exhibere pr.12. 663
Priſmati Cylindrum æqualem facere pr.10. 666
Priſma triangulare parallelo ductu baſis ſecare pr.40. 676
Priſmatis, & coni concaui ſuperficiebus conſtanti ſoliditas, quę pr.56. 651
Priſma ſimul, & pyramidem in partes datas ſecare pr.47. [illegible]
Priſma polygonę baſis calculis ſubijcere 683
Priſmati parallelepipedum æquale conſtruere pr.17. 665
Priſmatis ſuperficies noſcere pr.1. 550
Priſmati æqualem Pyramidem facere pr.19. 666
Priſma in conum mutare pr.20. 666
Vide parallelepipedum, Cylindrum.

Priſmaticus conus.

Priſmaticum conum iuxta datam proportionem diuidere pr.43. 676
Coni priſmatici ſectio parallela baſi ellipſis eſt pr.8. 438
Vide conus.

Probatio.

Probatio operationum arithmeticarum auferendo 9. quoties fieri poteſt pr.26. pag.103 & pr.27. 28 29. & 30. 104
Cuiuſcumque regulæ operationem per aliam examinare pr.31. 10

Problema.

Problemata quid ſint? 24

Proiectio.

Proiectio quid ſit def 1. 444
Duplex Orthographia, & Stereographia pr.1. ibid. & quid ſint def.2. & 3. 445
Proiectorum, & originalium ſuperficierum proportiones pr.45. pag.519. & pr.46. & 47. 520
Quæ proiectionem mutent pr.4. 445
Lineæ proiectrices quid def.5. 440
Planum proiectorum quid def.6. ibid.
Vide Orthographia, Stereographia.

Progreſſio.

Progreſſio proportionum vide progreſſio Geometrica Arithmetica, Harmonica, vide Series, Logarithmus.

Propoſitio.

Propoſitio quid? 25

Proportio.

Proportio quid ſit? def 4. 107
Proportionem quando quantitates habeant def. 5. & 6. 107
Proportio angulorum. Vide angulus.
Proportio numerica quænam def.18. pag.94. & def.1. 154
Proportio diuiditur in duas pr.5. 109
Proportio inæqualitatis in duas pr.6.
Proportio multiplex ſuperpartiens ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens, & multiplex ſuperparticularis, vel ſubmultiplex ſuperparticularis, & cęt. pr.7. 109
Proportionem duorum numerorum inuenire propoſ.8. 110
Rationes, & proportiones exprimere numeris Coroll. ibid.
Proportio replicata quid def.7. 111
Proportio compoſita quid def. 8. ibid.
Vt quatuor numerorum proportio tribus exprimatur pr.9. 112
Quomodo proportiones Arithmetica, Muſica, Geometrica differant pr.9. & 10. 246
Vide Muſica, Geometrica, Arithmetica.
Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, vt quadrata primi, & ſecundi ſe referant pr.29. 228
Quatuor numeri continuè proportionales ſolidus primi in ſe, & extremum ducti eſt æqualis cubo ſecundi pr.30. ibid.
Inter duos numeros datos duos medios proportionales inuenire pr.31. ibid.
Proportionales faciunt ex extremis genitum numerum planum æqualem genito ex medijs, ſiue ex medio pr.19. & 29. 160
Propagare proportiones ſecundùm datam rationem pr.44. 184
Proportionalium trium numerorum primus quadratus habet tertium quadratum pr.20. 175
Vide ſeries, ratio, logarithmus.

Proportionalium quatuor numerorum primus cubus h bet quartum cubum pr.21. 175
Proportionales numeri, vt inter eos cadant medij proportionales pr.8. pag 170 & pr.9. 171
Proportio rationum componitur ex proportione terminorum inuersè ſumptorum pr.11. 275
Et etiam dirrectè, & inuersè pr.12. ibid.
Duæ rationes compoſitę, quam producant pr.13. pag. 176
Duę proportiones ab alijs duabus ablatę, quam proportionem relinquant pr.14. 176
Modus arguendi in compoſitione rationum Coroll. ibid.
Componere proportiones pr.15. 276
Ratio ducta in æqualitatis rationem ſe producit pr.16. ibid.
Exhibere proportionem rationum compoſitarum pr.17. 277
Quantitates inuicem ductę quonam modo eandem producunt rationem? pr.18. 277
Ratio in ſe conuerſis terminis ducta producit rationem æqualitatis pr.19. 277
Inuerſis terminis inuerſæ rationes eandem proportionem dicunt pr.20. ibid.
Terminis permutatim ſumptis rationes eędem perſeuerant pr.20 277. Sic ſi inuertantur, & permutentur termini pr.21. 278
Proportionalitas quid? def.1. 271
Rationum denominatores vocantur quantitates def.2. ibid.
In quo conſiſtat ſimilitudo proportionum def.3. 271
Quæ ſimiles proportiones def.4. ibid.
Proportiones eiuſdem termini, vt referantur propoſ.1. 272
Si habeant commune conſequens pr.2. 272
Si habeant eadem antecedentia pr 3. 272
Rationum denominatores reperire pr.4. 273
Vt reducantur ad idem conſequens Cor. ibid.
Rationes proportionales reperire pr. 5. ibid.
Duas rationes datam habentes rationem inuenire pr.6. ibid.
Duas rationes eiuſdem denominationis duabus alijs proportionales inuenire pr.7. 273
Aſſignare proportionem ſimilem datę, & cęt. propoſ.8. 274
Aſſignare rationem, quæ ſit ad aliam rationem, vt ſunt denominatores inuicem pr 9. ibid.
Vt componantur proportiones pr 10. 175
Proportio duplicata. Vide duplicata. Vide multiplicatio rationum. Vide Rationes.

Puncta.

Punctum accipitur inadequatè à mathematicis, & vt negatio pr.11. & 12. 10
Quid ſit? def.1. 26
Terminat lineam def.3. 27
Puncta ad puncta proportionem non habent pr.3. pag. 108
Nec puncta ad lineas pr.4. 109
Puncta in quantitate mathematicè non oſtenduntur pr.3. 3
Immo explodantur pr.4. 4
Infinita nequeunt admitti pr.5. 5
Quid ſit punctum phyſicum, & reale pr.8. 8
Partes habet deſſignabiles non factibiles. ibid.
Et eſt quid reale indiuiſibile reduplicatiuè p.9. 9
Vide indiuiſibilia.

Pyramis.

Pyramis quid ſit? def.1. 550
Pyramides, vt diuidantur pr.21. 617
Æqualis baſis ſunt æquales pr.21. ibid.
Sunt tertia priſmatis pr 23. 618
Similes in triplicata ratione ſunt laterum homologorum pr.23. ibid.
Sunt inuicem æquè eleuatę, vt baſes pr.24. ibid.
Æqualiũ reciprocantur baſes, & eleuationes p 25. pag. ead.
Quod dicitur de pyramidibus triangularibus dicendum de polygonis pr.26. 619
Pyramidi erigere æquale priſma pr.19. 666
Pyramidem cono æqualem erigere propoſit. 18. pag. 666
Vt baſis triangula ad circulum, ita pyramis ad conum pr.2. 620. Cor. pr. 622
Pyramidem in corpus ex quinque regularibus mutare pr.22. 667
Pyramidẽ pyramidi vacuę ęqualẽ ponere p.27. 669
Cor. etiam ſi ſit vacuum ſimile toti Cor. pr.28.
Pyramidem numeris ſubijcere pr 68.
Pyramidem diuidere plano lateri parallelo iuxta datam rationem pr. 43. 676
Pyramidem ponere ęqualem parallelepipedo p.17. pag. 665
Pyramidem in cylindrum mutare pr.20. 666
Pyramidis ſuperficies noſcere pr. 52. 551
Pyramidem, conum, & coniforme corpus alteri ſimile ſtatuere pr.7. 663
Etiam ſola ſectione Cor. 662
Pyramidem æqualem pyramidi flexis conſtanti ponere pr.37. 670

Q

Quadratrix.

QVadratrix linea quænam? def.1. 295
Quadratricem deſcribere pr.14 293. & pr. 15. & 16. 294
Axis quadratricis, centrum, & cæt. ibid.
Perpendiculares in quadratrice ad axem, vt ſint ad diametrum proportionatę pr.18. 294
Arcus ab extremo applicatę ductus in quadratrice eſt ad applicatam, vt radius ipſius ad ſagittam pr.19. 295
Quadratrix eſt linea aſymptota pr.22. 290
Diuidit quadratrix angulum in partes datas pr.8. pag. 308

Quadratus numerus.

Quadrati numeri definitio def.3. 167
Quadrati duo inuicem ducti quadratum faciunt pr.7. 178. Cor.1. & è contra Cor. 2.
Quadratos duos inuenire, qui compoſiti quadratum faciant pr.13. 179
Si ratio ſit quadratorum, & primus ſit quadratus alter talis erit pr.22. 175
Si ratio ſit cuborum, & primus ſit cubus, alter erit cubus pr.23. 175
Numerus quadratus, cum quo alius numerus quadratum efficiat inuenitur Cor.1. 221. & Cor.2. 222. & qui demptus quadratum relinquat Cor.3.
Et qui ſubductus relinquat quoque quadratum 24
Quadratos inuenire quorum exceſſus non ſit quadratus pr.15. 180
Quadratos inuenire, qui compoſiti non faciant quadratum pr.16. ibid.
Non quadratos inuenire, qui faciant compoſiti quadratum pr 17. 181
Numerus inuenitur non habens proportionem, quam quadratum ad duos alios pr.18. 181
Duos numeros inuenire non quadratos, quorum compo-

Digitized by Google

compoſitum non ſit quadratum, &c. pr.19. 181
&

Quadratum.

Quadratum quid def.29. 29
Quadranguli altera parte longioris def.30. 29
Quadratum deſcribere pr.38. 49
Duobus quadratis duo quadrata æqualia inuenire, & inter ſe pr.10. 505
Quadratum in circulum transfundere pr.14. 531
Vide Area.
Quadratum diametrorum quadranguli in circulo, quibus quadratis æquentur? pr.16. 317
Quadratum ſinus recti, cui quadrato ęquetur p.17. pag. 318
Quadratum ex medis æquat quadratum ex extremis pr.19. 142
Quadratum circumferentiæ ſe habet, vt 88. ad 7. ad aream circuli pr.8. 519
Quadratorum duplicata eſt ratio pr.18. 174
Quadratum quadruplum quadrati, cui latus ſubduplum Cor.1. 56

Quadriformis ſphęra.

Sphęram quadriformem in pyramidem æqualem facere pr.36. 672
Quadriformis ſphæra, vt ſphæram proportione reſpiciat pr.48. 647
Quadriformi ſphæræ, quæ pyramis ſit æqualis? pr. 48. Cor. 648
Quadriformis ſphęra quodnam æquet parallelepipedum? pr.50. ibid.

Quantitas.

Quænam ſpecies quantitatis pr.2. 2
Vtrùm conſtet ex punctis ex vi illationis Mathematicæ pr.3. 3
Oſtenduntur puncta in quantitate argumentis mathematicis pr.4. 4
In ea infinita puncta nequeunt eſſe pr.5. 5
Partes ſemper concipi queunt in ea pr.6. 6
Diuiſio quanti non perſeuerat ſemper pr.7. 7
Eſt fundamentum vnitatis numeralis pr.3. 14
Quænam quantitates proportionem obtineāt def. 9. 113
Quænam maiorem rationem habere dicantur def. 11. ibid.
Quantitates, quæ obtineant rationem def.9. ibid.
& quæ maiorem rationem def.11. ibid.

Quarta proportionalis.

Quartam proportionalem lineam excerpere pr.15. pag. 141
Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire pr 32. 514
Tribus datis rationibus quartam proportionalem inuenire pr.43. 284
Tribus corporibus datis quartum proportionale reperire pr.60. 681

Quotiens Quoti.

Quotiens eſt aliquando maior minutia diuiſa p.20 pag. 214
Quoti genitos, vt excedant in ſerie geometrica naturali, & vt æquentur pr.28. 341
Numeri diuiſi per 10. quoti tot ſunt, quot ipſæ figuræ vna dempta pr.29. ibid.

R

Radij.

RAdij harmonici quinam def.4. 263
Radius maximi ad radium minoris circuli in ſphęra non eſt, vt peripheria ad peripheriam duobus circulis interceptam, & cæt. pr.3. 389
Radius vt refertur ad ſinum baſis, ſic ſecans complementi cruris ad ſecantem anguli pr.28. 479
Radius eſt ad ſinum cruris, vt tangens complementi cruris ad tangentem complementi anguli oppoſiti. 478
Radius ad ſinum complementi cruris, vt ſecans baſis ad ſecantem reliqui cruris pr.30. 479
Radius eſt ad ſecantem cruris, vt ſecans alterius ad ſecantem baſis pr.32. 480
Radius eſt ad ſinum anguli, vt ſecans alterius ad ſecantem cruris oppoſiti pr.34. 480
Radius ad ſecantem cruris, vt ſecans complementi anguli ad ſecantem anguli alterius pr.38. 481
Radius ad ſinum complementi cruris, vt ſecans anguli obliqui ad ſecantem anguli alterius obliqui pr.40. 481
Radius ad ſecantem complementi baſis, vt ſecans comp. ang. oppoſiti ad ſecantem compl. cruris pr.42. 482

Radix.

Radices proportionis numericæ quæ def.3. 154
Quare in radice quadrata eruenda numerus alternus relinquatur in exord. 222
Quadratam radicem eruere pr.22. 223
Eductionem radicis quadratæ examinare pr.23. 225
A numeris quadratis radicem quadratam proximè educere pr.22. 225
& à minutijs quadratis, & non quadratis pr.32. & 33. 229
Cubica radice in deducenda cur duo numeri intermittantur in exord. 216
Radicem cubicam excerpere pr.26. 227
Radicis cubicæ extractionem examinare pr.27. 228
Radicem cubicam proximiorem à non cubico numero deducere pr.28. ibid.
& à minutijs cubicis, & non cubicis pr.32. & 33. 229
Extractio radicis quadratæ, & cubicę, Aurea regula, ſubductione, additione per logarithmos exercetur pr.6. 225. & Cor. 226
A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere pr.32. 229. & etiam à non cubicis, nec quadratis pr.33.

Rationale.

Rationale eſt medium potens p.45. 203
Rationales lineę quę? def.6. 182

Ratio.

Ratio qui ſit? deſ.3. 107
Rationem extendere, vide ſeries.
Ratio ex æquo in proportionalitatibus pr.28. 280
etiam ſi perturbata Coroll.
Vide multiplicatio, diuiſio, proportio.
Ratio partium ad quantitatem, ſi componantur, quænam ſit ad eandem? pr.29. 280
De ratione multiplici. 119
Quæ eidem rationi ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eędem rationes pr.16. 125
Rectæ planis parallelis ſectę in eaſdem rationes ſecantur pr.19. 353
Datas rationes ad eandem antecedentem, vel conſequentem reducere pr.31. 280
Rationale quadratum quodnam deſ.8. 183
Vide proportio, ſeries Geometrica, media, quarta, tertia, termini, differentię.

Reciprocæ figuræ.

Reciprocæ figuræ quęnam? def.2. 132
Reciproca crura in triangulis, area, anguloque æqualibus quæ? pr.11. 139
Reciproce latera in parallelogrammis æqualibus area, & vnico angulo quæ? pr.10. ibid.

Rectangulum.

Rectangulum quid def.6. 26
Rectangulo æquale quadratum ponere pr.9. 505
& etiam rectangulum pr.11. 506
Rectangulum ex medijs æquat illud ex extremis cruribus proportionalibus pr.18. 142
Vide figura, ſectio. Addere, aree.

Rectangulum triangulum ſphęricum.

Triangula ſphęrica rectangula habent ſinum cruris ad ſinum baſis in eadem ratione eſt prop.1. pr.2. pag. 472
Sinus totus ad ſinum anguli ſphęricorum triangulorum eſt, vt ſinus baſis ad ſinum cruris oppoſiti Cor. pr.1. ibid.
In ſphęricis rectangulis ſinus totus eſt ad ſinum baſis, vt ſinus anguli obliqui ad ſinum cruris pag. ead.
Crus oppoſitum, & adiacens in triangulis ſphæricis inuenire pr.3. 472. & pr.12. & 13. 475. & pr.19. 476. & pr.31. 479. & pr 41. 481
Sinus totus in ſphęricis triangulis eſt ad ſinum anguli obliqui, vt ſinus complementi alterius cruris ad ſinum complementi anguli reliqui pr.4. 472
Angulum in rectangulis triangulis inuenire pr 5. 473. & pr.15. & 17. 476. & 25. 478. & pr.29. 479 & pr.35. 480. & pr.39. & 41. 481
Sinus totus ad ſinum complementi cruris in ſphęricis rectangulis eſt, vt ſinus complementi reliqui cruris ad ſinum complementi baſis pr.6. 473
Baſim in triangulis ſphęricis rectangulis inuenire pr.7. 474. & pr.21. & 23. 477. & pr.33. 480. & pr.37. 481
Tangens primi arcus eſt ad tangentem complementi ſecundi, vt tangens huius ad tangentem complementi alterius pr.8. 474. & ſinus totus ad ſinum, vt, & cęt. pr.9.
Sinus cruris eſt ad tangentem cruris alterius, vt radius, ad tangentem anguli pr.10. 474
Radius ad ſinum complementi anguli, vt tangens baſis ad tangentem cruris pr.12. 475
Radius ad tangentem anguli, vt ſinus complementi baſis ad tangentem complementi anguli in ſphæricis rectangulis pr.14. 475
Radius ad tangentem cruris, vt tangens complementi baſis ad ſinum compl. anguli pr.16. 476
Radius eſt ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris ad ſinum cruris pr.18. 476
Radius eſt ad ſinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris ad tangentem complementi baſis pr.20. 477
Radius eſt ad tangentem anguli obliqui, vt tangens complementi reliqui obliqui ad ſinum complementi baſis pr.22. 477

Rectangulum planum.

In omni triangulo rectangulo ſi baſis eſt radius duo crura ſunt ſinus arcus, & ſinus complementi pr.1. 463
Latus rectilinei rectanguli reperire pr.3. 4. 8. & 11. 464
Angulum in rectangulo reperire pr.5. 6. 7. & 12. peg. ead.
Baſim in rectangulo reperire pr.9. 464. & p. 10. & 13. 465
at ſi crus ſit ſinus totus baſis eſt ſecans, alterum crus tangens pr.2. ibid.

Reflexio.

Reflexio rationum quid def. 16. & ſeq. 115
Reflexio oſtenditur pr.25. 130. & pr.2. 119
Reflexio rationis def.14. 117

Regulare corpus.

Omne corpus regulare ſphæra deſcriptum eſt alteri ſimile, ſi ſit eiuſdem generis pr.8. 662
Alteri ſimile deſcribere Coroll. ibid.
Corpus ex quinque regularibus in pyramidem æqualem transfundere pr.22. 667
Præter quinque corpore aliud corpus regulare non poteſt ſphęra inſcribi pr.18. 606
Omnium corporum regularium naſcere ſuperficies pr.3. 551

Regula aurea.

Regula aurea proportionale quartum datis tribus inuenire pr.1. 216. & pr. 9. & 10. 218. Etiam ſi primo adhæreat minutie pr.2. 216. Etiam ſi ſecundo numero pr.3. 117
Etiam ſi tertio pr.4. 117. etiam ſi primo, & ſecundo pr.5. vel ſecundo, & tertio pr.6. vel primo, & tertio pr.7. vel omnibus pr.8. 218
Probatio aureæ regulæ Cor. 218
Regula trium inuerſa ad rectam reducitur p.12. 219
Regula aurea compoſita eſt aurea regula bis adhibita pr.14. 220
Recte, & compoſita pr. 15. ibid.
Inuerſa, & compoſita pr.16. ibid.
Compoſita inuerſa, & recta pr.17. 221

Reliquæ.

Reliquis commenſurabiles Reliquę quoque ſunt pr.55. 106

Replicatio.

Replicatio rationis def.22. 117
Replicatio rationis oſtenditur in quantitate multiplici pr.1. 129. & pr.18. 126

Reſiduatio.

Reſiduatio rationis def.21. 116
Reſiduatio rationis oſtenditur pr.5. 120. & pr.12. pag. 129

Reſiduum.

Vt fiet reſiduum omni data quantitate minus in lineis pr.14. 261

Rhombus.

Rhombus quid? def 31. 36
Rhomboides quid? def.32. 30
Rhombus ſolidus, cui conn æquetur pr.10. 627
& pr.11. 626
Rhombus ſolidus vacuus, cui conn ęquetur pr.12. 626. & pr.13. 627
Rhombum conicum menſuris numericis examinare pr.72. 685

Segitta

S

Sagitta.

SAgitta quadratricis def. 3. & pr.19. 244
Sagittæ, & applicatæ quadratricis arcum tertium proportionalem inuenire pr.20.21. 296

Secantes.

Quæ ſecantium rectangula æqualia Cor.1. 81
Vide Tangentes, Triangula, Sphærica, Radius, Sinus, Rectangulum.
Secans addita tangenti, quam tangentem efficiat pr.27. 322. Vide Rectang. Tangens. Radius.
Secans quas tangentes æquet pr.28. 323

Sectio.

Sectio extrema, & media ratione quæ? def.3. 32
Omnis ſectio ſphæræ circulus eſt pr.5. 353
Sectio ſpiralis ſpatij, vt ſit ad ſectorem ſuum pr.60. 549
Secare angulum, vide angulus.
Datum rectilineum in datas partes ſecare per rectas ab vno puncto in latere, vel angulo propoſ.39. 517
Figuram à dato in medio puncto in datas partes ſecare pr.40. 517
Figuram in partes deſtinatas ſecare, nec per parallelas, nec per lineas in punctum conſpirantes pr.41. 518
Datum triangulum à dato extra ipſum puncto in datas partes ſecare pr.42. ibid.
Datum rectilineum in partes datas ſecare per lineas à puncto extra ipſum ſumpto pr.43. 529. & etiam in plures aliquando Cor.
Coni elliptici ſectio parallela baſi ellipſis eſt pr.1. 436. & quandoque circulus pr.3. 437
Etiam ſi non parallela, & quæ pr.5.
Coni circularis baſi ſubcontraria ſectio circulus pr.2. 436

Sectiones conicę.

Similes conicæ ſectiones quæ? def.14. 391
Æquales ſectiones conicæ quænam? def.16. 392
Sectio per axem coni triangulum eſt pr.1. 392
Omnis ſectio coni parallela baſi circulus eſt pr.2. pag. ead.
Data quacumque coni ſectione diametrum inuenire pr 3. Ibid.
Sectiones conicæ omnes data baſi angulo, & diametro pr.55. 422
Item data diametro, & parametro pr.56. Ibid.
Datis vmbelicis, & vertice pr.57. 423. & p.58. 424
Circa datum triangulum ſectiones deſcribere pr.59. & 60. 425. Vide parabola, hyperbola, ellipſis.
Sectio conorum parabolicorum, & hyperbolicorum quænam? Cor.2. 450
Ex vna ſectione conica alteram eruere pr.76 433. & pr.77. 78. 79. & 80. 434
In ſectionibus rectæ, vtcumque ductæ ſe interſecant, vt in rectangula proportionalia pr.48. 419 & pr.49. & 50. Cor. 1. & 2. 420
Quælibet ſectio in aliquo alio cono accomodari poteſt pr.29. 310
Vt conus in quo aptetur quælibet ſectio conica inueniatur Cor.2. 311

Sector.

Sector circuli quinam? def.8. 64
Triangula baſis, vt eſt ad ſectorem, ita priſma ad ſectorem cylindri ſolidum pr.1. 620
Sectorum inæqualium plana, quando circulis intercipientibus ſint minus obliqua pr.27. 385
Qui ſectores elliptici æquales pr.23. 534
Sectori æquale rectangulum facere pr.15. 531
Sectorem æqualem rectangulo à circolo eximere pr.16. 531
Sectores, ac arcus, & anguli proportionales in circulis pr.39. 152
Sectorem ſolidum, & portionem ſphærę in conum ęqualem commutare pr.31. 670
Cui rectangulo ſector circuli ſit æqualis pr.4. 528
Sectoris aream inuenire pr.10. 530
Sector ſphæræ cui cono æquetur pr.44. 645
Sectores inſcribere ſpiræ, & multiplicare donec relinquant quantitatem omni data minorem pr.52. 545
Sectores circumſcripti primæ ſpiræ, vt ſint ad ſectores circuli pr.53. ibid.
Sectores inſcripti ſpiræ ſecundæ, vt ſint ad ſectores primi circuli pr.55. ibid.
& vt ad ſuum circulum Coroll. 546
Sectores inſcripti tertiæ ſpiræ, vt ſint ad primum circulum pr.67. 547. & ad ſuum quoque in Cor.

Segmentum Circuli.

Circuli ſegmentum quodnam? def.5. 63
Angulus ſegmenti, & in ſegmento def.4. & 5. ibid.
Quænam ſegmenta circulorum ſe ſecantium inuicem ſint æqualia in ſphæra pr.10. 11. & 12. 375 & pr.14. 15. 16. & 17. 377
Quęnam ſegmenta circulorum ſe ſecantium inuicem ſint ſimilia p.12. & 13. 376. & p.17. Cor. 378
Segmenta circulorum duo ſuper eandem lineam æqualia eſſe nequeunt pr.9. 67
Si æquales rectę æqualia ſegmenta ſimilia p.10. 67
Dato ſegmento inuenire circulum pr.11. ibid.
Segmentum deſcribere capiens angulum datum rectilineum pr.30. 77
Et abſcindere angulum datum pr.31. 78
Segmenta arcuum. & arcus ſecare, vide arcus.
Segmenta circulorum def.5. 63
quæ ſimilia ſegmenta circulorum def 9. 64
Segmentum circuli, vt ſe referat ad ſegmentum ellipſis pr.28. 536

Segmenta linearum.

Segmento proportionali lineam augere diuerſimodè pr.9. 251. & pr.10. 11. & 12 pag.152. & pr.13. 14. & 15. ibid.
In ſegmenta proportionalia lineam diſtribuere diuerſis proportionibus ad diuerſa prędita pr.16. 252. & pr.17. 18. & 19. 253. & pr.20. 254
Secare rectam, vt ſegmenta ſint reciprocè proportionalia pr.21. 254
Auferre à duobus lineis ſegmenta duo, vt reſidua remaneant proportionalia pr.22. 254

Segmenta planorum.

Segmenta concaua hyperbolica, quæ æqualia propoſ.48. & 49. 543
Segmentum in hyperbola alteri æquale facere pr.50. etiam ſi concauum pr.51. 544
Quæ ſegmenta ellipſium æqualia pr.22. 533
Segmenta in continua proportione creſcentia à parabola abſcindere pr.41. 541
Quæ ſegmenta Hyperbolæ ſint æqualia inuicem pr.46. 543
Segmenta parabolica, quæ ſint æqualia pr.35. 540

Digitized by Google

Auferre ab ea ſegmentum alteri æquale pr.38.540.
& etiam proportionale pr.39. 541
Et etiam ſegmento alterius parabolæ pr.40. Ibid.
Segmenti circuli aream reperire pr.11. 530
Quæ ſegmenta triangulorum æqualia pr.13. 501

Segmenta corporum.
Corpora diuerſa diuerſimodè ſecantur p.40.679. & ſeq. Vide ſecare.

Series.
Series progreſſionis Geometricè quid ſit? def.1. pag. 256
Series ad ſeriem habet proportionem ex terminis conflatam dummodo ſint æquales numero propoſ.9. 259
Duas ſeries ſimilium proportionalium exhibere pr.9. ibid.
Series ex terminis ab aliqua ſerie alternè ſublatis, quam proportionem ad illam obtineat? propoſ.11. 260
Datur quantitas æqualis infinitæ ſeriei Geometricę linearum pr.15. 261. vt inueniatur pr.16. etiam alio modo Cor. 1. 2. & 3.
Seriem linearum in punctum deſtinatum finientem ordinare pr.17. 262
Quantitatem pluribus ſeriebus Geometricis ęqualem inuenire in lineis pr.18. ibid.
Datam quantitatem ita ſecare, vt duplicis ſeriei idem ſit terminus pr.19. ibid.
Series harmonica, vide logarithmus.

Series corporum proportionalium.
Seriem continuam proportionalium corporum etiam diſſimilium inuenire pr.61. 681
Seriei corporum proportionalium corpus æquale ponere pr.62. 682
Datum corpus in infinitam ſeriem corporum diſtribuere pr.63. ibid.

Series numerorum.
In ſerie continua proportionalium, qui quadrati qui cubi numeri pr.24. 175. & pr.25. 176
Vide numerus, Proportio Geometrica, Arithmetica, Harmonica. Differentia, Media, Extrema, Tertia, Quarta, Ratio.

Similitudo.
Similes figuræ quænam? def.1. 132
Quæ ſuperficies planæ non rectilineæ ſimiles def. 1. 660. Vide ſuperficies.
Similem alteri cuicumque ſuperficiei ſuperficiem ponere pr. 1. 661
Similia triangula in proportione duplicata crurum homologorum pr.20. 133
Dato rectilineo conſtituere rectilineum ſimile maius, aut minus iuxta datam proportionem pr.27. 312
Quæ corpora non planis contenta ſimilia, & ſimilis poſitionis def.2. 660
Circuli, qui arcus parallelorum ſimiles auferunt quinam ſint? pr.17. 378. & pr.19. 379
In rectangulo à normali facta triangula toti, & inuicem ſunt ſimilia pr.8. 138
Quæcumque quatuor corpora ſimilia ſunt, vt latera ad inuicem pr.14. Cor. 815
Omnia corpora ſimilia triplicatam habent laterum, ſeu diametrorum rationem, ſed duplicatam baſium pr.55. 680
In conoide hyperbolico ōnes hyperbolæ parallelę ſunt ſimiles pr.21. 443. & 442. Coroll. etiam ellipſes.
At parabolę axi parallelę ſimiles, & æquales in parabolico pr.16. 441
Ellipſes parallelę in conoide parabolico ſunt ſimiles pr.15. ibid.
Omnes ſectiones parallelæ ſunt ſimiles ellipſes in ſphæroide pr. 11. 439

Similes numeri plani.
Plani qui ſimiles pr.13. 173
Solidi qui ſimiles pr.14. ibid.
Plani ſimiles non ſunt inter quos medius proportionalis non cadat Cor.1. 174. nec ſi ab vnitate alter menſuretur Cor.2.
Nec quorum vnus eſt quadratus alter non Cor.3.
Inuentio non ſimilium numerorum Cor.4. 174
Inuentio ſimilium numerorum planorū p.17. 174

Simplex.
Numerus ſimplex non ſimplicem multiplicans, quem numerum generet? pr.14. 98
Non ſimplex verò multiplicans non ſimplicem, quid generet? pr.15. 99
Simplicium multiplicatio pr.16. ibid.
Non ſimplicium multiplicatio pr.17. ibid.

Sinus.
Sinus in tabulis non repertos emendare pr.14. 465
Sinus complementi primi ad ſecundi ſecantem, vt ſinus complementi huius ad ſecantem primi pr.26. 478
& inuersè in Cor.1. & permutatè Cor.2.
Vt inueniantur ſinus addendo, & ſubducendo pr. 23. Cor. 1. 2. & 3. 321
Sinus quid? def. 2. 307. complementi, totus, quinam? ibid.
Verſus ſinus def.3. 307
Rectus ſinus def.2. ibid.
Sinus arcuum in tabulis non repertorum proximè dare pr.15. 465
Quadrata ſinus complementi, & ſinus recti æquantur quadrato radij pr.11. 312
Quomodo inueniatur ſinus complementi Cor.1. & ſinus verſus. 312
Rectangulum ex duobus ſinubus, vt vno crure, & chorda intercepta, cui æquetur pr.24. 555
Sinum verſum ſine extractione radicis quadratę inuenire Cor.pr.17. 318
Dimidium ſinus totius ſe habet ad ſinum arcus dimidium, ita ſinus complementi ipſius ad ſinum arcus pr.18. 319
Sinum duplicis arcus ſine extractione radicis quadratæ inuenire, vel è contra Cor.1. & 2. 319
Sinus ex chordis exquirere pr. 22. Cor. 320
Per ſolam additionem, & ſubductionem aliquos ſinus inuenire 321. & ſeq.
Sinus minutorum reperire pr.16. Cor.3. 314
Sinus Gr.45. eſt medium proportionale inter ſinum totum, & dimidium eius pr.18. 337
Vide Rectangulum, Triangulum ſphæricum ſecans, tangent, logarith. chorda.

Solidi numeri.
Solidi numeri definitio def.2. 167
Compoſitus numerum aliquem multiplicans ſolidum facit pr.8. 178
Solidi numeri ratio laterum triplicata pr.12. 172
Solidorum ratio eſt, quæ alicuius cubi ad cubum pr.16. 174

Solidum

Solidum.

Solidum qud ſit def. 1. 597
Similes ſolidæ figuræ quænam? def. 2. 597
Æqualea quænam? def 3. Ibid.
Similia ſolidi, & plani def. 5. 167

Species.

Species figurarum conicarum quę? Cor. 2. 396

Sphæra.

Sphæra quid ſit def. 1. & eius centrum def. 2. 354
Sphæram, ſphæroidemque etiam quadriforme in partes datas ſecare pr. 46. 677
Sphæræ ſphæroidi corpori parabolico, vel hyperbolico recto aliud ſimile corpus fabricare pr. 5. pag. 663
Sphæra cui cono æquetur? pr. 43. 644
Conue æqualis ſphærę maximi ſphæræ circuli habet quadruplam baſim Cor. pr. 43. 645
Vide fruſtum.
Sphæra cui rectangulo ſolido æquetur? pr. 46. 646
Sphæræ ſunt ad inuicem in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum pr. 47. pag. 647
Pluras ſphęras in vnam ſphæram colligere pr. 54. pag. 680
Sphæræ cubum æqualem ponere pr. 23. 667

Sphæræ ſuperficies.

Quęcumque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt circuli, qui in ea maximus ſit pr. 43. 689
Sphęricam ſuperficiem in planas ſuperficiea per circulos diuiſam in planum extendere p. 34 591
Sphæricam ſoperficiem eandem cylindrica ſuperficie ſectam extendere pr. 35. 592
Vel à plano non pendiculari orizonti p. 36. 592
Sphæricam ſuperficiem in annulares planas ſuperficies diſtribuere pr. 26. 588
Etiam ſi à triangulari ſuperficie ſecta ſit pr. 27.
Etiam à quatuor ſuperficiebus in quadratum poſitis pr. 28. 589. & etiam oblongum pr. 29. & etiam alio modo pr. 30. 590
Etiam ſi angularibus ſuperficiebus ſecta ſit propoſ. 31. Ibid.
Sphærę ſuperficiem proportionaliter ſecare propoſ. 48. 571
A ſphęrę ſuperficie abſcindere portionem æqualem ſuperficiei dati circuli pr 49. 571
Superficies ſphęræ minor dimidio portionis, cui circulo ęquetur pr. 46. 570. at ſi ſit maior, cui pariter æquetur pr. 47. Ibid.
Sphæræ circumſcriptum corpus, cui parallelepipedo æquetur pr. 45. 646

Sphæroides.

Sphęroides quid? def. 1. 439
Sphæroidi Conum æqualem exhibere pr. 3. 670
Quæ de ſphæroide dicuntur, verificatur de ſphęra Cor. 2. 639
Sphæroidis, vel conoidis ſuperficiem in planum extendere pr 37. 593. & pr. 40. 595
Sectum ellipſibus æqualibus pr. 38. 594
& etiam inæqualibus pr. 39. ibid.
Sphæroidis Elliptici ſuperficies, vt ſe habeat ad ſuperficiem ſphęrę pr 36. 563
Cui ſuperficiei ſphęricę æquetur pr. 37. 564
A ſphęroidè, vel conoide imperatam partem auferre alteri in ea æqualem pr. 49. 6.8
Sphæroides, Conoideſque habent triplicatam rationem diametrorum dummodo ſint ſimilia corpora pr. 55. Cor. 680

Sphęrica triangula.

Sphęrica triangula, vide triangula, tangentes, ſecantes, ſinus, arcus, logarithmos.
Quatuor fondamenta regulæ facillimæ ad ſoluenda ſphęrica præcipuè per logarithmos primum pr. 44. 482. ſecundum pr. 45. 483. tertium propoſ. 46. quartum pr. 47. 484
Regulæ facillimę ad ſoluenda rectangula ſphærice per logarithmos breuiſſimè per ſinus, & tangentes pr. 4 Cor. 484
Vide angulus, ſphęrici anguli.

Spiralis linea, ſpatium corpus.

Spiralis linea quænam def. 1. 290
Lineam ſpiralem ducere pr. 9. Ibid.
Spiralis linea æquat ſemicirculum pr. 12. & 13. 292
Eſt linea infinitis circulorum ſegmentis conflata pr. 10. ibid.
Spatium primum ſpirale eſt ad circulum ſuum, vt 1. ad 3. pr. 54. 545
Circulus ſecundæ ſpirę ſe habet ad ipſam, vt 12. ad 7. pr. 56. 546
Spirę tertię ſpatium eſt, vt 19. ad 27. ad circulum ſuum pr. 58. 548
Spirę primę, ſecundę, tertię ſpatia, vt ſint ad inuicem pr. 59. ibid.
Spirarum aliarum inuenire proportiones Cor. 548
In ſpiralibus ſpatijs, vt ſectores ſe habeant circumſcripti, vel inſcripti in exord. 544
Spirale corpus quodcumque mutare in cylindrum pr. 34. 674
Corpus ſpiralis altitudinis, cui cylindro ęquetur pr. 57. 653
Etiam ſi in plures ſpiras torqueantur pr. 57. Coroll. 654
Spiralis baſis corpus, cui cylindro ęquetur pr. 28. 654. & ſingulę partes, etiam ſi ſecundę, & tertię ſpirę inixum Coroll. 1. & 2.
Corpus ſpirale baſi, & altitudine creſcens, cui parti cylindri ęquetur pr. 59. 655
Corpus eiuſdem rationis, ſed decreſcens 655. Coroll. 657
Secunda ſpiralis corpora baſi, & altitudine, quam cylindri partem ęquent pr. 60. 658
Superficies baſi normales ſpiralium corporum, quam proportionem ad cylindri ſuperficiem dicant pr. 39. 674

Stereographia.

Circulus ſtereographicè proiectus linea ſit pr. 4. 454. vt proijciatur pr. 5. partes eius proiectas inuenire pr. 6. quam proportionem ſeruent p 7.
Circulus parallelus plano proiectus ſtereographicè ſit maior pr. 8. 454. & ſubcontrarius, item ſit circulus pr. 9.
Circulum proijcere, polum eius, & centrum pr. 10. 456. Eius partes inuenire quatuor modis pr. 11. 456. & pr. 13. 14. & 15. 457
Partes proiecti circuli, quę maiores pr. 16. 458
Linea Stereographicè, vt proijciatur pr. 1. 453
& quęnam proiectrices def. 2.
Punctum ſtereographicę proiectionis quid? def. 1. pag. ead.
Planum ſtereographum quid? def. 3. ibid.
Lineę in quas lineas ſtereographicè proiectę tranſeant pr. 2. 443. partes, vt augeantur pr 3.
Superficiem rectangulam proijcere ſtereographicè pr. 18. 459
Stereographia inuerſa, & recta pr. 16. ibid.
Lineę ſtereographicè proiectę muſicè decreſcunt Cor. 460

Auferre ab ea ſegmentum alteri æquale pr.38.540.
& etiam proportionala pr.39. 541
Et etiam ſegmento alterius parabolæ pr.40. ibid.
Segmenti circuli aream reperire pr.11. 530
Quæ ſegmenta triangulorum æqualia pr.13. 501

Segmenta corporum.

Corpora diuerſa diuerſimodè ſecantur p.40.679. & ſeq. Vide ſecare.

Series.

Saries progreſſionis Geometricè quid ſit? def.1. pag. 256
Series ad ſeriem habet proportionem ex terminis conflatam dummodo ſint æquales numero propoſ.9. 259
Duas ſarias ſimilium proportionalium exhibera pr.9. ibid.
Series ex terminis ab aliqua ſerie alternè ſublatis, quam proportionem ad illam obtineat? propoſ.11. 260
Datur quantitas æqualis infinitæ ſeriai Geomatricę linearum pr.15. 261. vt inueniatur pr.16. etiam alio modo Cor. 1. 2. & 3.
Seriem linearum in punctum deſtinatum finiantem ordinare pr.17. 262
Quantitatem pluribus ſeriebus Geometricis ęqualem inuenire in linea pr.18. ibid.
Datam quantitatem ita ſecare, vt duplicis ſeriei idem ſit terminus pr.19. ibid.
Series harmonica, vide logarithmus.

Series corporum proportionalium.

Seriem continuam proportionalium corporum etiam diſſimiliom inuenire pr.61. 681
Seriei corporum proportionalium corpus æquale ponera pr.62. 682
Datum corpus in infinitam ſeriem corporum diſtribuere pr.63. ibid.

Series numerorum.

In ſerie continua proportionalium, qui quadrati ſui cubi numeri pr.24. 175. & pr.25. 176
Vide numerus. Proportio Geometrica, Arithmetica, Harmonica. Differentia, Madia, Extrema, Tertia, Quarta, Ratio.

Similitudo.

Simies figuræ quænam? def.1. 132
Quæ ſuperficiea planæ non rectilineæ ſimiles def. 1. 660. Vide ſuperficies.
Similem alteri cuicumque ſuperficiei ſuperficiem ponere pr. 1. 661
Similia triangula in proportione duplicata crurum homologorum pr.20. 133
Dato rectilineo conſtituere rectilineum ſimile maius, aut minus iuxta datam proportionem pr.27. 312
Quæ corpora non planis contenta ſimilia, & ſimilis poſitionis def.2. 660
Circuli, qui arcus parallelorom ſimiles auferunt quinam ſiot? pr.17. 378. & pr.19. 379
In rectangulo à normali facta triangula toti, & inoicem ſunt ſimilia pr.8. 138
Quæcumque quatuor corpora ſimilia ſunt, vt latera ad inuicem pr.14.Cor. 815
Omnia corpora ſimilia triplicatam habent laterum, ſeu diametrorum rationem, ſed duplicatam baſium pr.55. 680
In conoide hyperbolico õnes hyperbolæ parallelę ſunt ſimiles pr.21. 443. & 442. Coroll. etiam ellipſes.
At parabolę axi parallelę ſimiles, & æquales in parabolico pr.16. 441
Ellipſes parallelę in conoide parabolico ſunt ſimiles pr.15. ibid.
Omnes ſectiones parallelæ ſunt ſimiles ellipſes in ſphæroide pr. 11. 439

Similes numeri plani.

Plani qui ſimiles pr.13. 173
Solidi qui ſimiles pr.14. ibid.
Plani ſimilea non ſunt inter quos medius proportionalis non cadat Cor.1. 174. nec ſi ab vnitate alter menſuretur Cor.2.
Nec quotom vnus eſt quadratus alter non Cor.3.
Inoentio non ſimilium numerorum Cor.4. 174
Inuentio ſimilium numerorum planorũ p.17. 174

Simplex.

Numerus ſimplex non ſimplicem multiplicans, quem numerum generet? pr.14. 98
Non ſimplex verò multiplicans non ſimplicem, quid generet? pr.15. 99
Simplicium multiplicatio pr.16. ibid.
Non ſimplicium multiplicatio pr.17. ibid.

Sinus.

Sinus in tabulis non repertos emendare pr.14. 465
Sinus complementi primi ad ſecundi ſecantem, vt ſinus complementi huius ad ſecantem primi pr.26. 478
& inuerſè in Cor.1. & permutatè Cor.2.
Vt inueniantor ſinos addendo, & ſubducendo pr. 23. Cor. 1. 2. & 3. 321
Sinus quid? def. 2. 307. complementi, totus, quinam? ibid.
Verſus ſinus def.3. 307
Rectus ſinus def.2. ibid.
Sinus arcuum in tabulis non repertorum proximè dare pr.15. 465
Quadrata ſinus complamenti, & ſinus recti æquantur quadrato radij pr.11. 312
Quomodo inueniatur ſinus complementi Cor.1. & ſinus varſus. 312
Rectangulum ex duobus ſinubus, vt vno crure, & chorda intercepta, cui æquetur pr.14. 555
Sinum verſum ſine extractione radicis quadratę inuenire Cor.pr.17. 318
Dimidium ſinus totius ſe habet ad ſinum arcus dimidium, ita ſinus complementi ipſius ad ſinom arcus pr.18. 319
Sinum duplicis arcus ſine extractione radicis quadratæ inuenire, vel è contra Cor.1. & 2. 319
Sinua ex chordis eaquirare pr. 22. Cor. 320
Per ſolam additionem, & ſubductionem aliquos ſinus inuenire 321. & ſeq.
Sinus minutorum reperire pr.16. Cor.3. 314
Sinus Gr.45. eſt medium proportionale inter ſinum totum, & dimidium eius pr.18. 337
Vide Rectangulum, Triangulum ſphæricum ſecans, tangens, logarith. chorda.

Solidi numeri.

Solidi numeri definitio def.2. 167
Compoſitus numerum aliquem multiplicans ſolidum facit pr.8. 178
Solidi numeri ratio laterum triplicata pr.12. 172
Solidorum ratio eſt, quæ alicuius cubi ad cubum pr.16. 174

Solidum.

Solidum qud ſit def. 1. 597
Similes ſolidæ figuræ quænam? def. 2. 597
Æqualea quænam? def 3. ibid.
Similia ſolidi, & plaui def. 5. 167

Species.

Speciea figuratum conicatum quę? Cor 2. 396

Sphæra.

Sphæra quid ſit def. 1. & eius centrum def. 2. 354
Sphæram, ſphæroidemque etiam quadriforme in partea datas ſecare pr. 46. 677
Sphæræ ſphæroidi corpori parabolico, vel hyperbolico recto aliud ſimile corpua fabricare pr. 5. pag. 663
Sphæra cui cono æquetur? pr. 43. 644
Conus æqualis ſphærę maximi ſphæræ circuli habet quadruplam baſim Cor. pr. 43. 645
Vide fruſtum.
Sphæra cui rectangulo ſolido æquetur? pr. 46. 646
Sphæræ ſunt ad inuicem in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum pr. 47. pag. 647
Pluras ſphęras in vnam ſphæram colligere pr. 54. pag. 680
Sphæræ cubum æqualem ponere pr. 23. 667

Sphæræ ſuperficies.

Quęcumque ſphæræ ſuperficiea quadrupla eſt circuli, qui in ea maximua ſit pr. 43. 689
Sphęricam ſuperficiem in planas ſuperficies per circulos diuiſam in planum extendere p. 34 591
Sphæricam ſuperficiem eandem cylindrica ſuperficie ſectam extendere pr. 35. 592
Vel à plano non pendiculari orizonti p. 36. 592
Sphæricam ſuperficiem in annulares planas ſuperficies diſtribuere pr. 26. 588
Etiam ſi à triangulari ſuperficie ſecta ſit pr. 27.
Etiam à quatuor ſuperficiebus in quadratum poſitis pr. 28. 589. & etiam oblongum pr. 29. & etiam alio modo pr. 30. 590
Etiam ſi angularibus ſuperficiebus ſecta ſit propoſ. 31. ibid.
Sphærę ſuperficiem proportionaliter ſecare propoſ. 48. 571
A ſphęrę ſuperficie abſcindere portionem æqualem ſuperficiei dati circuli pr 49. 571
Superficiea ſphęræ minor dimidio portionis, cui circulo ęquetur pr. 46. 570. at ſi ſit maior, cui pariter æquetur pr. 47. ibid.
Sphæræ circumſcriptum corpus, cui parallelepipedo æquetur pr. 45. 646

Sphæroidea.

Sphęroides quid? def. 1. 439
Sphæroidi Conum æqualem exhibere pr. 3. 670
Quæ de ſphæroide dicuntur, verificatur de ſphęra Cor. 2. 639
Sphæroidis, vel conoidis ſuperficiem in planum extendere pr 37. 593. & pr. 40. 595
Sectum ellipſibus æqualibus pr. 38. 594
& etiam inæqualibus pr. 39. ibid.
Sphæroidis Elliptici ſuperficies, vt ſe habeat ad ſuperficiem ſphęrę pr 36. 563
Cui ſuperficiei ſphęricę æquetur pr. 37. 564
A ſphęroide, vel conoide imperatam partem auferte alteri in eo æqualem pr. 49. 6 8
Sphæroides, Conoideſque habent triplicatam rationem diametrorum dummodo ſint ſimilia corpora pr. 55. Cor. 680

Sphęrica triangula.

Sphęrica triangula, vide triangula, tangentea, ſecantea, ſinus, arcus, logarithmoa.
Quatuor fondamenta regulæ facillimæ ad ſoluenda ſphęrica præcipuè per logarithmoa primum pr. 44. 482. ſecundum pr. 45. 483. tertium propoſ. 46. quartum pr. 47. 484
Regulæ facillimę ad ſoluenda rectangula ſphærica per logarithmos breuiſſimè per ſinua, & tangentes pr. 4 Cor. 484
Vide angulus, ſphęrici anguli.

Spiralis linea, ſpatium corpua.

Spiralis linea quænam def. 1. 290
Lineam ſpiralem ducere pr. 9. ibid.
Spiralis linea æquat ſemicirculum pr. 12. & 13. 292
Eſt linea infinitis circulorum ſegmentis conflata pr. 12. ibid.
Spatium primum ſpirale eſt ad circulum ſuum, vt 1. ad 3. pr. 54. 545
Circulos ſecundæ ſpirę ſe habet ad ipſam, vt 12. ad 7. pr. 56. 546
Spirę tertię ſpatium eſt, vt 19. ad 27. ad circulum ſuum pr. 58. 548
Spirę primę, ſecundę, tertię ſpatia, vt ſint ad inuicem pr. 59. ibid.
Spiratum aliarum inuenire proportiones Cor. 548
In ſpiralibua ſpatijs, vt ſectorea ſe habeant circumſcripti, vel inſcripti in exord. 544
Spirale corpus quodcumque mutare in cylindrum pr. 34. 674
Corpua ſpiralia altitudinia, cui cylindro ęquetur pr. 57. 653
Etiam ſi in plures ſpiras torqueantur pr. 57. Coroll. 654
Spiralis baſis corpus, cui cylindro ęquetur pr. 28. 654. & ſingulę partes, etiam ſi ſecundę, & tertię ſpirę iniaum Coroll. 1. & 2.
Corpua ſpirale baſi, & altitudine creſcens, cui parti cylindri ęquetur pr. 59. 655
Corpus eiuſdem rationis, ſed decreſcena 655. Coroll. 657
Secunda ſpiralia corpora baſi, & altitudine, quam cylindri partem ęquent pr. 60. 658
Superficies baſi normalea ſpiralium corporum, quam proportionem ad cylindri ſuperficiem dicant pr. 39. 674

Stereographia.

Circulus ſtereographicè proiectua linea ſit pr. 4. 454. vt proijciatur pr. 5. partea eius proiectas inuenire pr. 6. quam proportionem ſeruent p 7.
Circulus parallelus plano proiectus ſtereographicè ſit maior pr. 8. 454. & ſubcontrarius, item ſit circulus pr. 9.
Circulum proijcere, polum eius, & centrum pr. 10. 456. Eius partea inuenire quatuor modis pr. 11. 456. & pr. 13. 14. & 15. 457
Partes proiecti circuli, quę maiores pr 16. 458
Linea Stereographicè, vt proijciatur pr. 1. 453 & quęnam proiectrices def. 2.
Punctum ſtereographicę proiectionis quid? def. 1. pag. ead.
Planum ſtereographum quid? def. 3. ibid.
Lineę in quas lineas ſtereographicè proiectę tranſeant pr. 2. 443. partes, vt augeantur pr 3.
Superficiem rectangulam proijcere ſtereographicè pr. 18. 459
Stereographia inuerſa, & recta pr. 16. ibid.
Lineę ſtereographicè proiectę muſicè decreſcunt Cor. 460

Qui circuli proiecti ſtereographicè in ellipſes abeant pr.18. 460
Circulum quemcumque proijcere Cor.1. 461. & quamlibet etiam figuram Cor.2.& 3. & partes circuli Cor.4. & pr.20.
Dato diametro circuli, & diametro ellipſis proiectæ ſtereographicè alterum diametrum coniungatam inuenire pr. 21. 462
Stereographia à quo naſcatur pr.3. 445

Subductio.
Subductio, vt fiat pr.8. 97
Qui numeri poſſint, & ſint ſubducendi p.6.& 7. 97
Minutias ſubducere pr.13. 211

Subſtitutio laterum.
Dato triangulo obtuſo pro illo acutum aſſumere pr.48. 485
Trianguli ſphęrici anguli in latera, & latera in angulos permutare pr.49. 486
Datis lateribus reperire angulos, & datis angulis latera pr.50. 486
Sinus loco primo ſubſtituere radium in regula aurea pr.51. 487
Loco primo ſecantis ſubſtituere radium in regula aurea pr.52. ibid.
Loco primo tangentis radium ponere pr.53. ibid.

Subtenſæ.
Portiones diametri ſubtenſæ æqualibus arcubus inæquales pr.24. 382
& ſubtendentes arcus ęquales ſi alios arcus ſubtendant, illi arcus erunt inæquales pr.25. 382.
etiam ſi proportionaliter diminuantur in Cor.

Summa.
Summa mediorum quatuor Arithmeticorum eſt æqualis ſummæ extremorum pr.1. 237
At trium duplum medij æquat ſummam extremorum pr.2. 238

Superficies.
Superficies eſt quid reale indiuiſibile reduplicatiuè pr.9. 9
Inadæquatè accipitur à mathematicis pr.11. 11
Et vt negatio pr.12. ibid.
Definitio eius def.3. 16
Termini eius def.6. 17
Quænam plana ſit? def.7. ibid.
Superficias planas corporum augere, vel minuere pr.3. Cor. 551. Vide conus, pyramis, & cęt.
Quorum corporum ſuperficies ſit, vt axis baſis ad circumferentiam baſis pr.2. 661
Superficiei ad corpus nulla eſt ratio pr.4. 109

Superparticularis.
Superparticularis proportio pr.7. 109
Superpartiens proportio pr.7. ibid.

T

Tabulæ.
TAbulas logarithmicas condere, vide logarithmus.
Tabulam ſinuum ordinare pr.16. 314
faciliùs Cor.1.
Tabulæ tangentium conſtructio Cor. pr.25. 322
Sinus complementi radius, & ſecans arcus tres ſunt continuè proportionales pr.26. ibid.

Tactus circulorum.
Circuli in ſphęra quando ſe tangant propoſ.2. pag. 373
Maximus tangens minorem in ſphæra, & ſecans ei parallelum huius tangentibus maximis circulis obliquus eſt, & quibus magis obliquus propoſ.23. 381
Quę cadat linea in contactum circulorum interius tangentium pr.6. 65
At ſi exterius contingant pr.7. 66
Circulus tangit alium in vno puncto pr.8. ibid.
Tactus linęę, & circuli quinam? def.2. 63
Circulorum quinam? def.3. ibid.
Sphæra vnico puncto planum tangit pr.1. 355
A centro ad contactum ſphæræ ducta tangenti plano normalis pr.2. & è contra in Cor. 345
Segmentum arcus duos circulos tangens ducere pr.6. 289
Tactus circulorum in ſphęra quinam? def.9. 354

Tangens.
Tangentes per ſolam additionem 45. graduum reperire pr.27. Cor. 323
Tangentes, & ſecantes multæ additione reperiuntur, vel ſubductione pr.28. Cor. ibid.
Quę tangentium à dato puncto ſit maior, & minor maxima minima, vel ęqualis pr.22. 72
Quę ſint tangentibus parallelę Cor.5. 76
Tangentis quadratum, cui rectangulo ęquetur pr. 36. 80
Quę ęquales, & quot? Cor.2. 81
Quę tangat? pr.37. ibid.
Sinus rectus eſt ad ſinum complementi, vt ſinus totus ad tangentem pr.24. 322
Tangens, vt reperiatur pr.24. Cor. ibid.
Tangens arcus, radius, & ſinus complementi ſunt tres continuè proportionales pr.25. 322
Tangentis quadratum, cui rectangulo ſecantis ęquetur pr.36. 80
Tangentes quę ad verticem diametri ductę pr.18. pag. 70
Tangentem ducere à dato puncto pr.19. 71
Quinam circuli tangentes ęqualiter ſint inclinati pr.18. 377
Circuli tangens def.2. 63

Tangentes ſectionum Conic.
Portiones diametri interceptę inter verticis tangentem, & applicatam in hyperbola, & ellipſi reſpondent proportione pr.13. 399
Lineas tangentes in ſectionibus conicis ducere pr.15. 400
A tangentibus vertice applicatis, centroque portiones diametri, quę rectangula efficiant, & vt inter ſe ęqualia in parabola pr. 16. ibid.
Et in Ellipſi, & hyperbola pr.17. 401. & pr.18. 19. & 20. 402. & pr.21. 403
Quod planum tangat conum pęnes rectam lineam Quod diametrum ſectionis ſecet pr 21. 398
Tangens conum in ſectione plani paralleli ſectioni ſecat Hyperbolam in centro pr 43. 416
In Hyperbola, vel Ellipſi à centro per contactum ducta bifariam diuidit parallelas tangenti propoſ.28. 408
Hę ductę per contactus habent naturam diametri Cor.1.409. quod de circumferentia circuli verificatur Coroll.2.
Quæ linea dicatur tangens pr.11. 398
A tangente, & applicatę ad contactum, & vertice partes diametri interceptę æquales pr.12. ibid.

Terminus.

Terminus.

Terminus quid? def.13. 28
Terminus progreſſionis geometricę quinam? def.3. peg. 256
Aggregata, & termini, vt ſe habeant pr.6. 258
Series duę proportionales ad eundem terminum peruenientes, vt proportione ſe habeant pr.6. 258. & ab eodem termino incipientes pr.7. 259
Omnis proportionis termini per eundem numerum multiplicati faciunt numeros in eadem proportione pr.8. 246
Terminus harmonicos interſerere in lineis pro- poſ.12. 267
Terminus primus Harmonicos, vt ſit ad ſummam differentiarum pr.13. 268
Terminus minor, vt ſit ad ſummam differentiarum harmonicarum pr.14. ibid.
Termini harmonici, qua proportione inuicem gaudeant pr.15. ibid.
Termini Harmonici quando, ſint irrationales pr. 16. 268. vide Harmonica.
Proportio quot requirat terminos def.11. 114
Termini Harmonici vltra omnem aſſignatam quãtitatem diminui poſſunt pr. 21. 269

Tertium proportionale.

Tertiam proportionalem reperire datis duobus lineis pr.14. 141
Tertiam rationem proportionalem duabus datis rationibus inuenire pr.41. 283
Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire propoſ.31. 513
Duobus datis corporibus tertium proportionale inuenire pr.58. 681
Duobus numeris tertium proportionale inuenire pr.23. 225

Tetraedrum.

Tetraedrum conſtituere, & ſphęra complecti, & cęt. pr.6. 690

Theorema.

Theoremata quid? 24

Totum.

Si totum ad totum, vt ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum tale eſt pr.11. 158
Vide ſegmentum, pars ſecare.

Trapezium.

Trapezia quid? def.33. 30
Trapezia proportionalia quę? pr.14. 506
Trapezia inter parallelas, & ſuper eaſdem, vel ęquales baſes ſunt ęqualia pr.11. 506
Trapezia ęquentur inter paralleles, & ſuper baſes ęquales pr.1. Cor. 506
Trapezia inſcripta cylindro, quibus trapezijs planis ęquentur pr.1. 572
Trapezia triangulis ęqualia pr.32. 51
Trapezia harmonicis lineis intercepta habent proportionem duplicatam baſis ad baſim pr.11. pag. 498

Triangulum.

Triangulum conſtituere ęquilaterum pr.1. 33
Ex tribus datis pr.2. 34
Super eandem baſim pr.3. ibid.
Diuidere pr.6. ibid.
Trianguli partes, quę ęquales? pr.13. 37
Iſoſcelium infra, & ſupra baſim anguli ęquales pr.14. ibid.
At ſi ſit rectus verticalis æquales illi ſemirecti Coc.3. 40
Æquilaterum habet omnes angulos 38, Coroll. & ⅔ vnius recti 23. Cor.3. 40
Crura in aliud punctum conuenire nequeunt propoſ.16. 38
Tres interni anguli duobus rectis ęquentur pr.17 39. & ideo duo minores Cor.6. 40
Et externus Internis duobus oppoſitis pr.17. 39 & ideo vnico maius eſt Coroll. 40
Triangula habent omnes angulos omnibus ęquales Cor. 2. ibid.
Si vnus rectus, reliqui acuti Cor.9. 40
Crus maius maiorem angulum expoſcit pr.18. 41 & è contra pr.19. 41
Duo maiora reliquo pr.20. 42
Ducta ab extremis baſis intra, cruribus minores pr.21. 42
Quę triangula ęqualia pr.27. 45. & pr.22.23. 33
Ea efficere pr.c4. 43
Quę baſim habeant altero maiorem pr.25. ibid.
Quę angulum verticalem maiorem pr.26. 44
Trianguli rectanguli per vertices circulus tranſit ex dimidio eius baſis, vt centro Cor. 77
Trianguli in circulo quinam ſint anguli acuti?
Crura circa circulum, vt ſe ſupereent Coroll. 1. & 2. 85
Triangulum iſoſceles conſtituere, cuius anguli ad baſim dupli ſint reliquo pr.1. 87
Triangula ęqualia ſe referunt, vt baſes p.1. 133
At eiuſdem baſis, vt altitudines Cor. 133
Triangulorum, ęquiangulorum latera proportionalia, quę, & quę homologa pr.4. 135
In triangulo quocumque crura ſe referunt, vt ſinus pr. 20. 467
In omni triangulo ſumma duorum ſinuum ad differentię medietatem, ita tangens ſummę medietatis angulorum ad differentię dimidię tangentem pr.21. 468
In omni triangulo ſegmentum cruris ad ſeg. baſis, ita baſis ipſa ad aggregatũ crurum pr.27.468

Triangulum ſphęricum.

Triangulum ſphęricum quodnam? def.1. 360
Cuiuſcumque trianguli ſphęrici trea anguli duobus rectis maior eſt pr.5. 361
Angulus quicumque ſphęricus ęqualis angulo inclinationis planorum pr.6. 361
Anguli arcuum ęquantur angulis ſubtenſarum in ſe augendo, ęquando, minuendo pr.7. & è contra in Cor. 362
In omni triangulo ſphęrico arcus quicumque minor ſemicirculo pr.8. 362
In omni triangulo ſphęrico duo arcus tertio maiores ſunt pr.6. 363
Et tria latera circulo ſunt minora pr.10. 363
Quę triangula baſim baſi ęqualem habeant pr.11. quę maiorem pr.12. 363
Quæ habeant angulum verticalem maiorem propoſ.1. 364
In omni triangulo ſphærico rectangulo ſinus angulorum ſunt in eadem ratione, ac ſinus oppoſitorum crurum pr.63. 490
Quæ omnes angulos æquales habeant pc.14. 364
Quæ latera æqualia pr.15. ibid.
Anguli æquales arcus ſubtenſos habent pr.16.364 & è contra pr.17.
Anguli maiores ſubtenſum arcum maiorem requirunt pr.18. 365
Qui anguli æquales pr.19. ibid.

Quando

Quando crura triangulorum ſphæricorum ſemicirculum æquent, ſuperent, vel minus ſint propoſ.20. 365
Quæ triangula æquiangula habeant, & latera correſpondentia æqualia pr.21. Ibid.
Triangula ſphærica ſoluere per logarith. Vide Logarith.
Quæ triangula æqualia pr.22. 366
& pr.23. 24. & 25. 367
Quę in triangulo ſphærico cognita securè ad cognitionem totius trianguli inducant pr.22. 366
& pr.23. 24. & 25. 367
Duo anguli ſphærici ad baſim duobus rectis æquales, vel maiores, vel minores talia faciunt crura reſpectu ſemicirculi pr.16 368. & è contra pr. 17. 369
Duo crura quadranti æqualia in angulo verticali baſis polum habent pr.16. 369
In rectangulo ſphærico quinam anguli ſint acuti, quæ crura quadrante minora? pr.18. 370
Correſpondentia angulorum, & laterum in triangulo ſphærico rectangulo 370. Cor. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. ſecundùm diuerſos reſpectus, quos habent inuicem.
In Iſoſcele ſphærico quando anguli ad baſim ſint acuti, vel obtuſi, vel recti? pr. 29. 371
In triangulo quocumque ſphęrico quando anguli ſint obtuſi omnes, vel omnes acuti? Cor. 1. & 2. pag. 361. Vide Tangens, radius, ſecans, ſinus, rectangulum, obliquang.

Triangula inſcripta conicis.

Triangula coni inſcripta, quibus triangulis planis æquentur pr.16. 581
Triangulum maximum ellipſi inſcribere p.20. 533
Quæ triangula in ellipſi ſint æqualia pr.21. 533
Quorum ſi vnum maximum aliud quoq; Cor. Ibid.
Triangulum extra parabolam tangentibus factum eſt, vt 4. ad 3. ad figuram totam conecauam pr.34. 539
& ideo ſubduplam parabolæ Cor. 539
In Hyperbola quænam triangula æqualia? propoſ.43. 542
Triangula harmonicis lineis effecta ſunt æqualia pr.10. 267
Secta ab incidente diuiduntur crura in altitudines, ſeu partes harmonicas pr.11. 367
Quæ triangula maxima ſint ęqualia in hyperbola pr.45. 542

Triangulum quoad aream.

Triangulo, cui deficiat vertex per parallelam vni lateri partem deſtinatam ſubducere pr.24. 510
Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas à dato puncto in eius latere p.15. 511
Per parallelas cruri triangulum in partes deſtinatas ſecare pr.26. ibid.
Triangulum in partes muſicas ſecare pr.10. 498
Aream cuiuſlibet trianguli in parallelogrammi aream tranſformare pr.1. 503
etiam ſi parallelogrammi, quod & habeat angulum datum, & latus datum. Vide area.
Inuenire lineas proportionales in eodem ordine, ac ratione, vt triangula, in quæ figura diuiſa ſit pr.38. 517

V

Vertex.

Vertex coni def.3. 390
Vertex ſectionum coni def.13. 391

Vmbelicus.

Parabolæ vmbelicum aſſignare pr.22. 404
Ellipſis, & hyperbolę vmbelicũ aſſignare p.22. 404
Inclinatæ ad vmbelicos angulos cum contingente faciunt æquales pr.23. 405
Inclinatis ad vmbelicos parallela à centro ad contingentem æquatur dimidiò tranſuerſi axis propoſ.24. 406
Inclinatæ ad vmbelicos à contactu in ellipſi ambæ æquales axi tranſuerſo; in hyperbola tranſuerſo axe maior minorem ſuperat pr.25. 407

Vngula.

Plana inſcripta vngulæ cylindricæ, cui ęquentur? pr.15 556
Quadratum ex diametro baſis, cui vngulæ cylindricæ non ſit maius? pr.16. Ibid.
& rectangulum ex partibus, quibus partibus eiuſdem? Cor. pr.16. 557. nec poteſt eſſe minus pr.18 & idem de partibus in Cor. 557
Plana circumſcripta vngulæ, cui æquetur? p.17. 557
Superficies vngulæ æquat quadratum diametri pr.19. 558. & partes rectangulis ex diametro, & eius portionibus eius Cor.1.
Omnia plana vngulam ambientia exceptis triangulis lateralibus ei ęquantur, & ſingula ſingulis partibus Cor.2. & 3. pr.19. 558
Superficies vngulæ, cuius altitudo diameter, vt ſit ad alias vngulæ ſuperficies? pr.21. 559
Quæcumque ſuperficies vngulæ, cui rectangulo æquetur? pr.22. & eius portio in Cor.2. 559
Portionem æqualem portioni ſuperficiei vngularis abſcindere pr.23. 560
Vngularem ſuperficiem ſecundùm datam rationem partiri pr.20. 558. Vide ſuperficies.
Segmenta ſuperficiei vngulæ in qua proportione ſint ad inuicem pr.20. Cor.1. 558
Superficies vngulę, vt ſit ad ſuperficiem cylindri? pr.20. Cor.2. ibid.
Vngulam, & inuolucrum eius in æqualem pyramidem transfundere pr.36. 672
Vngula ſolida, quæ pars ſit cylindri, ex qua naſcitur? Cor.1. 673
Vngula quę pars ſit cylindri, in quo eſt? Cor.1. 673
Vngula cylindrica eſt octaua pars ſphęrę, vel ſphæroidis quadriformis pr.49. 648
Vide inuolucrum.

Vnitas.

Vnitas quid? 92
Vnitas numerica eadem, ac indiuidualis pr.1. 13
Quid ſit? pr.2. 14
Fundatur in quantitate continua pr.3. Ibid.
In quantitate intentionis pr.4. Ibid.
In quantitate ſucceſſiua pr.5. Ibid.
Non diſtinguitur à re vna realiter pr.6. Ibid.
Sed ei addit methaphyſicè aliquid pr.8. 15
Nullam importat differentiam pr.9. 16
Sed per differentiam dignoſcitur pr.11. Ibid.
Idem ac numerus obiectiuè pr.12. 17
Non præſcindit ab ea natura pr.16. ibid.
Datur conceptus communis eius pr.15. Ibid.

Z

Zetema.

Zetema quid ſit? 25

INDEX TRIGONOMETRICVS

Triangula plana rectangula.

Data.	*Quæſita.*
Baſis, & Angulus aliquis ex acutis.	Latus oppoſitum angulo dato pr.3. 464 Latus adiacens angulo dato pr.4. ibid. Angulus alter pr.5. ibid.
Baſis, & Latus aliquod.	Angulus oppoſitus alteri dato pr.6. 464 Angulus adiacens lateri dato pr.7. ibid. Latus alterum pr.8. Ibid.
Latus vnum, & Angulus adiacens.	Crus alterum pr.11. 465 Baſis pr.9. 464
Latus vnum, & Angulus oppoſitus.	Crus alterum pr.11. 465 Baſis ps.10. 465
Latera duo.	Baſis pr.13. 465 Angulus quilibet acutorum pr.12. 465

Triangula plana obliquangula.

	Quæſita.
Latera duo Angulus oppoſitus.	Angulus oppoſitus alter reliquo dato lateri, qui debet eſſe prius ſpecie cognitus ex pr.7. pag. 137. pr.24. 468. & pr.32. 470 quo remanet notos. Angulus verticalis, qui eſt complementom duorum iam cognitorum, quo, & alio angulo ex cognitis angulis. Baſim perqolres ex p.13. 468
Latera duo Angulus verticalis.	Alter angulorum ad baſim pr.25. 469. & pr.33. 470 ex quo perquiritor. Baſis ex pr.23. 469
Duo Anguli. Crus oppoſitum alteri eorum.	Crus alterum oppoſitom ex pr.23. 468. & p.32. 470 Baſis ex iiſdem, nam ex duobus angulis tertius eorum complementom conoſcitur ex quo baſis nempe alalterum erus oppoſitum datorum angulorum complemento.
Duo aogoli Baſis.	Aogulus verticalis ex pr.17. Cor.9. pag.40. com ſit eorum complementum. Crus oppoſitum alteri angulorum, quod elegeris, nam ex duobus angulis tertius eorum complemẽtum notum euadit, cui opponitur Baſis vnde eruttur ex pr.23. pag. 468

Data.	*Quæſita.*
Tria crura.	Anguli omnes pr.27. 469 & pr.34. 471
Tres Anguli.	Nihil colligitur in rectilineis cum omnia data ſint eiuſdem rationis.

Obliquangulum ad duo rectangula reducere pr.26. pag. 469. & pr.34. 471

Triangula ſphærica rectangula.

Data.	*Quæſita.*
Baſis. Angulus obliquus adiacens baſi quadrante minori ex pr.25. pag. 368.	Crus opoſitum angulo dato pr.3. pag. 472. & logarithmicè pr.44. caſ.2. pag. 482. & pr.42. pag. 482 Crus adiacens angulo dato ex pr.12. vel 13. pag. 475. & logarithmicè, pr.47. caſu 1. & 2. pag. 484 Angulus obliquux alter baſi adiacens ex pr.14. vel 15. pag. 475. & logarithmicè pr.47. caſu 5. pag. 484
Baſis. Crus vnum, quæ non debent excedere quadrantem ex pr.20. 367	Angulus oppoſitus ex Cor. pr 3. pag. 472 & pr.28. & 29 pag. 479 & logarithmicè pr.46 caſu 2. 484 Angulus adiacens lateri dato, & conformis datis ex pr.16. 17. pag. 476. & logarithmicè ex pr.46. caſu 2. pag. 484 Crus alterum ex pr.7. Cor. pag. 474 & pr.30. vel 31. pag. 479. & logarithmicè ex pr 45 caſu 1. pag. 483.
Latus vnum minus quadrante. Angulus oppoſitus obliquus. Baſis verò debet eſſe nota ſpecie quadrante minor ex pr.25. pag. 368	Crus alterum conforme dateis ex pr.18. & 19. 476. & logarithmicè ex pr.46. caſu 1. pag. 484. Angulus adiacens lateri dato & ei ſpecie cõformis pr.4. & 5. pag. 472. Cor. & pr.40. pag. 481. & logarithmicè pr.44. caſu 2. Baſis pr.36. & 37. pag. 480 & Cor. pr.3. pag. 472. & logarithmicè pr.45. caſu 3. pag. 483.
Latus vnum minus quadrante. Angulus adiacens obliquus. Baſis debet eſſe nota ſpecie quadrante minor ex pr.25. pag. 368.	Crus alterum ſpecie conforme datis ex pr.10 pag. 474 & logarithmicè prop.47. pag. 484 Angulus alter pr.4 & 5. pag. 472. & pr.38. & 39. pag. 491. & logarithmicè pr.44. caſu 2. Baſis ex 20. & pr.21. pag. 477. & logarithmicè 45. caſu 2. pag. 484.

Latera

Data.	*Quæſita.*
Latera duo, quæ ſint quadrante minora ex pr. 24. pag. 367.	Angulus oppoſitus, cuinis ſterum ex prop. 24. vel 25. pag. 478. & 10. Coroll. 474. vel logarithmicè pr. 47. caſu 3. pag. 484
	Baſis ex pr. 32. & 33. pag. 480 & pr. 6. pag 473. & logarithmicè prop. 47. caſu 4. pag. 484.
Anguli duo acuti, vt crura ſint minora quadrante ex propoſ. 28. pag. 370.	Latus oppoſitum alteri eorum ex pr. 34 & 35. pag. 480. & Coroll. pr. 5. pag. 473. & logarithmicè lo- uertendo caſum 2. pr. 45. pag. 483.
	Baſis ex pr 22. pag. 477. & logarithmicè pr. 46. caſu 3. pag. 484.

Cognoſcitur verò baſis quadrante minor ex pr. 28. & Coroll. pag. 370.

Data.	*Quæſita.*
Duo Anguli acuti, vel vnus ſaltem, & Baſis minor quadrante.	Angulus verticalis prop. 79. pag. 493. & 61. pag. 489.
	Alterutrum crurum pr. 79. pag. 493. & 61. pag. 489.
Duo Anguli. Crus alteri eorũ oppoſitũ ſi reliqua crura nota ſint ſpetie ex pr. 22. pag. 366. nēpe aut maiora, aut minora quadrante.	Crus alterum oppoſitum pr. 55. pag. 480. & prop. 66. pag. 490.
	Angulus verticalis pr. 70. pag. 491. & pr. 59. pag. 488
	Baſis, ſi alterum crus ſit ſpetie notum pr. 57. pag. 488. & pr. 78. pag. 493.
Crura tria.	Anguli omnes, tamquam ſi eſſent verticales prop. 82. pag. 494.
Tres Anguli.	Crura tanquam ſi eſſent baſes pr. 69. pag. 491.

Triangula ſphærica obliquangula.

Data.	*Quæſita.*
Duo crura, & Angulus oppoſitus vni quadrante minora, ſi anguli reliqui ſint ſpecie cogniti, ex prop. 24. pag. 367.	Angulus oppoſitus alteri pr. 54. pag 487. & 65. pag 490
	Baſis pr. 56 pag. 488. & pr. 73. pag. 492.
	Angulus verticalis p. 58. pag. 488. & pr. 76. pag. 493.
Duo crura Angulus verticalis acutus ſi quadrante, ſingula crura ſint minora, vt ex pr. 23. pag. 567.	Alteruter angulorum ad baſim pr. 60. pag. 489. & pr. 75. pag 492
	Baſis pr 60. pag. 489. & pr. 72. pag. 492.

Reducere obliquangulum ad duo rectangula. datis tribus lateribus obliquanguli ſphærici pr. 81. pag. 494. & pr. 54. pag. 484.

Commutare angulos in latera, & latera in angulos pr. 49. pag. 486. & pr. 50 ibidem.

Dato triangulo obtuſo ſubſtituere acutum triangulum pr. 48. pag. 486.

Vice ſinus primo loco ponere Radium propoſ. 51. pag. 487.

Vice ſecantis primo loco ponere Radium prop. 52. pag. eadem.

Vice tangentis ponere primo loco Radium pr. 53. pag. eadem.

APPENDIX
AD EVCLIDEM
ADAVCTVM
GVARINI GVARINII
C. R. THEATINI.

Quoniam multa,quæ ad cubationē corporum faciunt,quæ à nemine tacta, & animaduerſa ſunt,mihi poſt impreſſionem libri occurerunt, quæ ne dum erant vtilia,ſed penè neceſſaria, & Stereometriæ practicæ deficiebant maximè concamerationum quadratarum cuiuſcunque generis, volui ijs plurimis corporibus,quæ cubationi ſubieci in noſtro hoc opere,hæc omnino illis ſubnectere,vt iam nullum ſit corpus ſub aliqua certa ſuperficie comprehenſum,quod corporum cuborum menſuris non ſit ſubactum, & mathematica certitudine illius menſuræ penitus non innoteſcant.

EXPENSIO I.

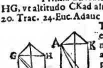
De quibuſdam, quæ Libri tractatibus ſubnecti queunt.

Hæc,quæ paſſim libro poterant adiungi, hic colligimus; quia dicendis ſunt neceſſaria; vnde tanquam quaſdam notiones prauias præmittimus.

THEOR I. PROPOS I.

Pyramides æquales baſes habentes invitem referuntur, vt altitudines.

SIT Pyramis CBDA, & Pyramis EIFG, quæ habeāt æquales baſes CBD, & EIF, dico eas Inuicem referri, vt altitudines. Probatur Priſma CBAKD eſt ad priſma EIFHG, vt altitudo CK ad altitudinem EH ex pr. 20. Trac. 24. Euc. Adauc. Ergo ex prop 18. Tr. 9. pr. 2. eiuſdem etiam tertia pars priſmatis CKADB erit ad tertiam partem priſmatis EHGIF, vt altitudo CK ad altitudinem EH; Sed pyramis CDBA, eſt tertia pars priſmatis CKAD ex prop 22. eiuſdem Trac. vt. pyramis GEIF eſt quoq; tertia pars priſmatis HEIG: Ergo erit pyramis CDAB ad pyramidem EIFG, vt altitudo CK ad altitudinem EH; *Hæc propos cum ſeq. 3. Tr. 24. inſerſeri poterit.*



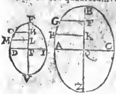
THEOR II. PROPOS. II

Omnes Ellipſes duæ ſiue rectæ ſiue non, ſiue altera ipſarum, habebunt applicatas ad partes proportionales diametri vt alter diameter ad alteram diametrum.

Sint duæ Ellipſes ABCZ & DEVI; ſintque applicatæ ad partes proportionales diametri V g. tertias lineæ HK, & GF: ſicut & in altera ML & ON dico quod vt eſt DP ad AQ ſic ſit ML ad HK & ita ON ad GF. Probatur DP quadratum eſt ad ML quadratum; vt rectangulum ex PV, & PE ad rectangulum ex LE & LV ex prop. 6. Trac 23. Euc. adauc. in Ellipſibus ac in circulis ob æqualitatem cum quadratis ex 35. Tr. 6. vt autem ex VP. & PE rectangulum ad rectangulum ex LE & LV ſic rectangulum ex ZQ, & QO ad rectāgulum ex LK & KB ex effectione: ſiquidem diuiſimus diametrum VE & LB in partes proportionales à quibus deduximus applicatas: vt autem ZQ & QB ad rectangulum ZK & KB, rectangulum; ſic quadratum AQ ad quadratum HK vt pr. 6. Euc. adauc.

S Tr. 23.

Tr. 23. ergo ex 16. l. 5. Trac. 9. p. 2. DP quadratum erit ad ML quadratum vt AQ quadratum ad HK quadratum: quare cum quadrata omnia ſint

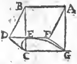


figurę, ſimiles erit etiam lateraDP ad ML, vt AQ ad Hk. Quamobrem permutādo erit etiam DP ad AQ vt ML ad Hk: & idē argumentum valebit dé alijs applicatis quadere vt eſt diameter ad diametrum ita erunt applicatę ad partes proportionales vnius diametri ad partes proportionales alterius quod & de circulo reſpectu, circuli ex prop. 44. Euc. adaue Tr. 10. & etiam reſpectu cuiuſcumque ellipſis patet vt ex hac propos Hęc prop Tr. 23. interōda eſt

THEOR III. PROPOS III.

Priſma eſt ad priſmaticum conum ellipticum inſcriptum, vt baſis rectangulum ad baſim ellipſim, ſi ſint eiuſdem altitudinis.

Sit priſmaticus conus, de quo pr. 26 Tr. 34. nēpe ABGEC. cui baſis ellipſis GEC, & priſma ABGD, quæ ſint eiuſdem altitudinis GB dico ea ſe referri, vt baſes, nimirum ABGEC priſmaticum conum ellipticum eſſe ad priſma ABGD, vt ellipſis baſis GEC ad rectangulum GD Pr. Nam conus priſmaticus ABGEC ex propol 26. Tr. 34. Euc. ad auc eſt ad conum eiuſdem baſis, & altitudinis

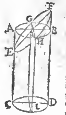


vt 3. ad 2. At priſma ABGD, eſt quoque ad pyramidem eiuſdem baſis, & altitudinis vt 3. ad 2. ex P. 2 Tr. 3. Quadere ita erit conus priſmaticus ad conum vt priſma ad pyramidem ſi ſint ambo eiuſdem baſis, & altitudinis. Vnde permutando ita erit conus priſmaticus ad priſma; vt conus ad pyramidem: ſed conus ellipticus ad pyramidem eſt vt ellipſis coni baſis ad rectangulum baſim pyramidis ex coroll. 3. pr. 27. eiuſdē. Ergo etiam conus priſmaticus erit ad priſma ex Tr. 9. p. 2. Prop 26. Euc adaue vt baſis coni priſmatici ellipſis ad baſim Priſmatis rectangulū.

THEOR IV. PROPOS IV.

Cylindrus obliquè ſectione ſectus æquatur Cylindro eiuſdem axis; cuius baſes ſint parallelæ.

Sit Cylindrus CEFD obliquè ſectus plano EGFH, dico æquari Cylindro ABCD, eiuſdem axis IL, parallelarum baſium AGBH & CD.



Probatur Nam ſunt duæ vngulæ; æquales GAEH deficiens dimidio Cylindri ſcaleni CEHCL, vt æquet medietatem AIHGCL paralleli Cylindri ABCD, & GHFD abundans alteri LGDFH ſcaleni vt æquet paralleli Cylindri medietatē alteram. Demo itaque GFHB abūdantem vngulam, & reſiduū fit medietas Cylindri parallelarum baſium GBHD, & hanc addo parti deficienti eodem prorſus defectū GAEH, & æquabuntur altera medietas alteri medietati, fietq; Cylindrus parallelarum baſium AGEHDC. Quod autem vngulæ prædictæ GAEH, & GFBH æquentur patet, quia EI & EF æquales ſunt vt ſemiaxes, & ſic ſemiaxes HI, & IB, anguli ad verticem I, æquales quoque. Quadere baſes BF & EA triangulorum AEI. IBF erunt æquales ex 15. Euc. adaue. idcirco, & vngulę ſuperficies ambientes GFBH, & GAEH erunt aequales: ſiquidem quod oſtenditur de altitudinibus baſi parallelæ normalibus EA, BF poteſt oſtendi de omnibus alijs; quæ parallelę illis, & æquidiſtantes ducantur; quare etiam trapezia ambientia erunt æqualia, ſi vngulis circūſcribātur nēpe ſuperficie prius obæqualem longitudinem laterum ſingulorum, & æqualem trapeziorum altitudinem ex pr. 12. Trac. 29. numero etiā ob æquales ſemicirculos GBH & GAH. quibus æquales baſes circumſcribi nequeunt; niſi aequales numero. Aequales quoque erunt AGH & GBH ſemicirculi, ſeu ſemiellipſes ſicut etiam GFH & GEH ob æqualem altitudinem & 27. Trac. 10 & ſimiles ob earum rectitudinem, & Prop 52. Trac 24 ſiquidem EI & AB ponuntur axes. Ergo vngulæ ipſæ ſolidæ GAEH & GFBH erunt æquales ex def. 3. Trac. 33.

THEOR V. PROPOS V.

Si binæ quantitates topqres poſſint inſcribi vel circumſcribi corporibus datam proportionem habentibus, quæ quantitates ipſas minus ſuperent omni data quantitate. erunt ipſæ quantitates circumſcriptæ vel inſcriptæ in eadem proportione, ac corpora.

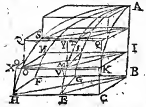
Sit quantitas ABE, quæ ſit primò circumſcriptibilis corporibus BV IY, &c. quę dicant eādem rationem V. g quæ 2. ad 3. ad corpora BX; & IZ circumſcribibilia quantitati BHA, & hæc poſſint multiplicari, vſque quo minus à quantitatibus circūſcriptibilibus differant omni aſſignabili quantitate. Dico eſſe quoque quantitatem BAE ad BHA quantitatem vt 2 ad 3.

Probatur ſi non eſt ABE ad BHA vt 2. ad 3. erit maior aut minor. quam poſcat ratio 2. ad 3. Sit primo minor. Aliqua igitur quantitas maior, quàm ABE erit ad BHA vt 2. ad 3. Sit itaq; maior ipſa quantitate ABE quantitas m. Circumſcribanturque BV: IY & cer nimirū tot corpora ipſi ABH, vt BX, IZ ipſi BHA; donec minus differant à quantitate ABE, quā, m, vt vult hypoteſis, & ideo ſint minora quam

m quan-

m quanritas,vt pote minus differentia à quan titate minori ſimulque vt vult item Hypoteſis ſiar ad inulcem vt 2. ad 3. Quoniam igitur corpora circumſcribētia BV, YI &c. ſunt minora, quàm m. erunt ad BHA circumſcriptam quantitatem in minori proportione quam m ad eandem BHA ſed m eſt ad BHA vt 2. ad 3. vt Eg decreuimus, Ergo corpora circumſcribentia BV IY ſunt in minori proportione ad BHA quàm m ad BHA ſc. quam 2. ad 3: Sunt autem corpora circumſcribentia

m



BV YI ad BX IZ ex hypoteſi vt 2. ad 3. Ergo quātitas circūſcribens BX YZ erit minor quā circumſcripta BHA ex Pr. 10. Tr. 9. p. 2. Euc a ſanc; ſiquidem eadem quantitas circum cribens BV YI habet minorem proportionem ad BHA ideſt minus de ea continet quam ad FX YZ ad quam habet eandem quam 2 ad 3, & continet eam vt 2. continet 3. Hoc autem abſurdum eſt; quia continens corpus cirumſcribens eſt maius contento,

Quod ſi dicatur ABE eſſe in maiori proportione ad BHA quam 2. ad 3. Erit igitur e, contra BHA ad ABE in minori proportione quam 3 ad 2 vnde idem reddit argumentum,

Hoc autem idem argumentum etiam inſcriptis facili negotio applicare poteris, ſi pro inſcribentibus quantitatibus circumſcribentes aſſumas,

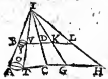
THEOR VI. PROPOS VI.

Trapezium, & ſuperficies rectè coni paralleli ſecti æquantur ſi altitudo vtriuſque ſit æqualis, & ambitus ſupremus, & infimus conici fruſti æquentur trapezij lateribus parallelis. Quod ſi baſes non ſint æquales, ſed proportionales, dicit trapezium ad ſuperficiem coni eandem baſium proportionem.

SIt fruſtū coni recti ATBV parallelis baſibus AT, BV: & Trapezium CHDL, cuius altitudo CD eadē quæ ſuperficiei fruſti conici TV: parallelum vero latus CH æquetur peripheriæ ATO, & parallelum latus DL peripheriç BV; dico DH trapezium æquari AT BV ſuperficiei fruſti conici.

Probatur ex propos 24 Tr. 31. Euc adauc ſuperficies ATOI coni æquatur ſectori TIA cuius arcus ſubtendens AC æquetur peripheriæ ATO; ſed ſector TCI, & prop 4. Trac. 30. çquatur triangulo rectangulo CHI cuius latus CH æquetur arcui AC, & altitudo radio CI: Ergo CIH rectangulum æquatur ſuperficiei coni ATI. Idem dicas de ſuperficiebus coni BVI: ſectoris BDI, & trianguli DLI. quod ſint æquales. Aufer itaque æquales ſuperficies coni BVI, & rectanguli DLI æquales inuicem ab æqualibus ſuperficiebus coni ATI, & rectanguli CHI, & reſtabunt çquales ATOVB ſuperficies fruſti conici, & Trapezium CHBL.

Sed iam pone CG eſſe minorem ſeu maiorem peripheria ATO, ſed tamen eſſe CG ad DK vt ATO peripheria ad BV peripheriā. Tūc dico eſſe Trapezium CG eiuſdem altitudinis TV ad ſuperficiem fruſti conici ATOBV, vt & CG latus ad ATO peripheriam. Nā CGDK trapezium eſt ad trapeziū CHDL vt CG ad CH baſes vel DK ad CL ex Prop. 14. Tr. 39. Sed Trapezium CL æquatur ſuperficiei conicæ AT BV, vt oſtendi CH baſis peripheriç ATO ex Theſi Ergo vt CG ad peripheriam, ATO ſic CK Trapezium refertur ad fruſti conicam ſuperficiem AT OBV.



EXPENSIO II.

EXp. 2. Euc adauc, corpus 8. Tr. 24. quod non dum cubationi ſubactum eſt nempe Spheram quadriformem cubauimus quod quidem corpus in fornicibus omnibus in vſu eſt: propterea que eius menſuræ erant Sterometriç admodum neceſſariæ. Verum quia animaduerti fornices ne dum ſuper baſim quadratam, ſed etiam rectangulam, & rhomboidalē vt elipticam, & ne dum circulum ſed & ellipſim etiam obliquam aliquando conſequi; nixus ſum omnia hęc corpora talibus baſibus ſita ellipſibuſque efformata ad cubationem redigere: quæ libro ſubnecto vt pote ſummoperè vtilia.

THEOR I. PROPOS VII.

Semiſphæra quadriformis vacuata parallelepipedo æquat ſemiſphæram quadriformem cuius circulus ſit ductus radio æquali altitudini parallelipipedi.

SIt Sphera quadriformis LEAFK, cui prębeat modulum circulus GMD, & ſit vacuata parallelepipedo EAIF Dico ſolidum reliſctum AIBELP eſſe æquale ſemiſphęrę quadriformi, cui prębeat modulum circulus, ductus radio IA, quæ eſt altitudo parallelepipedi.

Fiat circulus æqualis circulo GmD qui ſit TSQ e, circulus, & MTP e radio IA ducatur accomodando duplam e T in circulo MTSQ & ex O interuallo OT ducendo circulum ducto vero per ambo centra circulorum radio NQ etiam NO ſinus verſus æquabitur ſinui 7. D. vt coll ex Pr. 44. Tr. 10.

Probatur propoſitio. Corpus ſuperficię TNO, & ſuperficie TSQO contentum æquatur corpori à duobus quadrantibus contentū MOT, & TOP, quod eſt quarta pars ſemiſphęrę quadriformis Probauimus enim ſingula quadrata ex MO ſingulis rectangulis ex NO, & OQ eſſe æqualia linearum æquidiſtantium MOP, & NOQ quibus ſi parallelepipeda

æquealta ſuper ædificata putentur inſer ipta corpori ſuperficie NOT, & OTSQ comprehenio; & corpori quadrantibus ex MOT, & OTP formato, oſtendunt illa quoque corpora, quæ cōtinua inſcriptione exhauriunt, eſſe æqualia inuicem, vt ipſaq omnia parallelepipeda inſcripta hinc inde eodē vtrolibet corpore æquantur. Sunt autem quadrata ex MO æqualia rectangulis ex MO, & OQ, oſtenſa, quia ex 35. Tr. 6. æquantur rectangulis vel quadratis TO, & O e, quibus, & æquātur rectangula ex NO, & QO ſine diametri ſiue ei linearum quarumcunque parallelarum. Itaque cum corpus hoc ex quadrante MOT, & corpus ex ſuperficie NTO, & O T SQ æquealtæ, quadrantibus æquentur, verificabitur propoſitio; ſiquidem corpus hoc ex NTO, & OT SQ ſuperficiebus, diametro NQ linea TS, & arcubus NT, SQ clauſis, æquat quartam partem ſpheræ quadriformis, cui demptum ſit parallelepipedum altitudinis RS, & baſis quadratæ ex Z: Etenim eadem eſt ſuperficies VZY, quæ NOT ob VZ æquans kZ vel NO, & ZY altitudinem O I, & arcus ex V in Y idem qui NN I. Quoniam ſuperficies externa ſphæræ quadriformis eſt ſuperficies Cylindrica, vt oſtendi Prop. 49. Tr. 34. dum demonſtraui eſſe ſuperficiem vngulæ Cylindricæ, cui baſis recta ſit circulus G. m D: quare omnia plana parallela baſi circulo circuli quoque erunt ipſi æquales. quare Y Z V plana ſuperficies continebitur arcu V Y æquali N T arcui, latere V Z æquali N O, & altitudine Z Y æquante altitudinem O. T ergo erit eadem ac N O T. Sic ſuperficies Z Y A C continebitur latere Z C æquali O Q & Z Y æquante O T, & Y A æquante S T ex I heli, & arcu A C idem, qui S Q vnde æquabitur ipſi O T S Q. Ergo corpus contentum ſuperficiebus VYZ & Z Y A C æqualibus, & ſimilibus, cum ſint rectangulæ, ſuperficiebus N O T & T O S Q; & corpus ex M O T deſcriptū ſupra æquabuntur. Hæc autem quadruplicata iuxta quatuor baſes, quibus inſiſtunt V Z C & V P K &c. æquant ſphæram quadriformem L E A B, vacuatam parallepipedo E A I P.

Vide figuram prop. ſequentis.

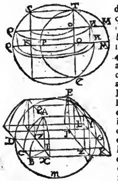
COROLL.

HInc habes quatuor rectangula ſub V Z & Z C nempe Telarium vt ita loquar vel duplex Gnomon L P I B eſſe æqualia toti quadrato ex M P Quia quadratum ex M P æquat quatuor quadrata ex M O radio, cui vnum ex iis rectangulis Telarium L F I B componentibus eſt demonſtratum æquale: quod eſt concludendum nedum de telario in baſi, ſed & de omnibus æquealtis, vt patet ex oſtenſione.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Semiſphæra vacuata Cylindro æquatur ſemiſphæra, cui altitudo Cylindri præbeat radium.

SIT ſemiſphera N N T S Q Q quæ ſit excauata Cylindro T S R Dico æquari ſemiſphæræ M M T P cui radius ſit altitudo R S.



Prob. Vt quadrata M P ad quadrata O R ita circulus ex M P ad circulum ex O R ex 40. tr. 10 Euc. ad aduoc. & vt quadratum OR ad quadratum N Q ſic circulus O R ad circulum N Q & ideo *diuidendo*, quadratum OR erit ad Telariū N O Q R ambiens, & reſiduum ex N Q ablato ipſo quadrato O R quale eſt in altera figura L P I B vt O R circulus ad reſiduum annulum ex circulo N Q ablato O R circulo: ideoque ex æquo quadratum ex M P erit ad telarium N O R Q reſiduum ex N Q quadrato, vt circulus MP ad annulum reſiduum ex circulo N Q Sed quadratum M P & telarium ex N O R Q æquantur ex præc. coroll. Ergo etiam ex 12. tr. 9. par. 2 Euc. ad circulus M P & annulus reſiduus N O R Q æquabuntur cum ergo omnes circuli in ſemiſphera M M T P inſcripſibiles æquentur omnibus annulis planis in ſemiſphæra Cylindro vacuata inſcriptibilibus etiam Cylindri æquealti eleuati ſuper circulos Cylindris vacuis eleuatis ſuper annulos in eandem altitudinem erunt æquales ex 23. trac. 34. Quamobrem ex propr. h. & pr. 14. trac. 33. Euc. adauc ſemiſphæra M T P æquabiint ſemiſphæræ Cylindro vacuæ N N T O R T Q.

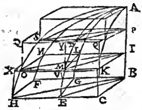
COROLL.

NON videtur Propos. 54. tr. 34 de meta euidens, dum per hoc, quòd quadrata ſint ſimilia: inde colligitur rectangula æqualia quadratis A Q & M N eſſe ſimilia. Poteſt tamen meta alio modo quadrari. Nam corpus portio Cylindri, cuius altera baſis V Y Z ſit portio circuli, longitudo verò in arcū deſinens portionis circuli, V Y A B baſis portio plana ſit Z Y V C æquat quartam partem ſemiſphæræ quadriformis M M I Q Ablata itaque portione Cylindri ſub arcu V Y Z & longitudine V X contentum remanebit quarta pars ſemimetæ quæ erit X I A D C. ex Prop. 56. Tr. 34.

THEOR. III. PROPOS. IX.

Sphæræ quadriformis quadrata, vel ſpheroides quadriforme, ſe habet ad ſphæram, vel ſphæroidem quadriformem oblongã baſis eaſdem altitudinis, vt baſis quadratum ad baſim rectangulum.

SIT quarta pars hæmiſferij ſphæræ quadriformis vel ſphæroidis A B C G E, dico eam eſſe ad quartam partem hæmi-ſphæroidis oblongæ A B C F H, vt quadratum B E ad



rectangulum B H. Probatur ductis enim plurimis planis parallelis baſi vt I K N O & cæt. latera erunt parallela ex pr. 14. tr. 22. Euch. adauc. C H, K O, & Q V ſic B C, I K, P Q. Ducta verò ſectione diagonali B E M A, & A S O H B efformabuntur ſectiones B E, I M, P T & B H, I O & P S, triangulaque B C E, I K M, P Q T erunt æquiangula in ſphæra quadriformi: Nam C, K, Q anguli omnes ſunt recti, & P, I, B anguli acuti, ſunt anguli inclinationis planorum ſc. diagonalis plani B E A vel B A H ad planum baſis A B C & ideo ex propoſ. 18. Trac. 22. Eucl. adauc. æquales ideo ex coroll. prop. 17. tr. 4. erunt triangula E B C & I K M & P Q T æquiangula, ideoque ſimilia ex def. 1. tr. 10. & prop. 4. Idem dicendum eſt de triangulis B C H, I K O, P Q S. ob eandem rationem: Quare ex propr. 4. tr. 10 C E erit ad C B vt K M ad K I & *permutando* C E ad k M, ſic C B ad k I, ſed vt C B ad k I: ſic eſt C H ad k O; ſiquidem vt C B ad C H ſic eſt k I ad K O & ideo permutatim quoq; Ergo C E ad k M, ſic eſt ex 16. tr. 9. vt C H ad k O. Et eodem ritu argumentandi k M ad Q T ſic k X ad k Z. Ideoque etiam ipſa triangula erunt proportionalia, nam habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, ideoque triangulum B C E erit ad triangulum I K M vt triangulum C H B ad triangulum I K O ex propoſ. 6. trac. 10. Euc. adauc. & ideo eorum duplum quadratum B G C E erit ad quadratum I K L M, vt rectangulum B C H F ad rectangulum I K N O. Ideoque parallipipeda æquealta ſuper has baſes, eleuata per ſubduplã altitudinũ diuiſionem multiplicata vſq; dum poſſint erit parallepipedum B E V ad I M Y parallelepidum: vt B H X parallelepipedum ad I O Z parallepipedum. Quapropter erit etiam quarta pars ſemiſphæræ quadriformis quadratæ baſis B C E G A ad quartam partem ſemiſphæræ oblongæ baſis quadriformis B C H F A: vt baſis quadratum B E ad baſim rectangulum B H ex prop. 4. huius. Ideo & quadruplũ ſemiſphæræ quadriformis ad quadruplum ſemiſphæræ quadriformis oblongæ baſis, vt quadruplum baſis B E ad quadruplũ baſis B H. & ideo etiam vt tota ſphæra ad totam ex 8. tr. 9. p. 2.

COROLL. I.

HInc eſt quod ſit etiam; vt C E linea ad C H lineam ſic ſphæra quadriformis ad oblongam; quia ſunt planæ baſes eiuſdem altitudinis, & ideo ſunt vt baſes lineæ ad inuicem, nempe C E ad C H. Vel etiam quælibet pars parallelis planis abciſſa k M I M L v. g. ad A I k N O, vt baſis I M ad baſim I O id eſt vt K M ad K O lineas.

COROLL. II.

HInc eſt ſemivngulam Cylindricam rectanguli æquicruris A T M B C E eſſe ad ſemiungulam trianguli maioris cruris A S H B C, vt triangulum æquicruris B C E ad triangulum maioris alterius cruris B C H quia ſicut ſemiungulæ ſunt medietates quartarum ſemiſphæroidum, ita, & baſes triangula prædicta ſunt medietates rectangulorum.

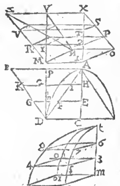
THEOR. IV. PROPOS. X.

Semiſphæroides quadriforme rectam æquat priſma, cuius altitudo ſit ſemiaxis, & idem latus baſis triangularis rectanguli ſemiaxis, cuius alterum latus ſit alter ſemiaxis, ſimulque pyramidem, cuius baſis eadem, altitudo vero eadem, quæ priſmatis.

SIt hemiſpheroidis m n t cuius efformatrix ellipſis ſit C A D, quarta pars, & cuius altitudo C A vel D P diuidatur in quotcunque partes æquales 3. 6, & per eas diuiſiones agantur plana 3. 9. 4. & 6 8. eruntque quadrata quorũ latera 3 9. 5 4. 7 8 æqualia ſingulis applicatis æqualis ellipſis in æqualibus partibus diametri ſumptis E C & H C ſiquidem cum ellipſes præſupponãtur eædem ipſæ C A D; quia eſt ellipſis efformatrix ſphæroidis quadratæ, etiam applicatæ ijdẽ partibus diametri erunt æquales E b ipſi 35. vel & cæt quare quadratũ e n m æquabitur quadrato ex D C & 34 quadrato E b & cætera cæteris in ellipſi autem ducatur A D ad vertices axium & A P dupla & parallela axi D C & D P parallela alteri axi C D, producanturque E F & H K, Sit deinde priſma O X L M altitudine m L M habens axis C D, & triangulum baſis O X L ſit idem, ac C A D, nempe habeat latera O L, & L X axibus A C, & C D reſpectiuè æqualia, & angulus comprehenſus rectus, vt eſt angulus C Sit etiam pyramis M Y Z N, cuius baſis M Y eadem, quæ priſmatis O X L: altitudo verò Y Z eadem, quæ X Y nimirum X Z nempè duo axes C D ſi quantum eſt tota A B, quæ eſt dupla axis C D ex hypoth. Ideoque A B æquabitur duobus axibus, vt X Z, Si ergo ad eaſdẽ partes priſma-pyramidalis corporis lateris L X baſis, nempè ad partes L Q & Q T æquantes C E, E H partes axis C A ducantur plana axi M A parallela, corpus priſma-pyramidale

 ſecan:

ſecantia, & in ellipſi rectę parallelæ baſi C D ſc. E G & K H nimirum ab ijſdem partibus, quib⁹ primo ductæ ſũt applicatę H a E b equãtibus m 3.& 36. altitudinis m z ſphęroidis quadriformis, parallelogramma facta in priſma-pyramidali corpore æquabuntur rectangulis ex lineis à diametri ellipſis partibus æqualibus, productis: nimirum P R rectangulo E F & E a & S V rectangulo I H & H K. Nã ducta D P iam omnes intereluſę inter L X & M Y parallelę erunt ęquales omnibus D P & A C interceptis, quia parallelæ omnes ſunt baſibus æqualibus C D & L M ſitæ: triangula verò rectangula D P B & M Y z æqualia & ęquiangula ob æqualem angulum, & duo crura Y X ipſi P B & Y M ipſi D P æqualia. Ideo erit Db ad b G vt M r ad S t ſed M t & D b æquantur. Ergo etiam r R, h G equabuntur. Et ſie dicas de alijs, quæ ſingulæ ſingulis erunt ęquales; eodem vero modo argumentaberis de lineis P Q & S T in triangulo Q L X, quę ſunt æquales lineis E F & H I in equali, & ęquiangulo triangulo A D C. Quaderè cum conſtent lateribus æqualibus æquabuntur rectangulũ E G, E F rectangulo P R vel H I, H K rectangulo S V Sed illa E F & F G ęquantur quadrato 34. vel æquali b E. ſic H I, I K quadrato 68, vel æquali quadrato ellipſis D' A C ex applicata in H ex pr. 9. tr. 24. Euc. adauc. Ergo quadrata omnia ad eandem eleuationem ducta ſc. 34. rectangulo P R & 68 rectangulo S V æquabuntur. Si verò ſuper has baſes æqualia parallelepipeda intelligãtur conſtructa ad eandem eleuationem partium ęqualium inuicem m 3. & 3 6. 6 t atque partibus A Q, Q T, T X lateris priſma-pyramidalis corporis, erunt omnia ęqualia ex pr. 6. trac. 27. Euc. adauc. & ſi vſq; ad vltimã, quæ fieri poſſit multiplicationem, circumſcribantur ſub diuiden do in duo continuè latus m t & L X vt poſſe fieri oſtendi pr. 14. tr. 31. ſemper perſeuerabunt æqualia, & omni dabili, vel intelligibili



quantitate minori exceſſu ipſa corpora, quę circumſcribunt excedent; Quare ipſis circumſcriptis corporibus æquabuntur, hęc quidem quæ quattam ſemiſphæroidis m t e n quadriformis ambiunt ipſi quartæ ſemiſphæroidis, illa, quæ corpus priſma-pyramidale cingũt ipſi corpori: Sed hæc ſolida parallelepipeda quattæ ſemiſphęroidis æquãtur illis priſmatis pyramidiſque. Ergo etiam ipſa corpora inuicem æquabuntur ex 4. huius. Z, X M O, & t n m idest quarta ſphæroidis quadriformis, & corpus priſma-pyramidale deſcriptum. Quod autem dicitur de quarta debet intelligi de octuplici, nempe de toto ſphęroide, & de octuplo corpore deſcripto Z X M O.

COROLL. I.

Hinc verò fit, quod dicitur de toto elliptico ſphæroide, de partibus æqualtis, & planitiebus parallelis baſi abſciſſis eſſe dicendũ, nempe quod ęquentur corporis priſma pyramidalis fruſto æquealto Sic v.g. ſphęroidis fruſtum 3 5 4 t ęquabitur fruſto P Q R X Z corporis priſma-pyramidalis, quod patet eodem argumento. Nam parallelepipeda ęqualta circũſcribentia quodlibet fruſtum ſphęroidis 5 3 4 t æquantur priſmatibus æqualibus numero, & quantitate circumſcribentibus fruſtum corporis P Q R X Z, vt patet ex contextu propoſitionis, etiamſi multiplicentur, donec relinquant quantitatem qualibet aſſignabili minorem. Quare cum ſemper perſeuerent ęqualia, & iam non differant à corporibus, quę circumſcribunt quantitate, quę exiberi poſſit, non different ab illis ipſis ſphęroidis fruſto, & corporis priſma-pyramidalis vnde etiam ipſa fruſta ęquabuntur.

COROLL. II.

Cvm ſemiſphęroidis quarta pars ſit duplũ ſemivngulę Cylindricę, patet vngulã Cylindricam ęquari dimidio corporis priſma-pyramidalis. Quoniam ſemiſphęroidis quarta pars, & illud corpus oſtenſa ſunt æquari. Manifeſtum quoque eſt ſingulas partes ſemiungulæ ſingulis dimidijs partibus corporis priſma pyramidalis in eandem eleuationem ductis, & planis parallelis baſi abſciſſis vtrinque ęquari.

COROLL. III.

Elicitur, quod dicitur de ſphęroide quadriformi, etiam eſſe aſſerendum de ſphęra quadrata, quia ſi diametri ſint ęquales A C, & C D deſcribetur circulus: ſiquidem tunc ob parallelilmum linearum in triangulo C A D erit A C ad C D vt E A & E F: ſed A D ponitur æqualis ipſi E A. & ideo erit F E equalis ipſi E A; Et quia ex effectione A B ęquabitur ipſi diametro, & ideo G E, & F E diametro quoque; ſiquidem A E ęquatur eadem ratione ipſi F E, & b G ipſi D b vel C E & b E reliquo radio C. Ideo quadratum applicatę E b in circulo æquans rectangulum ex ſegmentis diametri in E ſecti, vt docet Pr. 34. tr. 6. Euc. adauc adæquabit quoque rectangulum æqualium illi laterum G E & F E. Si ergo A D C ponatur quadrans circuli efformans corpus m t n e ſtatuetur ſemiſphæræ quadriformis quarta pars, de qua idem oſtendetur.

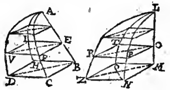
Et hinc ſcies cubare etiam ſingulas partes abſciſſas planis baſi parallelis ſphæræ quadriformis eadem ratione, ac ſphæroidis quadriformis.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. VIII.

Oma's ſphæra, ſeu ſphæroides oblongum, ſeu quadratum obliquum æquatur recto æqualis altitudinis, quorum applicatæ ellipſium efformatricium ſingula ſingulis partibus æquealtis diametri ſint æquales, & angulos faciant inuicem rectos.

SIT ſphæra, ſeu ſphæroides obliquum A B C D, nempe cuius axis B A obliquos angulos baſi B C efficiat, ſitque aliud rectum L M N Z Sitque applicata B C æqualis applicatæ M N, nec non E F & O P, & cæteræ ceteris applicatę diametro B A; ſic B H, & M Q in altera vtraque ellipſi E I & O T, & cæt. ad eandē



altitudinem, quæ eſt applicatarum diametro M L, ſint verò vt conſtat eſſe poſſe ex pr. 72. tr. 24. hæc duo corpora ad eandem eleuationem euecta M L & ellipſes B CA, BAH rectū angulum ad B A axem eundem faciant, qui faciunt ellipſes efformatrices L M N, & M L Q alterius corporis. Dico hæc corpora inuicem æquari, etiam ſi alterum eſſet ſphæra quadriformis, alterum ſphęroides.

Probatur baſis M Q Z ęquatur baſi B D cōſtat enim æqualibus lateribus B H ipſi M Q & B C ipſi M N, conſtatque æqualibus angulis apud B & M ob angulum rectum ellipſium efformatricium. Ergo erunt æquales. Quaderè etiam parallelepipeda æquealta, nempe altitudinis, quæ eſt M O euecta ab illis baſibus, æquabūtur. Ita baſis E V æquatur baſi O R ob eandem rationem laterum æqualium E I ipſi O T, & E F ipſi O P, & angulum F & O ęqualem nempe rectum, & ideo parallelepipeda eadem altitudine prędita, & ſuper illas baſes euecta erunt ęqualia, & ſic de alijs quibuſcunque, quæ per ſubduplam diuiſionē altitudinum continuè corporibus ſphęriquadratis, vel ſphęroidibus quadratis ſiuè oblōgis circumſcriberentur: vt poſſe fieri oſtendi pr. 14. tr. 33. Cumque continua, & ſemper minorum altitudine parallepipedorum æqualium inuicem relinquant quantitatem omni, quæ dari, vel aſſignari poſſit minorem, ſequitur vt parallepipeda circumſcripta, & ita multiplicata non differant ab ipſis corporibus quātitate aſſignabili: ideoque ex 4. h. dicant eandem proportionem, ac ipſa corpora, quibus circumſcripta intelliguntur: At probatum eſt parallepipeda circumſcripta corpori B A C D obliquo eſſe æqualia parallelepipedis circumſcriptis L M N Z corpori. Ergo etiam ipſa corpora à quibus nulla aſſignabili quantitate differunt, erunt etiam ipſa inuicem æqualia.

COROLL. I.

QVod dicitur de totis, de ſingulis etiam æquæaltis partibus, quæ ſint planis baſi parallelis abſciſæ militat V. g. quod pars L O R æquetur parti A E V. Ex contextu enim propoſ. conſtat omnia parallepipeda vtrique corpori circumſcripta ſiue toti, ſiue eorum ęquealtæ parti eſſe inuicem æqualia. Vnde, & ipſa ſegmenta corporum L O R & A E V. æquabuntur, cum per cōtinuam circumſcriptionem tandem ab ipſis non differant, vt dictum eſt ſupra.

COROLL. II.

HInc euincitur quoque, quod licet anguli ellipſium efformatricium B A H & B A C non ſint recti, nec æquales angulis ellipſium efformatricium M Q L & M N L adhuc tamen ſi baſes ipſæ ſint ęqualis altitudinis ita quod talis ſit altitudo baſis M Z, qualis baſis B D & ideo vt colligimus ex prop. 2. huius etiam, cæterarum: idem ſequetur, quòd in propoſitione demonſtratum eſt, nempe ipſum corpus obliquum B A C H D eſſe ęquale corpori recto M N L Z. Quia ex prop. 28. tr. 4. Euce adauc. baſes quoque B D ipſi M Z, & E V ipſi O R erunt æquales quaderè, & cæteræ. Vndè parallelepipeda in eis æquealta multiplicata quantùm queunt multiplicari ab ipſis corporibus; quæ circumſcribunt, quantitate aſſignabili non different ex 14. tr. 33. & ideo vt multitudines parallelepipedorum hinc indè æquantur ſic, & ipſa D B A, Z L M æquabuntur.

COROLL. III.

IDem etiam ſequitur, ſi baſes alia ratione inueniantur æquales; nempe quia O T æqualis O P ſit media proportionalis inter E F & E I & ſic de cæteris: tunc enim ſi in vtroq; corpore efformatrices ellipſes angulum rectū faciant, omnes baſes corporis B A C D erunt rectangula æqualia quadratis baſibus corporis L M N Z; Vnde eodem argumento adhibito ipſa corpora erunt æqualia.

COROLL. IIII.

HInc quoque eſt dimidium quartæ ſemiſphæroidis, vel ſemiſphæræ quadriformis, quæ eſt ſemiungula Cylindrica, vt dictū eſt etiam obliqua eſſe æquale rectæ vngulę; quia eadem ratio eſt de tota, & dimidijs eiuſdem rei partibus ex prop. 18. tr. 9. p. 2. Eu. ad. Quare ſemiungula B A C D æquabitur ſemiūgulę L M N Z Vngula verò obliqua oritur à ſectione Cylindri circularis, vel elliptici obliquè facta v. g. in Cylindro ſecto obliquè plano baſim ſubtendente obliquam, & alio per axem huius baſis trāſeunte; & in aliquod

punctum

punctum ſuperficiei curuæ Cylindricæ incidente.

COROLL, IV.

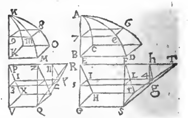
CVm ex pr. 2. huius 5 in ellipſibus efformatricibus corporum ſphęroidicorum ſit diameter ad diametrum in certa proportione quod etiam cæterę omnes applicatæ ad alteram diametrum erunt in eadem proportione v. g. Sit B H ad M Q vel æqualem ſibi quod preſuponimus v. g. eſſe M N, vt M N ad C B, Ergo etiam erit I E, ad T O vt H B ad Q M. Sed ex eadem 2. huius Q M eſt ad M N, vt T O ad P O. Quare ex tr. 9. Euc. ad aut. p. 2. pr. 12. hæ quoque T O & P O æquabuntur, vt ęquantur Q M & M N ex Theſi, Sed ex 2. huius P O eſt ad F E vt M N ad C B: Quare erit I E ad T O vt H B ad M Q ideſt M N ad C B ex Theſi ſc. P O, vel T O ęqualis ad F E. Quare ex ęquo etiam I E erit ad T O, vt T O vel ęqualis P O ad F E. ſic de alijs. Vnde poteris certò ſcire alias omnes baſes eſſe æquales, ſi vna ſit & prima B H C D alteri M Q Z N ſiue ob æqualitatem laterum in baſi B D, ſiue ob earũ proportionem facientem, ſiue Rhonbũ æquealtum, ſiue rectangulum conſtans ex extremis proportionalibus, & ideo æquale quadrato M Z conſtante ex medijs proportionalibus.

THEOR VI. PROPOS XII.

Sparoides quadriforme oblongum rectum æquatur corpori priſmate. pyramideque coaſlato, quorum baſis triangularis rectangulæ crura ſint facta ex diametro, & altitudini vnius ellipſis, altitudo verò priſmatis, & pyramidis ſit diameter maior alterius ellipſis efformatricis, ſingulaque partes planis baſi parallelis abſciſſa æquealtæ ſingulis partibus alterius æquealtis æquantur.

SIT ſphæroides quadriforme oblongum. ſit eius octaua pars, quod ſufficit, A BCD. Sit vero priſma F G H E, cuius baſis G E H rectangula ad G habeat latus G E æquale axi, & altitudini B A, alterũ verò latus G H ęquetur lateri B C, altitudo verò G S equetur axi B D. At Pyramis F T S r cõſtet eadẽ baſi C G H quæ eſt F S r, & eadem altitudine I F Dico hoc corpus pyramide priſmateque conflatum eſſe æquale ſpheroidi oblongæ quadrangulę B A C D. Fiat ſphæroides, vel ſphęra quadriformi ſeiuſdem altitudinis K M N O, cuius latus M O baſis æquetur lateri B C ita, quod K O & C D baſes ſint æqueal tæ, ex pro. 10 h & æquale priſma, pyramique P Q R, & tunc ſic propoſ. probatur.

Sphæra quadriformis N K M O eſt ad ſpheroidem oblongum B A C D vt K M latus ad latus baſis B D ex coroll. prop 9. huius. Sed vt K M ad B D, ſic eſt V Q ad G S cum ex construc K M, & Q V & B D, G S ſint equales, & ideo dupla P R ad duplum E T ex 13. pr. tr 9. p. 2. Eu. ad. vt autem P R ad E T. ita eſt corpus R P Q V ad corpus E T S H quod, ſint ſuper baſim æqualem P X V & G E H; vt oſtendetur, priſma P Q quidem ad priſma E S e prop. 20. tr. 34. vt P Z ad E F: at pyramis Y Z R Q i ad F T S r vt Z R ad F T. Quare ex prop. 18. tr. 9. p. 2. vt ſunt P Z & Q R ſimil in proportione ad E F & E T altitudines, ſic priſma pyramiſque P X Q R ad priſma pyramidemq; E H S T & ideo vt P Z ad F E ideſt K M ad B D ex 18. tr. 9. p. 2. Quadere ex propoſ. 16. tr. eiuſdem 9. Euc. ad. 2. p. ſphæra quadriformis N H O M erit ad ſphæroidem quadriformem B A C D, vt P R X Q ad G E H T corpora



priſmate pyramideque conflata. Quãobrem ex prop. 12. eiuſdem cum iam oſtenſum ſit pr. 10. ſphęram N H M O eſſe æqualem priſmati pyramidique P Q X V, etiam B A D C ęquabitur priſmati, pyramidique E G T H vt vult propoſ.

Remanet autem probandum baſim P V X æquari baſi G E H, ſed id facillimè oſtenditur: Nam cùm in ſphæra quadriformi vel ſpheroide ſit eadẽ altitudo K N, quę V P ex prop. 10. huius & V X, rectangulè applicata apud V æquet M O & K N æquet B A ſcilicet G E ex construc. & M O ęquet B C ſcilicet G H item ex conſtructione, & G H rectangula ſit ex conſtruc, ipſi G E ſequitur vt angulus apud G ęquetur angulo apud V at G E ipſi V P, linea verò G H ipſi V X. Quadere ex prop 22. Euc. ad tr. 4. ęquabuntur triangula V P X & G E H quod vltimo fuit probandum.

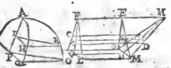
Probatur quoque de partibus, & agatur planum parallelum baſibus per vnum quodcunque corpus ad eandem altitudinem. V. g. ad dimidiam omnium altitudinem, quæ ſint 98. & 76. in ſphęroidibus, at in priſmatibus pyramidibus quę 32 & 54. Tunc idem retexo argumentum ex prop 9: ſphærę vel ſphęroidis quadriformis fruſtum N 98. ad ſphæroidis quadriformis fruſtum A 76. refertur vt baſis 98. ad baſim 76. ſcilicet ob eandem baſium planarum altitudinem 9. m ad 7. e ſed vt 9 m ad 7. e. ſic eſt K M ad B D ex prop. 9. h & ita æquales P Z ad E F & ideo eadem P Z cum eius dimidio z n. vel qualibet parte proportionali parti cruris V P. vt oſtendam eſſe, ad E F eum qualibet parte ſimiliter proportionali v. g. eius dimidio E H vt K M ad B D ex pr. 18. tr. 9. p: 2. Euc. ad auc vt autem P n ad E h, ſic priſma 3. n. ad priſmas g E ex pr; 20 tr. 34. Euc. adauç, cùm ſint eædem baſes P T 3. & 5 E I vt dicam infra, rurſùs vt P n ad E h, ſic eſt eius tertia pars V. g. N R quod talem eſſe infra oſtendam ad h T partem tertiam, vt autem n R ad h T ſic eſt pyramis n R y z, ad pyramidem æqualis baſis h 4. T g ex propoſ. 1. huius

huius:Ergo pyramis n R Y Z erit ad pyramidem h 4. g T, vt P n ad E h, ſcilicet vt priſma P 3. Y 2. ad priſma e L hg. Ideoq; ex 18. tr. 9. p. 2. priſma P Y. cum pyramide ipſi iuncta n Y 2 R erit ad priſma E g cum pyramide g h 4. T; vt PR ad E I, ſcilicet ex 18 tr. 9. vt eadem P Z ad E F, nempe vt æquales K M ad B D ſcilicet ex 9. huius vt 9. m. ad 7 e: nimirum ex 1. tr. 10 Euc. ad. vt baſis 98. ad baſim 76. ob æquales altitudines m 8. & e 6 nempe ex 9. huius cor. vt fruſtum N 9. m. 8. ad fruſtum 7 A 6 e Ergo ex 16. L 5. priſma 3. n Y cum pyramide n Y 2. R erit ad priſma I E h g cum pyramide h 4 g T; vt fruſtum ſphæroidis N 9 m 8, ad fruſtũ ſphæroidis 7 A e 6: ſed fruſtũ ſphæroidis N 9, m 8 æquatur priſmati pyramidique P R 3. Y ex pr. 9. huius ergo etiam fruſtum 7 A 6 e ſphęroidis æquatur priſmati pyramidiq; I E h 4 9. T quod vult propoſitio.

Reſtat probandum primo 3. P baſis æquari baſi 5 E; ſed hoc clarum eſt: quia iam æqualia oſtenſa ſunt triangula V P X & G E H, Ergo etiam triangula 3 P I & 5 I E: ſiquidem crus P 3 ex hypoteſi æquatur cruri 5 E & P I cruri E I angulus: verò apud P eſt idem ac apud E: vndè ex 22 tr. 4. Euc: ad. erit triangulum æquale 3 P I & 5 E I. Reſtat quoque oſtendendum Z n eſſe dimidiũ P Z. Nã ducto plano Y n 2 parallelo baſi V P X vbi ſecat planum 32. ita eſt N R ad Z R vt R 2 ad R Q ſed R 2, ex preſuppoſito eſt dimidium R Q Ergo etiam R n. ipſius R Z erit dimidium ideſt triens totius P N quod autem dicitur de hac proportione dicendum de qualiber alia: ita enim ſemper erit Q R ad R 2. vt R Z ad R n. & ita dicas de h T quod ſit dimidium T F ideſt triens ipſius E h.

COROLL.

QVod dictum eſt de ſpheroide quadriformi oblongę baſis dicendum eſt de vngula O A P Q, cuius altitudo O Q ſit maior, ac longitudo diametri Q P; quia vngula Cylindrica eſt eiuſdem ſphæroidis octauæ partis dimidium. Vnde æquabitur dimidio corporis priſmate, pyramideque conſtantis L F N G,

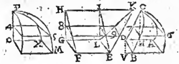


ſingulæ quoque partes parallelis planis baſi abſciſæ vt B A I H ſingulis dimidijs partibus æquealtis C F D N æquari priſmaris, & pyramidis eodem modo detruncatis parallelo ducto D C plano H V in figur. quod dimidium obtineri poterit in priſmate, vel pyramide tota, vel etiam eorum æquealtis partibus ſi tranſeat per lineam F N planum, quod diuidat baſes C D vel L G bifariam; vt facilè quiſque concipere poteſt ex fig. ipſa.

THEOR VII. PROPOS. XIII.

Sphæra vel ſphæroides obliquum quadratæ, ſeu oblonga baſis rectangula eſt equale priſmati pyramidiq; quorum baſis triangularis rectangula latus æquetur altitudini ipſius ſphæra vel ſphæroidis, & alterum latus alteri ſemiaxium, altitudo verò ipſorum æquetur ſemiaxi alteri.

SIt ſphæra vel ſphæroides obliquum quadratæ baſis, vel obliquæ A D B C, Dico æquari priſmati F G H I & pyramidi E L K I quorum baſis triangularis rectangula F H G vel E I L æquetur latere quidem F G axi B D altero verò latere G H altitudini C N ſed altitudo I H priſmaris; nec non & K I pyramidis ſit eadem ac alterum latus A D. Dico C D A B & H K G E corpora æquari. Vt prop. probetur ſit ſphæra vel ſphæroides rectum M X O P cuius altitudo ſit eadem, ac alterius obliquę ſphæræ vel ſphæroidis N C; baſis verò M O æquetur baſi A B. Certum eſt, quod iſta ſphæra, vel iſtud ſpheroides M N O P æquatur ſphæræ vel ſphæroidi obliquo A C D B ex pr. 28: tr. 34 & ex 11 huius, & coroll. 4 ſed idem M N O P ęquatur ex p. 12. h. priſmati



pyramidique K E F G H, cùm F G latus æquetur axi D B, & ideo æquali axi N O, & G H altitudini N C & ideo altitudini P O, & altitudo I K vel I H Axi A D, & ideo æquali X O Quare etiã pyramis priſmaque K E G H æquabitur ſphærę, vel ſphæroidi obliquæ A C D B.

COROLL. I.

SI verò ſphæra, vel ſphæroides obliquum ſit baſis non rectangulæ, tunc X M latus rectangulæ ſuperficiei L E F G æquabitur altitudini baſis V D, quod ſi æquetur axi, tunc ſuperficies E L F G erit æquiangula baſi A B.

COROLL. II.

CVm toties dixerimus dimidium quartæ partis ſemiſphæræ, vel ſemiſphæroidis quadriformis vngulam eſſe ex Pr. 49. trac. 34. ſequitur, vt etiam dimidium priſmaris, pyramidiſque K H G E F æquetur A C D B obliquę ſphęræ, vel ſphæroidis quadriformis; ſeu oblongæ baſis dimidio, nempe vngulę Cylindricæ.

COROLL. III.

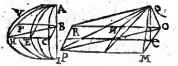
SEquitur quoque eodem argumento militante fruſtum ſphæræ; vel ſphæroidis prędictæ parallelis planis abſciſſæ baſi ipſius, vt 6 C 7 æquari fruſto æquealto priſmatis pyramidiſque 9 8 K H. Quoniam oſtenſum eſt prop. 11. h & coroll. 4 hæc duorum corporum fruſta 6 C 7, & 9 8 K H æquari fruſto 54. P rectæ ſphęrę, vel ſphæroidis quadriformis oblongæ, vel quadratæ baſis deſcriptæ.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

Sphæra oblongæ baſis, & rectangulæ æquat pyramidem; cuius baſis ſit quadruplo maior, in altitudinem normalis ipſius ſperæ à baſi in verticem deductam.

SIt ſphęrę rectangulæ baſis; & oblongæ quarta pars F A V H B C I. Dico ęquari pyramidi, quæ habeat baſim quadruplam baſis B C F H, & altitudinem B A.

Prob. Coroll. Prop. 48. tr. 24. oſtenſum eſt ſphęram quadriformem I B A C E eſſe ęqualem pyramidi, cuius baſis ſit quadruplo maior propria baſi, & altitudo eadem, quæ ſphæræ quadriformis, vel quòd in idem reddit, cuius baſis pyramidis ſit dupli lateris baſi ipſius ſphærę. Ideoque quarta eius pars, quę ſit pyramis N M Q erit æqualis quartæ parti ipſius ſphæræ quadratæ, cuius baſis M N ſit quadrupla. ipſius baſis ſphęrę E B eleuata in altitudinem A B nimirùm altitudinis e Q. Cum ergo ſit, vt baſis ad baſim, ita pyramis, ad



pyramidem eiuſdem eleuationis ex prop. 24. tr. 24. ideo pyramis M N Q quadruplę baſis ipſi baſi B E erit ad pyramidē O P Q quadruplę baſis baſeos B H, vt baſis M N quadrupla baſis B E ad baſim O P quadruplam baſis B H: Ideoque vt baſis B E ad baſim B H ex 18. tr. 9. p. 2. Sed vt baſis B E ad B H baſim, ita eſt ſphęræ quadri formis quarta A E C B I ſuper baſim B E ad ſphęræ quartam partem A V H C B I baſis oblongę ex 9. huius. Ergo ex 16. tr 9. p 2. vt pyramis M N Q quadratæ baſis M N quadruplę quadratę B E ad pyramidem Q P O oblongę baſis O P quadruplæ baſis B H, ſic eſt ſphæræ quadratę baſis B E quarta pars A I B C E ad ſphæræ oblongę baſis B H quartam A H B C I; ſed pyramis illa Q M N vt dixi ſuper M N quadruplam B E ęquat quartam ſphęræ quadriformis A E C B I. Ergo etiam hæc pyramis O P Q æquabit quartam partem ſphæræ oblōgę I A B C H V, & ideo ipſæ ſphærę æquabuntur quadruplo pyramidum ex 18. Tr. 9. p. 2.

COROLL. I.

QVæ verò dicuntur de ſphęra intelligenda quoque ſunt de ſphæroide nimirum ſi A B C non ſit quarta circuli, ſed ellipſis, & cętera omnia ſint poſita vt priùs, quia in coroll prop. 40. tr. 24. idem dicitur de ſphæroide quadriformi; quod de ſphæra quadriformi.

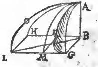
COROLL. II.

HInc eſt vngulam oblongam A B C H I quę æquet ſua altitudine ſemidiametrum ſitam ſuper triangulum B C H æquari pyramidi in altitudinem B A, ſed ſuper triangulum ſitæ quadruplo maiorem quàm B C H vt eſſet O M R P ex propoſitione 18. citata Euc. ad auc. tr. 9. quia ſicut pyramis triangularis baſis eſt dimidium pyramidis quadrangulæ baſis, ſic vngũla eſt dimidiũ quartæ partis quadriformis ſphęræ.

THEOR. IX. PROPOS. XV.

Sphæra quadriformis oblonga eſt ad ſphæram circularem, vel ſphærois quadriformis eſt ad ſphæroidem circularem eiuſdem altitudinis, vt baſis rectangulum ad baſim circulum, vel vngula ad ſphæram, vt ſemirectangulum ad circulum.

SIt ſemiſphæræ vel ſemiſphęroidis oblōgę baſis quarta pars A H B G L, ſphęrę quoq; circularis hæmiſphærij quarta pars A I B G. Dico ita eſſe ſemiſphæræ quarta, vel ſemiſphæroidis oblongæ A H B G ad ſemiſphærę, vel ſæmiſphęroidis quartam circularem partē vt baſis rectangulum H G ad baſim quadrantem B I G: dummodo ſit eadem altitudo B A



Prob. Sit quadratæ ſemiſphæræ, vel ſemiſphęroidis A I M B G quadratæ baſis A I M G quarta Oſtenſum eſt prop. 9. Ita eſſe hāc A I M B G ad ſemiſphęrę vel ſemiſphæroidis quartam A H B G, vt baſis quadratum I G ad baſim rectangulum H G. Ideoque *conuertenda* ſemiſpheroidis, vel ſemiſphęrę oblōgę quarta A H B G erit ad ſemiſphæram, vel ſemiſphæroidem quadratę baſis A I B M G, vt baſis rectangulum ad baſis quadratum, ſed ex prop. 38. Tr. 24 Euc. ad; ita eſt ſphęra quadrata ad circularem, vt baſis quadrata ad baſim circularem, & ideo medietas ad medietatē, & quarta A I M B C dimidij quadratæ ſphærę ad quartam A I B G circularis; vt quarta pars B I M G baſis ad quadrantem circuli B I G. Quare ex æquo erit A H B G ſemiſphæræ, vel ſemiſphęroidis oblongæ quarta pars ad ſemiſphæræ circularis vel ſemiſphæroidis quartam

vt H

Digitized by Google

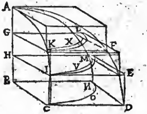
vt H B G rectangulum ad B I G quadrantem. quare & integra ſphæra oblonga rectanguli ad integram circularem erit, vt rectangulum B H G ad quadrantem B I G ex 18. tr. 9. pr. 2. vel vt baſis quadrupla ad circulũ, vel dimidiũ huius quartæ partis hemiſphærij oblongi ſcilicet vngula A O L B G ad integram ſphæram ex eadem vt ſemirectangulum B L G ad circulum.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Sphæra quæcunque quadriformis oblonga eſt ad ſphæroidem baſis ellipticæ, vt rectangulum baſis ad ellipſim baſim eiuſdem, ſi fuerit eadem altitudo vtrique.

SIt quarta pars ſemiſphęrę quadriformis A N D B C rectangulæ baſis, & ſit quarta pars ſemiſphæroidis A N B C, cui baſis quarta ellipſis B N O C. Dico quòd ita ſit quarta ſemiſphæræ baſis rectangulæ ad quartam ſemiſphæroidis baſis ellipſis, vt ipſa baſis rectangulum, ad ipſam baſim ellipſim.

Probatur. Nam prop. 27. tr. 30. ita eſt B C D N rectangulum ad rectangulum H M E I vt ellipſis B N O C ad ellipſim H M V I, at vt rectangulum H M E I ad rectangulum G L F K, ſic ellipſis H I V M ad ellipſim G K L X, & ſic in infinitum, vt autem rectangula baſes, ſic parallelepipeda æquealta ex 7. p. 1. vel Cylindri ex 5. p. 2. tr. 34. ſuper illas erecta. Ideoq; ſuper BCND parallelepipedum ad parallelepipedum ſuper H M E I æquealtum, ſic ęquè illi altus Cylindrus ſuper quartam ellipſis B N O C ad Cylindrum æquealtum ſuper ellipſis quartam HIVM, & vt parallelepipedum ſuper H M E I ad parallelepipedum ſuper G L F K ſic Cylindrus æquealtus ſuper quartam ellipſis KMV ad Cylindrum æquealtũ illis ſuper baſim G K X L: Ideoque, & coroll. 2.



p. 19. tr. 9. p. 2. Erunt omnia parallelepipeda ſimul, quę ſunt antecedentia proportionis cum conſequentibus ad Cylindricos ellipticos antecedentia ſimul, & conſequentia alterius proportionis vt vnum antecedens parallelepipedum ſuper BNDC ad aliud antecedens Cylindrum ſuper quartam ellipſis B N O C. ſed hæc ſunt ex prop. 23. tr. 34. vt baſis rectangulum B N C D ad quartam ellipſis B N O C. Ergo & omnia parallelepipeda erunt ad omnes Cylindros æquealtos, vt rectangulum B N D C ad quartam ellipſis B N O C. Si ergo multiplicentur quantum multiplicari poſſunt parallelepipeda relinquent pro differentia a quadriformi ſphæra oblonga quantitatem omni data minorem ex prop. 14. tr. 33. & ita ſi multiplicentur quartæ ſemiſphęroidis ellipticę circumſcripti Cylindri. Quare parallelepipeda æquabunt quartam hemiſphærij quadriformis oblongę, & Cylindri quartam ſemiſphęroidis ellipticę: vnde erunt & ipſæ ex 4. huius circumſcriptæ quantitates inuicem, vt multitudo parallelepipedorum ad multitudinem Cylindrorum nempe, vt baſis B N D C vt oſtendi ad baſim quartam ellipſis B M O C. ſi ergo octoplicetur, ſphæra quadriformis oblonga, & fiat integra erit ad ſphæroidem integrum octuplo quarta parte hemiſphærij maiorem, vt baſis rectangulum ad baſim quartam ellipſis ex 18. tr. 9. p. 2. Ideo, & ex eadem, vt baſis integra ſphæræ quadriformis oblongæ ad ſphęroidem integrum baſis ellipticæ.

THEOR XI. PROPOS. XVII.

Sphærois, cuius baſis ellipſis æquat conum cuius baſis ſit quadrupla ipſius ellipſis, quæ illi baſim ſubſternit, & altitudo eadem.

SIt quarta ſphæroidis baſis ellipticæ A Q O B C D, & fiat quarta coni F L K H G eiuſdē quartæ altitudinis, ellipſisq; L H K G quadrùplo maioris. Dico quartam ſphæræ oblongæ baſis ellipticę eſſe æqualem quartæ coni F L K H G, Probatur ita eſt quarta ſphęrois quadrangulæ baſis A Q E B C D ad quartam conoidem ellipticæ baſis A Q O C D, vt Q E C B rectangulum ad B Q O C ellipſis quartam ex propoſ. 16. h: ſed vt Q E C B rectangulum ad Q O C B ellipſis quartam, ſic eſt GHL M rectangulum quadruplo maius ipſo B Q E C



rectãgulo ad quartã ellipſis L K H G quadruplo maioris quã quarta QOCB, & L M H G rectangulum eſt ad quartam L K H G ellipſis. vt pyramis L M H G F ad quartam coni L K H G F. Ergo ex 16. tr. 9. p. 2. quarta ſphæræ oblongæ, & quadrangulæ baſis A Q E B C D erit ad ſphæroidis quartam partem baſis ellipticę, vt pyramis F L M G H ſuper rectangulum ad quartam coni F L K H G. ſed oſtenſum eſt ſuprà pr. 16. h. ſphærę quartam rectangulę, baſis oblongę ęquare pyramidem F L M G H quadruplò maiorem. Ergo ex 12. tr. 9. p. 2. etiam quarta ſphæroidis A Q O C B D erit

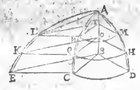
B D erit æqualis quartæ coni F L k G H. Ideoque ex 18. eiuſdem tr. 9. p. 2. tota ſphęrois baſis ellipticæ ęquabit totum conum ſuper ellipſim quadruplo maiorem.

Aduerte idem eſſe oſtenſum à me coroll. 1. Prop. 37. tr. 33. licet breuiùs quàm par ſit, ſed ad hoc vt efficax ſit argumentum ad oſtendēdū ellipſes parallelas eſſe ſimiles ellipſis planum ſecās ellipſes parallelas, oportet præſupponere actum; vel agere per partes proportionales, ſicut & pr. 11. tr. 25. v.g. in ea figura prop. illius G S. ſit ad S. T. vt Z M ad M C,

THEOR. XII. PROPOS. XVIII.

Quæcunque quadratæ ſeu oblongæ ſemiſphæra, ſeu ſemiſphæroidis etiam ellipticæ, Parabolicæ, Hyperbolicæ, ſuperficies eſt ad ſuprficiem globoſam figuræ genitricis in gyrum actæ, vt altitudo ad periphæriam.

SIt figura genitrix quęcunque A B C, ſiue ea ſit circulus, ſeu ellipſis; ſeu parabola, ſeu hyperbola. Sitque octaua pars ſemiſphęræ, quadriformis, vel ſemiſphęroidis cuiuſcunque A-B C E; ſuperficieique A B C in orbem agatur, & generet corpus rotundum A B D C, Dico ſuperficiei octauam partem A B C ſemiſphærę, vel ſemiſphæroidis quadrangulæ eſſe ad ſuperficiem rotundam A D C, vt altitudo C E ad periphæriam D C. Subſcribātur ęquealtę ſuperficies conicæ corpori globoſo, & rotundo D A B C, & trapezia parallelis baſibus æquealta ſuperficiei octauæ partis C A E ſphærę; vel ſphęroidis propoſiti. Supra enim oſtendimus propoſ 9. h. C E eſſe ad O K altitudines, vt B C ad Q O applicatæ, & Q K ad N L vt O Q ad T N: quia *permutando* C E erat ad



C B, vt K Q ad Q D: ſed vt B C ad Q O, ſic D C periferia ad H Q periphæriam, Ergo ex pr. 16. Pr. par. 2. vt C E ad Q O, altitudines ſic D C ad Q H periphęrię, & ſic de cæteris, & *permutando* vt C E ad D C, ſic Q k ad Q H. Verùm vt C E ad D C, ſic eſt ex pr. 6. huius traprezium Q E ad fruſti conici ſuperficiem H C, & vt Q k ad Q H. Sic eſt traprezium Q L ad fruſtum ſuperficiei conicę V Q. & ſic de cæteris. Quare ſi per continuam inſcriptionem putes illas ſuperficies, corporis quidem globoſi per continuam inſcriptionem ſuperficierum conicarum, & corporis quadrangulæ ſphęroidis per continuam inſcriptionem trapeziorū imitari, erunt ex 5. huius in eadem proportione, & A C E ſuperficies ſemiſphærę erit ad A D C ſuperficiem corporis globoſi, vt C E ad D C. Quare quadrationi ſubigi poterunt ſuperficies ſphęræ, & ſphęroidis quadriformis, quia ſphærę ex Archimede, & 48. p. tr. 31. & ſphæroidis ſuperficies ex mea 36. prop. tr 31. noſcuntur. Idem verò quod de toto aſſeritur militat de partibus vt facile ex propoſitione deduces.

EXPENSIO III.

De conoidibus parabolicis oblongæ baſis.

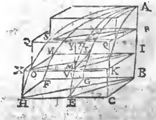
LIcet Conoides parabolicum oblongę baſis minus veniat in vſum, quàm ellipticū ad integritatem tamen doctrinæ aliquid etiā de eius cubatione oſtendere viſum eſt, cùm & aliquando opus exigere poſſit, vt eius menſura exoptetur.

THEOR I. PROPOS. XIX.

Conoides parabolicum quadratæ baſis eſt ad conoidem parabolicum oblongæ baſis, eiuſdem altitudinis vt quadratùm baſis ad rectangulum baſim.

SIt quarta pars conoidis parabolici quadratę baſis fig. pr. 9. h (quod ſufficit) A B C G E. Dico eam eſſe ad quartam conoidis oblongæ A B C F H, vt quadratum B E ad rectangulum B H.

Probatur. Ducantur enim plurima plana parallela baſi, vt L k M O, &c. Q Y & cætera erunt parallela plano ſc. C H, & K O & Q Y ſic B C I K, & P Q Ducatur igitur planum diagonale A M E B, & A S H B, efformabunturque ſectiones B E, & M P I; & B H, I, & P, trianguláque B C F; I K M, & P Q T erunt ęquiangula in ſphæra quadriformi, ſiquidem anguli apud C, K, Q recti ſunt, & apud B, I, P anguli acuti ſunt anguli inclinationis planorum A E B diagonalis plani, & A C B baſis. Quamobrem ex prop. 3. tr. 22. æquales ideo ex coroll. pr 17. tr. 10. erunt æquiangula, & propter hoc ſimilia ex prop. 4. tr.



10. & def. 1. tr. eiuſdem. Idem dicendum eſt de triangulis B C H, & I O K, & P Z Q ob eandem rationem. Quare ex pr. 4. tr. 10. C E erit ad C B vt K M ad K I, & *permutando* C E ad K M, vt C B ad k I; ſed vt C B ad k I ſic eſt C H

ad K O,

ad KO, ergo ex 16. tr. 9. C E erit ad K M vt C H ad K O. Ideoque ipſa triangula erunt proportionalia; ſiquidem adipiſcuntur latera circa æquales angulos proportionalia. Ideoq; triangulum B C E erit ad triangulum I K M vt triangulum C H B ad triangulum I K O. & ideo cor. dupla quadrata BCGE erit ad BKLM vt rectangulum BCFH ad rectangulū KLNO,& ideo ſi parallelepipeda ſuper has baſes ſtatuerentur eleuata æquealta erit parallelepipedum BCG EV ad I M Y parallelepipedum ex 8. tr. 34. vt Parallelepipedum B HX ad parallelepipedum I O Z. Quapropter erit etiam quarta pars conoidis parabolici quadriformis quadratæ baſis ad quartam partem conoidis parabolici oblongæ baſis quadriformis vt baſis quadratum ad baſim rectangulum ex prop. 4 huius cum multiplicata omni multiplicatione poſſibili minori quantitate omni quantitate dabili excedant ipſa rectangula circumſcripta ipſos conoides parabolicos. Ideo, & quadruplū conoidis quadratæ baſis parabolici erit ad quadruplū quartę partis conoidis parabolici oblongæ baſis, vt baſis B E quadratum ad baſim B H rectangulum.

COROLL. I.

Hinc eſt, quòd etiam ſit conoides parabolicum quadratæ baſis ad conoidem parabolicum oblongæ baſis, vt linea C E ad C H lineam. Nam C E baſis eſt ad C H baſim lineę. vt baſis CG ſuperficies ad CF ſuperficiē ex 1. tr. 10. vt autem C G ad G F, ſic eſt parabolicum conoides quadratum ad conoidem oblongum: Ergo ex 16, tr. 10. vt CE linea ad C H lineam.

COROLL.

Hinc quoque euidens ſit; ſingulas æquealtas portiones, vt A Q K L M. Conoidis quadrati, ad ſingulas A Q K N O æquealtas conoidis parabolici oblongæ rectangulęque baſis eſſe, vt baſis quadrata ipſorum planorum abſcindentium I K M L ad plana rectāgula abſcindentia I N O K; Et vngulæ quoque portionem AMKI ad vngulæ portionem A I KO eſſe, vt triangulum IKM ad triangulum IKO.

DEFINITIO.

Cylindricus parabolicus eſt corpus duabus parabolis parallelis contentum, ſuperficie curua illis rectangula, & iuxta ambitum parabolarum ſe curuante, & ſuperficie plana per applicatas extremas parabolarum ducta.

Itaque Cylindrus parabolicus erit corpus a h b c g duabus parabolis a h b, & c l g cōtentum, circa quas rectangulè circumuertitur ſuperficies h b c g; & quam terminat planum a b l g actum per applicatas parallelas a b, & g l parabolarum.

Sectio in ipſo duplex fieri poteſt, vel per planum actum per axem l c vt in fig. propoſ. teq: & per latus b g, vt eſt planum K l c, vel per latus c h actum, & per applicatam g. l. Iam verò prop. 15. tr. 25. oſtendimus, hanc ſectionem eſſe parabolam. Siquidem omnes lineæ normales in ſuperficie curua ad parabolam c g ductæ ſunt. Vnde valet eadem oſtenſio. Quare remanet hic ſolùm oſtendendū, quod ſectio K l c exhibitæ figuræ parabola quoque ſit.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Coni parabolici ſectio per axem parabolæ baſis, & cum ipſa angulum quemcunque faciens parabola eſt.

Sit parabola baſis l c g, & per axem ipſius l c tranſeat planum ſecans Cylindrum parabolicum a h b c g, quod ſit k c l. Dico hoc planum ſecando Cylindrum fieri parabolam.

Planum l c g ſemiparabola eſt; ideoque ex 5. tr. 23. quadratum l g erit ad quadratum n u vt l c axis ad u c axem, vel portionem eius. Sed vt g. l quadratum ad n u quadratum, ita eſt, vt dicam, k l quadratum ad m u quadratum. Ergo ex 11. 15. k l quadratum eſt ad m u quadratum, vt l c ad u c: Quare ex 5. propoſ. 23. pūcta K, & m ſunt in parabola.



Quod autem quadratum g l ſit ad quadratum n u, vt quadratum k l ad m u quadratum probatur, quia triangula K l g. & m u n ſunt æquiangula; eſt enim angulus in ipſis g, & n rectus ex Theſi ob ſuperficiem rectam c h b g at l & u æquales, quia ſunt anguli inclinationis planorum ex 18, tr. 22: Quare ex prop. 17. l. 4. coroll. a. erunt æquiangula. Quapropter ex prop. 4. tr. 10. latera erunt proportionalia. Ideo ex def. 1: tr. 10 in declaratione ipſius def. erunt quadrata ſimilia: vnde erit quadratum, g l ad quadratum n u, vt K l quadratum ad m u quadratum: quod erat oſtendendum.

THEOR. III. PROPOS. XX.

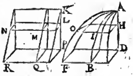
Dimidium quartæ partis conoidis parabolici quadriformis oblongæ, vel quadratæ baſis. eſt Cylindri parabolici fruſtum ſectum per latus, & axem parabolæ ſubſternentis baſim.

Prob. Nam in fig. 18. propoſ. huius BAC ſit parabola, baſis A T M E & eſt planum ſecans per axem A B, & A T E Q C ſuperficies globoſa Cylindri rectangula parabolæ A C baſis, & idem dicas de dimidio quartæ partis hæmiſphærij oblongi A O H B C.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Conoides parabolicum oblongæ baſis, & rectangulæ æquat priſma eiuſdem altitudinis, & æqualis rectangulæ baſis.

SIT priſma R K eiuſdem baſis quadrangulę R P, ac F D; & altitudinis P K eiuſdem, ac D A conoidis quadr. formis F A D rectangulæ baſis, vel eius quartæ partis, quæ ſufficit. Dico hoc priſma R K ęquari ipſi conoidi parabolico F A D. Quod, vt oſtendatur, ſit Q P K priſma eiuſdem altitudinis D A, & eiuſdem baſis BD, de quo conſtat trac. 34 prop. 55. Eucl adauc. ęquari quadriformi conoidi A D B. Quo poſito, ita oſtendo prop. A D B quadriforme conoides quadratę baſis eſt ad A D F conoidem parabolicum oblongæ baſis, vt baſis quadratum D B ad baſim rectangulum D F ex prop. 18. h. Sed vt quadratum D B ad D F rectangulum: ſic eſt æqualis ipſi Q P baſis priſmatis Q K ad baſim P R priſmatis R K æqualem ipſi F D: vt autem Q P baſis ad baſim



P R: ita ex 15. tr. 34. eſt priſma, Q K ad priſma R K. Ergo ex 16. tr. 9. p: 2. conoides parabolicum B AD quadratæ baſis eſt ad conoidem parabolicum FAD oblongæ baſis, vt priſma Q K P ad priſma R K P; ſed priſma QKP ęquatur conoidi parabolico quadratæ baſis A D B ex prop. 55. tr. 34. Euc. ad. Ergo ex prop. 12 tr. 9. Euc. adauc. etiam priſma RKP æquabitur conoidi parabolico rectangulę baſis F D A. Licet autem F D A ſit propriè quarta pars, intelligitur tamen de toto quadruplicando R K P.

COROLL. I.

HInc fit, idem dicẽdum eſſe de octaua parte conoidis quadriformis oblongæ baſis, quod æquetur octauæ parti priſmatis eiuſdẽ baſis, & altitudinis ex prop. 18. tract. 9. Eu. ad. & ideo cognoſcetur cubatio quoque ſcindę Cylindri parabolici per axem, & latus ſecti, vt explicauimus prop. 19. h. Nam ex prop. 20. huius eadem ſectio bifarians quartam conoidis quadriformis cuiuſcunque, eſt etiam ſectio Cylindri conoidalis per latus, & axem parabolę baſeos.

COROLL. II.

HInc quoque habetur cubatio portionum conoidis parabolici oblongæ rectangulęque baſis abciſæ plano baſi parallelo. Nam ex 18. huius coroll. portio ſolidi conoidis quadratę baſis AHI, eſt ad partem ſolidam conoidis rectangulæ baſis AHO: vt ipſa baſis quadrata I H ad baſim rectangulum HO. Conoidis autẽ quadratæ baſis portio AHI eiuſdem altitudinis æquatur priſmati eiuſdem altitudinis K M ex 55. tr. 34. Eucl. ad. & baſis quadrata conoidis H I quadratæ baſi rectangulæque L M portionis priſmatis ex probatione eiuſdem prop. Verum vt H I quadratũ ad H O rectangulum: ita eſt D B quadratum ad D F rectangulum ex 18. h. vt autem DB ad D F: ſic eſt P Q ad Q R, cum baſes æquales preſupponantur PQ ipſi B, & P R ipſi DF. vt autẽ PQ ad PR ſic eſt LM ad LN, quia ſũt rectãgula eiuſdem altitudinis: Vnde ſe referent vt baſes, quæ ſunt eędem in P Q & L M ſicut eędem in R P. & L N. Ergo ex 16. tr. 9. Euc. ad. p. 2: baſis H I. erit ad H O vt L M ad L N. Sed ex prop. 55. tr. 34. H I & L M æquantur: Ergo etiam H O, & L N. Cum itaque vt dicebam H I A ſolida portio conoidis quadratæ ſit ad A O H portionem ſolidam conoidis oblongæ baſis, vt H I quadratum baſis ad H O rectangulum. ſit autem H I ad H O vt L M ad L N ob earum oſtenſam æqualitatem, & vt L M ad L N; ſic ſit priſma K M ad priſma K N. Erit ex 16. Eu. ad. tr. 9 conoidis parabolici portio A I ad portionem ſolidam AO, vt priſma K M ad priſma K N: Sed priſma K N, & conoidis parabolici quadrati portio AIH æquantur ex 55 tr. 34. Euc. ad. Ergo etiam portio conoidis parabolici rectangulę baſis, & priſma K N æquabuntur ex 12. tr. 9. Euc. ad. p. 2. Licet autem figura exprimat quartam partem. idem dicendum de tota. Hinc noſces, & portionem vngulæ parabolicæ cubare. Nam, cùm ſit dimidium portionis AHO, quæ ęquatur priſmati K L N. Si aſſumas dimidium priſmatis K L N æquabitur ex 13. pr. tr. 9. Euc. ad. ipſi portioni Cylindricę vngulę.

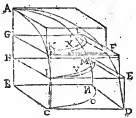
THEOR. V. PROPOS: XXII.

Conoides Parabolicum quodcunque quadratæ baſis eſt ad quodcunque conoidem parabolicum ellipticæ baſis eiuſdem altitudinis, vt baſis rectangulum ad baſim ellipſim.

SIt enim figura prop. 14. ſupponaturque A B C O N eſſe conoidem parabolicum ellipticæ baſis, vel eius quartam partem, & A B C N D rectangulæ baſis æquealtę: quarum axis, BA diuidatur in quot libuerit partes ęquales, & agantur parallela plana baſi per ſingulas diuiſiones: ſuperque iſta ædificentur parallelepipeda æquealta, vt ſunt diametri B A partes interceptæ ſicut, & circa conoidem parabolicum Cylindri elliptici ęquealtos. Quo poſito, ſic oſtenditur propoſ. Ex prop. 27. tr. 30. ita refertur B C N D rectangulum ad rectangulum M E I H, vt ellipſis N O B C ad ellipſim M H V I; & H M E I rectangulum refertur ad rectangulum G L F K vt ellipſis H M V I ad ellipſim G L X K, & ſic, ſi pluꝛimæ alię baſes adſint. Vt autem baſes rectangula, vel ellipſes ad inuicem; ſic parallelepipeda ęquealta, vel æquealti Cylindri ſuper illas baſes erecta ex prop. 8. tr. 34 Euc ad auc.

Id circò

Idcircò parallelepipedum ſuper BCN D erit ad parallelepipedum ſuper H M E I, vt Cylindrus ſuper N O B C ad Cylindrum ſuper M H I V ellipſes; Et parallelepipedum ſuper H M E I erit ad parallelepipedum ſuper G L F K, vt



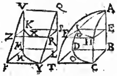
Cylindrus ellipticus equealtus ſuper H M V I ad equealtum Cylindrũ ſuper G L X K. Ideoq; ex coroll. 2. pr. 19. tr. 9. Euc. adauc. erunt omnia parallelepipeda ſimul; quę ſunt antecedentia in proportione cum conſequentibus ad omnes Cylindros antecedentia pariter & conſequentia omnia ſimul, vt vnum antecedens parallelepipedum H D ſuper rectangulum N D B C ad aliud antecedens HO. Cylindrum ſuper ellipſim NOBC. Sed hæc ex propoſ. 23. tr, 34. ſunt, vt rectangulum N D B C ad ellipſim NOBC. Ergo omnia parallelepipeda erunt ad omnes Cylindros ex 16. tr. 9. Euc. ad. vt baſis rectangulum N D B C ad baſim ellipſim N O B C. Si autem multiplicētur, quantum queunt multiplicari per ſubduplam diuiſionem altitudinum, relinquent parallelepipeda à conoide quadriformi rectangulo, & Cylindri ab elliptico quantitatem omni data minorem ex prop. 14. tr. 33. Quare dabitur differentia inter ipſa circumſcripta parallelepipeda, & conoidem quadriforme oblongum, & inter Cylindros, & ſphæroidē ellipticum omni conceptibili minor, & ideo nulla igitur æquabuntur infinitę parallelepipedorum multitudini conoides parabolicum oblongum, & Cylindrorum conoides parabolicum ellipticæ baſis, Ideoq; conoides parabolicum quadriforme oblongum erit ad conoidem parabolicum baſis ellipticæ, vt rectangulum ad ellipſim baſim. Licèt autem figura oſtendat quartam partem, intellige tamen ex pr. 18. tr 9. p. 2 de totis corporibus; quæ ſunt quadruplo maiora, ſicut baſes eorũ ſunt quadruplo maiores. Poterit etiam vltima concluſio deduci ex 4. huius: nimirum, quòd conoides quadrangulæ ad conoidem ellipticæ baſis dicat ipſam proportionem, quam parallelepipeda ad Cylindros, nimirum quam BNDC ad B N O C. Eo, quòd circumſcripta parallelepipeda ad Cylindros ſint vt B N D C, ad B N O C, & poſſint circumſcribi ſuper omnem differentiam, quæ exiberi poſſit inter ipſa, & conoides.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Conois elliptica baſis æquat conum priſmaticum eiuſdem ellipticæ baſis, & eiuſdem altitudinis.

Sit conois ellipticum A D O C B, nempe, cui baſis ellipſis A D O C. itque, & eiuſdem altitudinis, quam habet conois ellipticũ A D O C B, priſmaticus conus Y M N V Q, cuius baſis M N L Y eadem, ac B D O C. Dicoque conoidem ellipticũ A D O C B æquare conum priſmaticum Y Q V M N L. Quòd vt oſtendatur conoidi elliptico circumſcribatur quadriforme conoides A D T C B. & pariter cono priſmatico circumſcribatur priſma eiuſdē baſis M P Y L, cùm circa eandem baſim circumſcribantur, eruntque vtpote corpora circumſcripta æqualis, & ſimilis baſis.

Pr. propoſ. A B D O C conoides ellipticum ex prop. 22. huius eſt ad conoidem quadriforme A D T C B, vt baſis B D O C ellipſis ad



B D T C rectangulum, nimirùm, vt eadem M N L Y ellipſis ad eundem M Y P L rectangulum. Sed vt M N Y L ellipſis ad M Y L P rectangulum, ſic ex pr. 3. huius eſt ellipticus, & priſmaticus conus P N Y Q L ad priſma M P Y L, V Q. Ergo vt conoides parabolicum ellipticũ A B D O C ad conoidem parabolicam quadriforme A D T C B; ſic eſt priſmaticus conus V Q M N L Y ad priſma V Q M Y. ed conoides quadriforme A B T C D æquat priſma ex oſtenſis propoſ. 20. huius. Ergo etiam ex 12. tr. 9. p. 1. Euc. adauc. conoides ellipticum A D O C B æquabit conum priſmaticum ellipticum M N L Y V Q.

COROLL.

Hinc ne dum ipſum conoidē parabolicum ellipticæ baſis; Sed ſingulæ eius portiones cubantur: tum quia ex 35. prop. tr. 34. Eu. ad. id probatur de conoide parabolico rotundo, & cono priſmatico circularis baſis: Quare id eodem argumento poterit dici de partibus conoidis parabolici, & coni priſmatici ellipticarum baſium. Tum quia idem valet argumentum iam factum de partibus quoq; trũcatis à planis baſi parallelis, cum per iſtam abſciſionem eiuſdem generis corpora, & altitudinis, & baſium æqualium Z, & F E remaneãt A I G H E, & V Q K X R S. Vnde eodem modo argumentaberis. Quod autem baſes remaneant æquales Z S, & F E, Prob. Quoniam B C quadratum eſt ad E H quadratum, vt B A ad

E A ex

E A ex 5. tr. 23. & ſic quadratum D B ad quadratum I E. Quare latus C B ad H E, & B D ad I E dupplicatam habebunt proportionem B A ad E A. Ideoque, cum ſit eiuſdem dupplicata, erunt in eadem proportione C B ad H E, & D B ad I E. Ideoque *permutando* C B ad D B, vt H E ad I E. Eadem ex def. 1. tr. 10. erūt rectāgula T B & F E ſimilia, & propter hoc erunt in dupplicata ratione laterum C B ad H E, vel D B ad I E ex pr. 21. tr. 10. ſcilicet vt C B quadratum ad H E quadratum ex eadem dupplicatam habentia rationem laterum C B ad H E. ſc. ex 5. tr. 23: vt B A ad E A. Verùm vt B A ad E A lineæ ſic eſt L Q ad Q S, ob earum æqualitatem, & vt L Q ad Q S, ſic Y L ad R S ob parallelismum earum ex 2. tr. 10. Et ex 1. eiuſdē vt Y L ad R S. Sic rectangulum M Y ad rectangulum Z S ob equalem altitudinem. Quare ex 16. tr. 9. p. 2. T B rectangulum erit ad F E rectangulum, vt rectangulum M Y ad rectangulum Z S. Sed rectangulum M Y, & T B. Sunt equalia ex Theſi. Ergo etiam rectangulum F E ex Z S.

EXPENSIO III.

De Conoidibus Hyperbolicis oblongæ, & quadrangulæ baſis.

HOc corpus minùs vſibus humanis aptum eſt, minùſque cognitum. Vnde etiam breuiùs de ipſo agemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Conoides Hyperbolicum quadratæ baſis eſt ad conoidem hyperbolicum oblongæ baſis eiuſdem altitudinis, vt baſis quadrata ad baſim oblongum rectangulam.

PRob. eodem modo ac prop. 9. h. ſolùm præſupponendo figuras A B Q C, B A L G, B A N F ellipſes eſſe: ad eam propoſ. remittimus lectorem. Idem quoque infertur coroll.

Precor lectorē vt pr. 46. tr. 34. linea 9. deleat *cui parellelepipedum;* & cęt. & reponat *priſmatiſque.* Et coroll. intelligat quod inuolucrum ſit æquale quatuor priſmatibus, & quatuor pyramidibus, quarum altitudo ſit differentia inter E R applicatam verticis, & E K: baſis verò ipſorum triangulum E B.

DEFINITIO.

Cylindrus hyperbolicus eſt corpus duabus hyperbolis parallelis contentum, ſuperficieque curua illas hyperbolis rectangulis, & iuxta earum ambitum ſe curuante, & ſuperficie plana per applicatas extremas hyperbolarum ducta.

ITaque Cylindrus hyperbolicus a b h e i g. vt figur. prop. 25. eſt corpus duabus hyperbolis a h b, & e i g contentum, ſuperficieque curua h b e g, & plana b a i g acta per applicatas g i, & a b. & recta ad axes c i, a h.

DEFINITIO.

Sectio in hoc Cylindro duplex fieri poteſt, vel plano acto per axem i c, & latus b g, vt eſt c f i, vel plano acto per applicatam g i: Iam verò oſtenſum eſt hanc ſectionem eſſe hyperbolā pr. 16. tr. 23. vt etiam diximus de parabola. Quare remanet oſtendendum, quòd etiam c i ſit hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Coni parabolici ſectio per axem hyperbolæ baſeos, & cum ipſa angulum quemcunq; faciens, hyperbola eſt.

SIt hyperbola baſis e g l Cylindri hyperbolici a b e i g. Et per axem ipſius i e ducatur planum c i f, quod ſecet latus g b. Dico e i g eſſe hyperbolam.

Probatur ex prop. 6. tr. 23. Euc. ad. Rectangulum ex X k, & X e eſt ad rectangulum ex e K & e e, vt quadratum X n ad quadratum p e; quadratum verò X n ad quadratum p e eſt, vt quadratum X m ad quadratum e Prob. ſimilitudinem triangulorum parallelis contentorum lateribus, m x n, & e p P. Siquidem plana eorum præſupponuntur ducta parallela plano f i g. Quare etiam ſectiones, quę ſunt latera triangulorum, erunt parallela inuicem ex tr. 22. pr. 14. Quamobrem ex 16. tr. 9. p. 2. etiam quadratum X m erit ad quadratum P E, vt rectangulum ex X K, X e, ad rectangulum ex e K & e e. Hæc autem eſt eſſentialis proprietas hyperbolarum: quæ demonſtrat puncta m & P eſſe in hyperbola, ſicut, & de quibuslibet alijs idem oſtendi poteſt. Ideoque cùm omnia puncta in linea f, m, P, e. oſtendantur eſſe in hyperbola, erit ipſa plana ſuperficies hyperbola f m e i.

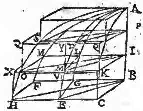


THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Dimidium quartæ partis conoidis hyperbolici oblongæ, vel quadratæ rectangulæque baſis eſt Cylindri hyperbolici fruſtum ſectum per latus Cylindri, & axem hyperbolæ.

PRob. ex fig. prop. 18. & 24. & 9. huius. Nam ex def. illa eſt ſectio fruſti Cylindri hyperbolici, quæ continetur ſuperficie, plana triangulari I f g, qualis eſt B E, ſuperficie f g m e plano hyperbolæ i e g, recta; & circa illam flexa, & talis eſt A T E C K Q normalis hyperbole A B C, & circa eam flexa, vel etiam ſuperficies A O H C eiuſdem rationis,

& tandem plano c g f i per axem ducto, & ad hyperbolam i c g inclinatò, & tale planum eſt A T E B ductum per axem A B, & ad hy-

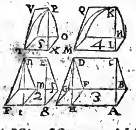


perbolam A BC inclinatum, vel etiam planum A O H B eiuſdem qualitatis; Vndè A T E B C, vel A O H B C erit fruſtum Cylindri hyperbolici obliquè reſecti.

THEOR: IV. PROPOS. XXVII.

Conoidis hyperbolici quarta pars oblongæ baſis, rectangulæque æquat priſma, pyramidemque eiuſdem altitudinis, cuius priſmatis baſis triãgularis conſtet ex applicata breuiori, & infima minoris pro vno latere, & axe, & altitudine maioris hyperbolæ efformatricis pro alio. Altitudo verò eius ſit tangentis maioris verticem. At baſis pyramidis conſtet ex altitudine eadẽ, quæ hyperbola efformatricis, & baſis habeat latus applicatam minorem, & alterum latus differentiam inter tangentem verticis longiorem, & applicatam longiorem,

SIt priſma C A F D, cuius altitudo A H ſit eadem, ac applicatæ ad verticem K Q. Eſt enim applicata verticis, quia ſi prolungetur L K, vſque dùm conueniat cum M Q erit L K prolungata axis tota tranſuerſa hyperbolæ, vt debet ſupponi. Baſis verò triangulum AC B conſtet ex AC altitudine eadem, ac L K, & A B ęquet applicatã L N minoris Hyperbolę L K N. Pyramis verò ſit DFG altitudinis eiuſdem AC vt L K, & baſis eius ſit dif-



ferentia F G inter K Q tangentem, & L M applicatam maximam maioris Hyperbolæ: Ita vt gG æquetur LM, & AB ipſi LN; & ideo baſis A G æquetur baſi N M. Dico hoc priſma, hancque pyramidem C D A F G æquari conoidi hyperbolico LNMQ oblongæ baſis rectangulæ eiuſdem altitudinis. Quod vt probetur ſit priſma, & pyramis E n m F g eiuſdem conditionis, & rationis, quam deſcripſimus prop. 56. tr. 24. Euc. ad. æquantia hyperbolicum quadriforme. Nempe latus trianguli baſis priſmaticæ gE ſit eadem ac PX altitudo hyperbolæ, & f g ęquet applicatam infimam O X, & maxima f m vel g t æquet tangentem verticem P V & F t differentiam inter X T, & P V, ita quod gF ęquetur X T, & f g ipſi O X, & ideo F f quadratum OT quadrato ęquetur: Quod corpus ex priſmate pyramideque conflatum æquat hyperbolam quadriformem quadratæ baſis vt ibi oſtendimus.

Pr. Ita eſt ex 24 h. conoides hyperbolicum quadriforme 5 quadratę baſis, ad rectangulæ baſis conoidem hyperbolicum 4. vt baſis quadratum 5. ad baſim rectangulum 4. Sed vt baſis quadratum 5. ad baſim rectangulum 4. ita eſt baſis quadrata 2. ad baſim rectangulam 3, cùm ſint æquales baſes ex conſtructione, nẽpe 2, 5 & 4, 3. Sed vt baſis 2 quadratum ad baſim 3 rectangulum: ſic eſt priſma, pyramiſque elata ſuper quadratum 2 ad priſma pyramidemque elata ſuper rectangulum 3, ex 1 huius cùm ſit eiuſdem altitudinis. Ergo ex 10. tr. 9. p. 2. ita erit priſma pyramiſque ſuper quadratum 2. ad priſma pyramidemque ſuper rectangulum 3 vt conoidis hyperbolici pars quarta ſuper quadratum 5 ad conoidis hyperbolici quartam ſuper rectangulum 4. Sed conoidis quarta 5. æquatur priſmati pyramidique 2. ex pr. 56. tr. 24: Ergo etiam conoidis quarta pars 4. æquabitur priſmati pyramidique 3 ex propoſ. 12. tr. 9. Euc. ad.

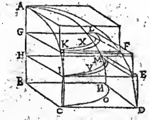
THEOR. V. PROPOS. XXVIII.

Conoides quodcunque hyperbolicum quadrata baſis ad quodcumque conoidem hyperbolicum ellipticæ baſis eſt, vt baſis quadratum ad baſim ellipſim;

PRobatur vtendo fig. prop. 16. & ſupponatur BCONA eſſe conoidẽ hyperbolicum, vel eius quartam partem ellipticæ baſis, quod meliùs deſeruit, & idem ſupponatur de corpore A B C N D rectangulæ baſis ęquealtæ, quorum axis diuidatur, in quas libuerit, partes æquales, & agantur parallela plana baſi B D per ſingulas diuiſiones, ſuperque illa ędificentur parallelepipeda æqualta, vt ſunt diametri hyperbolici partes interceptę, ſicut & circa conoidem hyperbolicum Cylindri elliptici æquealti. Quo poſito ſic oſtenditur propoſitio. Ita refertur B C N D rectangulum ex prop. 27. tr. 30. ad rectangulum M F I H vt ellipſis N O B C ad ellipſim M H V I. At M H V I rectangulum refertur ad rectangulum G L F k, vt ellipſis H M V I ad ellipſim G L X K, & ſic ſi plurimæ aliç baſes adſint, ad inuicem referuntur, vt autem rectangula ad rectangula, & ellipſes ad ellipſes, ſic pa-

Digitized by Google

rallelepipeda æquealta ex rectangulis ad inuicem, vt elliptici Cylindri æquealti illis ad inuicem ex prop. 8. car. 1. & p. 31 p. 2. tr. 34. Id circò parallelepipedum ex N D B C conſurgens erit ad parallelepipedum ſuper H M E I, vt Cylindrus ellipticus eleuatus ex NOBC ad Cylindrum ex baſi MHVI, & parallelepipedum ſuper MHEI baſi locatum erit ad parallelepipedum ſuper GLFK, vt Cylindrus ellipticus æquealtus ex baſi elatus MHVI, ad æquealtum Cylindrum ſuper GLXK. Ideoque



ex coroll. 2. prop. 19. tr. 9. Euc. ad. erunt omnia parallelepipeda, quę ſunt antecedentia proportionis ſimul cum conſequentibus ad omnes Cylindros ſimul antecedentia item, & conſequentia, vt vnum antecedens parallelepipedum ſuper rectangulum N D B C ad aliud antecedens Cylindrum ſuper ellipſim N O B C. Verum iſta ex prop. 23. tr. 34. ſunt, vt rectangulum N D B C ad ellipſim NOBC: Ergo omnia parallelepipeda erunt ad omnes Cylindros ex 16. tr. 9. Euc. ad. vt baſis rectangulum NCBD ad baſim ellipſim NOBD: Si autem hæc multiplicentur, quantùm queunt multiplicari mediante ſubdupla diametri diuiſione excedent parallelepipeda conoidem hyperbolicum rectangulæ baſis; & Cylindri conoidem hyberbolicum ellipticæ baſis quantitate omni imaginabili minori; quæ poſſit exiberi ex prop. 14 tr. 33 Ideoque contemtibili, & pro differentia non adducenda. Quãobrem æquabitur infinita parallelepipedorũ multitudo, & conoides hyperbolicum baſis oblongæ, ſicut Cylindrorum infinita multitudo, ac conoides hyperbolicum ellipticæ baſis: Quapropter conoides quadriforme hyperbolicum baſis rectangulę erit ad conoidem hyperbolicum baſis ellipticę vt rectangulum baſis ad ellipſim baſim. Licet autem fig. oſtẽdat octauam partem, intellige tamen de totis corporibus ex pr. 18. tr. 9; p. 2. quæ ſunt quadruplo maiora, ſicut corũ baſis. Poteſt etiã trahi vltima cõſequentia ex prop. 4. huius: quia talia corpora circumſcripta, nempe parallelepipeda atq; Cylindri ſunt in eadẽ proportione quę, eſt baſium: ac ea, quę circumſcribunt, nempe conois rectangulę ad conoidem ellipticæ baſis.

EXPENSIO V.

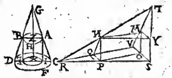
De Annulis.

PRopoſ. 19: & 20. tr. 34. Annulos cubauimus; Sed breuiùs, & ſubobſcurè. Vnde viſum eſt nobis aliam eiuſdem corporis cubationem tradere, & partium quoque ipſius, quod ſupra non præſtauimus.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Fruſtum coni Cylindro æquealtò, & baſi ſuperiori inixo aquat priſma; pyramidemque æquealta, priſma quidem ſuper baſim rectangulam ex differentia radiorum pro vno latere & peripheria minori latere aquali pro alio. Pyramidem verò ſuper baſim, differentia radiorum, & peripheriarum comprehenſam eleuentur.

HAnc propoſ. oſtendimus pr. 29. tr. 24. ſed ſubobſcuriùs, quod pr. 13: eiuſdem fundamentali diametrum pro radio aliquoties obrepſerit. Vnde, cum hęc dicendis ſternat baſim diluciḋiùs tradenms. Dicimus itaque AHBCFD fruſtum coni ablato A B H I E Cylindro ęquari priſmati O M N P Q, quòd habeat baſim, cuius latus O V ęquetur ſegmento C I differentię inter radium X D, & Z B, & aliud latus V Q minori peripheriæ A H B Cylindri ęquetur. Sed non ſolum, verùm iunctum pyramidi N PQR, cuius latus PQ æquet O V ſeu C I eandem radiorum differentiam, & Q R ſit æquale latus differentiæ peripheriarum A H B, & D F C quæ ambo ſint æquealta ipſi fruſto, ie. altitudinis. I A.



Quod, vt probetur, fiat rectangulum SVR. cuius latus S V æquetur radio C X; & V R peripheriæ maiori C F D, & ſuper eam erigatur pyramis T R S V normali latere T æquealto ac coni axis X G, agaturque ad eandem eleuationem X Z planum Y MN; denique tatnrque normale ad baſim planum OMN P, & P NQ. Eritque formatum priſma O M V N P Q, & pyramis PNQR: de quibus oſtendendũ eſt fruſtum coni Cylindro excauatũ CFDAHBA eis æquari.

Prob. Baſis CFD circulus æquatur baſi rectangulo SVR ob radium CX ęqualem lateri. SV, & C F D peripheriam æqualem lateri V R ex prop. 3. tr. 30. Euc. ad.

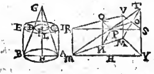
Vnde, & pyramis RSTV æquabitur cono DFCG ex coroll. 3. tr. 24. pr. 2. Modo, vt CFD peripheria ad AHB peripheriam ex 43. tr. 10. Eucl: ad. ſic X C radius ad A Z radium ſed vt XC radius ad AZ radium: Ita eſt XG altitudo ad Z G altitudinem; & ita æquales S T ad Y T. Sed vt ST ad Y T, Ita SV ad YM & VR ad M N ob ſimilitudinem triangulorũ ex 4. tr. 10. Quia, vt ſunt parallela plana; ſic ſunt parallelę ſectiones nempè ipſorum latera S V, & Y M, & V R, & M N ex 14. tr. 22.

Ergo

i ſgo. vt XC ad A Z ſic S V ad Y M. Igitur ex 12. lib. 9. p. 2. cùm XC, & V S æquentur, etiã A Z, & M Y erunt æquales. Et pariter; ita erit peripheria C F D ad peripheriam A H B, vt V R ad M N. Sed cum ſi t C F D, & V R æquales ex Theſi, etiam ex 12. lib. 9. p. 2. A H B, & M N erunt equales. Cùm itaque M N latus, & A H B peripheria, ſicut & Y M aliud latus, & A Z radius æquentur quoque, erunt ex prop. 3. tr. 30. baſis A H B, & Y M N equales, & P S O æquabitur quoque ipſi A H B. Quamobrẽ ex coroll. prop. 3. tr. 23. equabitur pyramis Y T M N, & conus A H B G, vtpote æqualis baſis, & æqualis altitudinis. Sicut etiam priſma SOP Y M N, & Cylindrus I E A H B, Ablatis itaque iſtis æqualibus ab vtriſque priſma quidem SOP Y M N, & pyramis Y M N T à pyramide maiori, & Cylindrus I E A H B, conuſque AHBG à cono maiori C G D: reſtabunt priſma QVP O M N, & pyramis P Q N R equalia corpori circumambienti C F D I E A H B. Iam vero patet, quod QV, ſeu æqualis PQ eſt differẽtia maioris radij S V vel C X ab Y M vel equali A Z. Sicut Q R eſt differentia peripheriarum V R, vel æqualis CFD peripheria ab V Q M N æqualibus ipſi AHB peripheriæ.

COROLL. I.

EAdem propoſitio eſt de Cylindro vacuato fruſto coni æquealto, & baſi interiori inixo, vt eſt CIA DEF: æquatur enim priſmati MOVPQN, cuius baſis comprehendatur à recta æquante peripheriam minorem, & differentia radiorum eiuſdem altitudinis M V & pyramidi PQR m N, cuius altitudo PQ æquet differentiam radiorum: baſis verò quadrata ſit NR altitudinis eiuſdem N Q, vel M V, ac eſt A I, & differentia peripheriarum Q R. eadem verò eſt oſtenſio: Nam fiat rectangulum triangulum S V Y æquale circulo AHB ex prop. 3. tr. 30. & ſuper illud erigatur priſma eiuſdem altitudinis, ac Cylindrus, & pyramis eiuſdem altitudinis, Y T ac conus. Nam



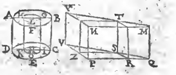
pyramis Y T M N eiuſdem altitudinis HG æquabitur cono A I GH; & coroll. prop. 3. tr. 34. & pyramis S T PO oſtenſa eſt in contextu huius propoſ. æqualis cono reſiduo C FDG, & ex prop. 31. tr. 30. priſma Y S V m R M equabitur Cylindro A I L H B. Quamobrem reſiduum corpus O V P Q M N R m æquabitur reſiduo C I A L D E B. Hoc autem corpus conſtat priſmate O V M P Q N, & pyramide baſis quadratæ P Q N m R.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Cylindrus cauus, vel annulus quadrangulus eſt æqualis parallelepipedo eiuſdem altitudinis, cuius baſis rectangulæ vno latere æquetur peripheriæ minori interni ambitus, & alio differentiæ radiorum, & priſmati, cuius altitudo eadem, & baſis vnum latus differentia eadem ſit, aliud autem differentia peripheriarum.

SIt annulus, vel Cylindrus cauus BGLHA FCIOKDE, quem tamen appellabimus breuiùs CIHA. Dico quod hic æquatur parallelepipedo P T eiuſdem altitudinis P V, ac C B, cuius baſis rectangula R S P Z obtineat latus R P æquale interno circulo IOK, & aliud P Z equale differentiæ K D radij X D maioris à minori X K & inſuper æquari priſmati Q M R S T eiuſdem altitudinis, cuius baſis Q R S conſequatur latus idem R S æquale ipſi differentiæ K D, & aliud Q R æquetur differentiæ ambitus C E D ab ambitu minori I O K peripheriarum.

Quod, vt probetur, fiat priſma QPVYMN, cuius baſis rectangula QVP obtineat latus Q P æquale peripheriæ CED, & latus PV æquale radio X D. Deinde detruncetur ZV æquale



radio X K minori, & per punctum Z agatur planum T Z parallelum baſi MP, & aſſero Z equari peripheriæ I O k.

Probatur autem. Quia peripheria C E D eſt ad peripheriam I O k, vt radius X D ad radium k X. Sed vt X D ad X K, ſic eſt P V ad Z V latera, & vt P V ad Z V latera: Sic Q P ad S Z latera. Ergo C E D peripheria ad I O K peripheriam, ſic latus Q P ad S Z. Sed Q P æquatur ex Theſi peripheriæ C E D. Ergo S Z ex pr. 12. tr. 9. p. 2. peripheriæ I O K. Baſis verò Q P V rectangula ex prop 3, tr. 30. Euc. adanc. æquatur baſi circulo C E D, eo quod latus. P V æquetur radio, & Q P peripheriæ. Ergo etiam rectangula baſis S Z V ex eadem prop. ob eadem rationem equabitur baſi circulo I O K. Ex prop verò 3. tr. 24. æquabuntur C A D B Cylindrus totus ſolidus conſideratus, & priſma N M V; quod ſint Cylindrus, & priſma ſuper equales baſes CED circulum, & Q P V triangulum, ad eamdem altitudinẽ & æquabuntur quoque Cylindrus I O K L H, & priſma Y Z V T ob eandem rationem altitudinis eiuſdem C B, & æqualium baſium IOK circuli & trianguli R VZ: Aufer itaque æqualia iſta duo, Cylindrus I O K G H, & priſma S Z T V, & reſtabunt C I H A annulus ſolidus quadrangulus, Cylindruſque cauus, & corpus Q P T Z æqualia: Age per T planũ T R S parallelum plano N Z, & fiet parallelepipedum

pipedum T P, & priſma Q T. Patet autem ex dictis P Z æquari differentiæ radiorum K D, & Q R periheriarũ differentiæ cũ QP æquetur ex Theſi peripheriæ maiori; & Z S. oſtenſa ſit æqualis peripheriæ minori.

THEOR. III. PROPOS. XXXI.

Cylindrus obliquus eſt inſcriptibilis priſmatibus, pyramidibus, & parallelepipedis in infinitum, Annulus quoque annulis quadriformibus, vel Cylindris conis ſegmento cauatis, vel ſegmentis conorum Cylindris vacuorum in infinitum.

DVas partes habet hæc propoſitio, quas ſingulas oſtendemus, & primò de Cylindris. Cylindrus detur A B C D vt videre potes in fig. 1. prop. 22. ſequenti cuius ſectio obliqua A Z B: At D A maxima linea perpendicularium, B C minima. Secetur verò diameter in quaslibet partes, & per ſectiones agantur plana ſectioni A B C D per axem normalia, & parallela ſectioni D A; nempe G H I N, & L E F Z, & cæt. ducatur, deinde planum A H I D per ſectiones D A, & H I parallelas ex effectione, & planum H G M P parallelũ plano I N D per ſectionem H G. Patet itaque M G H I N D eſſe priſma, quia eſt poſitum normaliter ſuper baſes triangulares, & parallelas N I D, & G H M. Patet quoque M G H A eſſe pyramidem, quia ſuper baſim triangularem M H G in A verticem deſinit.

Ducatur poſtea planum Q H P I parallelum ſectioni per axem C B A D, & L E F Z planum parallelum plano G H I N, vel rectangulum (quod reddit in idem) plano per axem A B D C. Baſis autem O L Q X ſit parallela plano F E N I. Itaque O L N P erit parallelepipedum, vtpote contentum ſuperficiebus parallelis ex effectione ſuper baſim rectangulũ P N vel O L. Quod ſi ducatur planum H Z F I per ſectiones parallelas F Z, & H I erit corpus O Z I F P Q priſma, ſicut H O Q L G X eſt priſma, quod inſideant baſibus triangularibus Z Q O; & L G X, ſintque rectãgula eorum plana F O, & Z P, & Q I in vno, at H L, & X Q, & X H in alio. Quamobrem Z Q O H reſidua erit pyramis, cuius baſis Z O Q vertex H. Tandem Q 4 7 Z 8 erit pyramis baſis quadrangulæ; Si quidem parallelepipedum 6 9 8 4. E P 5 2. eſt minus ob ſinum minorem 25. quam E F Quare relinquit planum P F 87 baſis priſmatis 8 4 5 7. & planum 8 7 Q Z quadrangulum baſis pyramidis 8 Q Z 74. ſicut relinquit priſma Q L 6 9 8 4. Itaque à medio centroq; L ſursùm pyramides, quæ complent priſmata ſunt triangulares, at à centro L deorſum ſunt quadrãgulares quod obſeruãdũ eſt ob ea, quæ poſtea dicemus. Patet vero, quòd in infinitum deſcribi poſſint diuidendo A B in plures, vel plures partes ſubduplas in infinitum Exiſtimamus autem notum, abſq; particulari demonſtratione, partim ex dictis toto libro partim ex animi conceptu, quod quantò magis inſcriptio multiplicatur eò minus reſtet de Cylindro ablato corpore incripto, minorque inter vtrumque relinquatur differentia.

Iam ad edocendam ſecundam partem detur ſemiannulus, cuius ſectio rotunda A T B, vt vides pr. ſequentis fig. 2. cuius ambitus centrum ſit V, & ducatur normalis ab ipſo V K. Diuiſo diametro L in quotlibuerit partes ducantur normales G H; & L T &c. per quas tranſeant ſuperficies Cylindricæ H G N I & F T E I, & cæt. Feratur verò linea per A H vſq; ad normalem V K; & puncto K manente, ipſa feratur per A R D circulum, & ex def. 1. tr. 24. deſcribet conum & H I ſectio in ſuperficie annuli conique erit circulus ex def. 2. tr. 23. quod æquidiſtet baſi A D. Quamobrẽ ſi auferatur Cylindrus G H I N, cuius baſis circulus G R N, remanebit fruſtũ coni G H A D N I ablato Cylindro eiuſdem altitudinis H G R I N Idem dices de cono Y H I, ablato Cylindro Q T P F. De cętero verò quę inſcribentur erunt Cylindri è contra ablatis conis P 8 F T 7 Q erit Cylindri P F T Q.

Sic corpus reſiduũ ablato cono eiuſdẽ baſis F 4 1, E B 9 7 8 1 3 erit reſiduũ Cylindri 8 2 7 9 ablato cono eiuſdem baſis 8 6 7. Patet autem quod Q H L G I P N E inſiſtens ſuper baſim annulum planum L G R S N E ſit annulus quadrangulus; ſicut, & Q L 7 9 1 8 2 E ob ſectiones quadrangulas Q I G H, & 7 9 Q 1. Ex ſtimo autem clarum, & euidens quod hæc inſcriptio poſſit multiplicari in infinitum per ſubduplam diametri diuiſionem ſicùt, & euidens per ſe eſſe ſentio, quòd quantò magis hæc inſcriptio multiplicatur tantò magis abſumat de ipſo annulo. Licet, & breuiter poſſet id probari intelligendo tum de annulo, tum de Cylindro in prima parte propoſ. inſcripto. Nam quò minor eſt portio diametri, eò minor eſt chorda, quo vero hæc eſt minor, eo portio circuli, quam abſcindit minor eſt, & quò hæc eſt minor eò Cylindraceum corpus ſuper ipſam ad eãdem eleuationem erectum minus eſt, quare cũ per continuam inſcriptionem circuli baſeos remaneat ſemper minus reſiduum, ſic & de Cylindro, & de annulo, remanet ſemper minus reſiduum.

THEOR: IV, PROPOS. XXXII,

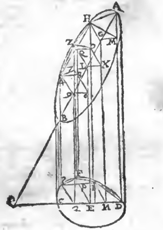
Si ſit Cylindrus obliquus alteri baſi, cuius maxima normalium ſit æqualis maximæ peripheriæ annuli, & minima minimæ: Baſiſque ipſa rectæ ſectioni annuli per vmbelicum, ſeu totius annuli centrum tranſeunti, ſit æqualis circulus, dico Cylindrum annulo eſſe æqualem.

SIt Cylindrus circularis A B C D, cuius baſis obliqua A Z B, recta verò D F C, & hæc æquetur A T B circulo, ſectionique annuli quę ſi continuetur per vmbelicum, & centrũ V tranſeat, Maxima vero linea baſi normalium D A ſit æqualis maximæ peripheriæ A R D annuli, & recta C B æquetur minimæ peripherię B C in annulo. Dico hunc Cylindrum annulo æquari. Licet autem medietas annuli in figura, vt vitetur confuſio repræſentetur, intelligendum tamen eſt de toto & de totis peripherijs.

Pro-

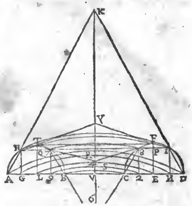
Digitized by Google

Probatur. Inſcribantur enim portiones conorum Cylindro vacuatorum, & conorum Cylindris, annulorumque quadrangulorū, pro vt in precedenti docuimus in annulo. In Cylindro vero cuius altera baſis obliqua A D C B



prismata, pyramides, & parallelepipeda æquealra faciendo; quòd partes diametri D C baſis Cylindri æquentur partibus ſingulæ ſingulis diametri D C ſectionis annuli.

Producta autem A B, & D B in Cylindro, donec conueniant in e, erunt æquales lineis annuli A V, & B V. Siquidem ita eſt A V ad B V radij ex 43. tr. 10. Eucl. adauc. vt A R D ad C S B peripheriæ annuli, vt autem A R D ad C S B peripheriæ eædem, ſic A D ad C B rectas in Cylindro, quod ex Theſi ſint peripherijs æquales: vt autem rectæ eædem D A ad B C, Sic D e ad C e ob parallelas D A, & C B ex 2 tr. 10. Quare ex 16. tr. 9. p. 2. V erit ad B V in annulo, vt A e ad C in Cylindro Quare diuidendo A B erit ad B V in annulo, vt D C ad C e in Cylindro. Sed A B in annulo, & in Cylindro, C D ſunt æquales, Ergo etiam B V, & C e, & additis vtrinque æqualibus diametris erunt e D, & V A æquales, ſed etiam æquales ſunt portiones diametrorum D N & G A ex effectione ergo *componendo* GV & N e ſunt æquales. Quare D N æquat differentiam G A radiorum G V, & A V. Eodem pacto oſtendemus rectam M A æquare differentiam peripheriarum, eo quod N G ęquet peripheriam proximè minorem G R N. Quoniam A R D peripheria eſt ad G R N peripheriam; vt radius A V ad radium G V ex 43. tr. 10, & A V eſt ad G V in annulo vt D e ad N e rectę in Cylindro, & hæ vt recta D A ad N G in eodē. Ergo ex 16. 19. A R D erit ad G R N annuli peripheriæ, vt A D ad G N rectæ Cylindri: ſed D R A peripheria & D A recta sūt æquales ex Theſi. Ergo etiā peripheria G R N in annulo, & N G in Cylindro æquantur Quare M A reſiduum æquatur differentiæ peripheriarum ipſarum. Quare cum priſma D N I M G H pro vno latere D N differentiam ſemidiametrorū, & pro alio obtineat G N ęqualem peripherię minori: & altitudo ſit eadem N I, tum in annulo, tum in Cylindro. Pyramis quoque M A G H habeat baſim ex M A differentia peripheriarum, & M G differentia radiorum, & G H



altitudo eadem, æquabuntur pyramis, & priſma portioni coni A H, D N I vacuatæ Cylindro N I G H ex prop. 29. huius. Siquidem habeat eandem altitudinem, quia H G normalis, & ſemichorda in Cylindro æquatur normali ſemichordæ G H annuli, quòd ſubtendant circulorum æqualium ex Theſi. D F C, & A H B eundem arcum A H ob ſinum verſū A G æqualem ſinui verſo I N, vt poteſt conſtare ex 44. tr. 10. Eucl. adauc.

Ita probabitur de priſmate, pyramideque H Z O Q I P F. quod æquetur Cylindri ſegmento coni vacuo H T Q F I P eadem prorſus ratione. Nā vt H R ad R Q radij, ſic ex 33. tr. 10. peripheria H I ad peripheriam Q P vt autem H R ad R Q ſic N e ad E e; vt autem N e ad E e, ſic recta N G vel ſibi æqualis I H in Cylindro ad L E. vel ſibi ęqualem F Z rectas. Quapropter æquabitur recta F Z, & peripheria Q , ſicut oſtenſum eſt æquari N G rectę G R N vel H peripherię. Ideoque H O recta Cylindri erit æqualis differentię peripheriarum H I, vel æqualis G R N, a P Q vel æquali ſibi Z 4. E. At O Q vel X L differentiæ radiorum L G, vel H Q. Altitudo verò T Q vtrobique æqualis, ablatis ęqualibus E P ab ęqualibus ſemichordis E F. Ergo ex pr. 29. huius priſma O Q P F I; & pyramis O Q Z H æquabuntur portioni coni vacuatę Cylindro Q T H F P I.

Hinc conſtat quoque parallelepipedum X O L Q N I P E, priſmaque Q Z X O G H in Cylindro æquari annulo quadrangulo H Q G L I P E N annuli ex 30. huius cum O H æquetur differentię peripheriarum, at L E minori peripherię, & O Q differentię radiorum & eadem ſit altitudo L Q vtrobique.

Verùm cùm tranſacta medietate inſcriptio annuli incipiat mutare naturam, & 7 Q I P F 8

S 6 non ſit

non ſit fruſtum coni ablato Cylindro; ſed è contra portio Cylindri ablato fruſto coni eiuſdem baſis, ſiquidem iam incipit inuerti conus F 4 T, & Cylindrus F 8 P Q T 7 eſt maior ipſo, & id quod inſcriptum annulo eſt ipſius, extra conum F 4 T remanet. Ideoque æquabitur portio inſcripta Cylindri 7 Q 5 F P 8 ablato fruſto coni eiuſdem baſis æquealto priſmati, cuius baſis continetur differentia radiorum, & latere æquali peripheriæ minori & pyramidi baſis quadratæ, cuius altitudo ſit differentia radiorum, baſis verò contineatur ſub eadem altitudine portionis Cylindri Q T & differentia peripheriarum. Talia verò ſunt duo corpora in Cylindro, priſma nempe 8 4 7 F 5 P, & pyramis 8 7 4 Q Z: Siquidem recta F Z æquatur peripheriæ maiori QP. 5 4 æquatur peripheriæ minori 78 recta 7 Z differentiæ peripheriarum æquatur, recta Q Z vel 87 altitudini Q T portionis prædictæ in annulo, & 84 altitudo pyramidis differentiæ radiorum Q 7 quæ ſingula apertè colliguntur ex dictis.

Si ergo inſcribas in annulo tot portiones annulorum triangularium, nempe conorum Cylindris vacuatorum, vel è contra, nec non & annulos quadrangulos: Sicut etiam Cylindro corpora priſmate, pyramideque conſtantia, & parallelepipeda omnia eiuſdem altitudinis, & numeri, quæ nempe ſubtendant æqualium radiorum æquales differentias, vt A G, & G L in Cylindro; A G, & G L in annulo per ſubduplam diametrorum æqualium diuiſionem, habebimus inſcriptionem continuã æqualium vtrobique corporum numero; & quantitate. Quapropter, ſi multiplicetur vſq; dum relinquant quantitatem omni data minorem, dicent eandem proportionem, quam ipſa corpora, quibus inſcribuntur ex prop. 5. huius. Vnde etiam ipſa corpora inuicem æquabuntur, nimirum Cylindrus; & annulus prædictus.

COROLL. I.

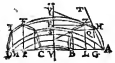
Hinc conſtat annulum ſolidum æquari Cylindro parallelarum baſium; cuius axis ſit L E æqualis peripheriæ mediæ L E in annulo. Quia, & huic ipſi æquatur Cylindrus obliquè ſectus æquans annulum LFDAHB ex pr. 4. huius ſiquidem etiam Cylindrus obliquè ſectus habet axem L E æqualem mediæ peripheriæ L E in annulo, vt diximus in præcedenti.

COOLL. II.

Hinc etiam eſt, quòd ne dum annulus figuræ circularis, ſed cuiuslibet multilateræ figuræ, ſcilicet cuius ſectio per centrum, ſeu vmbelicum producta tranſiens ſit multi laterum quodcunque, æquari Cylindraeco obliquè ſecto, cuius baſim rectam alteram idem multilaterum ſternat, & altitudo maxima circulo maximo minima minimo annuli ſit æqualis, vel Cylindraeco parallelarum baſiũ cuius axis æquetur mediæ peripheriæ, vt ex præced. coroll. deducitur.

COROLL. III.

Elicitur quoque, quòd etiam ſi ſectio non ſit circulus. Sed ellipſis, vel parabola, vel hyperbola, nempe quod annulus ſit figuræ ellipticæ, vel ſemiannulus ſit figuræ parabolicæ hyperbolicæ, idem ſecuturum, vtpotes conſpicere, ſi pro circulo facias parabolam A Z



B in annulo A Z B C F D, & iiſdem caracteribus exornes conſtituaſque ſemicylindrum eiuſdem baſis A Z B. Nam idem prorsùs ſequetur, ſi illi applices demonſtrationem iiſdẽ verbis, Immò ſi ſectio A Z B ſit quæcunque figura flexis conſtans. Sed habens axem, nimitum, quæ per medium in partes ſimiles, & æquales diuidi poſſit, & ex ea in gyrum ducta formetur annulus, idem quoque ſequetur.

COROLL. IV.

Sequitur quoque æquales annulos eſſe; qui habent circulis medijs L E ſectiones per centrum A T B reciprocè proportionales: ita quòd ſit peripheria L E ad peripheriam alterius, vt huius alterius baſis ſeu ſectio ad baſim ſectionemque A T B.

Sequitur etiam eos, qui habent æquales ſectiones per centrum, ſeu vmbilicum eſſe ad inuicem, vt circuli medij. Sicut, & qui habent æquales circulos medios eſſe ad inuicem, vt ſectiones per centrum.

Sequitur inſuper annulos inuicem eſſe in triplicata ratione diametri, vel peripheriæ mediæ, ſi ſint ſimiles. Ratio vnica eſt, quia Cylindri, qui habent annulorum ſectioni per vmbelicum baſes æquales, & ſimiles, & mediæ peripheriæ æquales altitudines, ipſis ſoliditate æquales, tales proprietates obtinent ex prop. 5, 9, 11 & 12. tr. 34. Euc. adaũ. æqualium verò ad æquales eadem proportio eſt.

COROLL. V.

Elicitur quoque quamlibet partem annuli ſuperficiebus Cylindricis abſciſſam, vt eſt A I G D I N ſuperficie Cylindrica G H R N I abſciſſa eſſe æqualem cuilibet parti Cylindri ſuperficie ad axem parallela, vt in D A B C Cylindro ipſius portio G H N I A D, quæ ſuperficie plana G H N I ad eaſdem partes D N

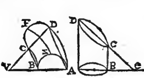
diametri

diametri baſis D F C à centro vmbelicoque V æquidiſtantes abſcindirur, ita vt altitudines GH in vtraque æquentur, & longitudo N G æquetur toti peripheriæ G R N. Ratio eadē quæ eſt propoſitionis, quia in ea parte Cylindri parallelepipeda pyramides, & priſmata inſcribi poſſunt æqualia fruſtris conorū Cylindris vacuatorum, vel è contra, & annulis quadrangulis, pro vt exigit capacitas ſoliditatis, vſq: ad inanitionem vtriuſque. Quare eodem argumento, ſicut æquatur totum, ſic partes æquabuntur. In propoſitione enim oſtendimus quæcunque prędicta corpora Cylindro inſcripta quibuſcunque corporibus prædictis annulo inſcriptis reſpectiuè ęquari dummodo ad eaſdem partes diametri baſis inſiſtant, &c.

THEOR. V. PROPOS. XXXIII.

Partes annuli ſectione baſi Cylindri æquali per vmbelicum ipſius tranſeunte abſciſa æquatur ipſi Cylindro ſcaleno, cuius maxima altitudo ſit æqualis maximo arcui, & minima minimo.

HAec propoſitio eſt quaſi coroll. ex prædicta. Quia enim nedum peripheriæ ſe habent ad inuicem, vt diametri ex prop: 44. & 45. trac. 10. ſed etiam arcus ſimiles euenit quod, ſi CFD ſuperficies ſecans, & BZA vſque ad vmbelicum V feratur, ſit ſubtenſa AD ad ſubtenſam C B vt AV ad B V ex 3. tr. 10. ob linearum C B, D A parallelismum: Quare etiā arcus A D erit ad arcum B C ex 45: eiuſdem,

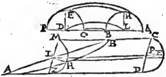


vt chorda ſubtenſa AD ad chordam ſubtenſā C B, & ideo, vt A V ad BV, & hinc intexes idem argumentum vtendo vice peripheriæ maximę arcum maximum ęquantem maximā eleuationem A D Cylindri æqualis A D C B minimum arcum B C in annulo ęquantem minimam altitudinem B C in Cylindro. Nam poſito, quòd ſit in vtroque eadem baſis; & ſectio CFD ſeu circulus, ſeu multilaterum ſimile, & æquale, idem argumentum per omnia militabit, quod adhibuimus propoſ. 22. antecedenti.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Pars externa annuli ſuperficie Cylindrica diuiſa quæ tranſeat per peripheriam mediam ipſius annuli differt ab interna duplici vngula ſolida, quarum baſis ſit circulus ſectionis, & altitudo differentia extima peripheria, vel intima à media.

PRobatur. Nam coroll. 1. prop. 22. obſeruatum eſt annulum ſolidum æquari Cylindro parallelarum baſium, cuius altitudo æquetur medię peripheriæ, & coroll. 5. ſingulas partes Cylindricis ſuperficiebus ad eaſdem partes diametri ſectionis ab vmbelico prodeuntis abſciſas eſſe æquales quibuslibet partibus in Cylindro à ſuperficiebus axi parallelis per eaſdem partes diametri baſeos trāſeuntibus. Quamobrem externa pars annuli



P D E L H A ęquabitur parti, A H L E D P parti altiori Cylindri, & DEC BHL interna pars annuli a ſuperficie DELH Cylindrica diuiſa ęquabitur parti depreſsiori L HB P EC Cylindri a ſuperficie L H P E abſciſa.

Hæc verò vt prop. 4. huius deficit à dimidio Cylindro parallelarum baſium M Z H C E D vngula L H M B, illa ſuperat idem dimidium vngula æquali A L H, hic autem Cylindrus parallelarum baſium M Z H C E D æquat annulum P E C B H A. Cum ergo Cylindri B C D A ſcaleni pars maior A L H P E D extimam annuli portionem LHAPED ęquans hac vngula L A H Z, ſuperet medietatem LH ZPED Cylindri paralleli toti annulo æqualis: pars verò L H B P E C eiuſdem ſcaleni Cylindri intimam annuli portionem æquans minor ſit eadem æquali vngula L M H B medietate L M H P E C eiuſdem paralleli Cylindri. Ergo etiam talis erit pars extima annuli, & ſuperabit Cylindri paralleli ſibi æqualis medietatem vngula eadem A ZLH. Sicut, & intima minor erit medietate eadem paralleli Cylindri eadem vngula vel æquali L M H B. Quamobrem pars annuli extima ſuperabit intimam, duplici vngula; & illa L A H Z quà pars externa ſuperat ſemiCylindrum, & hac M B L H, qua interna deficit à ſemicylindro, & ſic duabus vngulis maior erit.

Patet autem ex dic. prop. 22. huius quòd hę vngulæ obtineant pro baſi ſemicirculum LMH æqualem ſemicirculo P E C per vmbelicum, & altitudo M B ſit differentia inter B C, & LE, ſcilicet inter peripheriam minorem C B in annulo, & peripheriam mediam D L, cui lineæ illę in Cylindro ęquantur.

COROLL.

Digitized by Google

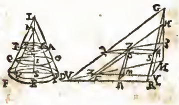
COROLL.

Hinc eſt, quòd cùm cognoſcamus cubationem vngularum ex pr: 44. tt. 34. ſciemus quoque quantitatem, qua pars exterior annuli ſuperat interiorem,

THEOR. VI. PROPOS. XXXV.

Annulus quadrangulus obliquus æquatur parallelepipedo eiuſdem altitudinis cuius baſis ſub differentia radiorum, & peripheria media contineatur.

Sit A BCT DE F annulus quadrangulus, ſed obliquus. Dico quod æquabitur parallelepipedo; quod ſit altitudinis S X, cuius baſis ſub O Q periferia media; & P D differentia radiorum contineatur. Prolungentur duæ ſuperficies interna, & externa huius annuli, & conuenient, cum ſint obliquæ in M, & L, eruntque duo coni paralleli DL F, & P K M; quibus fiant duæ pyramides æquales, vt docui prop. 29. h. NHYZ, & G NRV, eruntq; latera parallela YH, GR, & HZ, GV. Quia enim latus N A ex conſtitutione pyramidis æqualis æquatur radio S F, & N Y radio S k, ſicut latus N V peripheriæ exteriori D E F & N Z interiori P K, Eſtque ex prop. 43. tr. 10. S K radius ad S F radium, vt peripheria PK interna ad peripheriam PE F externã Quare etiam reſpectiuè æquales ita erunt N Y ad N R, vt N Z ad N V, & ſic altitudinibus conorum æquales altitudines pyramidum N H. ad N G, eo quod ſe teterat M S. ad LS. vt S K ad S F ob paralleliſmum linearum M k, & L F. Quamobrem ex 2. tr, 10. erunt H y, GR parallelę, & etiam HZ, G V, & Y Z, R V Quare, & plana per illas acta erunt parallela ex prop. 13: tr: 22. Acto vero plano 352. per N 3 altitudinem annuli quadranguli parallelo baſi N R V efformabitur fruſtum 352. N R V. quod erit æquale fruſto coni ABFD: Siquidem Pyramis R N G V ęquatur ex effectione cono D L F, & ideo pyramis 3G 52. eo modo



quo oſtendimus in contextu propoſ. 19. huius erit æqualis reſiduo cono ALB, Quapropter ablatis æqualibus G 352 pyramide, & LAB cono reſtabunt fruſta 352 NRV; pyramidum & ADBFE conorum ęqualia; Eadem ratione NYZH æquatur ex effectis cono PMk, & ideo pyramis H347 ex contextu prop. 19. huius eſt ęqualis cono C M T. Quadere ablatis æqualibus 3 4 7 H pyramide, & C MT cono, reſtat fruſtum pyramidis N 3 4 7 Y Z æquale fruſto coni CTPK. Quapropter, ſi rurſus hæc fruſta nempe N 3 4 7 Z Y pyramidis à fruſto 3 5 2 N R V, & fruſtum coni CTPK à fruſto coni maiori ABFB annulus quadrangulus A BE FC K, & corpus 4 5 Y Z V 2 reſtabunt ęqualia. Ducatur planum 7 6 m n parallelum plano 45 YR, & fiet parallelepipedum 7 4 n R. Deinde per lineam 7 6 planum 7 6 Z f parallelum lateri GV; & erunt duo priſmata 7 6 m n f Z, & 7 6 Z f 2 V, quorum baſes triangula 6 n f, & Z f V. Hæc autem æquabuntur parallelepipedis ſuper ęqualem baſim, & ad eandem altitudinem erectis ex prop. 17: tr: 35. Baſis autem æqualis obtinetur ex pr. 1. tr. 29. Si fiat rectangulum ex dimidio latere n f ad altitudinem n 6 pro priſmate 7 n f, & ex dimidio f V in altitudinem f Z pro priſmate. 7 2 Z f: Quamobrem, ſi hæc parallelepipeda priſmatibus ęqualia addantur priori parallelepipedo 4 6 Y n, fiet parallelepipedum totum ſuper R n, & dimidiam n f & dimidiam f v, ſcilicet ſuper dimidiam n v. Hæc autem æquat peripheriam O Q. Nam; & ipſa equat totam peripheriam ſuperiorem A B, & dimidiam differentiam inter A B peripheriam ſuperiorem, & D F inferiorem. Quoniam ex effectione L O ęquat L A & A O dimidiam AD, quæ eſt differentia inter L A & L D, ſed vt L D ad L O, ſic eſt S D ad I O radij, & vt S D ad I O radij, ſic D E F peripheria ad O Q peripheriam. Quare ex 12. tr: 9. p. 2. L D erit ad LQ, vt peripheria DEF ad peripheriam O Q, & ita probabis quoque quòd L O ſit ad LA; vt peripheria Q O ad peripheriam B X A. Sed iã vt dixi L O eſt medium Arithmeticum inter LA, & L D, & tantum ſuperat A L quantum deficit ab L D. Ergo talis quoque erit peripheria Q O, & tantùm excedet B X A quantùm minus eſt peripheria D E F. Quadere annulus quadrangulus A B D F C K æquat parallelepipedum ſuper baſim ex O Q peripheria, & A C differentia radiorum ad eandem eleuationem erecta.

COROLL.

Hinc eſt, quod ſi ſuperficies A B F D concipiatur tanquam ſolida, & eiuſdem altitudinis AC, ſit ad hoc parallelepipedum æquatus annulum quadrangulum, vt diameter ad peripheriam. Vnde ſi prop. 38. tr: 30 & 2. tr. 35. intelligatur non de ſuperficiebus mathemathicis, ſed aliqua ſoliditate pollentibus, & veluti cruſtis corporum euidens etiam euadit ex hac propoſ. & maximè, ſi intelligatur de conis ſcalenis. Licet Methaſiſicè intellecta videatur alijs quibuſdam, & precipuè ſequenti contradicere.

FINIS.

A01 1473615

Digitized by Google

H.29.